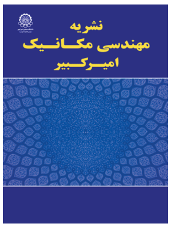


Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(12) (2021) 865-868
DOI: 10.22060/mej.2019.15892.6223

Uncertainty Propagation Analysis in Free Vibration of Uncertain Composite Plate Using Stochastic Finite Element Method

M. Fakoor[1]*, H. Parviz[1], A. Abbasi[2]

[1] Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran.
[2] Institute of Space Transportation System, Iranian Space Research Center, Tehran, Iran.

ABSTRACT: Material uncertainty is more widespread in composite material than the other engineering materials. This uncertainty makes response of these types of structures to be nondeterministic. In order to predict structural reliability, uncertainty in structural responses must be quantified. There is not a reported research in the literature studying free vibration of composite plate with spatially stochastic material properties. In this research, physical and mechanical properties of composite plate including tensile and shear modulus and density of the plate are modeled as stochastic Gaussian fields. Assuming exponential auto covariance kernels for aforementioned stochastic fields, they are discretized to two parts, including deterministic and stochastic parts employing Karhunen-Loeve theorem. Assuming linear form of strains, mechanical strains are defined applying first order shear deformation theory. Kinetic and potential energy of the composite plate is extracted using finite element formulation. Stochastic finite element formulation is derived employing Hamilton's principle and Euler-Lagrange and equations are verified with the results in the literature for deterministic case. After verification of formulation, material uncertainty effects on uncertainty of natural frequencies are investigated using Monte Carlo simulation. Results show that there is a linear relation between coefficient of variation of uncertain properties and coefficient of variation of stochastic natural frequencies. .

Review History:

Received: 28 Feb. 2019
Revised: 10 May. 2019
Accepted: 16 Jun. 2019
Available Online: 25 Jun. 2019

Keywords:

Uncertain composite plate
Stochastic finite element method
Karhunen - Loeve theorem
Monte Carlo method
Free vibration

1- Introduction

Composite structures have been widely replaced by heavy metals in aerospace and other industries because of their special properties. The characteristics such as high specific strength, the appropriate Young modulus are all due to the growing use of these materials in the construction of Aerospace structures and other industries. The features those are all associated with the low density of these materials. The type of process that takes place in the production of these materials (lamination, process of cooking, etc.) as well as the uncertainty arising from exposure of these materials to environmental conditions in the functional life cycle causes the statistical dispersion to increase in properties of these materials relative to other engineering materials. Because of dispersion in the mechanical properties of these materials such as Young's modulus, Poisson's ratio, shear modulus and rigidity, along with the exposing of these structures to thermal and mechanical loadings, the reliability estimation of these structures is a new challenge for the designers of composite structures. There are a lot of researches studying stochastic response of composite structures which can be categorized in two parts containing stochastic static response and stochastic dynamic response of composite structures. In the first category some researches study stochastic response of uncertain composite plate under deterministic loads [1-4] and the others study stochastic buckling of uncertain composite structures [5,6]. There are a lot of researches in the second category which study stochastic free and forced vibration of uncertain composite plates [7-11]. In aforementioned studies uncertainties in material properties are modeled as random parameters. In present study uncertainty propagation in free vibration of composite plate is studied assuming stochastic properties are Gaussian fields.

*Corresponding author's email: mfakoor@ut.ac.ir

2- Methodology

Material properties of composite plate including tensile modulus, shear modulus and density are assumed to be Gaussian stochastic field. Exponential auto-covariance kernels are considered for these stochastic fields as follows:

$$C_{E_{11}} = \sigma_{E_{11}}^2 \exp(-|(x-x')/l_x| - |(y-y')/l_y|) \tag{1}$$

$$C_{G_{12}} = \sigma_{G_{12}}^2 \exp(-|(x-x')/l_x| - |(y-y')/l_y|) \tag{2}$$

$$C_{G_{23}} = \sigma_{G_{23}}^2 \exp(-|(x-x')/l_x| - |(y-y')/l_y|) \tag{3}$$

$$C_{\rho} = \sigma_{\rho}^2 \exp(-|(x-x')/l_x| - |(y-y')/l_y|) \tag{4}$$

In which σ is standard deviation of stochastic variable, x, y are coordinates of the plate, l_x and l_y are correlation length of stochastic field in both direction. These stochastic fields can be decomposed to two parts including stochastic and deterministic parts applying Karhunen-Loeve theorem. For example for tensile modulus with auto-covariance kernel of Eq. (1) if stochastic field be defined in domain of Eq. (5) stochastic field can be decomposed in the form of Eq. (6) as follows:

$$x \in [-a,a], y \in [-b,b] \tag{5}$$

$$E_{11}(x,y,\omega) = \overline{E}_{11} + \sigma_{E_{11}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_{x_i} \lambda_{y_i}} \zeta_i(\omega) \phi_i(x) \phi_i(y) \tag{6}$$

In which is average of tensile modulus over the lamina, and are Eigen values and Eigen vectors of Fredholm Eigen value problem respectively and are standard random variable with zero means and unit variances. This procedure can be found in Ghanem and Spanos book [12].

Deformation fields are defined by assuming first order shear deformation theory as Eq. (7):

$$\begin{aligned} u &= u_\circ + z\varphi_x \\ v &= v_\circ + z\varphi_y \\ w &= w_\circ \end{aligned} \tag{7}$$

Mechanical strains are derived employing definition of linear strains as Eqs. (5) to (12):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(\circ)} \\ \varepsilon_{yy}^{(\circ)} \\ \varepsilon_{xy}^{(\circ)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(\circ)} \\ \gamma_{xz}^{(\circ)} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

$$\left\{ \varepsilon_{xx}^{(\circ)} \quad \varepsilon_{yy}^{(\circ)} \quad \varepsilon_{xy}^{(\circ)} \right\} = \left\{ u_{\circ,x} \quad v_{\circ,y} \quad u_{\circ,y} + v_{\circ,x} \right\} \tag{10}$$

$$\left\{ \varepsilon_{xx}^{(1)} \quad \varepsilon_{yy}^{(1)} \quad \varepsilon_{xy}^{(1)} \right\} = \left\{ \varphi_{x,x} \quad \varphi_{y,y} \quad \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} \right\} \tag{11}$$

$$\left\{ \gamma_{xz}^{(\circ)} \quad \gamma_{yz}^{(\circ)} \right\} = \left\{ \omega_{\circ,x} + \varphi_x \quad \omega_{\circ,y} + \varphi_y \right\} \tag{12}$$

Constitute equation of composite plate can be written as Eqs. (13) and (14):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_m^k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma^0_{yz} \\ \gamma^0_{xz} \end{Bmatrix} \tag{14}$$

Potential and Kinetic energy of the plate can be written as Eqs. (15) and (16) as follows:

$$U_p = \sum_{i=1}^{N\_layer} \frac{1}{2} \int_V \begin{pmatrix} \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \\ K_s\sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + K_s\sigma_{xz}\varepsilon_{xz} \end{pmatrix}_i dV \tag{15}$$

$$T_P = \frac{1}{2} \int_V \rho \left[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right] dV \tag{16}$$

Applying finite element method stochastic equations of motion can be derived using Euler-Lagrange equation as Eq. (17):

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}(t, q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{17}$$

Stochastic discretized equation of motion is extracted in the form of Eq. (18):

$$\begin{aligned} &(\overline{M} + \sum_{i=1}^{n} M_i \zeta_i^{\rho}) \{\ddot{X}\} + \\ &(\overline{K} + \sum_{i=1}^{n} K_i \zeta_i^{E_{11}} + \sum_{i=1}^{n} K_i \zeta_i^{G_{12}} + \sum_{i=1}^{n} K_i \zeta_i^{G_{23}}) \{X\} = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Above equation is solved by generation standard random samples according to Monte Carlo simulation.

3- Results and Discussion

Stochastic free vibration of square composite plates with unit length, [0, 90, 90, 0] stacking sequences and different side to thickness ratios (a/h) are studied here. Average quantity of mechanical properties is presented in Table 1 as follows:

Tensile and shear modulus and density of the lamina are assumed to be stochastic Gaussian fields as Eq. (6).

Three terms in this equation is used to define stochastic fields and these fields are defined symmetrically. Correlation lengths of stochastic fields are equal to two in both directions. Converged results of Coefficient Of Variation (COV) of two first stochastic natural frequencies of plate with different a/h are plotted in Figs. 1 to 3 as follows:

As it can be seen from the above figures there is a linear relation between COV of natural frequencies and COV of random variables. There is a significant variation in natural frequencies due to uncertainty in mechanical properties. Therefore uncertainty in mechanical properties must be considered in order to predict natural frequencies and estimating structural reliability. Natural frequencies of thinner plates are more sensitive with uncertainty propagation in material properties. In order to study uncertainty propagation in each of random variables and its effects on COV of natural frequency, separately a stochastic analysis is done for plate with a/h=10 and results are presented Fig. 3:

Table 1. Properties of investigated lamina

properties	quantity
E_{11} / E_{22}	40
$G_{12} / E_{22} = G_{13} / E_{22}$	0.6
G_{23} / E_{22}	0.5
ν_{12}	0.25
$E_{۲۲}$ (GPa)	6.92

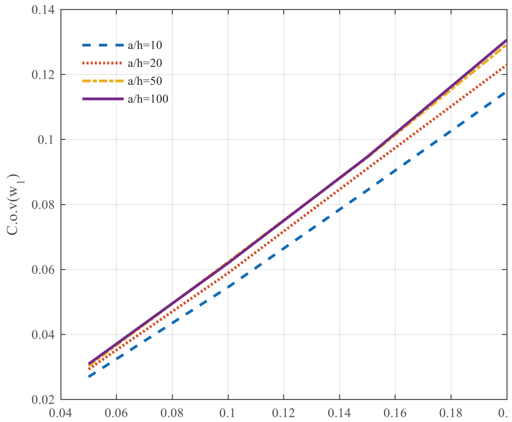


Fig. 1. COV of first natural frequency vs. COV of random variables

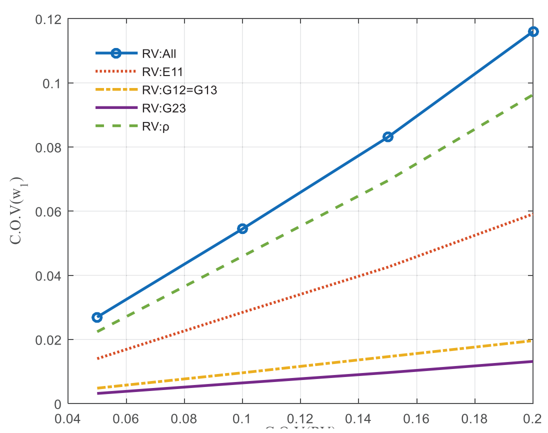


Fig. 3. COV of first natural frequency vs. COV of each random variables, separately

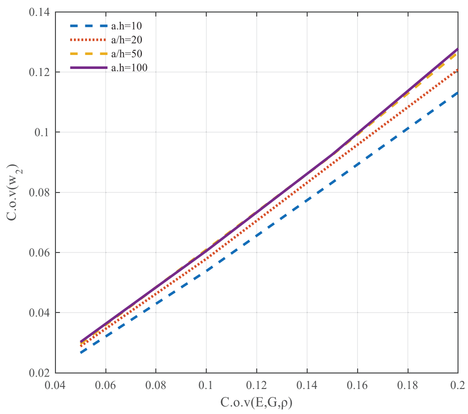


Fig. 2. COV of second natural frequency vs. COV of random variables

It can be seen, uncertainty of density and tensile modulus have the most effects on uncertainty of natural frequency. Also out of plane shear modulus has the minimum effects on uncertainty in natural frequency in comparison to other stochastic variables.

