

## Nonlinear Flapping-Torsional Free Vibration Analysis of Rotating Beams Considering the Coriolis Force

H. Arvin\*

Faculty of Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

**ABSTRACT:** The nonlinear free flapping-torsional vibration of rotating beams is investigated in this paper. The presented equations are based on the exact geometrical formulation in conjunction with the Cosserat theory for rods. The equations of motion are reduced to the flapping and torsional equations of motion for symmetric rectangular beams by neglecting the shear deformation. The governing equations are coupled to each other with the non-homogenous boundary conditions. By employing the direct method of multiple scales the effective nonlinearity coefficients of nonlinear natural frequencies are extracted. After validation of the current results, the effects of the rotating speed on the type and the value of the effective nonlinearity coefficient of natural frequencies are examined. The sign of the effective nonlinearity coefficient demonstrates the softening or hardening treatment of the corresponding nonlinear natural frequencies. It is concluded that ignoring the flapping-torsional coupling due to the Coriolis force, for odd modes makes some errors in the magnitude of effective nonlinearity but the type of nonlinearity is predicted correctly. On the other hand, in the even modes for average to high rotation speed in addition to incorrect estimation of the magnitude of effective nonlinearity the different type of nonlinearity is also predicted.

### Review History:

Received: 16 Mar. 2019

Revised: 20 May. 2019

Accepted: 8 Jul. 2019

Available Online: 15 Jul. 2019

### Keywords:

Rotating beams

Exact geometrical formulation

Coriolis force

Effective nonlinearity coefficient

Method of multiple scales

### 1- Introduction

Rotating beams are in sight in many industries, including aerospace industry and wind, water and gas power plants. On the other hand, the sensitivity and high cost of the related structures demands their accurate modeling and precise prediction of their dynamics and vibration. Therefore, in this paper, their nonlinear flapping-torsional free vibration is investigated.

Da Silva and Hedges [1] analyzed the effect of different nonlinear terms including geometrical nonlinearity and the terms caused by aerodynamic forces on the stability of rotating blades. Valverde and Garcia-Vallejo [2] presented two different formulations using the absolute nodal coordinate formulation versus the exact geometrical formulation to analyze the stability of rotating beams. Arvin et al. [3] examined the nonlinear free vibration of flapping and longitudinal motions of rotating beams based on the exact geometrical formulation by the implementation of the direct Method of Multiple Scales (MMS). Arvin and Lacarbonara [4] developed the precise formulation for composite rotating blades by providing nonlinear constitutive relationships for composite materials. Arvin and Bakhtiari-Nejad [5] applied the MMS on the discrete motion equations of rotating Euler-Bernoulli beams to achieve the nonlinear natural frequencies and the corresponding nonlinear normal modes.

After the literature review, it is observed that in studies conducted so far, the nonlinear free vibration analysis of

coupled flapping-torsional motions caused by the Coriolis force has not been investigated. Therefore, in this paper, taking into account the Coriolis force, the value and sign of the Effective Nonlinearity Coefficient (ENC) (indicating the softening or hardening of the nonlinear natural frequency) is evaluated for composite rotating beams with symmetric layup and rectangular cross-section.

### 2- The Composite Rotating Beam Modeling

A schematic of a multi-layer rotating beam which rotates by speed  $\omega_R$  around axis  $i_1$  with length  $L$ , width  $b$ , thickness  $h$  and rotor radius  $d_3$  is shown in Fig. 1(a). Two main coordinate systems are adopted to define the beam configurations;  $e_k$ -system for stress-free and  $b_k$ -system for the current configurations. A rotation tensor is determined to relate the two coordinate systems by employing an interface coordinate system  $e_k^{(1)}$  presented in Figs. 1(b) and 1(c).  $r(s,t) = s e_3 + u(s,t)$  is the position vector of the mass center of an arbitrary point along the beam span in the current configuration in which  $u(s,t)$  is the displacement vector of the considered point at position  $s$ .

The governing equations are on the basis of the Cosserat theory for rods. The un-shear ability assumption is also adjusted. Due to the brevity all the mathematical procedures are dropped and the readers are invited to see references [3,4] for more illustrations.

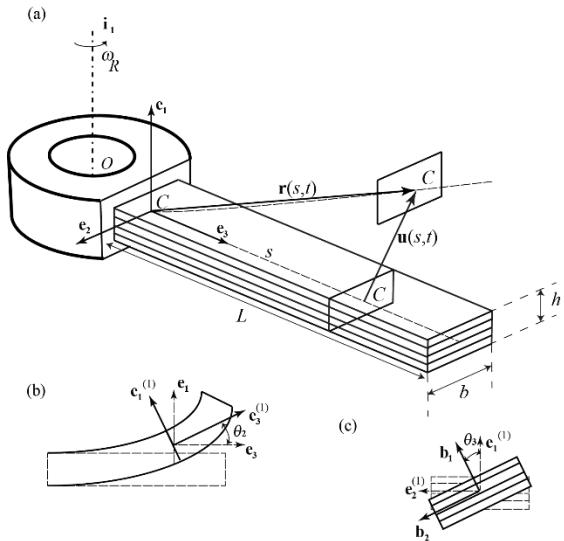
### 3- Solution Process

The direct MMS is applied on the dimensionless governing equations to derive the nonlinear natural frequency and the

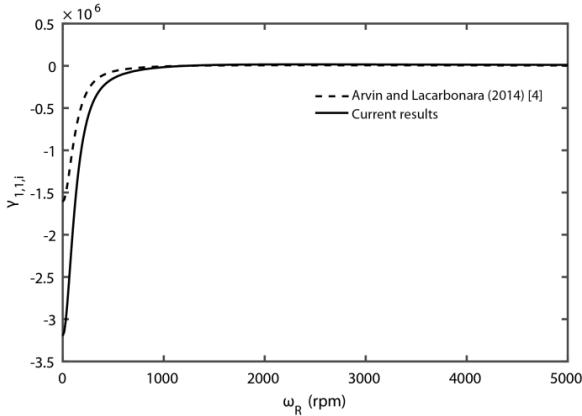
\*Corresponding author's email: hadi.arvin@sku.ac.ir



Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>.



**Fig. 1.** (a)-Schematic of rotating composite beam, (b)-Interface coordinate system, (c)-Current coordinate system



**Fig. 2.** Variations of the effective nonlinearity coefficient of the first flapping mode  $\gamma_{1,1,i}$  [current results (solid-lines) and Arvin and Lacarbonara (2014) [4] results (dashed-lines)]

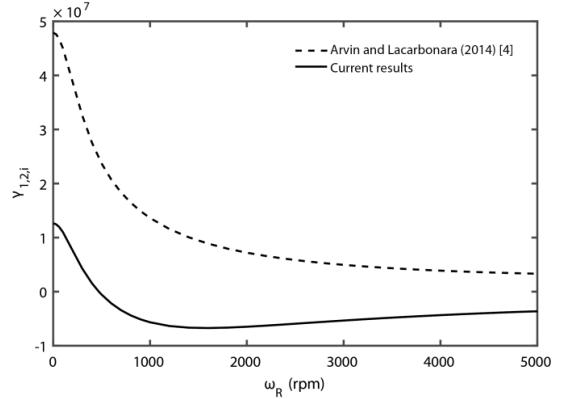
associated ENC. Thereafter, the real-valued amplitude and phase modulation equations are, respectively, read as:

$$a_k'(T_2) \approx 0, \quad a_k(T_2)\beta_k'(T_2) = \frac{1}{4}a_k(T_2)^3\gamma_{1,k,i} \quad (1)$$

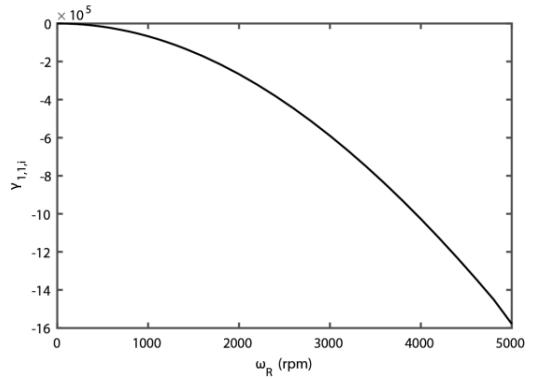
In which  $T_2$  is the slowest time scale [3], and  $\gamma_{1,k,i}$  is the  $k$  th ENC. Accordingly, the steady state solution leads to:

$$a_k(T_2) = \text{Constant} = a_k^0, \quad \beta_k(T_2) = \frac{1}{4}a_k^{02}\gamma_{1,k,i}T_2 + \beta_k^0 \quad (2)$$

where  $a_k^0$  and  $\beta_k^0$  are defined using the initial conditions. Thereafter, the  $k$  th nonlinear natural frequency is achieved by  $\omega_{1,k}^{NL} = \omega_{1,k} + 1/4a_k^{02}\gamma_{1,k,i}$  in which  $\omega_{1,k}$  is the  $k$  th linear natural frequency. It should be mentioned that the sign of  $\gamma_{1,k,i}$  determines the softening and hardening treatment of



**Fig. 3.** Variations of the effective nonlinearity coefficient of the second flapping mode  $\gamma_{1,2,i}$  [current results (solid-lines) and reference [4] results (dashed-lines)]



**Fig. 4.** Variations of the effective nonlinearity coefficient of the second flapping mode  $\gamma_{1,1,i}$  [current results (solid-lines) and Arvin and Lacarbonara (2014) [4] results (dashed-lines)]

the  $k$  th nonlinear natural frequency.

#### 4- Numerical Results

A rotating symmetric cross-ply laminated beam is considered for evaluation with layup  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ,  $d_3 = 0.2(\text{m})$ ,  $L = 2(\text{m})$ ,  $h = 0.005(\text{m})$  and  $b = 0.05(\text{m})$ . The Young and shear moduli, and the Poisson's ratio and the mass density are, respectively,  $E_1 = E_2 = 9.6(\text{GPa})$ ,  $E_3 = 145(\text{GPa})$ ,  $G_{12} = 3.4(\text{GPa})$ ,  $G_{13} = G_{23} = 4.1(\text{GPa})$ ,  $\nu_{31} = \nu_{32} = 0.3$ ,  $\nu_{21} = 0.5$ ,  $\rho = 1389(\text{kg/m}^3)$ . The ENC of the first flapping mode  $\gamma_{1,1,i}$  is shown in Fig. 2 in comparison with the results of reference [4]. It is worth to note that reference [4] has ignored the torsional motion by dropping the Coriolis force influence. The computed values for the ENC are different however the same sign is estimated. The ENC of the second flapping mode is depicted in Fig. 3. It is clear that after slow rotation speeds the continuous hardening treatment predicted by reference [4] alters to a softening behaviour in the present analysis.

The ENC of the first torsional mode is presented in Fig. 4. Fig. 4 illustrates that the ENC for stationary beams is zero however by increasing the rotating speed due to the coupling made by Coriolis force, it induces a monotonically enlarging softening treatment.

## 5- Conclusions

In this paper, the nonlinear free vibration of symmetric rotating composite un-shear able beams was studied regarding the flapping-torsional motions. The most important results read as:

1. The first torsional mode represents a softening treatment for rotating beams;
2. In the first flapping mode, the sign of the effective nonlinearity coefficient estimated in both cases, the flapping-torsional and the flapping-axial examinations, is the same.
3. The sign of the effective nonlinearity coefficient for the second flapping mode is identical for the flapping-torsional and the flapping-axial investigations just at low rotational speeds.

## Acknowledgment

This work has been financially supported by the research deputy of Shahrekord University. The grant number was 96GRD1M1754.

## References

- [1] M.C. da Silva, D. Hodges, Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades-II. Response and stability results, *Vertica*, 10(2) (1986) 171-186.
- [2] J. Valverde, D. García-Vallejo, Stability analysis of a substructured model of the rotating beam, *Nonlinear dynamics*, 55(4) (2009) 355-372.
- [3] H. Arvin, W. Lacarbonara, F. Bakhtiari-Nejad, A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades—part 2: flapping nonlinear normal modes, *Nonlinear Dynamics*, 70(3) (2012) 2279-2301.
- [4] H. Arvin, W. Lacarbonara, A fully nonlinear dynamic formulation for rotating composite beams: nonlinear normal modes in flapping, *Composite structures*, 109 (2014) 93-105.
- [5] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Non-linear modal analysis of a rotating beam, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(6) (2011) 877-897.





## ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی-پیچشی تیرهای چرخان با در نظر گرفتن نیروی کربولیس

هادی آروین بروجنی\*

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

## تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۲۵

بازنگری: ۱۳۹۸/۰۲/۳۰

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۴/۱۷

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۴/۲۴

## کلمات کلیدی:

تیرهای چرخان  
فرمولاسیون دقیق هندسی  
نیروی کربولیس  
ضریب غیرخطی مؤثر  
روش مقیاس‌های چندگانه

**خلاصه:** در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی-پیچشی تیرهای چرخان پرداخته می‌شود. معادلات ارائه شده بر مبنای فرمولاسیون دقیق هندسی بوده که بر اساس تئوری کوزرات برای میله‌ها استخراج گردیده‌اند. با صرفنظر از اثر تعییرشکل برشی، دو معادله عرضی و پیچشی برای تیرهای مستطیلی متقاضان به دست می‌آید. این معادلات با یکدیگر کوپل بوده و دارای شرط‌های مرزی غیرهمگن نیز می‌باشند. با اعمال روش مستقیم مقیاس‌های چندگانه رابطه ضریب غیرخطی مؤثر در فرکانس‌های طبیعی غیرخطی استخراج می‌گردد. سپس با مقایسه نتایج فرکانس غیرخطی با نتایج موجود در مقالات دیگر نتایج حاضر تایید می‌گردد. پس از آن به بررسی تأثیر سرعت چرخش بر علامت و مقدار ضریب غیرخطی مؤثر در فرکانس‌های طبیعی پرداخته می‌شود. علامت ضریب غیرخطی مؤثر نوع نرم‌شوندگی و سخت‌شوندگی فرکانس طبیعی غیرخطی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد که با در نظر نگرفتن کوپل پیچش و خمی ناشی از نیروی کربولیس با وجود آنکه در مودهای فرد حرکت عرضی علامت ضریب غیرخطی مؤثر یکسانی پیش‌بینی می‌گردد اما مقدار ضریب غیرخطی مؤثر متفاوت حاصل می‌شود. از طرف دیگر در مودهای زوج عرضی و در سرعت بالا علاوه بر مقدار ضریب غیرخطی مؤثر، علامت ضریب غیرخطی مؤثر نیز متفاوت پیش‌بینی می‌گردد.

## ۱- مقدمه

صفحه و پیچشی پرداختند. هاجز [۴] در سال ۱۹۹۰ با در نظر گرفتن تاییدگی و استفاده از زوایای رودریگز فرمولاسیون دقیقی برای تحلیل دینامیکی تیرهای چرخان آنیزوتروپ پیش-پیچیده شده ارائه نمود. هاجز [۵] در سال ۱۹۹۵ تأثیر ویژگی‌های خاصی از شرایط مرزی و نیروهای مرکزگرا را بر روی ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکوی چرخان روش نمود. آوراموف و همکاران [۶] در سال ۲۰۰۸ معادلات حرکت تیرهای نازک چرخان با سطح مقطع متغیر و دارای خروج از مرکزی بین مرکز سطح و مرکز جرم را با استفاده از اصل همیلتون استخراج نمود. والورده و گارسیا-والجو [۷] در سال ۲۰۰۹ با بکارگیری فرمولاسیون مختصاتی گرهی مطلق در مقابل روش فرمولاسیون دقیق بر مبنای تئوری کوزرات برای میله‌ها به مقایسه نتایج این دو روش برای پایداری تیرهای چرخان پرداختند. لاکاربونارا و همکاران [۸] در سال ۲۰۱۲ با استفاده از روش فرمولاسیون دقیق هندسی معادلات حاکم بر پره‌های چرخان با پیش‌پیچش اولیه و متغیر در طول پره را بدست آوردند. آروین و همکاران [۹] در همان سال با استفاده از فرمولاسیون دقیق هندسی بدست آمده در مرجع [۸] با صرفنظر از نیروی کربولیس، معادلات دقیق عرضی و

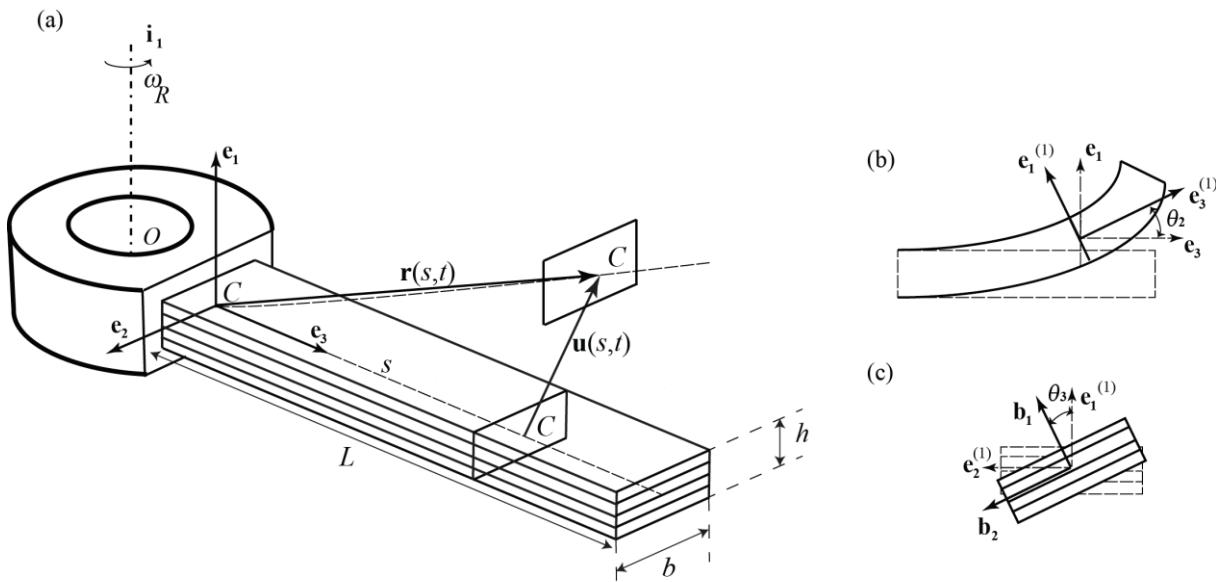
تیرهای چرخان در بسیاری از صنایع دیده می‌شوند که از جمله آنها می‌توان به صنایع هواپضا، نیروگاه‌های بادی، آبی و گازی اشاره نمود. از طرفی بدليل حساس بودن و هزینه‌های بالای سازه‌های مرتبط، مدل نمودن دقیق آنها و پیش‌بینی دینامیک و ارتعاش آنها از مسائل بسیار مهم برای طراحان می‌باشد. لذا در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی-پیچشی آنها پرداخته می‌شود.

هاجز و داول [۱] در سال ۱۹۷۴ فرمولاسیون نسبتاً دقیقی برای تیر چرخان ایزوتروپ غیرمتقارن برای ارتعاش با دامنه‌های متوسط ارائه نمودند. داسیلووا و هاجز [۲] در سال ۱۹۸۶ معادلات حرکت تیری چرخان با پیش‌پیچش اولیه متغیر در طول تیر را با استفاده از اصل همیلتون استخراج نمودند. داسیلووا و هاجز [۳] در همین سال به تحلیل تأثیر ترم‌های غیرخطی متفاوت شامل غیرخطی هندسی و ترم‌های غیرخطی ناشی از نیروهای آبرودینامیک بر ناپایداری حرکت‌های جفت‌شده عرضی، عرضی خارج از

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: hadi.arvin@sku.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسنده‌گان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.





شکل ۱: (الف) شماتیک تیر کامپوزیتی چرخان، (ب) دستگاه مختصات واسطه، (پ) دستگاه مختصات جاری

Fig. 1. (a)-Schematic of rotating composite beam, (b)-Interface coordinate system,(c)-Current coordinate system

کامپوزیتی با لایه‌چینی متقارن و سطح مقطع مستطیلی پرداخته می‌شود. در ابتدا با استفاده از روابط ارائه شده در مرجع [۸] معادلات دقیق تیرها بازنویسی می‌گردد. سپس با صرف نظر از تغییرشکل برنشی معادلات عرضی و پیچشی استخراج می‌شوند. پس از بی‌بعدسازی معادلات حرکت با استفاده از روش مستقیم مقیاس‌های چندگانه رابطه ضریب غیرخطی مؤثر استخراج می‌گردد. در قسمت ارائه نتایج عددی در پی اعتبارسنجی نتایج حاضر به بررسی تأثیر سرعت چرخش بر علامت ضریب غیرخطی مؤثر مودهای اول تا سوم عرضی و اول و دوم پیچشی پرداخته می‌شود.

## ۲- معادلات حرکت

شماتیکی از یک تیر چرخان چند لایه با طول  $L$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  در شکل ۱(الف) نشان داده شده است. این تیر در حال چرخش با سرعت ثابت  $\omega_R$  حول محور  $i_1$  می‌باشد. در این مقاله حرکت عرضی-پیچشی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. «متغیر مکان مرکز جرم سطح مقطع دلخواه می‌باشد که از مرکز جرم سطح مقطع متصل به روتور اندازه‌گیری می‌شود. موقعیت مرکز جرم سطح مقطع متصل به روتور نسبت به مبدأ  $O$  توسط رابطه  $d = d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3$  مشخص می‌گردد که با در نظر گرفتن هم‌سطحی بین مبدأ  $O$  و مرکز سطح مقطع متصل به روتور  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  خواهد بود. ( $\theta = \theta_1 + \theta_2$ )

طولی را استخراج نموده و سپس با استفاده از روش مستقیم مقیاس‌های چندگانه به بررسی علامت ضریب غیرخطی مؤثر مودهای متفاوت عرضی و تأثیر سرعت چرخش بر آن پرداختند. آروین و لاکاربونارا [۱۰] در سال ۲۰۱۴ با ارائه روابط دقیق ساختاری برای کامپوزیت‌ها، فرمولاسیون دقیق ارائه شده در مرجع [۸] را برای پره‌های چرخان کامپوزیت توسعه دادند. سپس مطالعه مشابه مرجع [۹] را برای بررسی تأثیر سرعت چرخش بر علامت ضریب غیرخطی مؤثر انجام دادند. تورهان و بولت [۱۱] در سال ۲۰۰۹ با استفاده از روش لینستد-پوآنکاره اثر سرعت چرخش بر پاسخ غیرخطی شامل تغییر علامت ضریب غیرخطی مؤثر از سخت‌شونده به نرم‌شونده و بر عکس و پدیده‌های پرش هارمونیک و سوپر هارمونیک را بررسی نمودند. آروین و بختیاری نژاد [۱۲] در سال ۲۰۱۱ روش مقیاس‌های چندگانه را بر مطالعات گسسته‌سازی شده تیر چرخان اویلر-برنولی اعمال و مودهای نرمال غیرخطی را استخراج نمودند.

پس از بررسی پژوهش‌های انجام شده مشاهده می‌گردد که در مطالعات انجام شده تا کنون در بررسی ارتعاشات غیرخطی به بررسی حرکت جفت شده خمی-پیچشی که به دلیل نیروی کربولیس ایجاد می‌گردد پرداخته نشده است. لذا در این مقاله با در نظر گرفتن نیروی کربولیس به بررسی مقدار و علامت ضریب غیرخطی مؤثر (که نشان دهنده نرم‌شوندگی و یا سخت‌شوندگی فرکانس طبیعی غیرخطی مورد نظر است) تیرهای چرخان

$\partial_t b_k = \bar{\mu} \times b_k = \bar{\mu} \times b_3$  به دست می‌آید [۱۳] و در پیوست الف ارائه شده‌اند.  $Q_1$  نیروی برشی در امتداد محور  $b_1$  و  $N = EA(v-1)$  نیروی محوری در امتداد محور  $b_3$  می‌باشد و در آن  $EA$  سفتی طولی است. شایان ذکر است که  $v$  کشیدگی پیکربندی کنونی نسبت به کشیدگی ناشی از پیش‌تنش می‌باشد که در پایان این بخش طریقه محاسبه آن توضیح داده می‌شود.  $EJ_{22}\ddot{u}_2 = M_2 = EJ_{22}\ddot{u}_2$  گشتاور خمی حول محور  $b_2$  می‌باشد که در آن  $EJ_{22}$  سفتی خمی متناظر است.  $T = GJ_{33}\ddot{u}_3$  پیچش حول محور  $b_3$  می‌باشد و در آن  $GJ_{33}$  سفتی پیچشی متناظر است.  $\rho$  چگالی تیر و  $\rho A$  جرم بر واحد طول تیر می‌باشد؛  $\rho J_{11}$  و  $\rho J_{22}$  به ترتیب ممان اینرسی جرمی حول محورهای  $b_1$ ،  $b_2$  و  $b_3$  می‌باشند.  $\partial_s$  و  $\partial_t$  به ترتیب نشان دهنده مشتق پاره‌ای نسبت به متغیرهای مکان و زمان می‌باشند.  $N^0$  نیز نیروی محوری ناشی از پیش‌تنش می‌باشد. برای تیرهای چرخان متقارن معادله و شرایط مرزی لازم جهت محاسبه نیروی محوری پیش‌تنش به صورت رابطه‌های (۲) و (۳) ساده می‌گردند [۸]:

$$N^{0r} + \rho A \omega_R^2 (d_3 + s + u_3^0) = 0 \quad (2)$$

$$u_3^0(0) = 0, \quad N^0(L) = 0. \quad (3)$$

که (۰) نشان دهنده مشتق نسبت به متغیر مکان می‌باشد.

برای صرفنظر از تغییر شکل برشی، تغییرشکل برشی  $\eta_1$  صفر قرار داده می‌شود. با برابر صفر قرار دادن  $\eta_1$  و استفاده از رابطه بدینهی  $\cos(\theta_2(s,t)) = \frac{1/\nu_{inv}^0}{\bar{v}}$ ،  $\sin(\theta_2(s,t)) = \frac{\partial_s u_1}{\bar{v}}$  و  $\cos^2(\theta_2(s,t)) + \sin^2(\theta_2(s,t)) = 1$  و  $\theta_2(s,t) = \arctan(\frac{\partial_s u_1}{1/\nu_{inv}^0})$  خواهد بود. حال  $Q_1$  از معادله دوم رابطه (۱) استخراج و در معادله اول رابطه (۱) جایگزین شده و با توجه به روابط به دست آمده برای  $\theta_2(s,t)$  معادله حرکت عرضی به دست آید. بدین ترتیب معادلات حرکت به دو معادله عرضی و پیچشی کاهش می‌یابند. در تیرهای متقارن چرخان معادلات عرضی و پیچشی با یکدیگر در قسمت خطی وابسته می‌باشند. دلیل وابستگی خطی این معادلات نیروی کربولیس می‌باشد که در بسیاری از مقالات از آن صرفنظر می‌گردد. در این مقاله برای اولین بار به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی خمی-پیچشی تیرهای چرخان به دلیل در نظر گرفتن اثر نیروی کربولیس پرداخته می‌شود.

