



شبیه‌سازی عددی جریان، انتقال حرارت جابجایی آزاد و کسر حجمی نانوذرات داخل حفره دوزنقه‌ای با استفاده از مدل بونگیورنو

مرتضی بشیر^{۱*}، صمدجعفرمدار^۱، صابر یکانی مطلق^۲، شهرام خلیل آریا^۱

^۱دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

^۲دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۰۹/۲۲
بازنگری: ۱۳۹۸/۰۲/۰۵
پذیرش: ۱۳۹۸/۰۳/۲۶
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۴/۱۱

کلمات کلیدی:

حفره دوزنقه‌ای
جابجایی طبیعی
نانوسیال
ترموپروسس
مدل بونگیورنو.

خلاصه: در این مقاله، جریان همرفتی نانوسیال آب و نانوذرات اکسید آلومینیوم داخل حفره دوزنقه با استفاده از مدل دوفاز بونگیورنو به صورت عددی شبیه‌سازی شد. اثر تغییر زاویه اضلاع جانبی محفظه دوزنقه‌ای بر انتقال حرارت، جرم و مومنتوم مورد بررسی قرار گرفته شده است. معادلات حاکم بر مسئله، معادلات مومنتوم، انرژی و انتقال کسر حجمی نانوذرات می‌باشند که به همراه شرایط مرزی به روش حجم محدود و الگوریتم سیمپل حل شده‌اند. برای گسسته‌سازی ترم‌های جابجایی و پخش به ترتیب از الگوهای بالادست و تفاضل مرکزی استفاده شده است. دیواره‌های چپ و راست حفره دمای ثابت داشته و دیواره‌های بالا و پایین عایق حرارتی می‌باشند. زاویه شیب اضلاع جانبی (چپ و راست) مابین ۳۰، ۴۵ درجه و عدد رایلی بین ۱۰۰ تا ۱۰۰۰۰ و کسر حجمی نانوذرات از ۰/۱ تا ۰/۴ متغیر می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که در اعداد رایلی پایین به ازای مقدار نانوذرات یکسان، با افزایش زاویه اضلاع از صفر به ۴۵ درجه، عدد نوسلت و به تبع آن انتقال حرارت به میزان متوسط ۸۱ درصد کاهش می‌یابد. از طرفی با افزایش عدد رایلی، برای محفظه در زاویه ۳۰ درجه حالت بهینه حاصل و عدد نوسلت به میزان ۵/۵ درصد، نسبت به محفظه مربعی و ۶/۸ درصد نسبت به حالت ۴۵ درجه افزایش می‌یابد. همچنین نتایج، توزیع نسبتاً یکنواختی برای نانوذرات در رایلی‌های بالا در تمامی محفظه‌ها با زاویه اضلاع مختلف نشان می‌دهد.

۱- مقدمه

نانوسیالات، سوسپانسیون‌های کلویدی هستند که از سیال پایه و نانوذرات تشکیل می‌شوند. سیال پایه نانوسیال، معمولاً سیالی است با ضریب هدایت حرارتی پایین‌تر مثل: آب، اتیلن گلیکول^۱ و انواع روغن‌ها که اندازه نانوذرات معمولاً در حدود 10^{-6} متر است. بنابراین نانوسیالات محلول‌های دوفازی هستند، که در آن‌ها شرط تعادل حرارتی برقرار است [۱]. خوان و روتزل [۲] مدل هموزنی پیشنهاد دادند که طبق آن می‌توان معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی سیال خالص را به نانوسیالات تعمیم داد. برای این کار کافی است در معادلات فوق خواص نانوسیال را با در نظر گرفتن کسر حجمی آن جایگذاری کرد. قیمت ارزان نانوذرات و کاربرد بالایی که می‌توانند در صنعت داشته باشند، این روزها توجه محققان بسیاری را به خود جلب کرده‌است. نانوسیال برای افزایش مقادیر ترموفیزیکی شامل هدایت حرارتی، ویسکوزیته و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی نسبت به سیال

خالص استفاده می‌گردد. ایده اضافه کردن نانوذرات به سیال را برای اولین بار چویی و ایستمن [۳] مطرح کردند، با این حال اضافه کردن ذرات جامد به سیال ایده جدیدی نبوده و از حدود صد سال قبل در نظریاتی همچون نظریات ماکسول بیان شده بود. مدل بونگیورنو یک مدل دوفازی-چهار معادله‌ای (شامل پیوستگی، مومنتوم، کسر حجمی و انرژی) می‌باشد که در سال ۲۰۰۶ ارائه شده است [۴]. بونگیورنو هفت مکانیزم مختلف لغزش بین نانوذرات و سیال پایه یعنی اینرسی، پخش براونی، حرکت ذرات در اثر گرادیان دما، حرکت ذرات در اثر پخش، اثر ماگنوس، گرانش و پس‌زنی سیال را مقایسه نمود. وی نتیجه گرفت که از بین هفت مکانیزم فوق تنها پخش براونی و حرکت ذرات در اثر گرادیان دما حائز اهمیت است. به خاطر در نظر گرفتن دو مکانیزم اشاره شده، این مدل در سال‌های اخیر در تحلیل نانوسیالات مورد استفاده قرار گرفته‌است. مطابق با فرمول‌بندی بونگیورنو دو عامل پخش براونی و پخش در اثر گرادیان دمایی در شارش نانوذرات در داخل مخلوط موثراند. از سوی دیگر با توجه به ماهیت نانوذرات مغناطیسی که در اثر اعمال میدان مغناطیسی خارجی تحریک

1 Ethylene Glycol

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: morteza.bashir1597@gmail.com



می‌شود، نانوذرات یک شارش جدید را تجربه می‌کند که به آن حرکت ذرات در اثر میدان مغناطیسی اطلاق می‌گردد.

بسیاری از پژوهشگران ویژگی‌های انتقال گرما نانوسیال‌های گوناگون را مورد بررسی قرار داده‌اند. وانگ و ماجومدا [۱] تحقیق‌های انجام شده توسط پژوهشگران مختلف را جمع‌آوری کرده و بیان نمودند که پژوهش‌های انجام شده نشان می‌دهد هدایت گرمایی نانوسیال بیشتر از سیال پایه است و به عامل‌هایی همچون اندازه، شکل و غلظت حجمی نانوذره‌ها و همچنین نوع نانوذره و سیال پایه بستگی دارد. همچنین پژوهش‌های تجربی انجام شده در مورد انتقال گرمای نانوسیال‌ها نشان می‌دهد که از بین انواع گوناگون نانوذره‌ها در غلظت‌های حجمی گوناگون استفاده از نانوذره‌های اکسید فلزی تا بیش‌ترین غلظت حجمی چهار درصد از نظر کارایی و هزینه به صرفه است. شایان ذکر است بیشتر پژوهش‌های تجربی انجام شده در رژیم جریان آرام صورت گرفته‌اند. ایستمن و همکاران [۵] نشان دادند ضریب هدایت گرمایی در نانوسیال اتیلن گلیکول ۴۰ درصد و آب آلومینیوم اکسید ۱۰ درصد افزایش یافته است. بونگیرنو برای توجیه افزایش غیرعادی انتقال حرارت در نانوسیالات مدلی پیشنهاد داد که در آن حرکات براونی و حرکات ناشی از گرادیان دما در نانوذرات در نظر گرفته شده است، او مشاهده کرد افزایش انتقال حرارت نمی‌تواند تنها به دلیل پراکندگی نانوذرات و یا شدت آشفتگی جریان باشد. همین مساله برای جریان آرام جابه‌جایی آزاد در نانوسیالات نیوتنی توسط پلیدوری و همکاران [۶] مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج مطالعات آن‌ها نشان داد عدد نوسلت در جریان آشفته بزرگتر از جریان آرام است و به این ترتیب وجود آشفتگی به عنوان یکی از دلایل احتمالی افزایش انتقال حرارت ارائه شد. مشاهده‌های بعدی نشان داد حرکات براونی و حرکات ناشی از گرادیان دما نانوذرات دو دلیل اصلی بر وجود حرکت آزاد نانوذرات در سیال پایه هستند [۷]. ولی‌پور و همکاران [۸] در مطالعه عددی دیگری جریان و انتقال گرمای نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید گذرا از یک استوانه مربعی را بررسی کردند. طبق نتایج بدست آمده ضریب فشار با افزایش کسر حجمی جامد در نانوسیال برای سمتی که گرادیان فشار بسیار مطلوب است، کاهش می‌یابد. در حالی‌که با افزایش غلظت نانوذرات به سیال پایه در سمتی که گرادیان فشار معکوس است ضریب فشار افزایش می‌یابد. کریکن و همکاران [۹] با مطالعه روی نانوسیال آب-