4- Conclusions

Stochastic free vibration of composite plate with spatially stochastic mechanical properties conducted using stochastic finite element method. Results show there is a linear relation between COV of natural frequencies and COV of random variables. Natural frequencies of thinner plates are more sensitive with uncertainty propagation in material properties. Above the stochastic mechanical properties, Density and tensile modulus have the most effects on dispersion of natural frequency.

References

[1] S. Salim, D. Yadav, N.J.M.R.C. Iyengar, Analysis of composite plates with random material characteristics, 20(5) (1993) 405-414.
[2] B. Navaneetha Raj, N. Iyengar, D.J.A.C.M. Yadav, Response of composite plates with random material properties using FEM and Monte Carlo simulation, 7(3) (1998) 219-237.
[3] A.K. Noor, J.H. Starnes Jr, J.M.J.C.S. Peters, Uncertainty analysis of stiffened composite panels, 51(2) (2001) 139-158.
[4] A.K. Noor, J.H. Starnes Jr, J.M.J.C.m.i.a.m. Peters, engineering, Uncertainty analysis of composite structures, 185(2-4) (2000) 413-432.
[5] A. Lal, B. Singh, R.J.C. Kumar, Structures, Effects of random system properties on the thermal buckling analysis of laminated composite plates, 87(17-18) (2009) 1119-1128.
[6] V.K. Verma, B.J.I.J.o.S.S. Singh, Dynamics, Thermal buckling of laminated composite plates with random geometric and material properties, 9(02) (2009) 187-211.
[7] A.K. Onkar, D.J.C.S. Yadav, Forced nonlinear vibration of laminated composite plates with random material properties, 70(3) (2005) 334-342.
[8] B. Singh, A. Bisht, M. Pandit, K.J.J.o.s. Shukla, vibration, Nonlinear free vibration analysis of composite plates with material uncertainties: A Monte Carlo simulation approach, 324(1-2) (2009) 126-138.
[9] M.T. Piovan, J.M. Ramirez, R.J.C.S. Sampaio, Dynamics of thin-walled composite beams: Analysis of parametric uncertainties, 105 (2013) 14-28.
[10] M.K. Pandit, B.N. Singh, A.H.J.J.o.A.E. Sheikh, Stochastic free vibration response of soft core sandwich plates using an improved higher-order zigzag theory, 23(1) (2009) 14-23.
[11] K. Sepahvand, S. Marburg, H.-J.J.J.o.S. Hardtke, Vibration, Stochastic free vibration of orthotropic plates using generalized polynomial chaos expansion, 331(1) (2012) 167-179.
[12] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, Stochastic finite element method: Response statistics, in: Stochastic finite elements: a spectral approach, Springer, 1991, pp. 101-119.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۱۲، سال ۱۳۹۹، صفحات ۳۵۰۳ تا ۳۵۲۰
DOI: 10.22060/mej.2019.15892.6223

تحلیل رشد عدم قطعیت در ارتعاشات آزاد ورق کامپوزیتی نامعین به روش المان محدود تصادفی

مهدی فکور[1*]، هادی پرویز[1]، آرش عباسی[2]

[1] دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران، ایران.
[2] پژوهشکده سامانه‌های حمل‌ونقل فضایی، پژوهشگاه فضایی ایران، تهران، ایران.

خلاصه: به‌منظور پیش‌بینی قابلیت اطمینان سازه‌های کامپوزیتی نیاز است عدم قطعیت در پاسخ‌های استاتیکی و دینامیکی این سازه‌ها کمی‌سازی شود. در تاریخچه موضوعی تحقیقی که در آن خواص ورق کامپوزیتی به صورت میدان تصادفی و نه پارامتر تصادفی مدل‌سازی شده باشد و اثرات آن بر ارتعاشات آزاد ورق مطالعه شده باشد، مشاهده نشد. در این تحقیق خواص فیزیکی و مکانیکی مربوط به ورق کامپوزیتی شامل چگالی، مدول کششی و مدول‌های برشی در ورق به‌صورت یک میدان تصادفی گوسی در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن تابع خودهمبستگی نمایی، میدان تصادفی به روش کارهونن-لاو به دو بخش معین و نامعین تجزیه می‌گردد. با فرض تئوری مرتبه اول برشی و تئوری الاستیک خطی کرنش‌های سیستم تعریف شده است. انرژی پتانسیل و جنبشی با روش المان محدود استخراج شده است. با استخراج معادلات حرکت تصادفی به کمک اصل همیلتون و معادلات اویلر لاگرانژ، فرمولاسیون و روش حل برای حل مسأله معین با نتایج موجود در تاریخچه مقایسه و صحه‌گذاری شده است. اثرات عدم قطعیت در خواص بر میزان عدم قطعیت در فرکانس طبیعی سازه با روش مونت‌کارلو مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد، رابطه‌ای خطی بین ضریب تغییرات خواص فیزیکی و مکانیکی و ضریب تغییرات فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی وجود دارد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۰۹
بازنگری: ۱۳۹۸/۰۲/۲۰
پذیرش: ۱۳۹۸/۰۳/۰۶
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۴/۰۴

کلمات کلیدی:
ورق کامپوزیتی نامعین
روش المان محدود تصادفی
روش کارهونن-لاو
روش مونت‌کارلو
ارتعاشات آزاد

۱- مقدمه

سازه‌های کامپوزیتی امروزه به دلیل خواص ویژه‌ای که دارند، به‌طور گسترده جایگزین فلزات سنگین‌وزن در صنایع هوافضا و دیگر صنایع شده‌اند. ویژگی‌هایی مانند استحکام ویژه‌ی بالا، مدول یانگ ویژه‌ی مناسب همگی دلیلی بر استفاده روزافزون از این مواد در ساخت سازه‌های هوافضایی و دیگر صنایع است. ویژگی‌هایی که همگی مرتبط با چگالی پایین این مواد هستند. نوع فرایندی که در تولید این مواد طی می‌شود (لایه‌چینی، فرایند پخت و...) و همچنین عدم قطعیت ناشی از قرارگیری این مواد در شرایط محیطی در سیکل عمر کارکردی، باعث می‌شود پراکندگی آماری در خواص این نوع مواد نسبت به دیگر مواد مهندسی افزایش یابد. پراکندگی در خواص مکانیکی این مواد مانند مدول یانگ، ضریب پواسون، مدول برشی و خواص استحکامی و همچنین پارامترهای هندسی مانند زاویه‌ی الیاف و ضخامت نهایی، به همراه قرارگیری این سازه‌ها در معرض بارگذاری‌های تصادفی حرارتی و مکانیکی، سبب می‌شود محاسبه‌ی قابلیت اطمینان این سازه‌ها چالش جدیدی برای طراحان سازه‌های کامپوزیتی باشد.

در تاریخچه تحقیقات زیادی بر مطالعه‌ی ورق‌های دارای عدم قطعیت متمرکز است. ازجمله تفاوت‌هایی که این تحقیقات را از یکدیگر متمایز می‌سازد، نوع آنالیز (استاتیک، دینامیک)، پارامترهای دارای عدم قطعیت، رفتار مکانیکی ورق (خطی و غیرخطی)، شرایط مرزی و نوع مدل‌سازی عدم قطعیت است. درزمینه‌ی تحقیقاتی که ورق‌های کامپوزیتی نامعین را در حالت استاتیک بررسی کرده‌اند، می‌توان به تحقیق سلیم و همکاران [۱] اشاره کرد. در این تحقیق آنالیز عدم قطعیت ورق کامپوزیتی مستطیلی تک لایه و سه لایه به روش نیمه‌تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق خواص مواد مانند مدول یانگ و ضریب پواسون به‌صورت تصادفی فرض شده است. توزیع احتمال این پارامترها نیز گوسی فرض شده است. روند حل بدین‌صورت است که ماتریس سفتی حول مقدار میانگین، به کمک فرم خطی سری تیلور بسط داده شده است. نتایج مربوط به میانگین و همچنین انحراف معیار پاسخ نقطه‌ی وسط ورق به‌عنوان نتیجه‌ی تحقیق