برای تیر چرخان یکسرگیردار شرایط مرزی متناظر به صورت رابطه (۴) مشخص می‌گردد.

برابر ۱  $e_3^0(s,t) = u_3^0(s,t) e_3 + u_1(s,t) e_1$  است. شایان ذکر است که  $u_1(s,t)$  تغییر شکل طولی ناشی از نیروی گریز از مرکز حاصل از چرخش و  $(s,t)$  بردار مکان مرکز جرم سطح مقطع در نظر گرفته در موقعیت  $s$  است و مطابق شکل (الف) توسط رابطه  $e_3^0(s,t) = s e_3 + u(s,t)$  حاصل می‌شود. جهت فرمولاسیون دقیق معادلات دو دستگاه مختصات چرخان که یکی تنها دارای حرکت دوران تیر بوده و در مرکز جرم سطح مقطع متصل به روتور قرار دارد و بردارهای پایه آن با  $e_k$  نمایش داده می‌شود و دیگری در موقعیت  $s$  قرار دارد و جهت سطح مقطع جاری را نشان می‌دهد و بردارهای پایه آن با  $b_k$  نمایش داده می‌شود در نظر گرفته شده است. لذا جهت داشتن معادلات دقیق دو ماتریس انتقال  $e_k$  متعامد در نظر گرفته می‌شود که به ترتیب از دستگاه مختصات چرخان با چرخش حول محور  $e_2$  با زاویه  $\theta_2(s,t)$  به دستگاه مختصات واسطه  $e_k$  رفته (شکل (ب)) و سپس از دستگاه واسط با چرخش حول محور  $e_3$  با زاویه  $\theta_3(s,t)$  به دستگاه مختصات نهایی در پیکربندی جاری می‌رویم (شکل (پ)). ماتریس انتقال نهایی از دستگاه مختصات چرخان  $R$  به مختصات جاری  $b_k$  به صورت  $b_k = R \cdot e_k$  خواهد بود که  $R$  تansور چرخش می‌باشد و در پیوست الف ارائه شده است. معادله‌های حرکت مشخص کننده حرکت‌های عرضی در امتداد محورهای  $e_1$  و خمی حول محور  $e_2$  و حرکت پیچشی به ترتیب عبارتند از [۸]:

$$\begin{aligned} & [\partial_s Q_1 + \bar{\mu}_2 N] R_{1,1} + [\bar{\mu}_3 Q_1 - \bar{\mu}_1 N] R_{2,1} \\ & + [\partial_s N - \bar{\mu}_2 Q_1] R_{3,1} = \rho A \partial_{tt} u_1 \\ & \partial_s M_2 - \bar{\mu}_1 T + \bar{\nu} Q_1 - \partial_s u_1 N^0 R_{2,2} = \\ & \rho J_{22} \partial_t \bar{\omega}_2 - \rho J_{22} \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_3 \\ & \partial_s T + \bar{\mu}_1 M_2 - \partial_s u_1 N^0 R_{3,2} = \\ & \rho J_{33} \partial_t \bar{\omega}_3 + (\rho J_{22} - \rho J_{11}) \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \end{aligned} \quad (1)$$

که در این رابطه  $\bar{\nu}$  کشیدگی کلی می‌باشد که از رابطه  $\bar{t}^* = \partial_s r = \bar{\nu} b_3 + \eta_1 b_1$  به دست می‌آید [۱۳] که در آن  $\eta_1$  تغییرشکل برشی در راستای محور  $b_1$  است. بدین ترتیب  $(\bar{\nu})^2 + (\partial_s u_1)^2$  خواهد شد که در آن  $\frac{1}{\nu_{inv}^0} = 1 + u_3^{0r}(s)$  کشیدگی ناشی از پیش‌تنش بوجود آمده از نیروی گریز از مرکز می‌باشد.  $\bar{\omega}$  و  $\bar{\omega}_i$  به ترتیب بردار انجنا و بردار سرعت چرخشی کلی می‌باشند که به ترتیب با مشتق‌گیری نسبت به مکان و زمان از بردارهای پایه جاری به صورت  $\partial_s b_k = \bar{\mu} \times b_k$  و

پواسون است.  
فرم بدون بعد معادله نیروی محوری ناشی از پیشتنش (رابطه (۲)) و شرایط مرزی متناظرش (رابطه (۳)) نیز به صورت رابطه های (۸) و (۹) خواهد بود:

$$\alpha_{22} u_3^{0''}(s) + \lambda^2(r+s+u_3^0(s)) = 0 \quad (8)$$

$$u_3^0(0) = 0, \quad N^0(1) = 0, \quad (9)$$

حل این معادله منجر به رابطه (۱۰) می گردد:

$$u_3^0(s) = \sin(\lambda_a s) \frac{(\sin(\lambda_a))\lambda r + \sqrt{\alpha_{22}}}{(\cos(\lambda_a))\lambda} + \cos(\lambda_a s)r - s - r \quad (10)$$

که در این رابطه  $r = d_3/L$  و  $\lambda_a = \lambda/\sqrt{\alpha_{22}}$  است.

### ۳- روش مقیاس های چندگانه

پس از استخراج معادلات بدون بعد، در این بخش روش مقیاس های چندگانه مستقیم جهت محاسبه فرکانس های طبیعی غیرخطی به کار گرفته می شود. ابتدا فرم مرتبه بندی شده تغییر مکان عرضی و پیچشی به صورت رابطه (۱۱) در نظر گرفته می شود [۱۳]:

$$u_1(s, T_0, T_1, T_2) = \varepsilon u_{1,0}(s, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_{1,1}(s, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 u_{1,2}(s, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4) \quad (11)$$

$$\theta_3(s, T_0, T_1, T_2) = \varepsilon \theta_{3,0}(s, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \theta_{3,1}(s, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 \theta_{3,2}(s, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4)$$

که در این رابطه ها  $\varepsilon$  پارامتر معمول مورد استفاده در روش های اغتشاشات است [۱۴].

با جایگذاری فرم مرتبه بندی شده تغییر مکان عرضی و پیچشی در معادلات بدون بعد عرضی و پیچشی و شرایط مرزی مرتبط شان و استفاده از مشتقه ای اول و دوم زمانی روش مقیاس های چندگانه به صورت  $d^2/dt^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + O(\varepsilon^3)$  معادلات مرتبه و  $d^2/dt^2$  می باشد که در پیوست ب ارائه شده اند. لازم به ذکر است که به ترتیب، از زیرنوشت های ۱ و ۶ نمایش داده شده اند. جهت مشخص نمودن مولفه های معادلات عرضی و پیچشی در این مقاله استفاده گردیده است.  $n_{BC}^{(3)}$  ترم غیرخطی مرتبه سوم شرایط مرزی می باشد که در پیوست ب ارائه شده است. در معادلات مذکور  $\lambda = \omega_R / \omega_0$  می باشد که  $\bar{v} = EJ_{33} / 2(1 + \bar{v})$  ضریب  $GJ_{33} = EJ_{33} / 2(1 + \bar{v})$  و  $\alpha_{i,2} = EAL^2 / EJ_{ii}$  ،

$$u_1(0,t) = 0, \theta_2(0,t) = 0, \theta_3(0,t) = 0, \quad Q_1(L,t) = 0, M_2(L,t) = 0, T(L,t) = 0, \quad (4)$$

لازم به ذکر است که در تیرهای چرخان متقارن با صرفنظر از تغییر شکل برشی نیروی محوری کلی از رابطه  $\bar{N}b_3 = Nb_3 + N^0 e_3$  به دست می آید که با توجه به رابطه انتقال بین بردارهای پایه  $\bar{N}b_3 = Nb_3 + N^0 b_3 R_{3,3}$  خواهد شد و بدین ترتیب  $\bar{v} = v^0 - (\nu^0 - 1)R_{3,3}$  خواهد بود.

### ۲-۱- فرم بدون بعد معادلات حرکت

معادلات حرکت با اعمال پارامترهای رابطه (۵) به فرم بی بعد تبدیل می گردد:

$$\hat{s} = s/L, \hat{t} = \omega_0 t, \hat{u}_1 = \frac{1}{L} u_1, \hat{\theta}_3 = \theta_3 \quad (5)$$

که در این رابطه  $\omega_0 = \sqrt{EJ_{22}/(\rho A L^4)}$  فرکانس مشخصه می باشد. حال به منظور ساده سازی معادلات علامت (۶) از این معادلات حذف می گردد تا معادلات عرضی و پیچشی بدون بعد و شرایط مرزی متناظر شان در انتهای تیر به صورت رابطه های (۶) و (۷) ساده گردد:

$$I \cdot \ddot{u} + G \cdot \dot{u} + L \cdot u + i_0^{(3)}(u, u, \dot{u}) + i_1^{(3)}(u, \dot{u}, u) + i_2^{(3)}(u, u, \ddot{u}) + n^{(3)}(u, u, u) = 0 \quad (6)$$

$$I_{BC} \cdot \ddot{u} + G_{BC} \cdot \dot{u} + L_{BC} \cdot u + n_{BC}^{(3)} = 0, \quad (7)$$

که در این رابطه ها  $u(s, t) = [u_1(s, t), \theta_3(s, t)]^T$  می باشد.  $I$ ،  $G$  و  $L$  نیز به ترتیب اپراتورهای اینرسی، ژیروسکوپی و سفتی می باشند و در پیوست ب ارائه شده اند.  $i_0^{(3)}$ ،  $i_1^{(3)}$  و  $i_2^{(3)}$  ترم های غیرخطی اینرسی درجه سوم و  $n^{(3)}$  ترم غیرخطی سفتی درجه سوم می باشند که در پیوست ب  $n^{(3)}$  نمایش داده شده اند. لازم به ذکر است که به ترتیب، از زیرنوشت های ۱ و ۶ پیوست ب ارائه شده اند. جهت مشخص نمودن مولفه های معادلات عرضی و پیچشی در این مقاله استفاده گردیده است.  $n_{BC}^{(3)}$  ترم غیرخطی مرتبه سوم شرایط مرزی می باشد که در پیوست ب ارائه شده است. در معادلات مذکور  $\lambda = \omega_R / \omega_0$  می باشد که  $\bar{v} = EJ_{33} / 2(1 + \bar{v})$  ضریب  $GJ_{33} = EJ_{33} / 2(1 + \bar{v})$  و  $\alpha_{i,2} = EAL^2 / EJ_{ii}$  ،

$RHS(O_{BC12}^{(3)})$  و  $RHS(O_{BC11}^{(3)})$ ،  $RHS(O_{Eq6}^{(3)})$ ،  $RHS(O_{Eq1}^{(3)})$  که در پیوست تاریخ شده‌اند. (۱۲) و (۱۳) استخراج می‌گردد:

حل معادلات مرتبه اول یعنی رابطه (۱۲) و شرایط مرزی مربوط به آن‌ها، همان حل ارتعاشات خطی سیستم بوده که در اینجا با استفاده از روش گلرکین محاسبه می‌گردد [۱۵] و به صورت رابطه (۱۸) قابل بیان است:

$$\begin{aligned} u_{1,0} &= \psi_{1,k}(s)[A_k(T_1, T_2)e^{i\omega_{1,k}T_0} + CC] \\ \theta_{3,0} &= \psi_{6,k}(s)[A_k(T_1, T_2)e^{i\omega_{1,k}T_0} + CC] \end{aligned} \quad (۱۸)$$

که در این رابطه‌ها  $\psi_{1,k}$  و  $\psi_{6,k}$  به ترتیب مودهای خطی عرضی و پیچشی و  $\omega_{1,k}$  فرکانس خطی عرضی-پیچشی ام می‌باشد.  $A_k(T_1, T_2)$  دامنه مختلط مود ام،  $CC$  نمایشگر مزدوج مختلط ترم‌های پیش از خود و  $i$  موهومی یکه می‌باشد.