آلومینیوم در هندسه استوانه تودرتو افقی گرم و با استفاده از مدل دوفازی دریافتند که با افزایش غلظت نانوذرات ویسکوزیته موثر نیز افزایش می‌یابد. شبیه‌سازی دوفازی جریان نانوسیال و انتقال حرارت آن در محیط بسته توسط شیخ‌الاسلامی و همکاران [۱۰] بررسی شده است. تعدادی از محقق‌ها نتایج مدل‌های تک‌فازی و دوفازی را مقایسه کردند. به‌عنوان مثال رشیدی و همکاران [۱۱] نشان دادند که در مدل‌سازی جریان نانوسیال و انتقال حرارت آن در کانال موجی، ضریب اصطکاک مدل دوفازی کوچکتر از مدل تک‌فازی است. یکانی و همکاران [۱۲] با در نظر گرفتن مدل بونگیرنو و مدل‌سازی جابه‌جایی آزاد نانوسیال آب-آلومینا به صورت دوفازی، در یک محفظه مربعی مایل با زاویه شیب‌های متفاوت به این نتیجه رسیدند، با افزایش زاویه شیب نوسلت متوسط و درصد افزایش انتقال حرارت تقریباً ثابت می‌ماند. باندیروا و شیرمیت [۱۳] تاثیر میدان مغناطیسی بر روی جابه‌جایی آزاد ناپایا در حفره دوزنقه حاوی نانوسیال با استفاده از مدل بونگیرنو را بررسی کردند. هاشم و الصبیری [۱۴] با مطالعه عددی انتقال عددی نانوسیال آب و آلومینا در حفره موجی توسط مدل بونگیرنو نشان دادند که با افزایش مقدار نانوذرات و در ضریب نوسان بهینه انتقال حرارت افزایش می‌یابد. رستمی و همکاران [۱۵] انتقال حرارت نانوسیال در میکروکانال موجی شکل به روش تک‌فاز و دوفاز به صورت عددی به روش پخش و تئوری محیط متخلخل مطالعه شده است. سپهرنیا و خراسانی‌زاده [۱۶] با تحلیل عملکرد حرارتی و آنتروپی تولیدی نانوسیال در یک چاه گرمایی دوزنقه، مشاهده کردند افزایش افت فشار در یک کسر حجمی ثابت موجب افزایش عدد ناسلت می‌گردد. در بیشتر مطالعات اخیر محفظه‌های مربعی و مستطیلی به دلایل مختلف از جمله سادگی میدان محاسباتی بیشتر مورد توجه بوده‌اند. از محفظه‌های دوزنقه‌ای در میکروکانال‌ها، صنعت ریخته‌گری و فضا‌های ناخواسته، مثل قطعه الکترونیکی که در یک فضای دوزنقه‌ای قرار گرفته است، استفاده می‌شود. با این وجود تاکنون میدان جریان، انتقال حرارت در جابه‌جایی توام و مطالعه همزمان با مدل بونگیرنو با تاثیرات براونی و ترموفورسس در جابه‌جایی آزاد به صورت دوفازی انجام نگرفته است.

در کار حاضر جریان دوفازی داخل محفظه دوزنقه‌ای حاوی نانوذرات اکسید آلومینیوم مورد بررسی قرار خواهد گرفت. زاویه شیب اضلاع چپ و راست مابین $(\theta = 0, 30, 45)$ درجه و عدد رایلی

معادله انرژی [۴]:

$$(\rho C_p)_{nf} \mathbf{V} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k_{nf} \nabla T) - C_p \mathbf{J}_p \cdot \nabla T \quad (3)$$

معادله کسر حجمی [۴]:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \phi = -\frac{1}{\rho_p} \nabla \cdot \mathbf{J}_p \quad (4)$$

در معادلات (۳) و (۴) (k_{nf}, C_p, ρ_p) به ترتیب ضریب هدایت گرمایی نانوسیال، ظرفیت حرارتی نانوسیال، ظرفیت حرارتی و چگالی نانوذره می‌باشد. T دمای نانوسیال، ϕ کسر حجمی نانوسیال و \mathbf{J}_p شار جرمی نانوذرات است که طبق مدل بونگیرنو مطابق رابطه (۵) محاسبه می‌شود [۴].

$$\mathbf{J}_p = \mathbf{J}_{pB} + \mathbf{J}_{pT} \quad (5)$$

\mathbf{J}_{pT} و \mathbf{J}_{pB} به ترتیب شار جرمی تحت اثر حرکات براونی و اثر حرارتی ترموفورسس هستند و مطابق روابط (۶) و (۷) محاسبه می‌شوند.

$$\mathbf{J}_{pB} = -\rho_p D_B \nabla \phi \quad (6)$$

$$\mathbf{J}_{pT} = -\rho_p D_T \nabla T \quad (7)$$

در روابط (۶) و (۷)، D_B و D_T عبارتند از [۴]:

$$D_B = \frac{K_B T}{3\pi\mu_f d_p} \quad (8)$$

$$D_T = 0.26 \frac{k_f}{2k_f + k_p} + \frac{\mu_f}{\rho_f T} \phi \quad (9)$$

پدر روابط (۸) و (۹)، D_B و D_T ضریب نفوذ براونی و ضریب ترموفورسس می‌باشد

با جایگذاری روابط (۶) تا (۹) در معادله‌های انرژی و انتقال جرم، این معادله‌ها در نهایت به فرم معادله‌های (۱۰) و (۱۱) در می‌آیند [۴]:

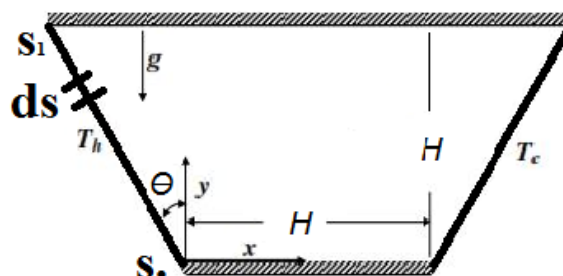
$$(\rho C_p)_{nf} \mathbf{V} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k_{nf} \nabla T) - \rho C_p (D_B \nabla \phi \cdot \nabla T + D_T \nabla T \cdot \nabla T) \quad (10)$$

$$\rho_p \mathbf{V} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\rho_p D_B \nabla \phi) + \nabla \cdot (\rho_p D_T \nabla T) \quad (11)$$

بین ۱۰۰ تا ۱۰۰۰۰ و کسر حجمی نانوذرات از ۰/۰۱ تا ۰/۰۴ متغیر می‌باشد.

۲- بیان مساله

شماتیک مساله در نظر گرفته در پژوهش حاضر در شکل ۱ نشان داده شده است. زاویه شیب اضلاع چپ و راست در زوایای $(0, 30^\circ)$ و $(45^\circ = \theta)$ درجه و ارتفاع با آب و اکسید آلومینیوم نانوسیال پر شده است. دو دیواره بالا و پایین عایق بوده و دیواره‌های با شیب متغیر چپ و راست در دمای ثابت T_c و T_h قرار دارند.



شکل ۱. شکل شماتیک حفره دوزنقه‌ای
Fig. 1. Geometry of a trapezoidal cavity

۳- معادله‌های حاکم و شرایط مرزی

معادله‌های حاکم بر مساله به همراه شرایط مرزی به روش حجم محدود و الگوریتم سیمپل حل شده‌اند. برای گسسته‌سازی ترم‌های جابجایی و پخش به ترتیب از الگوهای بالادست و تفاضل مرکزی استفاده شده است. معادله‌های حاکم شامل معادله‌های پیوستگی، کسر حجمی، مومنتوم و انرژی می‌باشند [۴].

معادله پیوستگی [۴]:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

معادله مومنتوم [۴]:

$$\rho_{nf} \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla P + \nabla \cdot (\mu_{nf} \nabla \mathbf{V}) + (\rho\beta)_{nf} (T - T_c) \mathbf{g} \quad (2)$$

همچنین در رابطه (۲) بردار سرعت و \mathbf{g} بردار شتاب جاذبه می‌باشد. در رابطه بالا ρ_{nf} ، μ_{nf} و β_{nf} به ترتیب چگالی، لزجت دینامیکی موثر و ضریب انبساط گرمایی نانوسیال می‌باشد.

۳-۱-شرایط مرزی

$$Re_B = \frac{\rho_f u_B d_p}{\mu_f} \quad (17)$$

شرایط مرزی معادلات (۱)، (۲)، (۳) و (۱۰) عبارتند از:

در رابطه (۱۷)، u_B سرعت حرکات براونی نانوذرات بوده و عبارت است از:

$$u_B = \frac{2k_B T}{\pi \mu_f d_p^2} \quad (18)$$

در رابطه (۱۸) $1/1.03 \times 10^{-23} \text{ J/k}$ ثابت بولتزمن می‌باشد. مشخصات ترموفیزیکی نانوذرات و سیال در جدول ۱ ارائه شده است.

$$\begin{aligned} y=0, H : u=v=0, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}=0, \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}=0. \\ y=-\cot \theta x, u=v=0, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}=\frac{-D_T}{D_B} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}, T=T_h \quad (12) \\ y=\cot \theta x-H, u=v=0, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}=\frac{-D_T}{D_B} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}, T=T_c \end{aligned}$$

در این مقاله خواص ترموفیزیکی نانوسیال توسط روابط (۱۳) تا (۱۶) محاسبه شده است [۱۷].

$$\rho_{nf} = \rho_f (1-\phi) + \rho_p \phi \quad (13)$$

$$(\rho\beta)_{nf} = (\rho\beta)_f (1-\phi) + (\rho\beta)_p \phi \quad (14)$$

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{1 - 34.87 \left(\frac{d_p}{d_f}\right)^{-0.3} \phi^{1.03}} \quad (15)$$

$$k_{nf} = k_f (1 + 4.4(Re_B)^{0.4} Pr^{0.66} \left(\frac{T}{T_{fr}}\right)^{0.03} \phi^{0.66}) \quad (16)$$

در فرمول‌های بالا ضرایب یا اندیس‌های nf مربوط به نانوسیال و n مربوط به سیال پایه و p مربوط به نانوذرات می‌باشد.