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mfakoor@ut.ac.ir

ارائه شده است. راج[1] و همکاران [۲] ورق کامپوزیتی گرافیت اپوکسی دارای خواص نامعین تحت بارگذاری معین استاتیکی را به کمک روش المان محدود آنالیز نمودند. خواص مکانیکی مواد دارای عدم قطعیت است. توزیع گوسی برای این پارامترها در نظر گرفته شده است. روش شبیه‌سازی در فضای احتمال روش مونت‌کارلوی کلاسیک است. نور[2] و همکاران [۳ و ۴] تحقیقی درزمینه‌ی بررسی عدم قطعیت‌های مربوط به خواص و هندسه در استوانه‌های کامپوزیتی تقویت‌شده به‌وسیله‌ی استرینگر و دارای گشودگی را تحت بارگذاری فشار همگن بررسی نمودند در این تحقیق کمی سازی عدم قطعیت بر پایه‌ی روش امکان رخداد پیشامد است. حل مسأله به کمک روش اجزاء محدود صورت گرفته است. آنتونیو[3] و همکاران [۵] (۲۰۰۷) فرمولاسیونی به‌منظور بررسی رشد عدم قطعیت در خواص ورق‌های کامپوزیتی و بررسی این اثرات بر پاسخ سازه‌های نامعین به بارگذاری معین ارائه کرده‌اند نمونه‌ی مورد بررسی یک ربع پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری نیروی معین است. مدول یانگ به‌صورت پارامتر تصادفی در نظر گرفته شده است و همچنین آنالیز حساسیت نسبت به زاویه‌ی الیاف نیز صورت پذیرفته است. گیاتری[4] و همکاران [۶] اثرات وجود ترک در دامنه‌ی رزین و همچنین عدم قطعیت خواص در پاسخ تیر و ورق کامپوزیتی تحت بارگذاری استاتیک را بررسی نموده‌اند. روش مورداستفاده برای حل معادلات، روش اجزاء محدود است. مدل‌سازی کمیت‌های دارای عدم قطعیت به‌وسیله‌ی روش مونت‌کارلو صورت گرفته است. نتایج نشان می‌دهد به‌منظور تخمین احتمالاتی خرابی در این سازه‌ها (به‌وسیله‌ی آزمون) اثرات عدم قطعیت می‌بایست مدنظر قرار گیرند. لین[5] [۷] آنالیز کمانش ورق‌های کامپوزیتی را تحت پیش بار نامعین بررسی نمود. مدل‌سازی معادلات و حل آن به کمک روش المان محدود صورت پذیرفته است. شبیه‌سازی در فضای احتمال به کمک روش مونت‌کارلو انجام شده است. درنهایت قابلیت اطمینان ورق نسبت به رخداد کمانش، استخراج شده است. لل[6] و همکاران [۸] (۲۰۰۹) آنالیز کمانش حرارتی ورق‌های کامپوزیتی با عدم قطعیت در خواص را بررسی نمودند. خواص مواد مانند مدول یانگ، ضریب انبساط حرارتی و ضخامت لایه چینی کامپوزیتی به‌عنوان پارامترهای نامعین در نظر گرفته شده‌اند. حل مسأله به کمک روش اجزاء محدود صورت پذیرفته است. به‌منظور بررسی عدم قطعیت در روند حل از روش اختلالات مرتبه اول (تیلور خطی) کمک گرفته شده است. ورما[7] و سینگ[8] [۹] تحقیق مشابهی را درزمینه‌ی آنالیز کمانش حرارتی بر ورق‌های کامپوزیتی گرافیت اپوکسی باوجود عدم قطعیت در خواص و هندسه برای ورق‌های مستطیلی انجام داده‌اند. در این تحقیق حساسیت بار حرارتی بحرانی نسبت به تغییرات در خواص نامعین در شرایط مختلف هندسی و بارگذاری بررسی شده است. پاوار[9] و همکاران [۱۰] اثرات عدم قطعیت در خواص لایه‌های کامپوزیتی را در پاسخ تیرهای جداره نازک تحت بارگذاری استاتیک مورد بررسی قراردادند. در این تحقیق پارامترهای نامعین بر پایه روش امکان رخداد و به کمک فازی سازی پارامترهای نامعین کمی‌سازی شده‌اند. برای حل معادلات حاکم بر سازه تحت بارگذاری از روش المان محدود بهره گرفته شده است. سینگ و همکاران [۱۱] کمانش ورق کامپوزیتی را با در نظر گرفتن عدم قطعیت در خواص لایه‌ی کامپوزیتی را بررسی نمودند. در حل از سه تئوری، کلاسیک، مرتبه اول برشی و مراتب بالای برشی بهره گرفته شده است. روش حل به‌صورت نیمه‌تحلیلی است. درواقع جابجایی به‌وسیله‌ی توابع مشخص پایه بسط داده شده است. به‌منظور شبیه‌سازی در فضای احتمال از روش اختلالات بهره گرفته شده است. ساسیکومار[10] و همکاران [۱۲] سازه‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری استاتیک را با عدم قطعیت‌های غیر گوسی در خواص مواد را بررسی نمودند. در این تحقیق با استفاده از روش المان محدود معادلات سیستم حل شده است. روش شبیه‌سازی در فضای احتمال مونت‌کارلو است. توزیع احتمال غیر گوسی مربوط به پارامترهای نامعین (خواص مواد) به‌وسیله آزمایش مشخص شده است. درنهایت احتمال شکست قطعه باهدف استخراج قابلیت اطمینان سازه‌ای استخراج شده است. رفیعی و همکاران [۱۳] تخریب لایه اول و همچنین تخریب نهایی لوله‌های کامپوزیتی (الیاف شیشه، رزین پلی‌استر) رشته پیچی شده را تحت بارگذاری فشار داخلی بررسی نمودند. در این تحقیق از فرمول‌های تحلیلی موجود در استخراج تنش استفاده شده است. روش شبیه‌سازی در فضای احتمالات، مونت‌کارلو است. پارامترهای تصادفی در نظر گرفته‌شده شامل زاویه‌ی پیچش الیاف (درروش رشته پیچی) و همچنین نسبت حجمی به‌عنوان پارامترهای مستعد داشتن عدم قطعیت در فرایند ساخت، می‌باشند. درنهایت با توجه ممان‌های آماری استخراج‌شده، توزیع ویبول برای فشار تخریب نهایی پیشنهاد شده است.

تحقیقات زیادی نیز بر مطالعه عدم قطعیت در ارتعاشات ورق‌های

1 Raj
2 Noor
3 António
4 Gayathri
5 Lin
6 Lal
7 Verma
8 Singh
9 Pawar
10 Sasikumar

کامپوزیتی متمرکز است. در تحقیق آنکار[1] و یاداو[2] [۱۴] با در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی کرنش‌های ون-کارمن و همچنین در نظر گرفتن عدم قطعیت در مدول یانگ، اثرات این عدم قطعیت در انحراف معیار فرکانس غیرخطی ورق کامپوزیتی با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها بررسی شده است. در حل مسأله از روش نیمه‌تحلیلی مودهای فرضی بهره گرفته شده است. در تحقیق سینگ و همکاران [۱۵] با در نظر گرفتن تئوری مرتبه اول برشی در ورق‌ها و همچنین بهره‌گیری از روش اجزاء محدود، تحقیق آنکار و یاداو با در نظر گرفتن تئوری‌های مرتبه اول و دوم برشی در ورق‌ها شکل کامل‌تری به خود گرفته است. برای بررسی اثرات عدم قطعیت نیز به کمک روش مونت‌کارلو از نمونه‌های تصادفی استفاده شده است. پیوان[3] و همکاران [۱۶] دینامیک تیرهای استوانه‌ای جداره نازک با در نظر گرفتن عدم قطعیت را بررسی نمودند. پاندیت[4] و همکاران [۱۷] آنالیز فرکانس طبیعی هیئت‌رئیسه‌های ساندویچی با هسته‌ی نرم را با لحاظ کردن عدم قطعیت در خواص مکانیکی لایه‌های کامپوزیتی بررسی نمودند. تحقیق دی[5] و همکاران [۱۸] بر مخروط‌های کامپوزیتی نامعین از دیگر تحقیقات ارائه‌شده درزمینه‌ی ارتعاش آزاد سازه‌های کامپوزیتی نامعین است. در این تحقیق تحلیل فرکانسی مخروط کامپوزیتی با سرعت زاویه‌ای تصادفی به همراه خواص مکانیکی تصادفی صورت پذیرفته است. در یکی دیگر از تحقیقات دی و همکاران [۱۹] رشد عدم قطعیت در فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی به همراه درجه حرارت تصادفی مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مکانیکی به همراه درجه حرارت ثانویه ورق به‌عنوان پارامترهای تصادفی در نظر گرفته شده است. لل و همکاران [۲۲-۲۰] ارتعاشات غیرخطی آزاد ورق‌های کامپوزیتی بر بستر الاستیک را با در نظر گرفتن عدم قطعیت در خواص مواد بررسی نمودند. به‌منظور استخراج فرکانس‌ها طبیعی از روش اختلالات[6] بهره گرفته شده است. سپهوند و ماربرگ[7] [۲۳] مدلی برای کمی سازی عدم قطعیت در رفتار دمپرهای ویسکوالاستیک ارائه کرده‌اند. در این تحقیق به‌منظور کمی‌سازی رفتار دمپر و همچنین استفاده از روش پارامتری، نسبت مدول اتلافی به مدول برشی (ضریب اتلاف) به‌عنوان کمیت تصادفی در نظر گرفته شده است. ادهیکاری[8] و فانی[9] [۲۴] روش ماتریس ویشارت را به‌منظور مدل‌سازی عدم قطعیت در سازه‌ها به‌وسیله‌ی آزمون ارتعاش صحه‌گذاری نمودند. ادهیکاری [۲۵] روش جدیدی را به‌منظور استخراج متامدل[10] در آنالیز تصادفی ورق‌های کامپوزیتی به کار گرفته‌اند. در این تحقیق ورق کامپوزیتی با خواص مکانیکی و همچنین هندسی نامعین مورد بررسی قرار گرفته است. مورگان[11] و همکاران [۲۶] آنالیز آیروالاستیسیته غیرخطی پره‌ی بالگرد را با در نظر گرفتن خواص مواد، سرعت چرخش و سفتی مربوط به هر سطح مقطع به‌صورت نامعین بررسی نمودند. مورگان و همکاران [۲۷] تحقیق پیشین خود را با در نظر گرفتن خواص مواد به‌صورت میدان تصادفی تکمیل نمودند. شاکر[12] و همکاران [۲۸] قابلیت اطمینان ورق‌های کامپوزیتی را با در نظر گرفتن خواص نامعین بررسی نمودند. پارامترهای تصادفی شامل مدول یانگ، مدول برشی، ضریب پواسون و زاویه‌ی الیاف است. به کمک روش بسط تیلور مرتبه اول از ماتریس سفتی در روش اجزاء محدود، آنالیز حساسیت در فرکانس طبیعی سیستم صورت گرفته است. سپهوند و همکاران [۲۹ و ۳۰] اثرات عدم قطعیت در خواص مکانیکی ورق کامپوزیتی را بر فرکانس طبیعی و توان آکوستیکی منعکس‌شده از آن را با وجود عدم قطعیت بررسی نمودند. اومش[13] و گانگولی[14] [۳۱] اثرات عدم قطعیت در پاسخ ارتعاشات ورق کامپوزیتی کنترل‌شده توسط مواد پیزوالکتریک را بررسی نمودند. در این تحقیق از روش المان محدود برای حل معادلات استفاده شده است. به‌منظور مدل‌سازی کمیت‌های دارای عدم قطعیت (خواص مواد) از بسط آشوب چندجمله‌ای استفاده شده است. نتایج به کمک روش مونت‌کارلو صحه‌گذاری شده است. همان‌طور که از مطالعه مراجع فوق پیداست مطالعه ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیتی محدود به در نظر گرفتن خواص به‌صورت پارامتر تصادفی است. در این تحقیق خواص فیزیکی و مکانیکی به‌صورت میدان تصادفی در نظر گرفته می‌شود (تابع مختصات) و به کمک بسط کارهونن-لاو میدان تصادفی گسسته سازی می‌شود و پاسخ‌ها در فضای احتمالاتی مطالعه می‌شوند.

۲- بیان مسأله

بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیتی نامعین، می‌تواند در پیش‌بینی رفتار دینامیکی این نوع سازه‌ها با اثرگذاری بر تابع پاسخ فرکانسی راهگشا باشد. در این تحقیق به بررسی ارتعاشات آزاد این نوع ورق‌ها پرداخته می‌شود.

1 Onkar
2 Yadav
3 Piovan
4 Pandit
5 Dey
6 perturbation
7 Marburg
8 Adhikari
9 Phani
10 metamodel
11 Murugan
12 Shaker
13 Umesh
14 Ganguli

خواص مربوط به سازه کامپوزیتی شامل مدول در جهت الیاف و عمود بر آن و مدول‌های برشی، به‌صورت یک میدان تصادفی در نظر گرفته می‌شود و نه پارامتر تصادفی این موضوع در تحقیق سیریرامولا[1] و چریسانتوپولوس[2] [۳۲] بررسی شده است. منشأ عدم قطعیت در خواص می‌تواند شامل نسبت حجمی الیاف نسبت به رزین، جهت‌گیری الیاف و عدم قطعیت ناشی از ایده آل نبودن فرایند پخت باشد. متغیرهای تصادفی شامل مدول‌های کششی و مدول‌های برشی و چگالی ورق می‌باشند. تابع خودهمبستگی در نظر گرفته شده برای میدان تصادفی از نوع نمایی است. شکل ورق مربعی مطابق شکل ۱ فرض می‌شود که در آن x و y جهت مختصات کلی و X و Y جهات الیاف و عمود بر آن را نشان می‌دهد. با فرض شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در چهار ضلع ورق، ضریب تغییرات سه فرکانس طبیعی نخست به ازا ضرایب تغییرات مختلف خواص تصادفی استخراج شده و حساسیت ضریب تغییرات فرکانس‌های طبیعی برای ضخامت‌های مختلف ورق مطالعه می‌شود.