جهت حل معادلات مرتبه دوم ابتدا حل مرتبه اول یعنی  $u_{1,0}$  و  $\theta_{3,0}$  از رابطه (۱۸) در رابطه (۱۴) و شرایط مرزی مربوطه جایگزین می‌گردد. برای داشتن پاسخ پریودیک در مرتبه دوم باید ترم سکولار این دسته معادلات حذف گردد. بدین ترتیب به دلیل داشتن شرایط مرزی غیر همگن و داشتن معادلات کوپل با انجام فرآیندی مشابه با مرجع [۱۶] که بر مبنای تعامل مودهای می‌باشد ترم سکولار به صورت رابطه (۱۹) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\psi_{1,k} \cdot C_{1,1}(s, T_1, T_2) + \psi_{6,k} \cdot C_{1,6}(s, T_1, T_2)] ds \\ - C_{1,BC11}(T_1, T_2) \cdot \psi_{1,k} \Big|_{s=1} \\ - C_{1,BC6}(T_1, T_2) \cdot \psi_{6,k} \Big|_{s=1} \\ - C_{1,BC12}(T_1, T_2) \cdot \psi_{1,k} \Big|_{s=1} = 0 \end{aligned} \quad (۱۹)$$

که در این رابطه  $C_{1,1}(s, T_1, T_2)$  و  $C_{1,6}(s, T_1, T_2)$  به ترتیب ضریب  $e^{i\omega_{1,k}T_0}$  در سمت راست معادله اول رابطه (۱۴) و معادله دوم رابطه (۱۴) می‌باشند.  $C_{1,BC12}(T_1, T_2)$ ،  $C_{1,BC11}(T_1, T_2)$  و  $C_{1,BC6}(T_1, T_2)$  نیز به ترتیب ضریب  $e^{i\omega_{1,k}T_0}$  در سمت راست معادله اول رابطه (۱۵)، معادله دوم رابطه (۱۵) و معادله سوم رابطه (۱۵) می‌باشند. بدین ترتیب ترم سکولار پس از ساده سازی به صورت رابطه (۲۰) ساده می‌گردد:

$$\begin{aligned} \text{Secular Order } \varepsilon^2 := & [2i\omega_{1,k}\xi_{1,1,1} + \frac{2(-2i\omega_{1,k}\xi_{1,1,2} + \lambda\xi_{1,6})}{\alpha_{22}} \\ & + \lambda\frac{\alpha_{12} - \alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{12}}\xi_{6,1} + \frac{2i\omega_{1,k}\xi_{6,6} + \lambda\xi_{6,1}}{\alpha_{32}} \\ & - iC_2 - C_1]D_1 A_k(T_1, T_2) \end{aligned} \quad (۲۰)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^1): \\ -I_{11}D_0^2[u_{1,0}] + G_{16}D_0[\theta_{3,0}] + L_{11}[u_{1,0}] = 0, \\ -I_{66}D_0^2[\theta_{3,0}] + G_{61}D_0[u_{1,0}] + L_{66}[\theta_{3,0}] = 0 \end{aligned} \quad (۱۲)$$

$$\begin{aligned} -I_{BC,11}D_0^2[u_{1,0}] + G_{BC,11}D_0[\theta_{3,0}] + L_{BC,11}[u_{1,0}] = 0, \\ -I_{BC,12}D_0^2[u_{1,0}] + G_{BC,12}D_0[\theta_{3,0}] + L_{BC,12}[u_{1,0}] = 0, \\ -I_{BC,6}D_0^2[\theta_{3,0}] + G_{BC,6}D_0[u_{1,0}] + L_{BC,6}[\theta_{3,0}] = 0, \end{aligned} \quad (۱۳)$$

لازم به ذکر است زیرنوشت‌های  $BC,11$ ،  $BC,12$  و  $BC,6$  به ترتیب معرف شرایط مرزی  $T(1,t) = 0$ ،  $Q_1(1,t) = 0$  و  $M_2(1,t) = 0$  می‌باشند. معادلات مرتبه بندی شده مرتبه دوم و شرایط مرزی مربوط به آن‌ها نیز به صورت رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) استخراج می‌گردند:

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2): \\ -I_{11}D_0^2[u_{1,1}] + G_{16}D_0[\theta_{3,1}] + L_{11}[u_{1,1}] = RHS(O_{Eq1}^{(2)}), \\ -I_{66}D_0^2[\theta_{3,1}] + G_{61}D_0[u_{1,1}] + L_{66}[\theta_{3,1}] = RHS(O_{Eq6}^{(2)}), \end{aligned} \quad (۱۴)$$

$$\begin{aligned} -I_{BC,11}D_0^2[u_{1,1}] + G_{BC,11}D_0[\theta_{3,1}] \\ + L_{BC,11}[u_{1,1}] = RHS(O_{BC11}^{(2)}), \\ -I_{BC,12}D_0^2[u_{1,1}] + G_{BC,12}D_0[\theta_{3,1}] + L_{BC,12}[u_{1,1}] = 0, \\ -I_{BC,6}D_0^2[\theta_{3,1}] + G_{BC,6}D_0[u_{1,1}] + L_{BC,6}[\theta_{3,1}] = 0, \end{aligned} \quad (۱۵)$$

که  $RHS(O_{BC11}^{(2)})$  و  $RHS(O_{Eq6}^{(2)})$  و  $RHS(O_{Eq1}^{(2)})$  در پیوست ت نمایش داده شده‌اند.

در آخر معادلات مرتبه بندی شده مرتبه سوم و شرایط مرزی متناظر نیز به صورت رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) خواهد بود:

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^3): \\ -I_{11}D_0^2[u_{1,2}] + G_{16}D_0[\theta_{3,2}] + L_{11}[u_{1,2}] = RHS(O_{Eq1}^{(3)}), \\ -I_{66}D_0^2[\theta_{3,2}] + G_{61}D_0[u_{1,2}] + L_{66}[\theta_{3,2}] = RHS(O_{Eq6}^{(3)}), \end{aligned} \quad (۱۶)$$

$$\begin{aligned} -I_{BC,11}D_0^2[u_{1,2}] + G_{BC,11}D_0[\theta_{3,2}] + L_{BC,11}[u_{1,2}] = RHS(O_{BC11}^{(3)}), \\ -I_{BC,12}D_0^2[u_{1,2}] + G_{BC,12}D_0[\theta_{3,2}] + L_{BC,12}[u_{1,2}] = RHS(O_{BC12}^{(3)}), \\ -I_{BC,6}D_0^2[\theta_{3,2}] + G_{BC,6}D_0[u_{1,2}] + L_{BC,6}[\theta_{3,2}] = 0, \end{aligned} \quad (۱۷)$$

طبق تحلیل عددی انجام گرفته در بخش نتایج که در شکل ۵(ج) نمایش داده شده، مشاهده می‌گردد که مقدار  $\gamma_{1,k,R}$  در مقایسه با مقدار  $\gamma_{1,k,i}$  بسیار ناچیز بوده و قابل صرف‌نظر است و بدین ترتیب  $\gamma_{1,k,R} = 0$  خواهد بود. لذا حل دو معادله منجر به رابطه (۲۵) خواهد گردید:

$$\begin{aligned} a_k(T_2) &= \text{Constant} = a_k^0 \\ \beta_k(T_2) &= \frac{1}{4} a_k^{02} \gamma_{1,k,i} T_2 + \beta_k^0 \end{aligned} \quad (25)$$

که  $a_k^0$  و  $\beta_k^0$  دامنه و فاز اولیه بوده و با استفاده از شرایط اولیه بدست می‌آیند.

حال با جایگذاری رابطه‌های (۱۸) و (۲۱) در رابطه (۱۱) و با در نظر گرفتن  $\varepsilon = \varepsilon$  فرم مرتبه دوم تعییر مکان عرضی و پیچشی به صورت رابطه (۲۶) ساده می‌گردد:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_k^0 \psi_{1,k}(s) \cos(\omega_{1,k}^{NL} t + \beta_k^0) + O(\varepsilon^3) \\ \theta_3 &= a_k^0 \psi_{6,k}(s) \cos(\omega_{1,k}^{NL} t + \beta_k^0) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (26)$$

که در این رابطه  $\omega_{1,k}^{NL}$  فرکانس غیرخطی  $k$  ام است و دارای رابطه  $\omega_{1,k}^{NL} = \omega_{1,k} + 1/4 a_k^{02} \gamma_{1,k,i}$  است. همان‌گونه که در این رابطه مشخص است علامت  $\gamma_{1,k,i}$  نرم شوندگی و سخت شوندگی فرکانس طبیعی غیرخطی  $k$  ام را نشان می‌دهد و به آن ضریب غیرخطی مؤثر مود  $k$  گفته می‌شود.

#### ۴- نتایج عددی

ابتدا جهت اعتبارسنجی نتایج حاضر تیر چرخان در نظر گرفته شده مطابق با مرجع‌های [۱۲] و [۹] دارای طول  $L = ۹\text{m}$  و شعاع روتور  $d_3 = ۰/۵\text{m}$  در نظر گرفته می‌شود. این تیر دارای جرم بر واحد طول  $EA = ۲/۲۲ \times ۱۰^۴ \text{N}$  و سفتی عرضی  $\omega_R = ۳\text{rad/s}$  می‌باشد و با سرعت  $EJ_{22} = ۳/۹۹ \times ۱۰^۴ \text{N}\cdot\text{m}^2$  در حال چرخش است. فرکانس‌های طبیعی غیرخطی اول تا سوم به ترتیب در شکل‌های ۲ تا ۴ نشان داده شده‌اند. در هر دو مرجع مقایسه شونده با صرف‌نظر از اثر نیروی کریولیس جفت شدگی بین حرکت پیچشی و عرضی در نظر گرفته نشده و تنها معادلات عرضی و طولی را در نظر گرفته‌اند. از طرف دیگر معادلات مرجع [۱۲] با استفاده از رابطه کرنش-تعییرمکان فون-کارمن بدست آمده، در حالی که معادلات مرجع [۹] بر اساس روش

که در این رابطه  $C_1 = -(2(-\psi_{6,k}|_{s=1} \lambda))\psi_{1,k}|_{s=1}/\alpha_{22}$  و  $C_2 = -2(\psi_{1,k}'|_{s=1})\omega_{1,k}\psi_{1,k}|_{s=1}/\alpha_{22}$ ، ث داده شده‌اند. طبق رابطه (۲۰) حذف ترم سکولار نیازمند صفر بودن  $D_1 A_k(T_1, T_2) = 0$  می‌باشد و یا به عبارت دیگر خواهد بود. بدین صورت سمت راست کلیه معادلات مرتبه دوم و شرایط مرزی آن‌ها متعدد صفر شده و بنابراین حل مرتبه دوم منجر به رابطه (۲۱) خواهد گردید:

$$\begin{aligned} u_{1,1}(s, T_0, T_1, T_2) &:= 0 \\ \theta_{3,1}(s, T_0, T_1, T_2) &:= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

با وارد نمودن رابطه‌های (۱۸) و (۲۱) در معادلات مرتبه سوم، رابطه (۱۶)، و شرایط مرزی مرتبه رابطه (۱۷)، و انجام فرآیند مشابه مرتبه دوم، ترم سکولار مرتبه سوم به صورت رابطه (۲۲) ظاهر خواهد گردید.

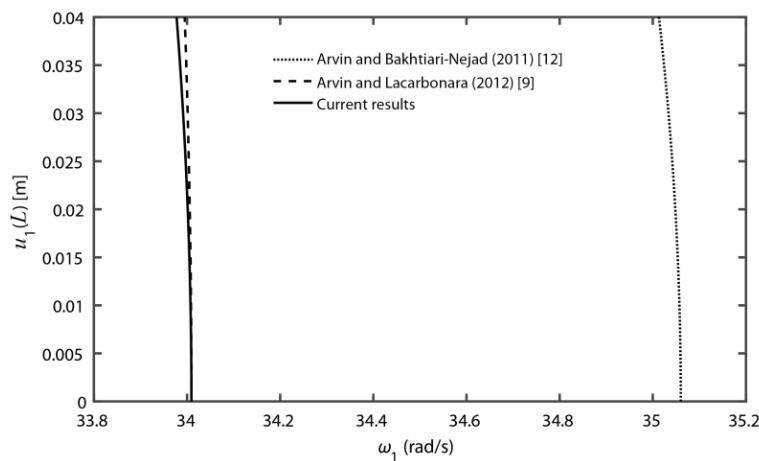
$$\begin{aligned} \text{Secular Order } \varepsilon^3 &:= (2i \omega_{1,k} \Gamma_{1,k,i} + \lambda \Gamma_{1,k,R}) A_k'(T_2) \\ &\quad + (i \Gamma_{2,k,i} \lambda \omega_{1,k} + \Gamma_{2,k,R}) \bar{A}_k(T_2) A_k(T_2)^2 \end{aligned} \quad (22)$$

که در این رابطه  $\Gamma$ ‌ها در پیوست ج داده شده‌اند.  $\chi$  و  $C$ ‌های استفاده شده در تعریف  $\Gamma$ -ها نیز، به ترتیب، در پیوست‌های ث و ج ارائه شده‌اند. حل رابطه (۲۲) منجر به معادله مدولاسیون دامنه مختلط یعنی  $A_k'(T_2)$  خواهد گردید:

$$A_k'(T_2) = (i \gamma_{1,k,i} + \gamma_{1,k,R}) \bar{A}_k(T_2) A_k(T_2)^2 \quad (23)$$