قطر نانوذره و d_f قطر مولکول‌های سیال پایه است. (۳۵۸ nm)

$$(d_f =$$

در رابطه (۱۶)، Re_B رینولدز نانوذرات بوده و توسط رابطه (۱۷)

بیان می‌شود:

۳-۲-بی‌بعدسازی معادله‌ها

در کار حاضر پارامترهای بی‌بعد زیر جهت بی‌بعدسازی معادله‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۱۰) به صورت رابطه (۱۹) تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned} p^* = \frac{p}{\rho_{nf} \left(\frac{\alpha_f}{H}\right)^2}, x^* = \frac{x}{H}, y^* = \frac{y}{H}, \mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{V}H}{\nu_f}, T^* \\ = \frac{T-T_c}{T_h-T_c}, \phi^* = \frac{\phi}{\phi_{Ave}}, \nabla^* = H \nabla \\ Ra_f = \frac{g\beta_f (T_h-T_c) H^3}{\alpha_f \rho_f}, Pr = \frac{\rho_f \nu_f}{\alpha_f}, D_B^* = \frac{D_B}{D_{BO}}, D_T^* \\ = \frac{D_T}{D_{TO}}, \delta = \frac{T_c}{T_h-T_c} \\ D_{TO} = \gamma \frac{\mu_f}{\rho_f} \phi_{Ave}, D_{BO} = \frac{k_B T_c}{3\pi \mu_f d_p}, \alpha_f = \frac{k_f}{(\rho C_p)_f} \end{aligned} \quad (19)$$

با بی‌بعدسازی معادلات به شکل زیر استخراج می‌گردد. معادله پیوستگی:

جدول ۱. مشخصات ترموفیزیکی آب و نانوذرات

Table 1. Thermo-physical properties of water and nanoparticles

$\rho \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$	$k(\text{W/mK})$	$C_p(\text{J/kgK})$	$\beta \times 10^5 (1/\text{K})$	$\mu \times 10^6 (\text{kg/m.s})$	$d_p (\text{nm})$	
۳۹۷۰	۴۰	۷۵۶	۰.۸۵	-	۳۳	اکسید آلومینیوم (Al_2O_3)
۹۹۳	۰.۶۲۸	۴۱۷۸	۳۶/۲	۶۹۵	-	آب

$$\mathbf{V}^* = 0, \nabla^* T^* \cdot \mathbf{n} = \nabla^* \phi^* \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{V}^* = 0, T^* = 1, \nabla^* \phi^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{D_T^*}{D_B^*} \cdot \frac{1}{N_{BT}} \cdot \frac{1}{1 + \delta T^*} \nabla^* T^* \cdot \mathbf{n} \quad (25)$$

$$\mathbf{V}^* = 0, T^* = 0, \nabla^* \phi^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{D_T^*}{D_B^*} \cdot \frac{1}{N_{BT}} \cdot \frac{1}{1 + \delta T^*} \nabla^* T^* \cdot \mathbf{n}$$

عدد نوسلت میانگین در کار حاضر به صورت رابطه (۲۶) بر روی دیوار گرم مطابق شکل ۱ تعریف می‌شود.

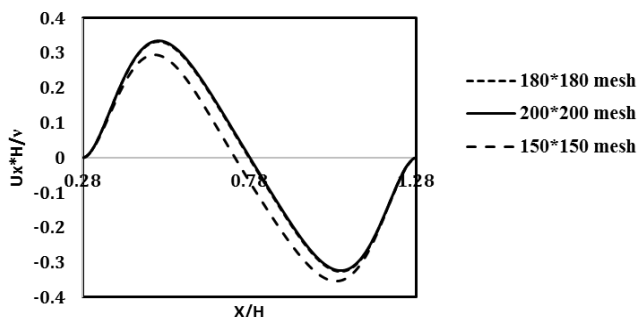
$$Nu_{Ave} = -\int_{S_0}^{S_1} \frac{k_{nf}}{k_f} \nabla^* T^* \cdot \mathbf{n} ds \quad (26)$$

در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. S_0 و S_1 در ds در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.

۴- روش عددی و مش‌بندی و صحت‌سنجی

در کار حاضر معادلات حاکم به همراه شرایط مرزی به روش حجم محدود گسسته‌سازی شده‌اند. روش سیمپل برای کوپلینگ سرعت و فشار استفاده شده است. در روش سیمپل ابتدا معادلات مومنوم نویر-استوکس با فرض میدان فشار معلوم برای پیش‌بینی میدان سرعت حل می‌شوند، سپس معادله پواسون فشار به منظور تصحیح و بدست آوردن میدان فشار سیال حل می‌شود. در ادامه میدان سرعت بر اساس میدان فشار تصحیح شده، تصحیح می‌شود. در حل معادلات انتقال، با توجه به این‌که در حالتی که جریان سیال وجود دارد به خصوص در سرعت‌ها یا رایلی‌های بالا مشخصه‌های جریان بیشتر تحت تاثیر مقادیر بالادست می‌باشند، لذا به منظور درون‌یابی مقادیر مرکز سلول‌ها بر روی سطوح سلول از روش بالادستی استفاده شده است و برای افزایش دقت از روش دارای دقت مرتبه دو، استفاده شده است. همچنین برای ترم‌های دیفیوژن معادلات روش مرتبه دو، اختلاف مرکزی بکار برده شده است. دستگاه معادله جبری به روش گوس سایدل حل شده است. مقادیر باقیمانده معادلات پیوستگی،

$$\theta = 30^\circ$$



شکل ۲. پروفیل سرعت افقی در مش‌های مختلف برای حفره مربعی ($\theta=0^\circ$) و حفره ذوزنقه‌ای ($\theta=30^\circ$)

Fig. 2. Horizontal velocity profiles in different grid size for square cavity ($\theta = 0$) and trapezoid cavity ($\theta = 30$)

$$\nabla^* \cdot \mathbf{V}^* = 0 \quad (20)$$

معادله مومنوم:

$$\left(\frac{\rho_{nf}}{\rho_f}\right) \mathbf{V}^* \cdot \nabla^* \mathbf{V}^* = -\left(\frac{\rho_{nf}}{\rho_f}\right) \nabla^* P^* + \nabla^* \cdot \left[\left(\frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\right) \nabla^* \mathbf{V}^*\right]$$

$$+ \left[\left(\frac{\rho\beta}{\rho_f\beta_f}\right) \cdot \frac{1}{Pr} \cdot Ra \cdot T^*\right] \cdot \mathbf{e}_g \quad (21)$$

$$\mathbf{e}_g = \frac{\mathbf{g}}{|g|}$$

بردار یکه شتاب گرانش می‌باشد.

معادله انرژی:

$$\left(\frac{\rho C_p}{\rho_f C_{pf}}\right) \mathbf{V}^* \cdot \nabla^* T^* = \frac{1}{Pr} \nabla^* \cdot \left[\left(\frac{k_{nf}}{k_f}\right) \nabla^* T^*\right]$$

$$+ \frac{1}{Pr} \cdot \frac{1}{Le} \left\{ D_B^* \nabla^* \phi^* \cdot \nabla^* T^* + \frac{D_T^*}{N_{BT}} \cdot \frac{\nabla^* T^* \cdot \nabla^* T^*}{1 + \delta T^*} \right\} \quad (22)$$

معادله کسر حجمی به شکل رابطه (۲۳) بی‌بعد می‌گردد:

$$\mathbf{V}^* \cdot \nabla^* \phi^* = \frac{1}{Sc} \nabla^* \cdot \left[D_B^* \nabla^* \phi^* + \frac{1}{N_{BT}} \cdot \frac{D_T^*}{1 + \delta T^*} \nabla^* T^* \right] \quad (23)$$

که در آن اعداد بدون بعد عبارتند از:

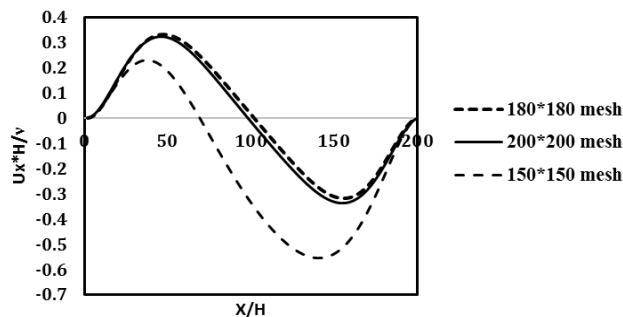
$$N_{BT} = \frac{\phi_{Ave} D_{Bo} T_c}{D_{To} (T_h - T_c)}, Le = \frac{k_f}{\rho_p C_p \phi_{Ave} D_{Bo}}, Sc = \frac{\nu_f}{D_{Bo}} \quad (24)$$