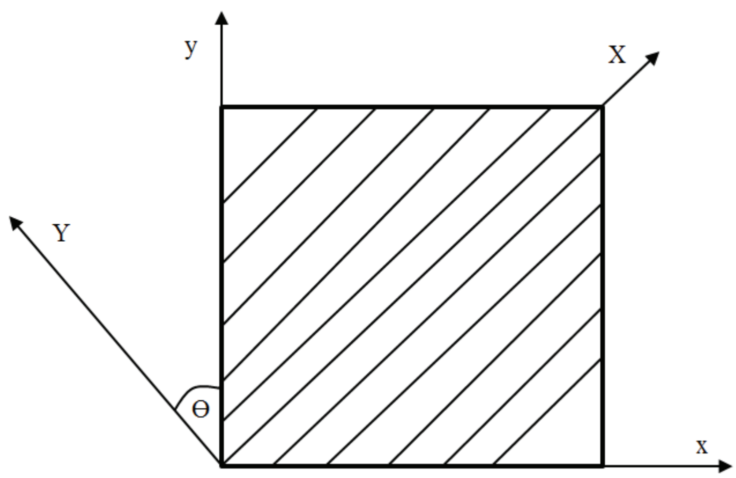
۳- معادلات ساختاری

مدول یانگ و مدول‌های برشی و چگالی به‌صورت یک میدان تصادفی گوسی در نظر گرفته می‌شود. ضرایب پواسون بزرگ و کوچک به‌صورت معین فرض می‌شود. گسسته سازی میدان تصادفی به کمک بسط کارهونن – لاو صورت می‌گیرد.

با بکارگیری روش المان محدود و فرض تئوری مرتبه اول برشی، معادلات حرکت تصادفی به کمک معادلات اویلر – لاگرانژ صورت می‌گیرد. با استخراج ماتریس سختی و ماتریس جرم تصادفی، با به‌کارگیری روش مونت‌کارلو، خواص آماری فرکانس طبیعی اول تا سوم استخراج می‌شود. تغییرات انحراف معیار فرکانس طبیعی با تغییرات انحراف معیار خواص نامعین مطالعه می‌شود.

خواص در نظر گرفته شده برای تک لایه کامپوزیتی به‌صورت یک میدان تصادفی در نظر گرفته می‌شود. خواص نامعین و تصادفی شامل مدول‌های کششی، مدول‌های برشی و چگالی است. ضرایب پواسون (کوچک و بزرگ) به‌صورت معین فرض می‌شوند. اتوکواریانس میدان تصادفی در نظر گرفته شده برای خواص نامعین دارای هسته نمایی است. این نوع هسته‌ها به‌صورت رایج در مباحث قابلیت اطمینان سازه‌ها کاربرد دارند. تحقیقی نیز در این زمینه توسط صورت گرفته است که نمایی بودن تابع اتوکواریانس را تأیید می‌نماید [۳۲]. هسته‌های در نظر گرفته شده برای متغیرهای تصادفی به ترتیب در رابطه‌های (۱) تا (۴) استخراج شده است [۳۲]. توجه شود که با توجه به فرضیات رابطه (۵) نیاز به تعریف چهار اتوکواریانس فوق‌الذکر وجود دارد.

$$C_{E_{11}} = \sigma_{E_{11}}^2 \exp(-\left|(x-x')/l_x\right| - \left|(y-y')/l_y\right|) \qquad (۱)$$



شکل ۱: شماتیک ورق کامپوزیتی

Fig. 1. Schematic of composite plate

1 Sriramula
2 Chryssanthopoulos

$$C_{G_{12}} = \sigma_{G_{12}}^2 \exp(-\left|(x - x')/l_x\right| - \left|(y - y')/l_y\right|) \quad (۲)$$

$$C_{G_{23}} = \sigma_{G_{23}}^2 \exp(-\left|(x - x')/l_x\right| - \left|(y - y')/l_y\right|) \quad (۳)$$

$$C_{\rho} = \sigma_{\rho}^2 \exp(-\left|(x - x')/l_x\right| - \left|(y - y')/l_y\right|) \quad (۴)$$

$$\frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad G_{12} = G_{13} \quad (۵)$$

که در آن C کرنل در نظر گرفته شده برای تابع خود ارتباطی، l_x و l_y طول ارتباط در جهات طول و عرض و σ انحراف معیار متغیر موردنظر است. با تعریف اتوکواریانس مربوط به خواص نامعین بسط کارهونن-لاو به‌منظور گسسته سازی میدان تصادفی پیوسته مربوط به کمیت‌های تصادفی بکار گرفته می‌شود. به‌عنوان نمونه اگر میدان تصادفی مدول در جهت الیاف روی بازه رابطه (۶) تعریف گردد، این میدان به روش کارهونن - لاو مطابق رابطه (۷) بر اساس بسط حاصل‌ضرب مقادیر ویژه و توابع ویژه و همچنین متغیرهای تصادفی استاندارد قابل تعریف است [۳۳].

$$x \in [-a,a], y \in [-b,b] \quad (۶)$$

$$E_{11}(x,y,\omega) = \overline{E}_{11} + \sigma_{E_{11}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_{x_i}\lambda_{y_i}}\, \zeta_i(\omega)\phi_i(x)\phi_i(y) \quad (۷)$$

به‌منظور استخراج مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در بسط کارهونن - لاو برای مسأله دارای اتوکواریانس نمایی (رابطه‌های (۱) تا (۴)) از رابطه‌های (۸) تا (۱۰) بسته به طول خود ارتباطی تابع اتوکواریانس در جهات مختلف استفاده می‌شود این روند به‌تفصیل در مرجع [۳۳] شرح داده شده است.

$$\begin{cases} c - \omega_i \tan(\omega_i d) = 0 & i: odd \\ \omega_i + c\tan(\omega_i d) = 0 & i: even \end{cases}, \quad c = 1/l_x, 1/l_y \quad d = a,b \quad (۸)$$

$$\lambda_z = \frac{2c}{\omega_z^2 + c^2}, \lambda_z = \lambda_{x_i}, \lambda_{y_i} \quad (۹)$$

$$\phi_i(v) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\omega_i v)}{\sqrt{a + \sin(2\omega_i a)/2\omega_i}} & \text{for } i: \text{odd} \\ \dfrac{\sin(\omega_i v)}{\sqrt{a - \sin(2\omega_i a)/2\omega_i}} & \text{for } i: \text{even} \end{cases}, v = x, y \quad (۱۰)$$

به‌منظور استخراج معادلات حرکت نیاز است میدان جابجایی تعریف شود. میدان جابجایی برای ورق در نظر گرفته‌شده، با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی به‌صورت رابطه (۱۱) با استفاده از جابجایی نقاط وسط ورق در جهات مختلف تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} u &= u_\circ + z\varphi_x \\ v &= v_\circ + z\varphi_y \\ w &= w_\circ \end{aligned} \quad (۱۱)$$

که در آن u_0، v_0 و w_0 جابجایی‌های نقاط میانی ورق در جهات طول (x)، عرض (y) و ضخامت مطابق شکل ۱ است. با استفاده از تعاریف خطی کرنش و با فرض جابجایی‌های کوچک با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی، کرنش‌های خطی مطابق رابطه‌های (۱۲) تا (۱۶) قابل استخراجاند [۳۴].

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(\circ)} \\ \varepsilon_{yy}^{(\circ)} \\ \varepsilon_{xy}^{(\circ)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (۱۲)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(\circ)} \\ \gamma_{xz}^{(\circ)} \end{Bmatrix} \quad (۱۳)$$

$$\left\{\varepsilon_{xx}^{(\circ)} \quad \varepsilon_{yy}^{(\circ)} \quad \varepsilon_{xy}^{(\circ)}\right\} = \left\{u_{\circ,x} \quad v_{\circ,y} \quad u_{\circ,y} + v_{\circ,x}\right\} \quad (۱۴)$$

$$\left\{\varepsilon_{xx}^{(1)} \quad \varepsilon_{yy}^{(1)} \quad \varepsilon_{xy}^{(1)}\right\} = \left\{\varphi_{x,x} \quad \varphi_{y,y} \quad \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}\right\} \quad (۱۵)$$

$$\left\{\gamma_{xz}^{(\circ)} \quad \gamma_{yz}^{(\circ)}\right\} = \left\{\omega_{\circ,x} + \phi_x \quad \omega_{\circ,y} + \phi_y\right\} \quad (۱۶)$$

که در آن ε و γ به ترتیب کرنش درون و برون صفحه‌ای است که نوع آن با توجه به اندیس، مشخص شده است. بالا اندیس صفر و ۱ مجزا کننده کرنش‌های ناشی از جابجایی صفحه‌ی میانی ورق و کرنش‌های ناشی از دوران است. با فرض اینکه ماده دارای رفتار الاستیک خطی باشد، انرژی کرنشی با استفاده از رابطه (۱۷) با جمع انرژی پتانسیل لایه‌های مختلف

ورق تعریف می‌گردد.

$$U_p = \sum_{i=1}^{N.layer} \frac{1}{2} \int_V \begin{matrix} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} \\ +K_s\sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + K_s\sigma_{xz}\varepsilon_{xz})_i \end{matrix} dV \tag{۱۷}$$

در این معادله تعداد لایه‌ها با $N.layer$ نشان داده شده و ضریب تصحیح برشی معادل $\frac{5}{6}$ لحاظ می‌شود. انرژی جنبشی کل ورق با در نظر گرفتن اثرات حرکت انتقالی و اینرسی دورانی توسط رابطه (۱۸) به دست می‌آید.

$$T_P = \sum_{i=1}^{Nlayer} \frac{1}{2} \int_V \rho \left[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right] dV \tag{۱۸}$$

با جایگذاری میدان جابجایی رابطه (۱۱) در رابطه (۱۸) انرژی جنبشی مطابق رابطه (۱۹) قابل استخراج است.

$$T_P = \sum_{i=1}^{N.layer} \begin{matrix} \frac{1}{2} \int_V (I_\circ \left[\dot{u}_\circ^2 + \dot{v}_\circ^2 + \dot{w}_\circ^2 \right] \\ +I_1 \left[2\dot{\phi}_x \dot{u}_\circ + 2\dot{v}_\circ \dot{\phi}_y \right] + I_2 \left[\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2 \right] dx\, dy \end{matrix} \tag{۱۹}$$

که در آن ممان‌های اینرسی مطابق رابطه (۲۰) قابل استخراج است.

$$I_\circ = \int_{-h/2}^{h/2} \rho\, dz, \quad I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} z\, \rho\, dz, \quad I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \rho\, dz, \tag{۲۰}$$

المان‌های ماتریس سفتی در دستگاه اصلی فیبر و ماتریس برای یک کامپوزیت مطابق رابطه (۲۱) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} & Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\ Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ & Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ & Q_{66} = G_{12},\ Q_{44} = G_{23},\ Q_{55} = G_{13} \end{aligned} \tag{۲۱}$$

معادله ساختاری یک لایه‌ی کامپوزیتی (لایه k) مطابق رابطه‌های (۲۲) و (۲۳) قابل استخراج است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_m^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۲۲}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_m^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma^0{}_{yz} \\ \gamma^0{}_{xz} \end{Bmatrix} \tag{۲۳}$$

در معادلات فوق بسته به اینکه لایه چینی نسبت به چه زاویه‌ای نسبت به دستگاه مختصات اصلی قرار داشته باشد، مقادیر درایه‌های ماتریس سختی دستگاه دوران یافته استخراج می‌گردد. توجه شود که برای هر لایه نیاز است ماتریس سختی تحت دوران استخراج شود.