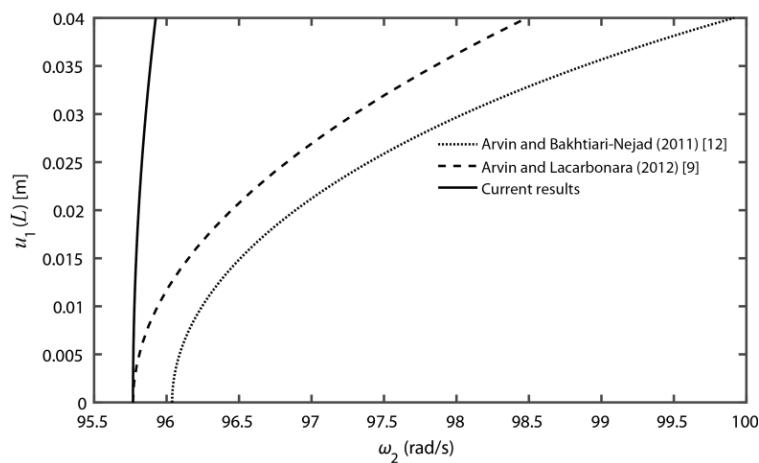
که  $\gamma_{1,k,i}$  و  $\gamma_{1,k,R}$  در پیوست ج ارائه شده‌اند. حل با جایگزینی فرم قطبی دامنه  $k$  ام یعنی  $A_k(T_2) = (1/2)a_k(T_2)e^{i\beta_k(T_2)}$  در رابطه مدولاسیون دامنه مختلط و جداسازی قسمت حقیقی و موهومی معادله بدست آمده و حل این دو معادله جهت دستیابی به معادلات مدولاسیون دامنه حقیقی و فاز، یعنی  $a_k'(T_2)$  و  $\beta_k'(T_2)$ ، رابطه (۲۴) به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} a_k'(T_2) &= \frac{1}{4} a_k(T_2)^3 \gamma_{1,k,R} \\ a_k(T_2) \beta_k'(T_2) &= \frac{1}{4} a_k(T_2)^3 \gamma_{1,k,i} \end{aligned} \quad (24)$$



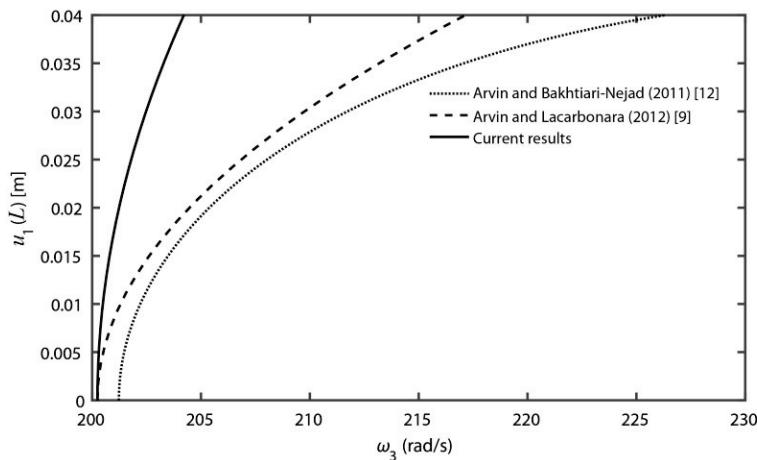
شکل ۲: تغییرات فرکانس غیرخطی اول عرضی حاضر نسبت به دامنه انتهای تیر چرخان (خط پر) در مقایسه با نتایج متناظر از آروین و لاکاربونارا [۹] (خط چین) و آروین و بختیاری نژاد [۱۲] ( نقطه )

**Fig. 2. Variations of the current first nonlinear natural frequency in terms of the tip point amplitude of the rotating beam (solid-lines) vs the associated results from Arvin and Lacarbonara (2012) [9] (dashed-lines) and Arvin and Bakhtiari-Nejad (2011) [12] (dotted-lines)**



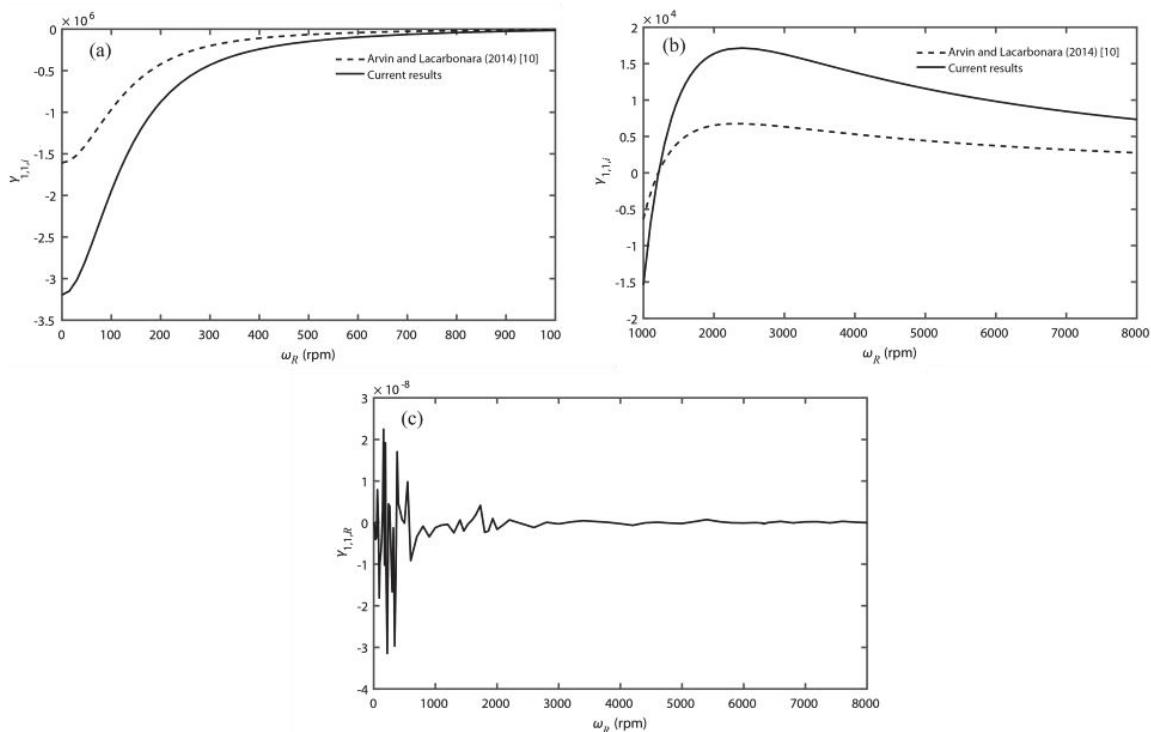
شکل ۳: تغییرات فرکانس غیرخطی دوم عرضی حاضر نسبت به دامنه انتهای تیر چرخان (خط پر) در مقایسه با نتایج متناظر از آروین و لاکاربونارا [۹] (خط چین) و آروین و بختیاری نژاد [۱۲] ( نقطه )

**Fig. 3. Variations of the current second nonlinear natural frequency in terms of the tip point amplitude of the rotating beam (solid-lines) vs the associated results from Arvin and Lacarbonara (2012) [9] (dashed-lines) and Arvin and Bakhtiari-Nejad (2011) [12] ((dotted-lines**



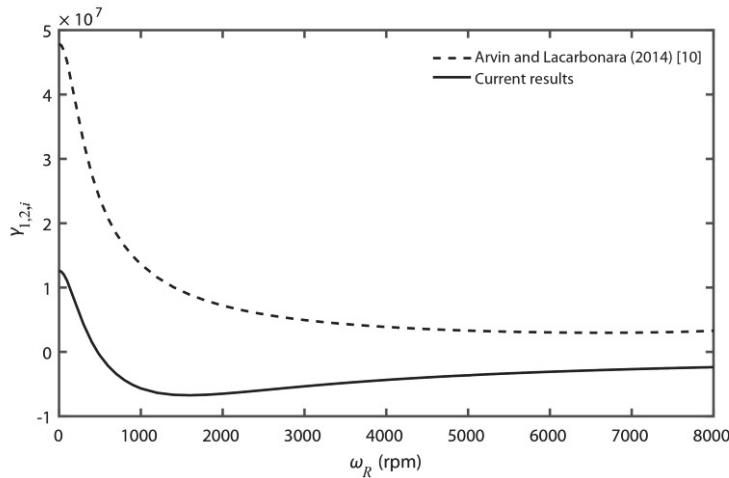
شکل ۴: تغییرات فرکانس غیرخطی سوم غیرخطی حاضر نسبت به دامنه انتهای تیر چرخان (خط پر) در مقایسه با نتایج منتظر از آروین و لاکاربونارا [۲۰۱۲] [۹] (خط چین) و آروین و بختیاری نژاد [۱۲] ( نقطه )

Fig. 4. Variations of the current third nonlinear natural frequency in terms of the tip point amplitude of the rotating beam (solid-lines) vs the associated results from Arvin and Lacarbonara (2012) [9] (dashed-lines) and Arvin and Bakhtiari-Nejad (2011) [12] ((dotted-lines)



شکل ۵: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود اول عرضی  $\gamma_{1,1,i}$  [نتایج حاضر (خط پر) و نتایج مرجع [۱۰] (خط چین)] (الف) در سرعت ۱۰۰۰ دور بر دقیقه، (ب)  $\gamma_{1,1,i}$  در سرعت ۱۰۰۰ تا ۸۰۰۰ دور بر دقیقه و (پ) تغییرات  $\gamma_{1,1,R}$  برای مود اول عرضی

Fig. 5. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the first flapping mode  $\gamma_{1,1,i}$  [current results (solid-lines) and reference [10] results (dashed-lines)] (a)-  $\gamma_{1,1,i}$  for 0-1000 rpm, (b)-  $\gamma_{1,1,i}$  for 1000-8000 rpm and (c)- variations of  $\gamma_{1,1,R}$  for the first flapping mode



شکل ۶: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود دوم عرضی  $\gamma_{1,2,i}$  [نتایج حاضر (خط پر) و نتایج آرین و لاکاربونارا (خط چین)]

Fig. 6. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the second flapping mode  $\gamma_{1,2,i}$  [current results (solid-lines) and Arvin and Lacarbonara (2014) [10] results (dashed-lines)]

این تیر کامپوزیتی با لایه‌های  $[.0/.90/.90/.0]$  می‌باشد و دارای شعاع روتور  $d_3 = 0.2\text{m}$ ، طول  $L = 2\text{m}$ ، ضخامت  $h = 0.005\text{m}$  و عرض  $b = 0.05\text{m}$  می‌باشد. خواص ماده‌ای لایه‌ها نیز شامل  $E_1 = E_2 = 6\text{GPa}$ ،  $v_{31} = v_{32} = 0.3$ ،  $G_{13} = G_{23} = 4.1\text{GPa}$ ،  $G_{12} = 3.4\text{GPa}$ ،  $E_3 = 145\text{GPa}$ ،  $\rho = 1389\text{kg/m}^3$  و  $\nu_{21} = 0.5$  می‌باشد.

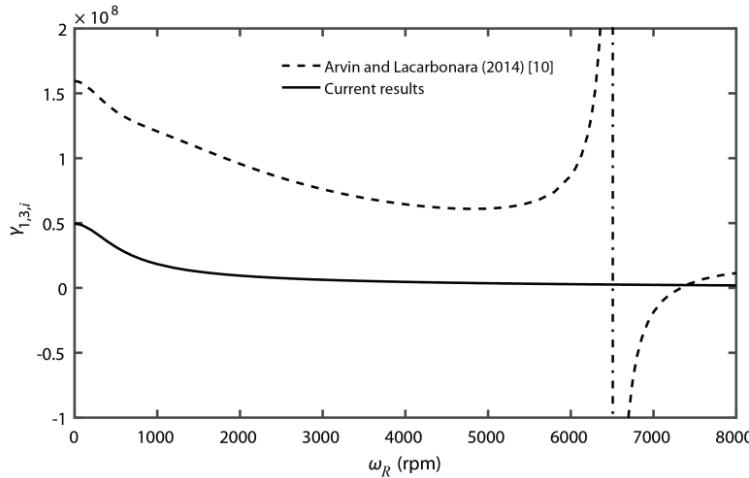
در شکل‌های ۵(الف) و ۵(ب)، ضریب غیرخطی مؤثر عرضی مود اول  $\gamma_{1,1,i}$  در مقایسه با نتایج مرجع [۱۰] نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد مقدار  $\gamma_{1,1,i}$  پیش‌بینی شده در حالت در نظر گرفتن جفت‌شدگی خمشی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس در مقایسه با حالت بدون در نظر گرفتن آن متفاوت بdst آمده است. با این وجود همان‌گونه که مشاهده می‌شود در بازه‌های سرعت متفاوت، علامت ضریب غیرخطی مؤثر یعنی نرم شوندگی یا سخت شوندگی فرکانس طبیعی غیرخطی مورد نظر در دو حالت مقایسه شده مشابه یکدیگر حاصل شده است. بدین ترتیب در سرعت صفر که نتایج برای یک تیر یکسرگیردار ثابت حاصل شده، علامت ضریب غیرخطی مؤثر در دو حالت یکسان و فرکانس طبیعی غیرخطی اول عرضی نرم‌شوندگی بdst آمده است.

در شکل ۵(ج) نتایج حاضر برای مقدار  $\gamma_{1,1,R}$  برای مود اول عرضی ارائه شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد این مقدار در برابر مقادیر ارائه

فرمولاسیون دقیق هندسی استخراج شده‌اند. نتایج مرجع [۱۲] با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه‌ای بدست آمده که بر معادلات گسسته‌سازی شده با استفاده از روش گلرکین اعمال گشته است، در حالی که نتایج مرجع [۹] بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه‌ای می‌باشد که مشابه این مقاله بر معادلات پاره‌ای اعمال شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد در هر سه فرکانس اول محاسبه شده، فرکانس خطی بدست آمده حاضر دقیقاً با فرکانس طبیعی خطی ارائه شده در مرجع [۹] مطابقت دارد و دارای مقادیری کمتر از مرجع [۱۲] می‌باشد که دلیل آن دقت بالاتر روش فرمولاسیون دقیق هندسی است. از طرف دیگر علامت ضریب غیرخطی مؤثر بدست آمده نیز با هر دو مرجع سازگار است و بدین ترتیب بهتر ترتیب برای فرکانس‌های اول تا سوم به ترتیب نرم‌شوندگی، سخت‌شوندگی و سخت‌شوندگی پیش‌بینی گردیده است.