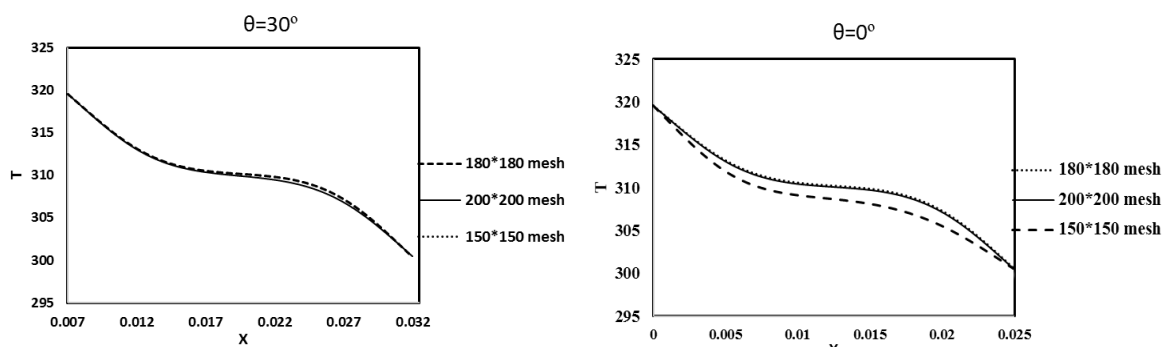
که به ترتیب عبارتند از: عدد اشمیت، ضریب نفوذ براونی و ترموفورسس و عدد لوئیس. با بی‌بعدسازی شرایط مرزی روابط مربوطه ساده خواهد گردید.

برای دیواره‌های بالا و پایین، دیواره چپ و دیواره راست، شرایط

مرزی به ترتیب به فرم روابط (۲۵) می‌باشد:

$$\theta = 0^\circ$$





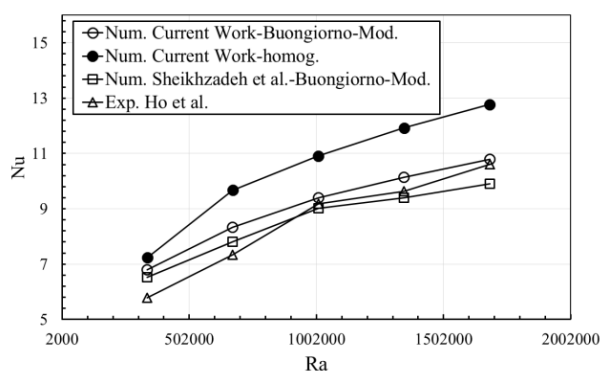
شکل ۳. پروفیل دما در مش‌های مختلف برای حفره مربعی ($\theta=0^\circ$) و حفره ذوزنقه‌ای ($\theta=30^\circ$)
 Fig. 3. Temperatur profiles in different grid size for square cavity ($\theta = 0$) and trapezoid cavity ($\theta = 30$)

۴-۱- صحت‌سنجی

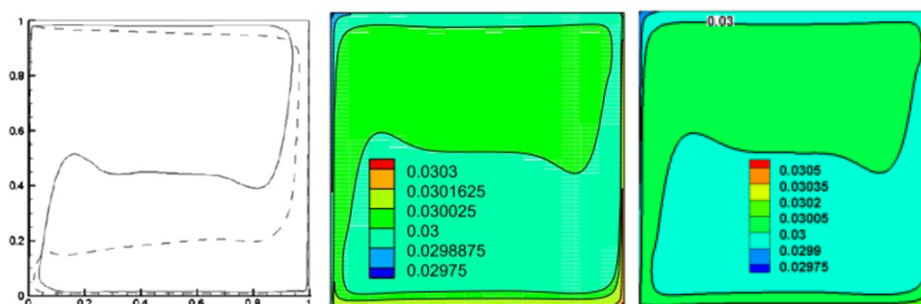
مومنوم، انرژی و کسر حجمی برابر با 10^{-6} فرض شده‌اند.

نتایج عدد ناسلت برای نانوسیال آب و اکسید آلومینیوم داخل حفره مربعی (ذوزنقه با زاویه ضلع‌های چپ و راست به صورت قائم) در شکل ۴-الف با نتایج تجربی هی و همکاران [۱۸] و نتایج عددی شیخزاده و همکاران [۱۹] مقایسه شده است. نتایج کار حاضر برای دو مدل همگن و مدل دوفاز بونگیورنو ارائه شده است. نتایج نشانگر این است که میانگین خطای مدل عددی همگن و مدل دوفازی بونگیورنو نسبت به نتایج آزمایشگاهی به ترتیب حدود ۱۵ درصد و ۸ درصد

برای بررسی استقلال شبکه، چندین مش 150×150 ، 180×180 ، 200×200 مورد استفاده گرفته است. نتایج مش‌های مختلف نشان داد که شبکه با ابعاد 180×180 المان، دارای دقت کافی بوده و افزایش بیشتر المان‌ها تاثیر محسوسی بر نتایج نداشت. همچنین استقلال از شبکه برای پروفیل سرعت و دما در بیشترین عدد رایلی در ($\theta = 0$ و 30) درجه در شکل‌های ۲ و ۳ مشخص شده است.



الف

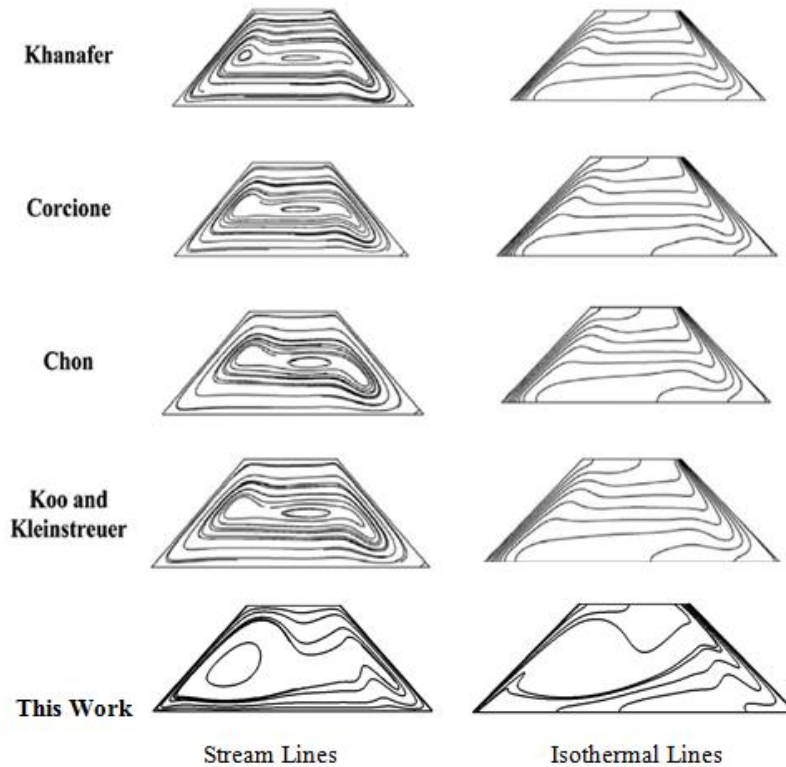


نتیجه کار حاضر

گروسی و همکاران [۲۰]

شیخزاده و همکاران [۱۹]

شکل ۴. الف - مقایسه نوسلت کار حاضر با نتایج تجربی و ب-مقایسه توزیع نانوذرات در کار حاضر با نتایج عددی شیخزاده [۱۹] و گروسی [۲۰]
 Fig. 4. a) Comparison of the Nusselt number obtained from the present numerical simulation with the experimental results b) Comparison of nanoparticles present results with the numerical results of Sheikhzade et al. [19] and Garoosi et al. [20]



شکل ۵. مقایسه خطوط جریان و خطوط همدمما کار حاضر در رایلی 10^5 با نتایج عددی حفره دوزنقه‌ای [۲۱] با قطر ذره ۵۰ نانومتر.
 Fig. 5. Comparison of flow lines and isotherm lines of present work in $Ra=10^5$ with numerical results of trapezoidal cavity [21] at $dp = 50nm$

تمام موارد مقادیر δ ، Pr ، Sc و N_{BT} در 155 و $4/623$ و $3/10^4 \times 55$ می‌باشد. تاثیر پارامترهای ذکر شده در متن بر توزیع نانوذرات و انتقال حرارت در بخش‌های زیر ارائه شده است.

۵-۱- اثر تغییر زاویه بر توزیع نانوذرات

توزیع نانوذرات برای زوایای مختلف در دو رایلی 10^2 و 10^4 در شکل‌های ۶ و ۸ نشان داده شده است.