۴- استخراج معادلات حرکت

با توجه به تعاریف انتگرالی انرژی جنبشی و انرژی کرنشی در بخش قبل، از اصل همیلتون توسعه‌یافته مطابق رابطه (۲۴)، به‌منظور دستیابی به معادلات دیفرانسیل حاکم استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U_p)\, dt = \circ \\ & H = \int_{t_1}^{t_2} \pounds\, dt \\ & \pounds = T - U_p \end{aligned} \tag{۲۴}$$

بدین ترتیب که با استخراج انرژی پتانسیل و جنبشی با قرار دادن در رابطه (۲۴) لاگرانژین سیستم محاسبه و با استفاده از فرمول اویلر – لاگرانژ مطابق رابطه (۲۵) معادله حاکم بر سیستم استخراج می‌شود.

$$\frac{\partial \pounds}{\partial q_i}(t, q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \pounds}{\partial \dot{q}_i}(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0 \quad i = 1, \ldots, n \tag{۲۵}$$

به‌منظور حل معادلات، روش المان محدود مورداستفاده قرار گرفته است. بدین منظور از المان ایزوپارامتریک (سرندیپیتی[1]) ۸ گره‌ای استفاده شده است. میدان جابجایی با در نظر گرفتن تعریف رابطه (۱۱) برای پنج درجه آزادی موجود به‌صورت رابطه (۲۶) بسط داده می‌شود.

1 Serendipity

$$\{\Lambda\}=\sum_{i=1}^{NN}N_i(\eta,\xi)\{\Lambda\}_i \qquad (۲۶)$$

تعداد گره المان در اینجا ۸ لحاظ می‌شود، تابع درون‌یابی ایزوپارامتریک مطابق رابطه (۲۷) تعریف می‌شود.

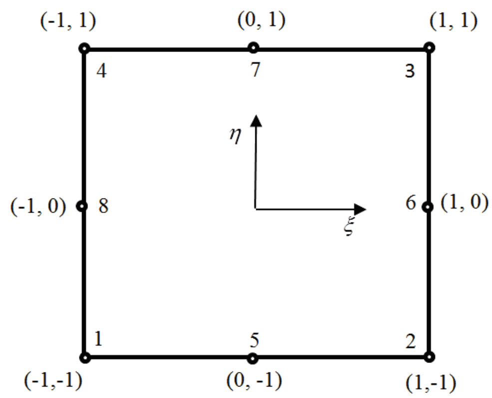
$$N_j=\frac{1}{4}(1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta)(\xi_j\xi+\eta_j\eta-1)\ ,\ j=1,2,3,4 \qquad (۲۷)$$

که در آن ξ و η متغیرهای مختصات طبیعی هستند. در فرمول فوق متغیرهای دارای اندیس باید مقداردهی شوند. شماره متناظر هر گره در فرمول فوق متناظر با شماره‌های گره در شکل ۲ هستند.

با قرار دادن خواص نامعین (رابطه (۲۰)) (پس از دوران برای لایه‌های دوران یافته) و همچنین میدان جابجایی مفروض (رابطه (۲۶)) در رابطه‌های انرژی (۷) و (۸) و استفاده از رابطه (۲۵) معادلات حرکت به فرم رابطه (۲۸) برای یک المان قابل استخراج است.

$$(\bar{M}+\sum_{i=1}^{n}M_i\zeta_i^{\rho})\{\ddot{X}\}+(\bar{K}+\sum_{i=1}^{n}K_i\zeta_i^{E_{11}}+\sum_{i=1}^{n}K_i\zeta_i^{G_{12}}+\sum_{i=1}^{n}K_i\zeta_i^{G_{23}})\{X\}=0 \qquad (۲۸)$$

$\bar{M}$ و $\bar{K}$ ماتریس جرم و سختی میانگین هستند و ξ متغیر احتمالاتی مربوط به هر متغیر تصادفی در بسط رابطه (۲۰) است. این رابطه با طی فرایند اسمبلینگ معادلات کلی را نتیجه می‌دهد. در این معادله یک بسط ماتریسی



شکل ۲: المان ۸ گره‌ای

Fig. 2. 8 node serendipity element

برای ماتریس جرمی متناظر با مقدار ویژه و بردار ویژه بسط کارهونن-لاو چگالی، و یک بسط ماتریسی برای ماتریس سختی متناظر با مقدار ویژه و بردار ویژه بسط کارهونن-لاو متغیرهای تصادفی شامل مدول در جهت الیاف و مدول‌های برشی استخراج شده است. در رابطه فوق برای متغیرهای استاندارد فرضیات رابطه (۲۹) برای میانگین و واریانس متغیرهای تصادفی لحاظ شده است.

$$\begin{cases}E(\zeta_i)=0;\\ E(\zeta_i^2)=1;\end{cases} \qquad (۲۹)$$

رابطه (۲۸) به‌راحتی قابل‌تبدیل به مسأله مقدار ویژه بوده و با تولید اعداد تصادفی برای متغیرهای تصادفی مطابق روش مونت‌کارلو، خواص آماری مقدار ویژه و به عبارتی فرکانس طبیعی ورق قابل استخراج است. بدین منظور تولید اعداد تصادفی و همچنین افزایش جمعیت پاسخ تا رسیدن به همگرایی مدنظر در روش مونت‌کارلو ادامه می‌یابد.

۵- صحه‌گذاری بر فرمولاسیون

با توجه به اینکه روش مونت‌کارلو تکرار یک حل معین است، برای صحه‌گذاری فرمولاسیون حاکم کافی است، حل معین مستخرج از حل المان محدود صحه‌گذاری شود. بدین منظور حل المان محدود به ازا نسبت ضلع به ضخامت ورق برای ورق مربعی با ضلع واحد استخراج شده و با مقادیر موجود در مرجع [۳۵] مقایسه شده است. خواص در نظر گرفته شده برای ورق مطابق جدول ۱ است.

در حل المان محدود، از شبکه بندی ۱۰ در ۱۰ پس از بررسی همگرایی شبکه بندی استفاده شده است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی (رابطه (۳۰)) برای لایه چینی [۰و۹۰و۰] نتایج در جدول ۲ ارائه شده است و مطابقت خوبی را بین روش حاضر با تحقیق مرجع نشان می‌دهد. نتایج با پارامتر بی‌بعد سازی مطابق رابطه (۳۱) بی‌بعد شده است.

$$\begin{aligned}x&=0,a:\quad W=U=\varphi_y=0\\ y&=0,b:\quad W=V=\varphi_x=0\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

$$\omega=\bar{\omega}a^2(\sqrt{\rho/\bar{E}_{22}h^2}) \qquad (۳۱)$$

به‌منظور صحه‌گذاری بر شبیه‌سازی تصادفی ازآنجایی‌که تحقیقات موجود در تاریخچه بر شبیه‌سازی عدم قطعیت به‌صورت پارامتر تصادفی

Table 1. Properties of composite lamina

جدول ۱: خواص لمینا مورد بررسی [۳۵]

خواص	مقدار
E_{11}/E_{22}	۴۰
$G_{12}/E_{22}=G_{13}/E_{22}$	۰/۶
G_{23}/E_{22}	۰/۵
ν_{12}	۰/۲۵
E_{22} (GPa)	۶/۹۲

Table 2. Comparison of normalized natural frequencie

جدول ۲: مقایسه فرکانس بی‌بعد برای روش حاضر و مرجع

نسبت طول به ضخامت	المان محدود	مرجع [۳۵]
۵	۱۰/۲۹۰	۱۰/۲۶۳
۱۰	۱۴/۷۶۷	۱۴/۷۰۲
۲۰	۱۷/۵۱۸	۱۷/۴۸۳

(نه میدان تصادفی) متمرکز است، با شبیه‌سازی مدول کششی در جهت الیاف به‌صورت پارامتر تصادفی روند حل با مقایسه با نتایج موجود در مرجع [۳۶] صحه‌گذاری می‌شود. برای شبیه‌سازی مدول یانگ در جهت الیاف به‌صورت پارامتر تصادفی کافی است در رابطه (۷) مقادیر ویژه و بردار ویژه‌ی نخست برابر یک و مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مراتب بالاتر برابر صفر لحاظ شود. ورق مربعی با لایه چینی متقارن [۰و۹۰و۹۰و۰] و شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با خواص مطابق جدول ۳ با روند حاضر مورد تحلیل قرار گرفته است. شبکه بندی مورد استفاده همانند قسمت قبل است.

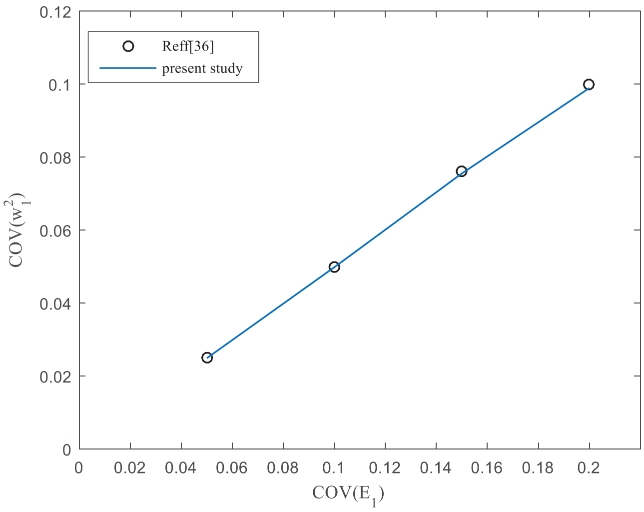
مسأله مقدار ویژه‌ی نخست ورق کامپوزیتی با نسبت طول به ضخامت ۱۰ با تکرار حل ۱۰۰۰۰ درروش مونت‌کارلو مورد حل قرار گرفت. مقایسه‌ی نتایج ضریب تغییرات حاصل از شبیه‌سازی حاضر با نتایج مرجع [۳۶] در شکل ۳ ارائه شده است.