#### ۴- نتایج حاضر

پس از اعتبارسنجی نتایج حاضر جهت مشاهده اثر جفت شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس تبری که در مرجع [۱۰] بدون اثر نیروی کریولیس مورد تحلیل قرار گرفته است، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. فرمولاسیون مورد استفاده شده در آن مرجع نیز فرمولاسیون دقیق هندسی است اما تنها حرکت‌های عرضی و طولی در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۷: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود سوم عرضی  $\gamma_{1,3,i}$  [نتایج حاضر (خط پر) و نتایج آروین و لاکاربونارا (خط چین)]

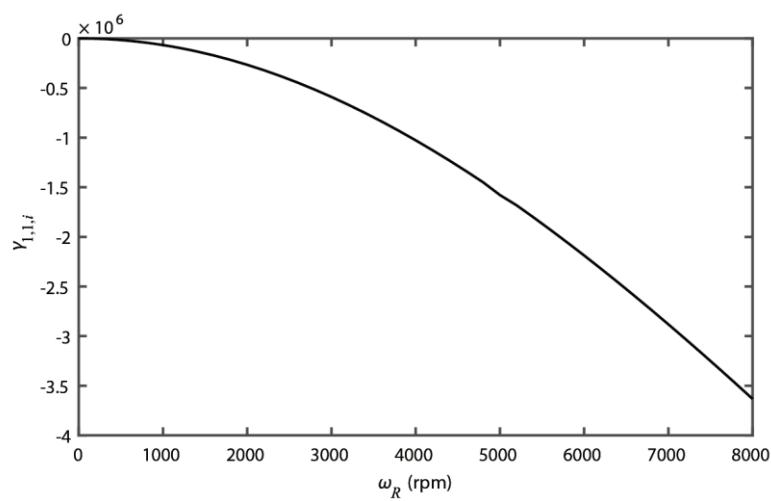
Fig. 7. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the third flapping mode  $\gamma_{1,3,i}$  [current results (solid-lines) and Arvin and Lacarbonara (2014) [10] results (dashed-lines)]

ارائه شده در مرجع [۱۰] دارای تکینگی در این سرعت می‌باشد. این تکینگی در نتایج حاضر بدلیل عدم در نظر گرفتن حرکت طولی دیده نمی‌شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود علامت ضریب غیرخطی مؤثر پیش‌بینی شده با در نظر گرفتن جفت‌شدنی خمی-پیچشی همواره مثبت است در حالی که پس از نقطه تکینگی در بازه بسیار کمی بدون در نظر گرفتن این جفت‌شدنی علامت ضریب غیرخطی مؤثر متفاوتی پیش‌بینی شده است. لذا می‌توان گفت در تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پیش از محاسبه فرکانس‌های غیرخطی تیرهای چرخان حتی باید طیف تغییرات فرکانس‌های طبیعی خطی رسم گردد و در صورتی که در سرعت چرخش خاصی تشید داخلي ۲ به ۱ بین مودهای طولی و عرضی رخ می‌دهد در آن سرعت خاص باید برای محاسبه فرکانس غیرخطی از ابتدا با فرض تشید داخلي اقدام به حل مسئله نمود و معادله حرکت طولی نیز در کنار معادلات دیگر دخیل گردد (به مرجع [۱۲] مراجعه گردد).

شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب ضریب غیرخطی مؤثر برای مودهای اول و دوم پیچشی را نمایش می‌دهند. همان‌گونه که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود برای فرکانس طبیعی غیرخطی هر دو مود پیچشی رفتاری نرم‌شونده پیش‌بینی شده است.

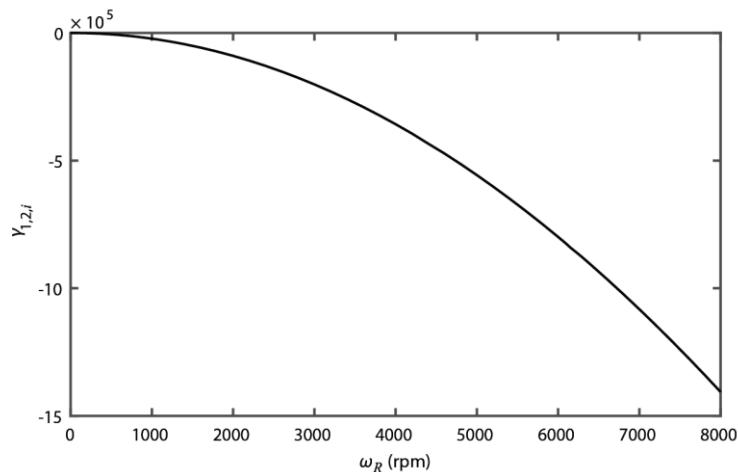
شده در شکل‌های ۵(الف) و ۵(ب) برای  $\gamma_{1,1,i}$  بسیار کوچک است و بدین ترتیب  $\gamma_{1,1,R}$  در این مقاله صفر در نظر گرفته شده است. شکل ۶ نتایج ضریب غیرخطی مؤثر مود دوم عرضی  $\gamma_{1,2,i}$  در مقایسه با مرجع [۱۰] را ارائه نموده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد برخلاف مود اول عرضی که هر دو حالت علامت ضریب غیرخطی مؤثر یکسانی را پیش‌بینی نمودند در این مود، ضریب غیرخطی مؤثر بدست آمده با در نظر گرفتن جفت‌شدنی خمی-پیچشی تا سرعت ۴۷۱ دور بر دقیقه مثبت می‌باشد در حالی که از این سرعت به بعد ضریب غیرخطی مؤثر منفی خواهد بود. از طرف دیگر بدون در نظر گرفتن جفت‌شدنی خمی-پیچشی ضریب غیرخطی مؤثر در تمام بازه مورد بررسی مثبت می‌باشد. در آخر مشابه نتایج بدست آمده برای مود اول عرضی علامت ضریب غیرخطی مؤثر برای تیرهای ثابت یکسرگیردار یکسان بدست آمده است که بدین ترتیب فرکانس طبیعی غیرخطی دوم عرضی سخت‌شونده محاسبه شده است.

نتایج استخراج شده برای ضریب غیرخطی مؤثر مود سوم عرضی  $\gamma_{1,3,i}$  در مقایسه با مرجع [۱۰] در شکل ۷ نمایش داده شده است. مشاهده می‌گردد که با در نظر گرفتن معادله حرکت طولی بدليل حضور تشید داخلي ۲ به ۱ بین مودهای سوم عرضی و اول طولی در سرعت ( $\omega_R = 651.0 \text{ rpm}$ ) نتایج



شکل ۸: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود اول پیچشی  $\gamma_{1,1,i}$

Fig. 8. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the first torsional mode  $\gamma_{1,1,i}$



شکل ۹: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود دوم پیچشی  $\gamma_{1,2,i}$

Fig. 9. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the second torsional mode  $\gamma_{1,2,i}$

## ۵- نتیجه‌گیری

تحلیل باید مودهای طولی را در تحلیل دخالت داده و اقدام به محاسبه فرکانس‌های طبیعی عرضی غیرخطی نمود.

### سپاسگزاری

این مقاله مستخرج از نتایج طرح تحقیقاتی اجرا شده به شماره قرارداد ۹۶GRD۱M۱۷۵۴ از محل اعتبارات معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهرکرد می‌باشد.

### منابع

- [1] D.H. Hodges, E. Dowell, Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades, NASA TN D-7818, (1974).
- [2] M.C. Da Silva, D. Hodges, Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades-I. Formulation, Vertica, 10(2) (1986) 151-169.
- [3] M.C. da Silva, D. Hodges, Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades-II. Response and stability results, Vertica, 10(2) (1986) 171-186.
- [4] D.H. Hodges, A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams, International journal of solids and structures, 26(11) (1990) 1253-1273.
- [5] D.H. Hodges, Comment on 'Flexural behavior of a rotating sandwich tapered beam' and on 'Dynamic analysis for free vibrations of rotating sandwich tapered beams', AIAA journal, 33(6) (1995) 1168-1170.
- [6] K. Avramov, C. Pierre, N. Shyriaieva, Nonlinear equations of flexural-flexural-torsional oscillations of rotating beams with arbitrary cross-section, International Applied Mechanics, 44(5) (2008) 582-589.
- [7] J. Valverde, D. García-Vallejo, Stability analysis of a substructured model of the rotating beam, Nonlinear

در این مقاله با در نظر گرفتن معادلات حرکت غیرخطی عرضی-پیچشی بدست آمده بر اساس فرمولاسیون دقیق هندسی به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی تیرهای چرخان با در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کربولیس پرداخته شد. روش مقایسه‌های چندگانه به فرم غیرخطی درجه سوم معادلات که شامل غیرخطی‌های درجه سوم سفتی و اینرسی بود اعمال شد و رابطه‌ای برای فرکانس‌های غیرخطی عرضی بدست آمد. پس از اعتبار سنجی نتایج حاضر، تحلیلی برای تأثیر سرعت بر ضریب غیرخطی مؤثر سه مود اول عرضی و دو مود اول پیچشی انجام گرفت و نتایج حاضر با در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کربولیس در مقایسه با نتایج موجود در مقالات مرتبط با صرفنظر از جفت‌شدگی مذکور ارائه گردید. مهمترین نتایج بدست آمده بدین ترتیب است:

در اولین و دومین مود پیچشی فرکانس غیرخطی پیچشی رفتاری نرم‌شونده نشان می‌دهند؛

با وجود اینکه حضور و عدم حضور نیروی کربولیس تأثیری در فرکانس‌های طبیعی خطی عرضی و پیچشی نمی‌گذارد اما مقدار ضریب غیرخطی مؤثر برای سه مود اول عرضی با در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کربولیس با نتایج عدم در نظر گرفتن این جفت‌شدگی متفاوت است؛

در مودهای اول و سوم علامت ضریب غیرخطی مؤثر پیش‌بینی شده در هر دو حالت، با و بدون در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کربولیس یکسان می‌باشد (بجز محدوده بسیار کوچکی در نزدیک نقطه تکینگی)؛

علامت ضریب غیرخطی مؤثر برای مود دوم عرضی تنها در سرعتهای چرخش پایین با و بدون در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کربولیس یکسان می‌باشد؛

در حالت خاص برای تیرهای یکسرگیردار ثابت که سرعت چرخش صفر می‌باشد، علامت ضریب غیرخطی مؤثر پیش‌بینی شده با و بدون در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کربولیس یکسان کاملاً یکسان است؛

در تحلیل غیرخطی و محاسبه فرکانس‌های عرضی در تیرهای چرخان باید امکان تشدييد داخلی برای مودهای طولی و عرضی با رسم طيف فرکانس‌های خطی در نظر گرفته شود و در صورت اين امکان از ابتداي

- (2009) 314-335.
- [12] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Non-linear modal analysis of a rotating beam, International Journal of Non-Linear Mechanics, 46(6) (2011) 877-897.
- [13] W. Lacarbonara, Nonlinear structural mechanics: theory, dynamical phenomena and modeling, Springer Science & Business Media, 2013.
- [14] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, Nonlinear oscillations, John Wiley & Sons, 2008.
- [15] L. Meirovitch, Principles and techniques of vibrations, Prentice Hall New Jersey, 1997.
- [16] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Nonlinear free vibration analysis of rotating composite Timoshenko beams, Composite Structures, 96 (2013) 29-43.
- dynamics, 55(4) (2009) 355-372.
- [8] W. Lacarbonara, H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades—part 1: linear modal properties, Nonlinear Dynamics, 70(1) (2012) 659-675.
- [9] H. Arvin, W. Lacarbonara, F. Bakhtiari-Nejad, A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades—part 2: flapping nonlinear normal modes, Nonlinear Dynamics, 70(3) (2012) 2279-2301.
- [10] H. Arvin, W. Lacarbonara, A fully nonlinear dynamic formulation for rotating composite beams: nonlinear normal modes in flapping, Composite structures, 109 (2014) 93-105.
- [11] Ö. Turhan, G. Bulut, On nonlinear vibrations of a rotating beam, Journal of sound and vibration, 322(1-2)

## پیوست‌ها

**پیوست الف:** پارامترهای مورد استفاده در معادله حرکت

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3(s,t))\cos(\theta_2(s,t)) & \sin(\theta_3(s,t)) & -\cos(\theta_3(s,t))\sin(\theta_2(s,t)) \\ -\sin(\theta_3(s,t))\cos(\theta_2(s,t)) & \cos(\theta_3(s,t)) & \sin(\theta_3(s,t))\sin(\theta_2(s,t)) \\ \sin(\theta_2(s,t)) & 0 & \cos(\theta_2(s,t)) \end{bmatrix} \quad (\text{الف.1})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_1 &= \partial_s \theta_2(s,t) \sin(\theta_3(s,t)) \\ \bar{\mu}_2 &= \partial_s \theta_2(s,t) \cos(\theta_3(s,t)) \\ \bar{\mu}_3 &= \partial_s \theta_3(s,t) \end{aligned} \quad (\text{الف.2})$$

$$\begin{aligned} \check{\omega}_1 &= \partial_t \theta_2(s,t) \sin(\theta_3(s,t)) + \omega_R \cos(\theta_2(s,t)) \cos(\theta_3(s,t)) \\ \check{\omega}_2 &= \partial_t \theta_2(s,t) \cos(\theta_3(s,t)) - \omega_R \cos(\theta_2(s,t)) \sin(\theta_3(s,t)) \\ \check{\omega}_3 &= \partial_t \theta_3(s,t) + \omega_R \sin(\theta_2(s,t)) \end{aligned} \quad (\text{الف.3})$$