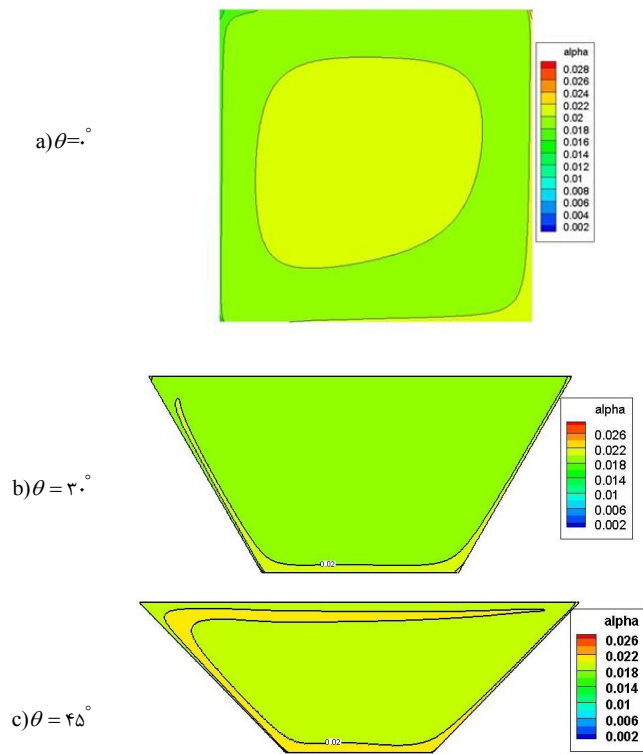
لازم به ذکر است که در این بخش میانگین کسر حجمی $\phi_{Ave} = 0.02$ ثابت می‌باشد. مشاهده می‌شود که با شیب‌دار کردن اضلاع چپ و راست و تبدیل حفره مربعی به دوزنقه‌ای تجمع نانوذرات اطراف دیواره سرد افزایش می‌یابد. علاوه بر این، دیده می‌شود که، یک لایه مرزی کسر حجمی نزدیک به دیوار داغ وجود دارد که با حرکت از سمت چپ به راست، از پایین به بالا رشد می‌یابد. علاوه بر این، در دیوار سرد، یک لایه مرزی کسر حجمی وجود دارد که با حرکت از سمت راست به سمت چپ، از بالا به سمت پایین و به دیوار پایین حرکت می‌کند.

لایه‌های مرزی توده‌ای مجاور دیواره‌های بالا و پایین نازکتر از

می‌باشد. این نتایج نشانگر این است که مدل دوفازی نسبت مدل همگن عملکرد بهتری داشته و خروجی این مدل به نتایج تجربی نزدیکتر می‌باشد. به علاوه، در شکل ۴-ب توزیع کیفی نانوذرات داخل حفره، بدست آمده از کار حاضر با نتایج عددی شیخ‌زاده و همکاران [۱۹] و گروسی و همکاران [۲۰] مقایسه شده است، که شکل‌ها نشانگر این هستند که شکل خطوط کسر حجمی ثابت کاملاً منطبق بر نتایج عددی سایر محققین می‌باشند. همچنین برای صحت‌سنجی کد برای حفره با شکل دوزنقه‌ای نتایج کد حاضر در رایلی 10^5 با نتایج عددی مرجع [۲۱] برای نانوذرات با قطر ۵۰ نانومتر در شکل ۵ مقایسه شده است.

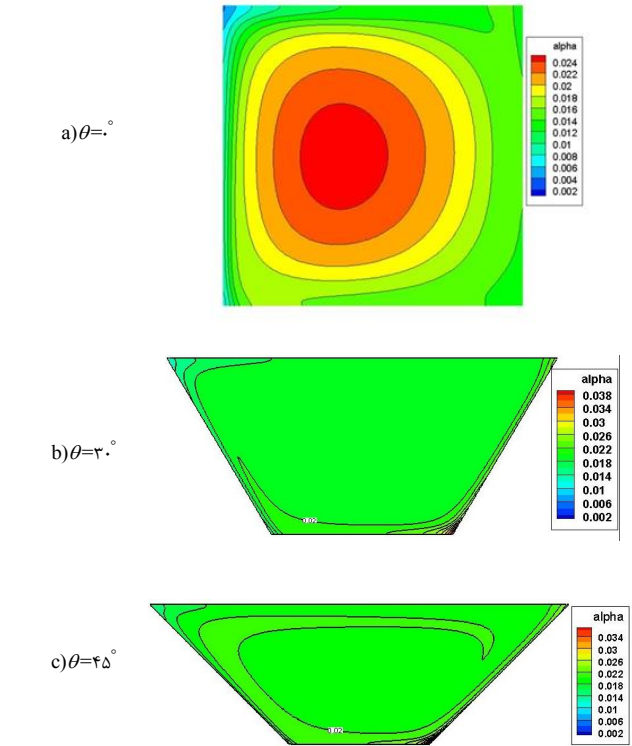
۵- نتایج و بحث

جابجایی آزاد، نانوسیال اکسید آلومینیوم (Al_2O_3) با آب در حفره دوزنقه‌ای با استفاده از مدل دوفاز بونگیورنو شبیه‌سازی شده است. عدد رایلی (10^2 ، 10^4 و 10^6) متوسط حجمی ذرات $0.40 \leq \phi_{Ave} \leq 0$ ، زاویه شیب اضلاع چپ و راست در دوزنقه $54 \leq \theta \leq 0$ و عدد لوئیس $0.5 \times 10^6 \times 62 \leq Le \leq 2/1$ می‌باشد. در



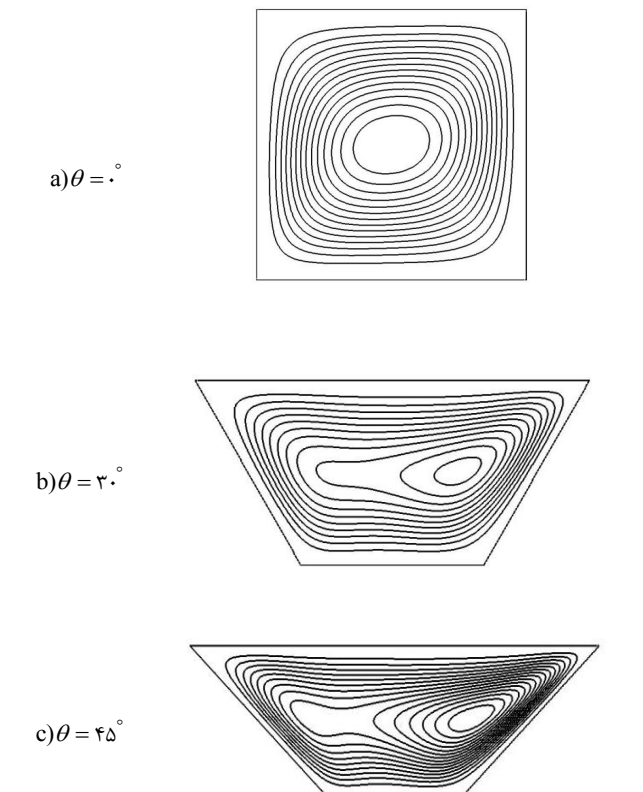
شکل ۸. کانتورهای توزیع نانوذرات همراه با خط ثابت کسر حجمی $\phi_{Ave} = 0.02$ در زوایای مختلف شیب برای $Ra=10^4$

Fig. 8. Contours of the nanoparticle distribution along with the constant volume fraction line of 0.02 at different inclination angles for $Ra=10^4$



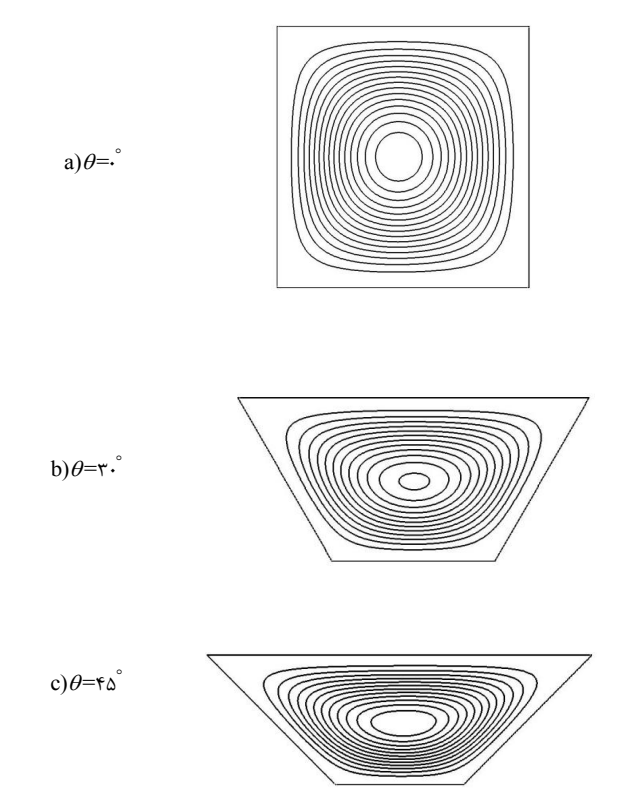
شکل ۶. توزیع نانوذرات همراه با خط ثابت کسر حجمی $\phi_{Ave} = 0.02$ در زوایای مختلف شیب برای $Ra=10^2$