همان‌گونه که از شکل ۳ پیداست نتایج شبیه‌سازی حاضر مطابقت خوبی با نتایج موجود در تاریخچه دارد. بنابراین روند حل مسأله تصادفی نیز مورد تأیید است.

Table 3. Properties of composite lamina

جدول ۳: خواص لمینا مورد بررسی [۳۶]

خواص	مقدار
E_{11}/E_{22}	۲۵
$G_{12}/E_{22}=G_{13}/E_{22}$	۰/۵
G_{23}/E_{22}	۰/۲
ν_{12}	۰/۲۵
$\rho(\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3)$	۱



شکل ۳: مقایسه نتایج شبیه‌سازی مقدار ویژه نخست ارتعاشات آزاد ورق با عدم قطعیت در مدول کششی راستای الیاف

Fig. 3. Comparison of natural frequency of the plate considering tensile modulus uncertainty (Coefficient Of Variation (COV))

۶- حل مسأله‌ی ارتعاشات آزاد ورق نامعین کامپوزیتی

در این قسمت ارتعاشات آزاد یک ورق مربعی کامپوزیتی با خواص نامعین مطالعه شده است. ابعاد ورق به‌صورت واحد در نظر گرفته شده است. خواص میانگین در نظر گرفته شده برای ورق مطابق جدول ۱ است. خواص به‌صورت تصادفی مشابه رابطه (۷) و با در نظر گرفتن ۳ ترم از بسط کارهونن – لاو با طول خود ارتباطی برابر ۲ متر در نظر رفته شده است. شرایط مرزی نیز همان شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده (رابطه (۳۰)) در نظر گرفته شده است. لایه چینی در نظر گرفته شده در این قسمت لایه چینی [۰و۹۰و۹۰و۰] است.

اگر ضریب تغییرات برابر نسبت انحراف معیار به میانگین متغیر تصادفی تعریف شود، برای یک ورق با ضخامت‌های مختلف ضریب تغییرات فرکانس طبیعی به ازاء ضریب تغییرات مختلف در خواص مکانیکی ورق مطالعه شده است. ابتدا به‌منظور بررسی همگرایی روش مونت‌کارلو ضریب تغییرات مقدار ویژه نخست (مجذور فرکانس طبیعی) به ازا افزایش تعداد نمونه‌های تصادفی برای نسبت ضلع به ضخامت ۱۰ در شکل ۴ ارائه شده است.

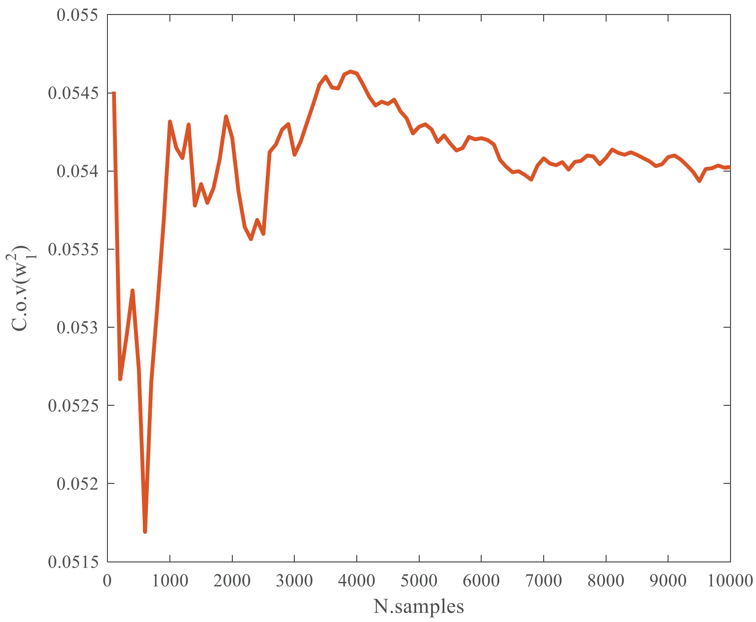
اگر معیار همگرایی تغییرات کمتر از ۱ درصد در ضریب تغییرات متغیر تصادفی به ازا افزایش هزار نمونه تصادفی تعریف شود، تعداد ۷۰۰۰ نمونه تصادفی برای رسیدن به همگرایی کافی است. تولید نمونه‌ها برای رسیدن به دقت بیشتر در ضریب تغییرات و همچنین مشاهده رفتار ضریب تغییرات تا ۱۰۰۰۰ نمونه افزایش یافته است.

در این مرحله تمامی متغیرهای تصادفی معرفی‌شده در قسمت قبل به‌صورت همزمان تصادفی با انحراف معیار ۰/۰۵ فرض شده‌اند. تابع چگالی احتمال سه مقدار ویژه نخست ورق نامعین برای نسبت ضلع به ضخامت ۱۰ و انحراف معیار ۰/۰۵ برای متغیرهای تصادفی در شکل ۵ ارائه شده است.

همان‌گونه که از شکل فوق پیداست توزیع مقادیر ویژه نخست متناظر با توزیع در نظر گرفته شده برای متغیرهای تصادفی، توزیعی گوسی به نظر می‌رسد. در نهایت به ازا مقادیر مختلف ضریب تغییرات در خواص تصادفی ورق، نمودار ضریب تغییرات سه فرکانس طبیعی نخست ورق برای نسبت ضلع به ضخامت‌های مختلف در شکل‌های ۶ تا ۸ رسم شده است. قابل‌ذکر است متغیرهای تصادفی شامل چگالی، مدول‌های کششی و مدول‌های برشی هستند که به‌طور همزمان به صورت میدان تصادفی در نظر گرفته شده‌اند. حل به ازا چهار مقدار انحراف معیار ۰/۱۵، ۰/۱، ۰/۰۵ و ۰/۲ با تکرار ۱۰۰۰۰ نمونه حل شده و خواص آماری استخراج شده است.

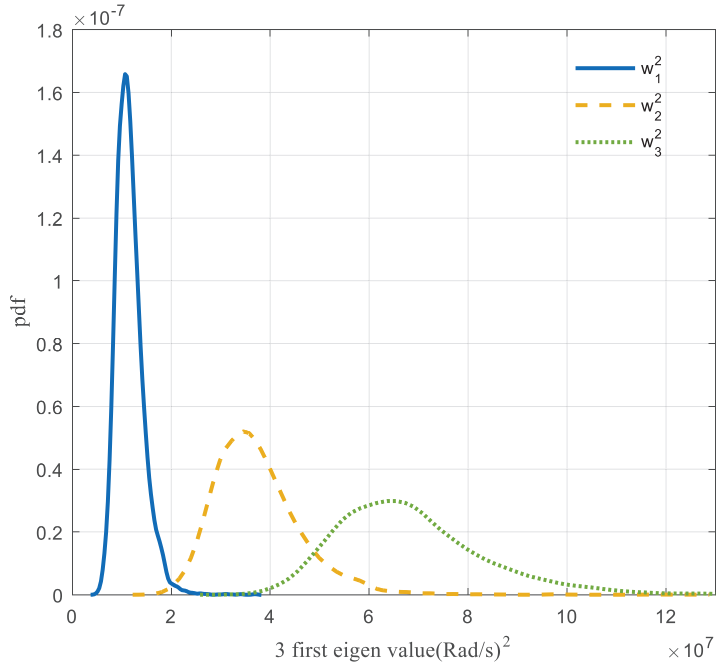
نتایج نشان می‌دهد، رابطه‌ای خطی بین ضریب تغییرات فرکانس طبیعی و ضریب تغییرات متغیرهای تصادفی وجود دارد. حساسیت ضریب تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات در انحراف معیار پارامترهای تصادفی با کاهش ضخامت ورق، افزایش می‌یابد؛ بنابراین ورق‌های نازک‌تر نسب به عدم قطعیت در خواص حساسیت بیشتری دارند و این مورد در طراحی ورق‌های نازک می‌بایست لحاظ شود. شیب نمودار ضریب تغییرات فرکانس طبیعی با کاهش ضخامت افزایش می‌یابد و با نزدیک شدن به نسبت ضلع به ضخامت برابر با ۱۰۰ با نرخ کمتری تغییر می‌کند.

در این قسمت متغیرها به‌صورت مجزا مورد تحلیل قرارگرفته‌اند و سپس تأثیر تجمیع پارامترهای دارای عدم قطعیت بر فرکانس طبیعی نخست مطالعه شده است. در شکل ۹ پارامتر تصادفی مدول در جهت الیاف در نظر گرفته شده است.



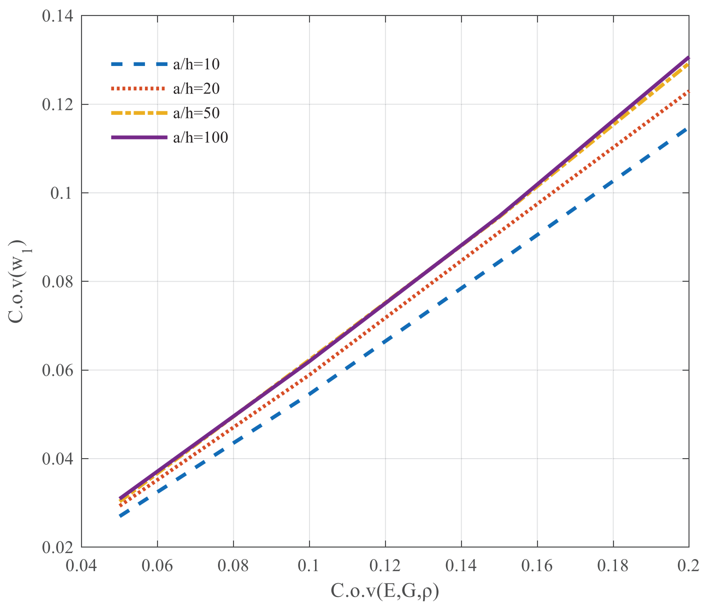
شکل ۴: ضریب تغییرات مقدار ویژه نخست با افزایش تعداد نمونه‌ها

Fig. 4. COV of first Eigen value with increasing samples number



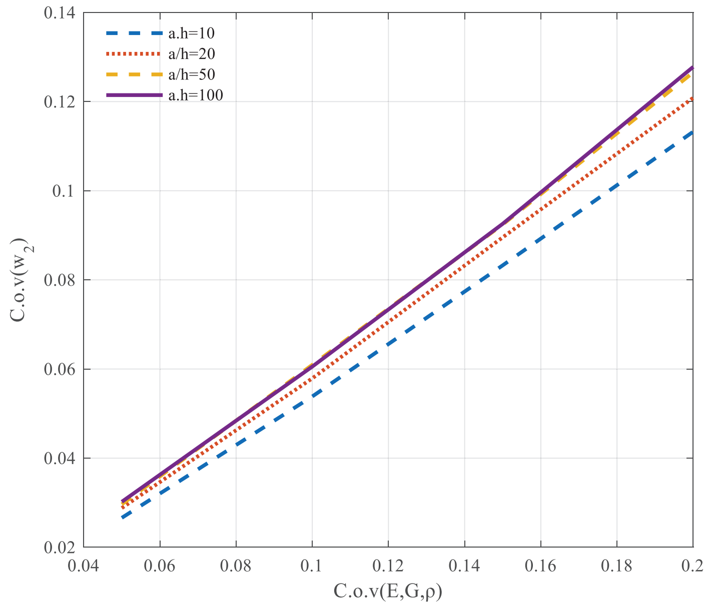
شکل ۵: تابع چگالی احتمال سه مقدار ویژه نخست