### پیوست ب: اپراتورهای خطی اینرسی، ژیروسکوپی و سفتی معادلات حرکت و شرایط مرزی ناظر

$$I_{11} = -(\bullet) + 2\partial_s(\bullet)\nu_{inv}^0 \nu_{inv}' / \alpha_{22} + \nu_{inv}^0 \partial_{ss}(\bullet) / \alpha_{22}, I_{16} = 0, G_{11} = 0, G_{16} = -2\lambda(\bullet)\nu_{inv}^0 / \alpha_{22} - 2\lambda\partial_s(\bullet)\nu_{inv}^0 / \alpha_{22}$$

$$L_{11} = -\nu_{inv}^0 \lambda^2 \partial_{ss}(\bullet) / \alpha_{22} + \alpha_{22}\partial_{ss}(\bullet)N^0 \nu_{inv}^0 + \alpha_{22}\partial_s(\bullet)N^0 \nu_{inv}^0 - \partial_s(\bullet)\nu_{inv}^0 \nu_{inv}''' - 4\partial_{sss}(\bullet)\nu_{inv}^0 \nu_{inv}' - 3\partial_{ss}(\bullet)\nu_{inv}^0 \nu_{inv}'' \quad (1.b)$$

$$-\nu_{inv}^0 \partial_s(\bullet)\nu_{inv}^0'' - 2\nu_{inv}^0 \partial_{ss}(\bullet) - \partial_{sss}(\bullet)\nu_{inv}^0 - \alpha_{22}\partial_s(\bullet)N^0 \nu_{inv}^0 - 2\lambda^2 \nu_{inv}^0 \partial_s(\bullet)\nu_{inv}^0 / \alpha_{22}$$

$$I_{61} = 0, I_{66} = -(\bullet) / \alpha_{32}, G_{66} = 0, G_{61} = \lambda\partial_s(\bullet)\nu_{inv}^0 / \alpha_{12} - \lambda\partial_s(\bullet)\nu_{inv}^0 / \alpha_{22} - \lambda\partial_s(\bullet)\nu_{inv}^0 / \alpha_{32} \quad (2.b)$$

$$L_{66} = \alpha_{22}\partial_{ss}(\bullet) / (\alpha_{32}(2+2\bar{V})) + \lambda^2(\bullet) / \alpha_{22} - \lambda^2(\bullet) / \alpha_{12}$$

$$I_{BC,11} = \partial_s(\bullet) / \alpha_{22}, G_{BC,11} = -2\lambda(\bullet) / \alpha_{22}, L_{BC,11} = -\lambda^2\partial_s(\bullet) / \alpha_{22} - \partial_{sss}(\bullet) - \partial_s(\bullet)\nu_{inv}^0'' - 2\partial_{ss}(\bullet)\nu_{inv}^0' \quad (3.b)$$

$$I_{BC,12} = 0, G_{BC,12} = 0, L_{BC,12} = \partial_{ss}(\bullet) + \partial_s(\bullet)\nu_{inv}^0' \quad (4.b)$$

$$I_{BC,6} = 0, G_{BC,6} = 0, L_{BC,6} = \partial_s(\bullet) \quad (5.b)$$

### پیوست پ: ترم‌های غیرخطی اینرسی و سفتی معادلات حرکت و شرایط مرزی متناظر

$$i_{10}^{(3)} = -2\lambda\nu_{inv}^0(s)\partial_{ts}\theta_3\theta_3^2 / \alpha_{12} + 6\nu_{inv}^0(s)^3\lambda\partial_t\theta_3\partial_s u_1\partial_{ss}u_1 / \alpha_{22} + 3\lambda\partial_{ts}\theta_3\nu_{inv}^0(s)^3\partial_s u_1^2 / \alpha_{22}$$

$$+ 2\lambda\partial_{ts}\theta_3\nu_{inv}^0(s)\theta_3^2 / \alpha_{22} - 2\lambda\partial_t\theta_3\nu_{inv}^0(s)\theta_3^2 / \alpha_{12} + 2\lambda\partial_t\theta_3\nu_{inv}^0(s)\theta_3^2 / \alpha_{22} \quad (1.p)$$

$$+ 9\nu_{inv}^0(s)^2\lambda\partial_t\theta_3\nu_{inv}^0(s)\partial_s u_1^2 / \alpha_{22} + 4\nu_{inv}^0(s)\partial_s\theta_3\lambda\theta_3\partial_t\theta_3 / \alpha_{22} - 4\nu_{inv}^0(s)\partial_s\theta_3\lambda\theta_3\partial_t\theta_3 / \alpha_{12}$$

$$i_{11}^{(3)} = -8\nu_{inv}^0(s)^3\partial_s u_1\nu_{inv}'(s)\partial_{ts}u_1^2 / \alpha_{22} - 2\nu_{inv}^0\partial_3\partial_{ts}\theta_3\partial_{ts}u_1 / \alpha_{22} - 2\nu_{inv}^0(s)^2\theta_3\partial_t\theta_3\partial_{ts}u_1 / \alpha_{22}$$

$$- 4\nu_{inv}^0(s)^4\partial_s u_1\partial_{ts}u_1\partial_{ts}u_1 / \alpha_{22} - 2\nu_{inv}^0\partial_{ts}u_1^2\partial_{ss}u_1 / \alpha_{22} - 4\nu_{inv}^0(s)\theta_3\partial_t\theta_3\partial_{ts}u_1\nu_{inv}'(s) / \alpha_{22} \quad (2.p)$$

$$- 2\nu_{inv}^0(s)^2\partial_s\theta_3\partial_t\theta_3\partial_{ts}u_1 / \alpha_{22} + 4\nu_{inv}^0(s)\theta_3\partial_t\theta_3\partial_{ts}u_1\nu_{inv}'(s) / \alpha_{12} + 2\nu_{inv}^0\partial_3\partial_{ts}\theta_3\partial_{ts}u_1 / \alpha_{12}$$

$$+ 2\nu_{inv}^0(s)^2\partial_s\theta_3\partial_t\theta_3\partial_{ts}u_1 / \alpha_{12} + 2\nu_{inv}^0\partial_3\partial_t\theta_3\partial_{ts}u_1 / \alpha_{12} \quad (3.p)$$

$$i_{12}^{(3)} = -\partial_{tts}u_1\nu_{inv}^0(s)^2\theta_3^2 / \alpha_{22} + \partial_{tts}u_1\nu_{inv}^0(s)^2\theta_3^2 / \alpha_{12} - 2\partial_{tts}u_1\nu_{inv}^0(s)\nu_{inv}^0(s)\theta_3^2 / \alpha_{22}$$

$$- 4\nu_{inv}^0(s)^4\partial_s u_1\partial_{ts}u_1\partial_{ts}u_1 / \alpha_{22} - 2\nu_{inv}^0(s)^2\partial_s\theta_3\theta_3\partial_{ts}u_1 / \alpha_{22} - 8\nu_{inv}^0\partial_s u_1^2\nu_{inv}^0(s)\partial_{ts}u_1 / \alpha_{22} \quad (4.p)$$

$$- 2\nu_{inv}^0(s)^4\partial_s u_1^2\partial_{ts}u_1 / \alpha_{22} + 2\nu_{inv}^0(s)^2\partial_s\theta_3\theta_3\partial_{ts}u_1 / \alpha_{12} + 2\partial_{tts}u_1\nu_{inv}^0(s)\nu_{inv}^0(s)\theta_3^2 / \alpha_{12}$$

$$i_{60}^{(3)} = -\frac{3}{2}\lambda\partial_s u_1^2\nu_{inv}^0(s)^3\partial_{ts}u_1 / \alpha_{12} + \frac{3}{2}\lambda\partial_s u_1^2\nu_{inv}^0(s)^3\partial_{ts}u_1 / \alpha_{32} + \frac{3}{2}\lambda\partial_s u_1^2\nu_{inv}^0(s)^3\partial_{ts}u_1 / \alpha_{22}$$

$$+ 2\lambda\theta_3^2\partial_{ts}u_1\nu_{inv}^0(s) / \alpha_{22} - 2\lambda\theta_3^2\partial_{ts}u_1\nu_{inv}^0(s) / \alpha_{12} \quad (5.p)$$

$$i_{61}^{(3)} = \theta_3\partial_{ts}u_1^2\nu_{inv}^0(s)^2 / \alpha_{12} - \theta_3\partial_{ts}u_1^2\nu_{inv}^0(s)^2 / \alpha_{22} \quad (6.p)$$

$$i_{62}^{(3)} = 0$$

$$\begin{aligned} n_6^{(3)} = & \theta_3 \partial_s u_1^2 \nu_{inv}^0(s)^2 - \frac{2}{3} \lambda^2 \theta_3^3 / \alpha_{22} - 2\alpha_{22} \nu_{inv}^0(s) \theta_3 \partial_{ss} u_1 \partial_s u_1 / \alpha_{12} \\ & - \alpha_{22} \theta_3 \partial_s u_1^2 \nu_{inv}^0(s)^2 / \alpha_{12} - \lambda^2 \theta_3 \partial_s u_1^2 \nu_{inv}^0(s)^2 / \alpha_{22} + \theta_3 \partial_{ss} u_1^2 \nu_{inv}^0(s)^2 + \frac{2}{3} \lambda^2 \theta_3^3 / \alpha_{12} \\ & + 2\theta_3 \partial_{ss} u_1 \nu_{inv}^0(s) \partial_s u_1 \nu_{inv}^0(s) - \alpha_{22} \theta_3 \partial_{ss} u_1^2 \nu_{inv}^0(s)^2 / \alpha_{12} + \lambda^2 \theta_3 \partial_s u_1^2 \nu_{inv}^0(s)^2 / \alpha_{12} \end{aligned} \quad (۷.پ)$$

$$\begin{aligned} n_{BC,11}^{(3)} = & \lambda^2 \partial_s u_1^3 / \alpha_{22} + \lambda \partial_t \theta_3 \partial_s u_1^2 / \alpha_{22} + \theta_3^2 \lambda \partial_t \theta_3 / \alpha_{22} - 2\theta_3 \partial_t \theta_3 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{22} + \frac{1}{2} \theta_3^2 \partial_s u_1 \nu_{inv}^0(s)^2 \\ & + 6\partial_s u_1^2 \partial_{ss} u_1 \nu_{inv}^0(s) - \partial_s u_1^2 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{22} - \frac{1}{2} \theta_3^2 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{22} + \frac{1}{2} \lambda^2 \theta_3^2 \partial_s u_1 / \alpha_{22} + 2\partial_s u_1^3 \nu_{inv}^0(s)^2 \\ & - 2\partial_s u_1 \partial_{ts} u_1^2 / \alpha_{22} + \theta_3^2 \partial_{ss} u_1 \nu_{inv}^0(s) + \frac{1}{2} \theta_3^2 \partial_{sss} u_1 + \partial_s u_1^3 \nu_{inv}^0(s)^2 + 2\partial_s u_1 \partial_{ss} u_1^2 + \partial_s u_1^2 \partial_{sss} u_1 \end{aligned} \quad (۸.پ)$$

$$n_{BC,12}^{(3)} = -\partial_s u_1^2 \partial_{ss} u_1 - \partial_s u_1^3 \nu_{inv}^0(s) - \frac{1}{2} \theta_3^2 \partial_{ss} u_1 - \frac{1}{2} \theta_3^2 \partial_s u_1 \nu_{inv}^0(s) \quad n_{BC,6}^{(3)} = 0 \quad (۹.پ)$$