Fig. 6. Contours of nanoparticle distribution along with the constant volume fraction line of 0.02 at different inclination angles for $Ra=10^2$



شکل ۹. کانتورهای خطوط جریان در زوایای مختلف شیب برای $Ra=10^4$

Fig. 9. Contours of streamlines at different inclination angles for $Ra=10^4$



شکل ۷. کانتورهای خطوط جریان در زوایای مختلف شیب برای $Ra=10^2$

Fig. 7. Contours of streamlines at different inclination angles for $Ra=10^2$

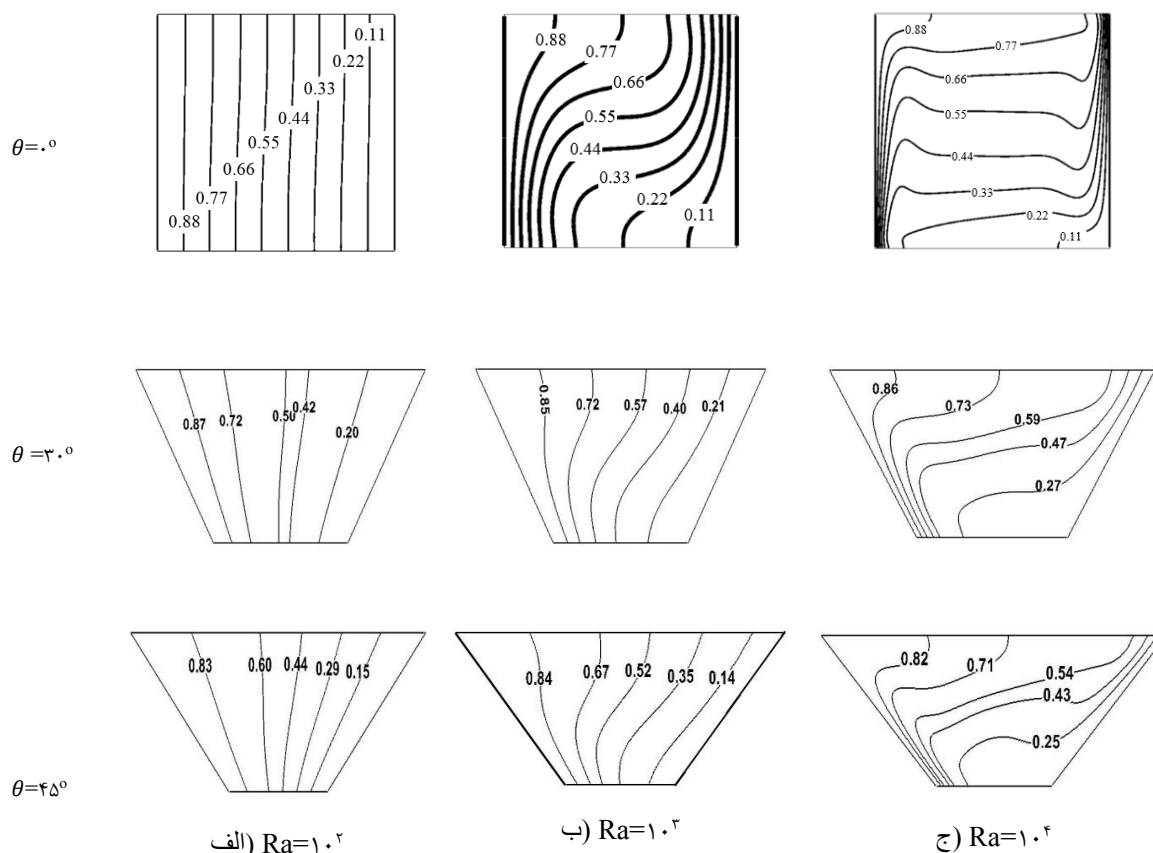
چپ و راست و رایلی‌های (10^2 ، 10^3 و 10^4) است. در اینجا مقدار کسر حجمی نانوذرات برابر با $\phi_{Ave} = 0.02$ می‌باشد. ایزوترم‌های عمودی که یکنواخت توزیع شده‌اند در $Ra=10^2$ نشان می‌دهد که گرما عمدتاً توسط هدایت جریان می‌یابد. همانطور که نشان داده شده است، در رایلی پایین که در آن اثر جریان بویانسی ضعیف است، با تغییر در زاویه اضلاع، ایزوترم‌ها در رایلی ثابت از رفتار مشابهی پیروی می‌کند. با این وجود، در اعداد رایلی بالاتر، تراکم خطوط ایزوترم در نزدیکی دیواره‌های گرم و سرد بیشتر است و نزدیک به دیواره‌های گرم و سرد، ایزوترم‌ها به صورت موازی با دیواره‌ها شکل گرفته‌اند که نشان‌دهنده غلبه انتقال حرارت هدایت می‌باشد، در حالی که در مرکز سلول انتقال حرارت جابه‌جایی قوی‌تر است و منجر به افقی شدن ایزوترم‌ها می‌شود. با افزایش عدد رایلی از 10^2 تا 10^4 ، ایزوترم‌ها به شکل تصادفی بیشتری دست می‌یابند. به علاوه، مشاهده می‌شود که خطوط ایزوترم در رایلی 10^4 و زاویه اضلاع صفر، در محدوده مرکز حفره تقریباً مستقیم می‌باشد، به این معنی که یک طبقه‌بندی حرارتی یا لایه‌بندی وجود دارد و بنابراین انتقال حرارت کم است.

لایه مرزی است که نزدیک به دیواره‌های گرم و سرد هستند. نزدیکی دیوار سرد بالاتر از دیوار داغ است. نیروهای ترموفورسیس باعث این نتیجه هستند که گرادیان دما ذرات را از مناطق گرم به مناطق سرد حمل می‌کند. یکی دیگر از ویژگی‌های شکل‌های ۶ و ۸ این است که برای مقدار مشخصی از تعداد رایلی، با افزایش زاویه شیب اضلاع چپ و راست ضخامت لایه مرزی توده رشد می‌کند. این انتظار می‌رود با افزایش θ ، اثرات هدایت کاهش می‌یابد. از سوی دیگر، برای مقدار مشخص شده θ ، با افزایش عدد Ra ، اثرات ترم هدایت بر اثرات ترم همرفتی بر اثرات ترم هدایت مطابق شکل ۱۰ غلبه می‌کند.

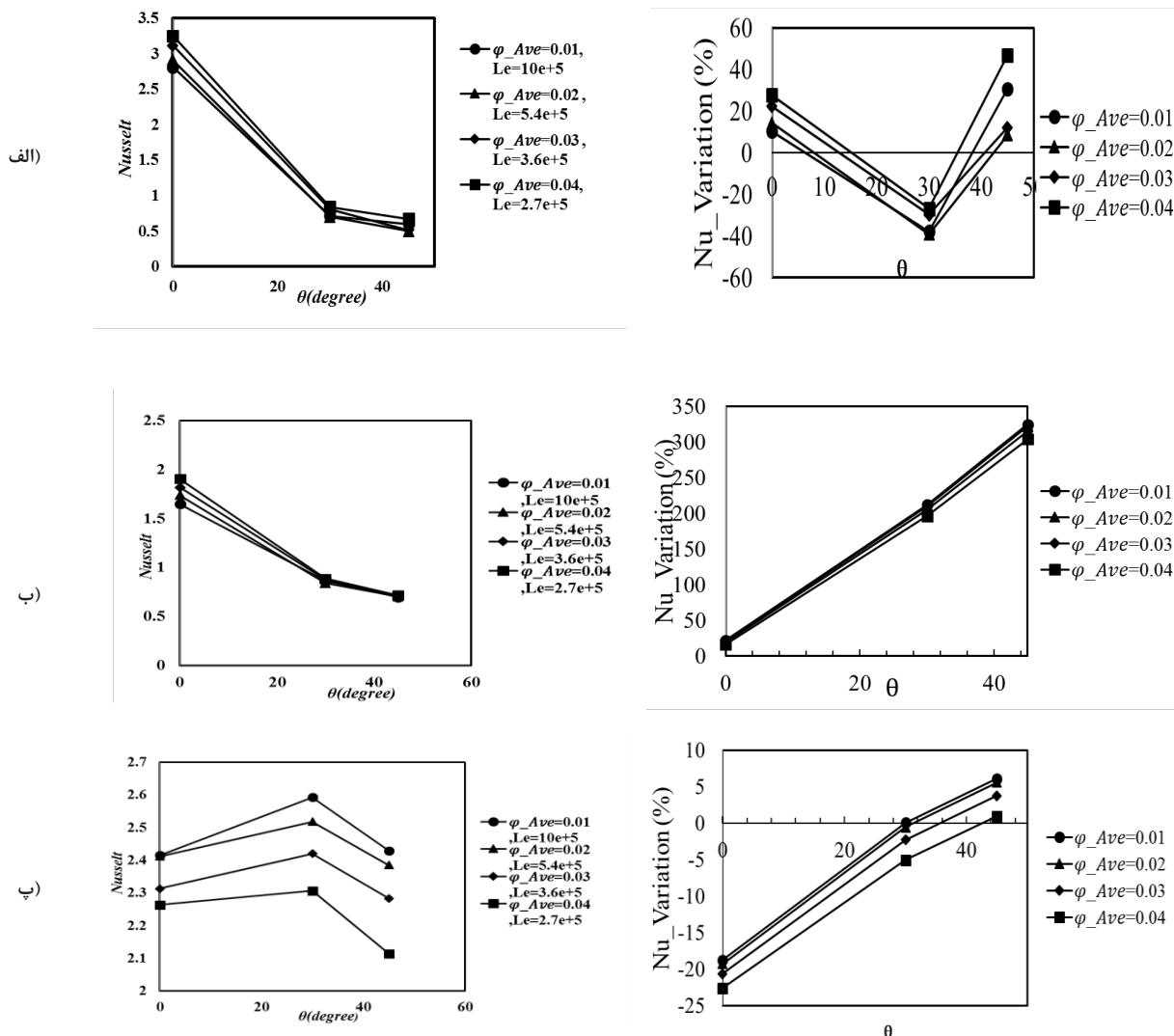
با مقایسه شکل‌های ۶ و ۸ بدیهی است که در $Ra=10^2$ توزیع نانوذرات نسبتاً غیریکنواخت است در حالی که در $Ra=10^4$ تقریباً یکنواخت می‌شود. لذا می‌توان نتیجه گرفت که در اعداد رایلی بالا می‌توان از مدل‌های تک‌فازی هموژن استفاده کرد. نتایج مشابه در مراجع [۲۰] و [۲۱] گزارش شده است.