Fig. 5. Probability Density Function (PDF) of three first eigen values



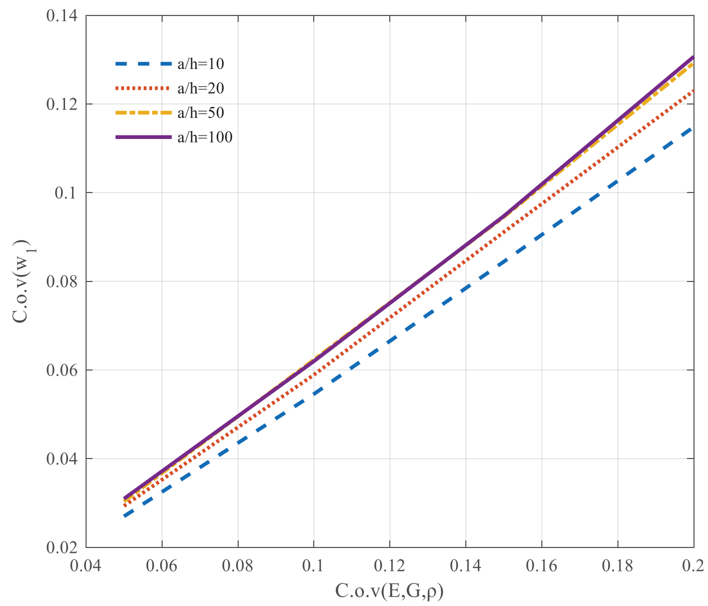
شکل ۶: ضریب تغییرات فرکانس طبیعی نخست

Fig. 6. COV of first natural frequency



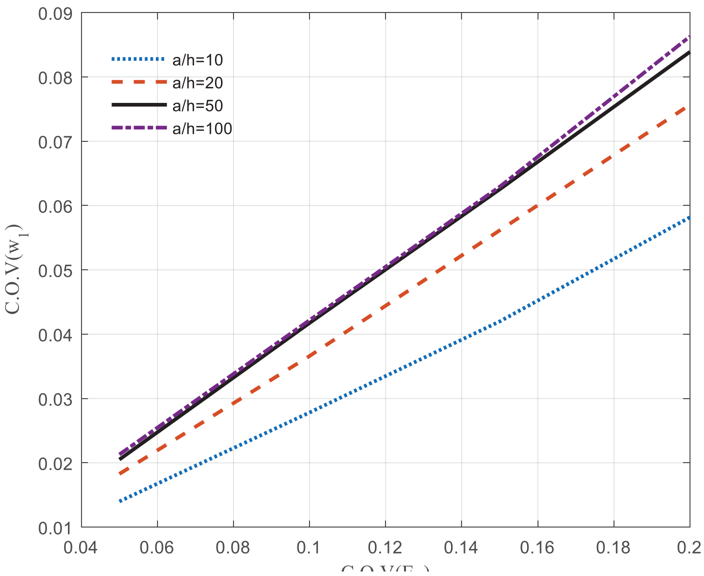
شکل ۷: ضریب تغییرات فرکانس طبیعی دوم

Fig. 7. COV of second natural frequency



شکل ۸: ضریب تغییرات فرکانس طبیعی سوم

Fig. 8. COV of third natural frequency



شکل ۹: ضریب تغییرات فرکانس طبیعی نخست با فرض عدم قطعیت در مدول در جهت الیاف

Fig. 9. COV of first natural frequency considering tensile modulus uncertainty

مشاهده می‌شود که با کاهش ضخامت ورق، حساسیت اثرات عدم قطعیت در مدول کششی بر عدم قطعیت فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و این رفتار خطی است. در شکل ۱۰ پارامتر تصادفی مدول‌های برشی $G_{12} = G_{13}$ در نظر گرفته شده است.

با کاهش ضخامت ورق، حساسیت اثرات عدم قطعیت در مدول‌های برشی $G_{12} = G_{13}$ بر عدم قطعیت فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و رفتار نیز همچنان خطی است. با توجه به کاهش سهم انرژی پتانسیل ناشی از کرنش برشی با کاهش ضخامت ورق این مورد منطقی به نظر می‌رسد. در شکل ۱۱ پارامتر تصادفی مدول برشی G_{23} در نظر گرفته شده است.

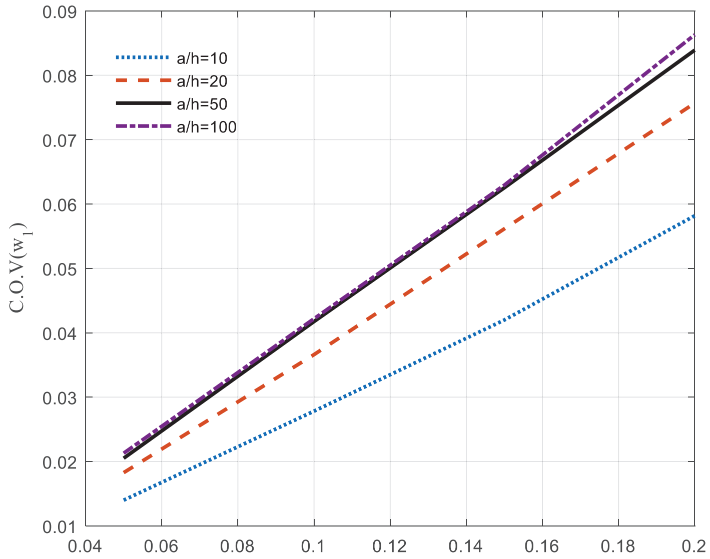
همان‌گونه که دیده می‌شود با کاهش ضخامت ورق، حساسیت اثرات این عدم قطعیت بر عدم قطعیت فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و رفتار نیز همچنان خطی است در اینجا نیز می‌توان به کاهش سهم انرژی کرنشی برشی در ورق‌های نازک‌تر اشاره کرد. در شکل ۱۲ پارامتر تصادفی چگالی ورق در نظر گرفته شده است.

با تغییر ضخامت ورق، حساسیت اثرات عدم قطعیت در چگالی بر عدم قطعیت فرکانس طبیعی تغییر نمی‌کند و رفتار نیز همچنان خطی است. این موضوع به دلیل تناسب مستقیم ماتریس جرمی (انرژی جنبشی) با چگالی ورق است. به‌منظور مقایسه اثرگذاری هر یک از پارامترها در رشد عدم قطعیت فرکانس طبیعی نخست، اثرات اعمال همزمان و تک‌تک عدم قطعیت‌های فوق در ضریب تغییرات فرکانس طبیعی برای ورق با نسبت ضلع به ضخامت ۱۰ در شکل ۱۳ ارائه شده است.

با بررسی ضریب تغییرات مشاهده می‌شود در بین پارامترها، عدم قطعیت چگالی و مدول‌های اصلی بیشترین اثرات را در عدم قطعیت فرکانس طبیعی دارند و پارامتر G_{23} کمترین اثرگذاری را نسبت به دیگر پارامترها داراست؛ بنابراین نیاز است برای بررسی قابلیت اطمینان سازه‌های کامپوزیتی به پراکندگی در مدول‌های اصلی و چگالی توجه ویژه شود.

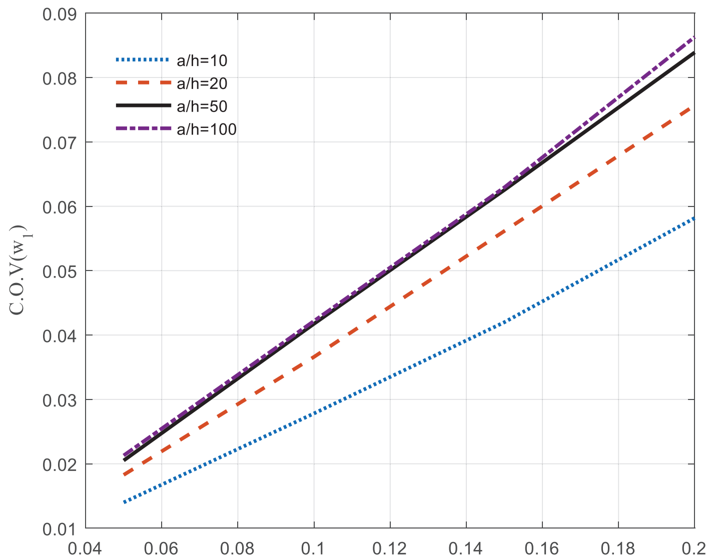
۷- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

آنالیز عدم قطعیت در فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی با خواص تصادفی به‌صورت یک میدان تصادفی به کمک روش مونت‌کارلو بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد رابطه‌ای خطی بین ضریب تغییرات فرکانس طبیعی و ضریب تغییرات متغیرهای تصادفی وجود دارد. حساسیت ضریب تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات در انحراف معیار پارامترهای تصادفی با کاهش ضخامت ورق، افزایش می‌یابد. همچنین اثرات عدم قطعیت در خواص فیزیکی و مکانیکی شامل چگالی، مدول کششی و مدول برشی بر عدم قطعیت در فرکانس طبیعی ورق، به‌صورت جداگانه و توأمان مطالعه شد.