۵-۲- اثر تغییر زاویه اضلاع دوزنقه بر توزیع دما

شکل ۱۰ نشانگر خطوط ایزوترم در زاویه شیب مختلف اضلاع



شکل ۱۰. ایزوترم‌های داخل حفره با نانوسیال اکسید آلومینیوم آب با 0.02 در زوایای مختلف شیب‌دار و (الف) $Ra=10^2$ و (ب) $Ra=10^3$ و (ج) $Ra=10^4$
 Fig. 10. Isotherms inside the cavity filled with Al_2O_3 -water nanofluid with 0.02 at different inclination angles at (a): $Ra=10^2$ (b): $Ra=10^3$ and (c): $Ra=10^4$



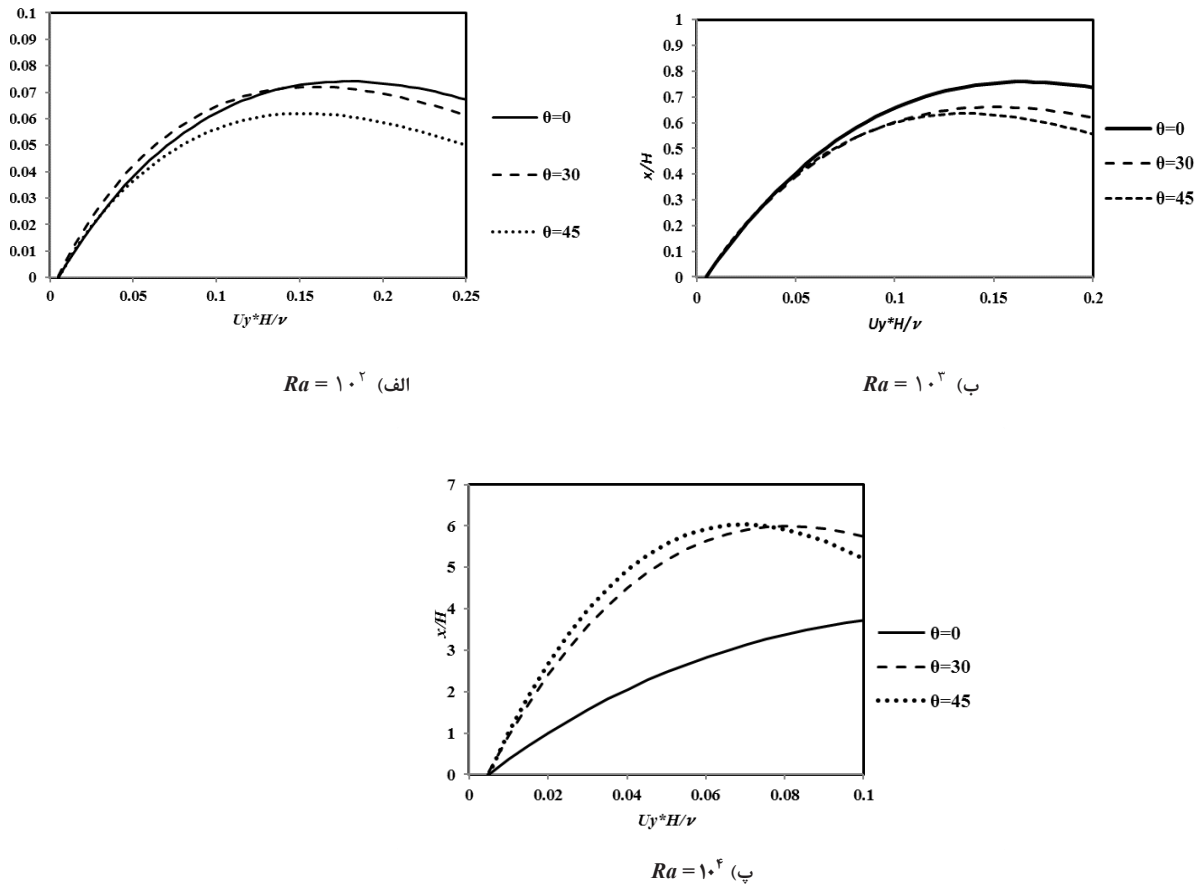
شکل ۱۱. تغییر مقدار میانگین عدد ناسلت در مقایسه با میانگین حجم ذرات برای زوایای مختلف بین اضلاع چپ و راست الف) $Ra=10^2$ و ب) $Ra=10^3$ و ج) $Ra=10^4$ Fig. 11. Variation of the average Nu number versus the average particle volume fraction for various inclination angles at (a): $Ra=10^2$ (b): $Ra=10^3$ and (c): $Ra=10^4$

الگوی جریان در رایلی‌های مختلف از مهمترین دلایل آن می‌باشد. علاوه بر این، با توجه به شکل ۱۱ در رایلی پایین با افزایش کسر حجمی نانوذرات، مقدار نوسلت متوسط در رایلی‌های پایین و شکل دوزنقه یکسان، به مقدار متوسط ۴۲ درصد در زاویه‌های ۰، ۳۰ و ۴۵ درجه افزایش می‌یابد. افزایش کسر حجمی ذرات باعث افزایش ویسکوزیته و هدایت حرارتی نانوسیال می‌گردد. در نتیجه، با افزایش غلظت نانوسیال، لایه مرزی حرارتی رشد می‌کند و از این رو تغییرات درجه حرارت در نزدیکی دیواره‌ها سبب کاهش میزان انتقال حرارت می‌شود. از سوی دیگر، افزایش کسر حجمی نانوذرات موجب افزایش هدایت حرارتی نانوسیال می‌گردد. وجود این دو اثر متضاد، منجر به شناسایی کسر حجمی بهینه می‌گردد. همانطور که در شکل ۱۱ الف) دیده می‌شود، در $Ra=10^2$ انتقال حرارت ناشی از مکانیسم اولیه

با تغییر زاویه اضلاع چپ و راست به ۳۰ درجه، ایزوترم‌ها به سمت راست متمایل می‌شوند، این رفتار منجر به اختلاط و افزایش انتقال حرارت می‌گردد. با تغییر زاویه اضلاع چپ و راست به ۴۵ درجه، خطوط ایزوترم دوباره تمایل به سمت راست دارند. و همچنان منجر به تشکیل مخلوط بهتر و انتقال حرارت بالاتر می‌گردد.

۵-۳- اثر تغییر زاویه اضلاع دوزنقه بر نرخ انتقال حرارت

در شکل ۱۱ تغییرات مقدار میانگین نوسلت با کسر حجمی نانوذرات مختلف در زاویه شیب مختلف اضلاع چپ و راست و عدد متغیر مشاهده می‌شود. نتیجه اول شکل ۱۱ این است که با افزایش عدد رایلی، مقدار نوسلت متوسط بسته به شکل دوزنقه متغیر می‌باشد. تاثیر نیروهای شناوری، اثرات همرفتی و تغییر



شکل ۱۲. پروفیل سرعت عمودی جریان در طول بی بعد در (الف) $Ra=10^2$ (ب) $Ra=10^3$ و (ج) $Ra=10^4$
 Fig. 12. The vertical velocity profile of the flow during the dimensionless time at (a): $Ra=10^2$ (b): $Ra=10^3$ and (c): $Ra=10^4$

زاویای مختلف بررسی شده است.

زاویه شیب اضلاع چپ و راست بین ۰، ۳۰ و ۴۵ درجه و عدد رایلی بین ۱۰۰ تا ۱۰۰۰۰ و کسر حجمی نانوذرات از ۰/۰۱ تا ۰/۰۴ متغیر می‌باشد. در کار حاضر میزان انتقال حرارت و توزیع نانوذرات بررسی شده است. حاصل این مطالعه نتیجه‌های زیر حاصل می‌گردد:

- در اعداد رایلی پایین با افزایش زاویه شیب اضلاع چپ و راست از ۰ تا ۴۵ درجه، میزان انتقال حرارت کاهش می‌یابد.
- در اعداد رایلی متوسط با افزایش زاویه شیب اضلاع چپ و راست از ۰ تا ۴۵ درجه، میزان انتقال حرارت کاهش می‌یابد.
- در اعداد رایلی بالا با افزایش زاویه شیب اضلاع چپ و راست از ۰ تا ۴۵ درجه، میزان انتقال حرارت روند کاهشی نداشته و در زاویه ۳۰ درجه حالت بهینه ناشی از غلبه نیروهای همرفتی به هدایت حاصل می‌گردد.

- در اعداد رایلی بالا، توزیع ذرات تقریباً یکنواخت باقی می‌ماند. بنابراین، مدل‌های همگن تک‌فاز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. با این حال، برای به دست آوردن راه حل‌های دقیق‌تر و مدل‌های دقیق

است، مقدار عدد ناسلت با افزایش ϕ_{ave} افزایش یافته و تغییر زاویه اضلاع چپ و راست در مقدار نوسلت متوسط تاثیر گذار می‌باشد. با این وجود، برای $Ra=10^2$ نیز رفتار مشابهی طبق شکل ۱۱ (ب) قابل انتظار می‌باشد. ولیکن آنچه از شکل ۱۱ (پ) مشاهده می‌گردد، با افزایش رایلی و متاثر بودن ترم بویانسی در حفره دوزنقه‌ای بهترین حالت انتقال حرارت در ۳۰ درجه، رخ داده و عدد نوسلت به میزان ۵/۵ درصد، نسبت به محفظه مربعی و ۶/۸ درصد نسبت به حالت ۴۵ درجه افزایش می‌یابد. این واقعیت به نوعی در نمودارهای شکل ۱۲ مربوط به سرعت عمودی بی‌بعد شده بر روی خط افقی مرکزی داخل حفره نیز مشاهده شده است. همانطور که قابل رویت است سرعت جریان در زاویه ۳۰ درجه از زاویه ۰ درجه کمتر و از زاویه ۴۵ درجه بیشتر می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، جریان همرفتی نانوسیال آب و نانوذرات اکسید آلومینیوم داخل حفره دوزنقه با استفاده از مدل دوفازی بونگیورنو در

عدد نوسلت	Nu
فشار	P
فشار بی‌بعد	P^*
عدد پراتل	Pr
عدد رایلی	Ra
عدد رینولدز براونی	Re_B
دما	T
دمای بی‌بعد	T^*
دمای انجماد سیال پایه	T_{fr}
سرعت براونی نانوذرات	u_B
بردار سرعت	V
بردار سرعت بی‌بعد	V^*
مختصات کارترین	x, y

مراجع

- [1] X. Wang, A. Mujumdar, Heat transfer characteristics of nanofluids: a review, International journal of thermal sciences, 46(1) (2007) 1-19.
- [2] Y. Xuan, W. Roetzel, Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids, International Journal of heat and Mass transfer, 43(19) (2000) 3701-3707.
- [3] S. Choi, J. Eastman, Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles, Argonne National Lab., IL (United States), 1995.
- [4] J. Buongiorno, Convective transport in nanofluids, Journal of heat transfer, 128(3) (2006) 240-250.
- [5] J. Eastman, S. Choi, S. Li, W. Yu, L. Thompson, Anomalously increased effective thermal conductivities of ethylene glycol-based nanofluids containing copper nanoparticles, Applied physics letters, 78(6) (2001) 718-720.
- [6] G. Polidori, S. Fohanno, C. Nguyen, A note on heat transfer modelling of Newtonian nanofluids in laminar free convection, International Journal of Thermal Sciences, 46(8) (2007) 739-744.

فیزیکی، مدل دوفاز مورد نیاز است.

- لایه مرزی کسر حجمی در امتداد دیواره‌های حفره ایجاد می‌شود. با افزایش عدد رایلی، ضخامت این لایه مرزی، نزدیک به دیواره‌های گرم و سرد، کاهش می‌یابد.

فهرست علائم

علائم یونانی

α	نفوذپذیری حرارتی $m^2 s^{-1}$
β	ضریب انبساط حرارتی K^{-1}
δ	پارامتر درجه حرارت نرمال
λ	پارامتر ثابت
μ	ویسکوزیته دینامیکی $kg m^{-1}s^{-1}$
ν	ویسکوزیته سینماتیکی $m^2 s^{-1}$
ρ	دانسیته $kg m^{-3}$
ϕ	کسر حجمی
ϕ^*	کسر حجمی بی‌بعد

زیرنویس‌ها

Ave	متوسط
C	دیواره سرد
H	دیواره گرم
F	سیال
P	ذرات
Nf	نانوسیال

علائم انگلیسی

C_p	ضریب گرمایی
D_B	ضریب نفوذ براونی
D_{Bo}	ضریب نفوذ براونی مرجع
d_f	قطر سیال پایه
d_p	قطر نانوذرات
D_T	ضریب نفوذ ترمو فورسس
G	شتاب گرانش
H	طول پایه و ارتفاع حفره
J_p	بردار شار نانوذرات
K	ضریب رسانندگی
K_B	ضریب بولتزمن
Le	عدد لوئیس
N_{BT}	نسبت براونی به ترموفورسس

- [15] J. Rostami, A. Abbassi, M. Saffar-Avval, Numerical Heat Transfer by Nanofluids in a wavy walls Microchannel using Dispersion Method, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, (2018). (in Persian)
- [16] M. Sepehrnia, H. Khorasanizadeh, R. Sadeghi, Investigation of nanofluid flow field and conjugate heat transfer in a MCHS with four different arrangements, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, (2017). (in Persian)
- [17] Z. Haddad, H.F. Oztop, E. Abu-Nada, A. Mataoui, A review on natural convective heat transfer of nanofluids, Renewable and Sustainable Energy Reviews, 16(7) (2012) 5363-5378.
- [18] C. Ho, W. Liu, Y. Chang, C. Lin, Natural convection heat transfer of alumina-water nanofluid in vertical square enclosures: an experimental study, International Journal of Thermal Sciences, 49(8) (2010) 1345-1353.
- [19] G. Sheikhzadeh, M. Dastmalchi, H. Khorasanizadeh, Effects of nanoparticles transport mechanisms on Al₂O₃-water nanofluid natural convection in a square enclosure, International Journal of Thermal Sciences, 66 (2013) 51-62.
- [20] F. Garoosi, S. Garoosi, K. Hooman, Numerical simulation of natural convection and mixed convection of the nanofluid in a square cavity using Buongiorno model, Powder technology, 268 (2014) 279-292.
- [21] A.A.A. Arani, A.A. Azemati, M. Rezaee, B.S. Hadavand, Numerical study of different conduction models for Al₂O₃-water nanofluid with variable properties inside a trapezoidal enclosure, Journal of Mechanical Science and Technology, 31(5) (2017) 2433-2441.
- [7] D. Tzou, Thermal instability of nanofluids in natural convection, International Journal of Heat and Mass Transfer, 51(11-12) (2008) 2967-2979.
- [8] M. Valipour, R. Masoodi, S. Rashidi, M. Bovand, M. Mirhosseini, A numerical study on convection around a square cylinder using Al₂O₃-H₂O nanofluid, Thermal science, 18(4) (2014) 1305-1314.
- [9] M. Corcione, E. Habib, A. Quintino, A two-phase numerical study of buoyancy-driven convection of alumina-water nanofluids in differentially-heated horizontal annuli, International Journal of Heat and Mass Transfer, 65 (2013) 327-338.
- [10] M. Sheikholeslami, M. Gorji-Bandpy, S. Soleimani, Two phase simulation of nanofluid flow and heat transfer using heatline analysis, International Communications in Heat and Mass Transfer, 47 (2013) 73-81.
- [11] M. Rashidi, A. Hosseini, I. Pop, S. Kumar, N. Freidoonimehr, Comparative numerical study of single and two-phase models of nanofluid heat transfer in wavy channel, Applied Mathematics and Mechanics, 35(7) (2014) 831-848.
- [12] S.Y. Motlagh, H. Soltanipour, Natural convection of Al₂O₃-water nanofluid in an inclined cavity using Buongiorno's two-phase model, International Journal of Thermal Sciences, 111 (2017) 310-320.
- [13] N. Bondareva, M. Sheremet, I. Pop, Magnetic field effect on the unsteady natural convection in a right-angle trapezoidal cavity filled with a nanofluid: Buongiorno's mathematical model, International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 25(8) (2015) 1924-1946.
- [14] I. Hashim, A. Alsabery, M. Sheremet, A. Chamkha, Numerical investigation of natural convection of Al₂O₃-water nanofluid in a wavy cavity with conductive inner block using Buongiorno's two-phase model, Advanced Powder Technology, 30(2) (2019) 399-414.