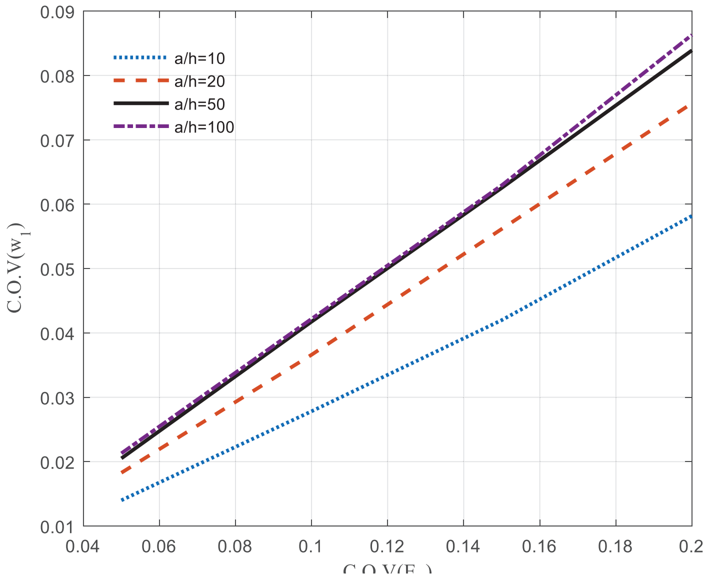
شکل ۱۰: ضریب تغییرات فرکانس طبیعی نخست با فرض عدم قطعیت در مدول برشی $G_{12}=G_{13}$

Fig. 10. COV of first natural frequency considering shear modulus ($G_{12}=G_{13}$) uncertainty



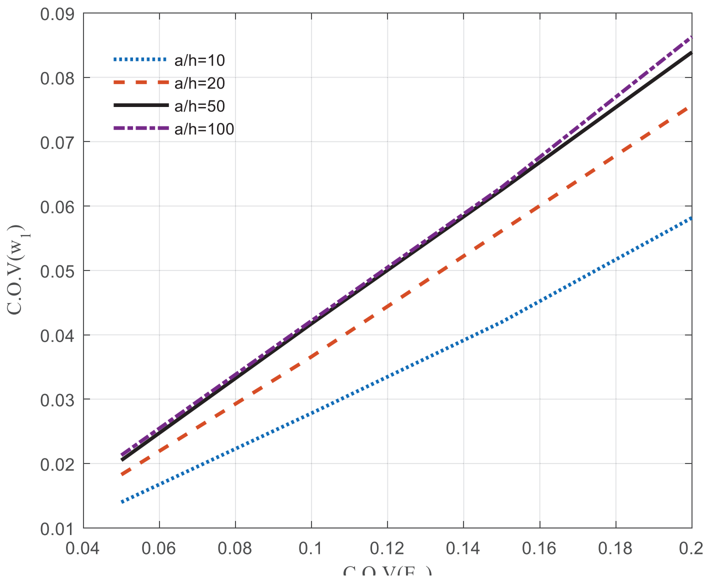
شکل ۱۱: ضریب تغییرات فرکانس طبیعی نخست با فرض عدم قطعیت در مدول برشی G_{23}

Fig. 11. COV of first natural frequency considering shear modulus (G_{23}) uncertainty



شکل ۱۲: ضریب تغییرات فرکانس طبیعی نخست با فرض عدم قطعیت در چگالی

Fig. 12. COV of first natural frequency considering density uncertainty



شکل ۱۳: مقایسه ضریب تغییرات فرکانس طبیعی نخست با فرض عدم قطعیت در متغیرهای تصادفی

Fig. 13. COV of first natural frequency considering uncertainty of random variables

نتایج نشان می‌دهد حساسیت فرکانس طبیعی به عدم قطعیت در پارامترهای تصادفی برای خواص مکانیکی در ضخامت‌های مختلف متفاوت است اما برای چگالی حساسیت یکسانی دیده می‌شود. همچنین در بین پارامترهای تصادفی چگالی و مدول کششی بیشترین تأثیر را در رشد عدم قطعیت فرکانس طبیعی دارند درحالی‌که مدول برشی G_{23} کمترین اثرگذاری را در عدم قطعیت در فرکانس طبیعی نشان می‌دهد بنابراین به‌منظور بررسی قابلیت اطمینان دینامیکی ورق‌های کامپوزیتی نیاز است عدم قطعیت در خواص خصوصاً چگالی و مدول کششی موردتوجه قرار گیرد.

تشکر و قدردانی

لازم می‌دانیم از حمایت‌های پژوهشگاه فضایی ایران به‌منظور انجام این تحقیق سپاسگزاری نماییم.

۸- فهرست علائم

علائم انگلیسی

E مدول الاستیسیته، N/m^۲

C کرنل تابع خود ارتباطی

G مدول برشی، N/m^۲

H همیلتونی

h ضخامت ورق، m

I ممان اینرسی، m.kg^۲

l طول خود ارتباطی،m

N تابع درون‌یابی

Q درایه ماتریس سفتی

q مختصات تعمیم‌یافته

T انرژی جنبشی

U انرژی پتانسیل

u جابجایی در راستای طول

v جابجایی در راستای عرض

w جابجایی در راستای ضخامت

علائم یونانی

γ کرنش برشی برون صفحه‌ای

ζ متغیر تصادفی استاندارد

ε کرنش

Λ درجات آزادی المان

ρ چگالی، kg/m^۳

σ انحراف معیار

φ دوران

زیرنویس

x در جهت x

۱ جهت الیاف

۲ جهت عمود بر الیاف

$,x$ مشتق نسبت به x

بالانویس

E_1 وابستگی متغیر به مدول در جهت الیاف

مراجع

[1] S. Salim, D. Yadav, N.J.M.R.C. Iyengar, Analysis of composite plates with random material characteristics, 20(5) (1993) 405-414.

[2] B. Navaneetha Raj, N. Iyengar, D.J.A.C.M. Yadav, Response of composite plates with random material properties using FEM and Monte Carlo simulation, 7(3) (1998) 219-237.

[3] A.K. Noor, J.H. Starnes Jr, J.M.J.C.S. Peters, Uncertainty analysis of stiffened composite panels, 51(2) (2001) 139-158.

[4]A.K. Noor, J.H. Starnes Jr, J.M.J.C.m.i.a.m. Peters, engineering, Uncertainty analysis of composite structures, 185(2-4) (2000) 413-432.

[5] C.C. António, L.N.J.R.E. Hoffbauer, S. Safety, Uncertainty analysis based on sensitivity applied to angle-ply composite structures, 92(10) (2007) 1353-1362.

[6] P. Gayathri, K. Umesh, R.J.R.E. Ganguli, S. Safety, Effect of matrix cracking and material uncertainty on composite plates, 95(7) (2010) 716-728.

[7] S.J.I.j.o.s. Lin, structures, Buckling failure analysis of random composite laminates subjected to random loads, 37(51) (2000) 7563-7576.

[8] A. Lal, B. Singh, R.J.C. Kumar, Structures, Effects of random system properties on the thermal buckling analysis of laminated composite plates, 87(17-18) (2009) 1119-1128.

[9] V.K. Verma, B.J.I.J.o.S.S. Singh, Dynamics, Thermal

S.J.C.P.B.E. Adhikari, Thermal uncertainty quantification in frequency responses of laminated composite plates, 80 (2015) 186-197.

[20] A. Lal, B.J.C.M. Singh, Stochastic nonlinear free vibration of laminated composite plates resting on elastic foundation in thermal environments, 44(1) (2009) 15-29.

[21] A. Lal, M.V. Tadvi, R. Kumar, Stochastic Thermal Free Vibration Response of Laminated Composite Plates Resting on Elastic Foundation with Uncertain Material Properties, in: 2008 First International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology, IEEE, 2008, pp. 754-757.

[22] A. Lal, B. Singh, R.J.I.J.o.M.S. Kumar, Nonlinear free vibration of laminated composite plates on elastic foundation with random system properties, 50(7) (2008) 1203-1212.

[23] K. Sepahvand, S. Marburg, On uncertainty quantification in sandwich structures with spatial random damping behavior, in: International Conference on Structural Dynamic, EURODYN, 2014.

[24] S. Adhikari, A.S.J.A.J. Phani, Random eigenvalue problems in structural dynamics: experimental investigations, 48(6) (2010) 1085-1097.

[25] S. Adhikari, Free vibration analysis of angle-ply composite plates with uncertain properties, in: 17th AIAA Non-Deterministic Approaches Conference, 2015, pp. 1146.

[26] S. Murugan, D. Harursampath, R.J.A.j. Ganguli, Material uncertainty propagation in helicopter nonlinear aeroelastic response and vibratory analysis, 46(9) (2008) 2332-2344.

[27] S. Murugan, R. Chowdhury, S. Adhikari, M.J.A.S. Friswell, Technology, Helicopter aeroelastic analysis buckling of laminated composite plates with random geometric and material properties, 9(02) (2009) 187-211.

[10] P.M. Pawar, S. Nam Jung, B.P.J.A.E. Ronge, A. Technology, Fuzzy approach for uncertainty analysis of thin walled composite beams, 84(1) (2012) 13-22.

[11] B.N. Singh, N. Iyengar, D.J.J.o.e.m. Yadav, Effects of random material properties on buckling of composite plates, 127(9) (2001) 873-879.

[12] P. Sasikumar, R. Suresh, S.J.A.M. Gupta, Stochastic finite element analysis of layered composite beams with spatially varying non-Gaussian inhomogeneities, 225(6) (2014) 1503-1522.

[13] R. Rafiee, F. Reshadi, S.J.M. Eidi, Design, Stochastic analysis of functional failure pressures in glass fiber reinforced polyester pipes, 67 (2015) 422-427.

[14] A.K. Onkar, D.J.C.S. Yadav, Forced nonlinear vibration of laminated composite plates with random material properties, 70(3) (2005) 334-342.

[15] B. Singh, A. Bisht, M. Pandit, K.J.J.o.s. Shukla, vibration, Nonlinear free vibration analysis of composite plates with material uncertainties: A Monte Carlo simulation approach, 324(1-2) (2009) 126-138.

[16] M.T. Piovan, J.M. Ramirez, R.J.C.S. Sampaio, Dynamics of thin-walled composite beams: Analysis of parametric uncertainties, 105 (2013) 14-28.

[17] M.K. Pandit, B.N. Singh, A.H.J.J.o.A.E. Sheikh, Stochastic free vibration response of soft core sandwich plates using an improved higher-order zigzag theory, 23(1) (2009) 14-23.

[18] S. Dey, T. Mukhopadhyay, H.H. Khodaparast, S.J.A.M. Adhikari, Stochastic natural frequency of composite conical shells, 226(8) (2015) 2537-2553.

[19] S. Dey, T. Mukhopadhyay, S. Sahu, G. Li, H. Rabitz,

with spatially uncertain rotor blade properties, 16(1) (2012) 29-39.

[28] A. Shaker, W.G. Abdelrahman, M. Tawfik, E.J.C.M. Sadek, Stochastic finite element analysis of the free vibration of laminated composite plates, 41(4) (2008) 493-501.

[29] K. Sepahvand, S. Marburg, H.-J.J.J.o.S. Hardtke, Vibration, Stochastic free vibration of orthotropic plates using generalized polynomial chaos expansion, 331(1) (2012) 167-179.

[30] K. Sepahvand, M. Scheffler, S.J.A.A. Marburg, Uncertainty quantification in natural frequencies and radiated acoustic power of composite plates: Analytical and experimental investigation, 87 (2015) 23-29.

[31] K. Umesh, R.J.M.o.A.M. Ganguli, Structures, Material uncertainty effect on vibration control of smart composite plate using polynomial chaos expansion, 20(7) (2013) 580-591.

[32] S. Sriramula, M.K.J.S.S. Chryssanthopoulos, An experimental characterisation of spatial variability in GFRP composite panels, 42 (2013) 1-11.

[33] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, Stochastic finite element method: Response statistics, in: Stochastic finite elements: a spectral approach, Springer, 1991, pp. 101-119.

[34] J.N. Reddy, Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis, CRC press, 2004.

[35] H.-S. Shen, J.-J. Zheng, X.-L.J.C.S. Huang, Dynamic response of shear deformable laminated plates under thermomechanical loading and resting on elastic foundations, 60(1) (2003) 57-66.

[36] B. Singh, D. Yadav, N.J.A.C.M. Iyengar, AC° element for free vibration of composite plates with uncertain material properties, 11(4) (2002) 331-350.

این صفحه عمداً خالی است