**پیوست ت:** ترم‌های سمت راست مرتبه دوم و سوم معادلات حرکت و شرایط مرزی متناظر در روش مقیاس‌های چندگانه

$$\begin{aligned} RHS(O_{Eq1}^{(2)}) = & 2D_0 D_1 u_{1,0} + 2\nu_{inv}^0 \lambda D_1 \partial_s \theta_{3,0} / \alpha_{22} + 2\lambda \nu_0^{inv} D_1 \theta_{3,0} / \alpha_{22} - 2\nu_{inv}^0 D_0 D_1 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} \\ & - 4\nu_0^{inv} \nu_{inv}^0 D_0 D_1 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} \end{aligned} \quad (۱.ت)$$

$$RHS(O_{Eq6}^{(2)}) = 2D_0 D_1 \theta_{3,0} / \alpha_{32} + \nu_{inv}^0 \lambda D_1 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} + \nu_{inv}^0 \lambda D_1 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{32} - \nu_{inv}^0 \lambda D_1 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{12} \quad (۲.ت)$$

$$RHS(O_{BC11}^{(2)}) = 2\lambda D_1 \theta_{3,0} / \alpha_{22} - 2D_0 D_1 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} \quad (۳.ت)$$

$$\begin{aligned} RHS(O_{Eq1}^{(3)}) = & 2D_0 D_2 u_{1,0} + D_1^2 u_{1,0} + 2D_0 D_1 u_{1,1} + 2\nu_{inv}^0(s)^2 \theta_{3,0} \partial_s \theta_{3,0} D_0^2 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} \\ & - 2\nu_{inv}^0(s)^2 \theta_{3,0} \partial_s \theta_{3,0} D_0^2 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{12} + 2\lambda \nu_0^{inv}(s) D_1 \theta_{3,1} / \alpha_{22} + 2\lambda \nu_0^{inv}(s) D_2 \theta_{3,0} / \alpha_{22} \\ & - 2\nu_{inv}^0(s)^2 D_0 D_2 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} + 8\nu_{inv}^0(s)^3 \nu_0^{inv}(s) \partial_s u_{1,0}^2 D_0^2 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} \\ & + 4\nu_{inv}^0(s)^4 \partial_s u_{1,0} \partial_{ss} u_{1,0} D_0^2 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} - 2\nu_{inv}^0(s) \nu_0^{inv}(s) D_0^2 \partial_s u_{1,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{12} \\ & - 4\nu_0^{inv}(s) \nu_{inv}^0(s) \theta_{3,0} D_0 \theta_{3,0} D_0 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{12} + 8\nu_{inv}^0(s)^3 \nu_0^{inv}(s) \partial_s u_{1,0} D_0 \partial_s u_{1,0}^2 / \alpha_{22} \\ & + 4\nu_{inv}^0(s)^4 \partial_s u_{1,0} D_0 \partial_s u_{1,0} D_0 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} - 2\nu_{inv}^0(s) \lambda D_0 \partial_s \theta_{3,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{22} \\ & + 2\nu_{inv}^0(s) \lambda D_0 \partial_s \theta_{3,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{12} - 3\nu_{inv}^0(s)^3 \lambda D_0 \partial_s \theta_{3,0} \partial_s u_{1,0}^2 / \alpha_{22} \\ & + 2\nu_{inv}^0(s)^2 \theta_{3,0} D_0 \theta_{3,0} D_0 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} - 2\nu_{inv}^0(s)^2 D_0 \theta_{3,0} \partial_s \theta_{3,0} D_0 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{12} \\ & - 2\nu_{inv}^0(s)^2 \theta_{3,0} D_0 \theta_{3,0} D_0 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{12} - 2\nu_{inv}^0(s)^2 \theta_{3,0} D_0 \partial_s \theta_{3,0} D_0 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{12} \\ & + 2\nu_{inv}^0(s)^4 \partial_s u_{1,0}^2 D_0^2 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} - \nu_{inv}^0(s)^2 D_0^2 \partial_{ss} u_{1,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{12} \\ & - 4\nu_0^{inv}(s) \nu_{inv}^0(s) D_0 D_1 \partial_s u_{1,1} / \alpha_{22} - 4\nu_0^{inv}(s) \nu_{inv}^0(s) D_0 D_2 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} \\ & - 2\nu_0^{inv}(s) \nu_{inv}^0(s) D_1^2 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} + 2\nu_{inv}^0(s)^4 D_0 \partial_s u_{1,0}^2 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} \\ & + 2\nu_{inv}^0(s) \lambda D_1 \partial_s \theta_{3,1} / \alpha_{22} - 9\nu_{inv}^0(s)^2 \lambda \nu_0^{inv}(s) D_0 \theta_{3,0} \partial_s u_{1,0}^2 / \alpha_{22} \\ & - 4\nu_{inv}^0(s) \lambda \theta_{3,0} D_0 \theta_{3,0} \partial_s \theta_{3,0} / \alpha_{22} + 2\nu_{inv}^0(s) \nu_{inv}^0(s) D_0^2 \partial_s u_{1,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{22} \\ & + 4\nu_{inv}^0(s) \lambda \theta_{3,0} D_0 \theta_{3,0} \partial_s \theta_{3,0} / \alpha_{12} + 2\lambda \nu_0^{inv}(s) D_0 \theta_{3,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{12} + 2\nu_{inv}^0(s) \lambda D_2 \partial_s \theta_{3,0} / \alpha_{22} \\ & - 2\lambda \nu_0^{inv}(s) D_0 \theta_{3,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{22} + \nu_{inv}^0(s)^2 D_0^2 \partial_{ss} u_{1,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{22} - 2\nu_{inv}^0(s)^2 D_0 D_1 \partial_{ss} u_{1,1} / \alpha_{22} \\ & - \nu_{inv}^0(s)^2 D_1^2 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} - 6\nu_{inv}^0(s)^3 \lambda D_0 \theta_{3,0} \partial_s u_{1,0} \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} \\ & - 2\nu_{inv}^0(s)^4 \partial_{ss} u_{1,0}^3 - 2\nu_{inv}^0(s)^3 \nu_0^{inv}(s) \partial_s u_{1,0}^3 + \alpha_{22} \nu_0^{inv}(s) \nu_0^{inv}(s) \partial_s u_{1,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{12} \end{aligned} \quad (۴.ت)$$

$$\begin{aligned}
& +4\alpha_{22}v_0^{inv}(s)\partial_{sss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{12}+2\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_{ss}\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12} \\
& +2\alpha_{22}v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\partial_s\theta_{3,0}^2\partial_su_{1,0}/\alpha_{12}+2\lambda^2v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{12} \\
& +2\lambda^2v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}/\alpha_{12}+2\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}/\alpha_{12} \\
& -2\lambda^2v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}-2\lambda^2v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{22} \\
& -v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}\theta_{3,0}^2-4v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\partial_{sss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2 \\
& -v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}\theta_{3,0}^2-8v_0^{inv}(s)^4\partial_su_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}\partial_{sss}u_{1,0} \\
& -24v_0^{inv}(s)^3v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}^2-10v_0^{inv}(s)^2v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3 \\
& -14v_0^{inv}(s)^3v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}+3/2\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^3\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0} \\
& -3\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}-16v_0^{inv}(s)^3v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^2\partial_{sss}u_{1,0} \\
& -30v_0^{inv}(s)^2v_0^{inv}(s)^2\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}-4v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_{sss}u_{1,0} \\
& -3v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2+10\alpha_{22}v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12} \\
& +2\alpha_{22}v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_{ss}\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}/\alpha_{12}-2v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_{ss}\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0} \\
& +4\alpha_{22}v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}/\alpha_{12}+4\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_{sss}u_{1,0}/\alpha_{12} \\
& +\alpha_{22}v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{12}-8v_0^{inv}(s)^3\lambda^2v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3/\alpha_{22} \\
& +3\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2N^0(s)v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3-v_0^{inv}(s)^2\partial_{ssss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2-2v_0^{inv}(s)^2\partial_s\theta_{3,0}^2\partial_{ss}u_{1,0} \\
& -2v_0^{inv}(s)^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2-2v_0^{inv}(s)^4\partial_su_{1,0}^2\partial_{ssss}u_{1,0}+\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^3N^0(s)\partial_su_{1,0}^3 \\
& +3/2\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3-2\alpha_{22}v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3-4v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)^3\partial_su_{1,0}^3 \\
& -2v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}-2v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_{ss}\theta_{3,0}\partial_su_{1,0} \\
& -4v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}+\lambda^2v_0^{inv}(s)^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{12} \\
& +2\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2\partial_s\theta_{3,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12}+\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2\partial_{ssss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{12} \\
& +2\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{12}-\lambda^2v_0^{inv}(s)^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{22} \\
& -10v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}-6v_0^{inv}(s)^4\lambda^2\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{22} \\
& +3\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^3N^0(s)\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}-2v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\partial_s\theta_{3,0}^2\partial_su_{1,0}
\end{aligned} \tag{۴.ت}$$

$$\begin{aligned}
RHS(O_{Eq6}^{(3)}) = & 2D_0D_1\theta_{3,1}/\alpha_{32}+2D_0D_2\theta_{3,0}/\alpha_{32}+D_1^2\theta_{3,0}/\alpha_{32}+v_0^{inv}(s)\lambda D_1\partial_su_{1,1}/\alpha_{22} \\
& +v_0^{inv}(s)\lambda D_2\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}+v_0^{inv}(s)\lambda D_1\partial_su_{1,1}/\alpha_{32}+v_0^{inv}(s)\lambda D_2\partial_su_{1,0}/\alpha_{32} \\
& -v_0^{inv}(s)\lambda D_1\partial_su_{1,1}/\alpha_{12}-v_0^{inv}(s)\lambda D_2\partial_su_{1,0}/\alpha_{12}+2v_0^{inv}(s)\lambda\theta_{3,0}^2D_0\partial_su_{1,0}/\alpha_{12} \\
& -2v_0^{inv}(s)\lambda\theta_{3,0}^2D_0\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}+3/2v_0^{inv}(s)^3\lambda\partial_su_{1,0}^2D_0\partial_su_{1,0}/\alpha_{12} \\
& -3/2v_0^{inv}(s)^3\lambda\partial_su_{1,0}^2D_0\partial_su_{1,0}/\alpha_{32}-3/2v_0^{inv}(s)^3\lambda\partial_su_{1,0}^2D_0\partial_su_{1,0}/\alpha_{22} \\
& -v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}D_0\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{12}+v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}D_0\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{22}+2/3\lambda^2\theta_{3,0}^3/\alpha_{22} \\
& +\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}^2/\alpha_{12}+\lambda^2v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{22}-v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}^2 \\
& -\lambda^2v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{12}+2\alpha_{22}v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12} \\
& -2/3\lambda^2\theta_{3,0}^3/\alpha_{12}-v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}^2-2v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0} \\
& +\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{12}
\end{aligned} \tag{۵.ت}$$

$$\begin{aligned}
RHS(O_{BC11}^{(3)}) = & -2D_0D_2\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}-D_1^2\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}-2D_0D_1\partial_su_{1,1}/\alpha_{22}+2\lambda D_2\theta_{3,0}/\alpha_{22} \\
& +2\lambda D_1\theta_{3,1}+1/2\theta_{3,0}^2D_0^2\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}+2\partial_su_{1,0}D_0\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{22}/\alpha_{22} \\
& +2\theta_{3,0}D_0\theta_{3,0}D_0\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}+\partial_su_{1,0}^2D_0^2\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}-\lambda D_0\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{22} \\
& -1/2\theta_{3,0}^2\partial_{sss}u_{1,0}-2\partial_su_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}^2-v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3-2v_0^{inv}(s)^2\partial_su_{1,0}^3 \\
& -1/2v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}^2\partial_su_{1,0}-v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}-1/2\lambda^2\theta_{3,0}^2\partial_su_{1,0}/\alpha_{22} \\
& -6v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}-\lambda^2\partial_su_{1,0}^3/\alpha_{22}-\lambda D_0\theta_{3,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{22}-\partial_su_{1,0}^2\partial_{sss}u_{1,0}
\end{aligned} \tag{۶.ت}$$

$$RHS(O_{BC12}^{(3)}) = 1/2\theta_{3,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}+\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}+1/2v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}^2\partial_su_{1,0}+v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3 \tag{۷.ت}$$

### پیوست ث: پارامترهای استفاده شده در ترم‌های سکولار

$$\begin{aligned} \delta_{k,k} &= \int_0^1 [\psi_{1,k} \psi_{1,k} + \psi_{6,k} \psi_{6,k} / \alpha_{32}] ds, \quad \xi_{111} = \int_0^1 [\psi_{1,k}^2] ds, \quad \xi_{112} = \int_0^1 [\psi_{1,k} v_{inv}^0 (\psi_{inv}^0)' (\psi_{1,k}'')] ds + \frac{1}{2} \left( \int_0^1 [\psi_{1,k} v_{inv}^0]^2 (\psi_{1,k}'')] ds \right) \\ \xi_{16} &= \int_0^1 [\psi_{1,k} (v_{inv}^0)' \psi_{6,k}] ds + \left( \int_0^1 [\psi_{1,k} v_{inv}^0 (\psi_{6,k}'')] ds \right), \quad \xi_{61} = \int_0^1 [\psi_{6,k} v_{inv}^0 (\psi_{1,k}'')] ds, \quad \xi_{66} = \int_0^1 [\psi_{6,k}^2] ds \end{aligned} \quad (1.ث)$$

(۲.ث)

$$\begin{aligned} \chi_{6a1} &= \int_0^1 [\psi_{6,k} v_{inv}^0]^3 (\psi_{1,k}'')^3] ds, \quad \chi_{6c1} = \int_0^1 [\psi_{6,k}^3 v_{inv}^0 (\psi_{1,k}'')] ds, \quad \chi_{6d1} = \int_0^1 [\psi_{6,k}^4] ds, \quad \chi_{6b1} = \int_0^1 [\psi_{6,k}^2 v_{inv}^0]^2 (\psi_{1,k}'')^2] ds, \\ \chi_{6b2} &= \int_0^1 [\psi_{6,k}^2 v_{inv}^0]^2 (\psi_{1,k}'')^2] ds, \quad \chi_{6b3} = \int_0^1 [\psi_{6,k}^2 (v_{inv}^0)' v_{inv}^0 (\psi_{1,k}'') (\psi_{1,k}'')] ds, \quad \chi_{6b4} = \int_0^1 [\psi_{6,k}^2 (v_{inv}^0)'^2 (\psi_{1,k}'')^2] ds \end{aligned} \quad (3.ث)$$

### پیوست ج: $\Gamma$ ها و ضریب غیرخطی مؤثر برای مود $k$ ام

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,k,R} &= -C_3 / \alpha_{22} + \xi_{61} / \alpha_{32} + 2\xi_{16} / \alpha_{22} + \xi_{61} / \alpha_{22} - \xi_{61} / \alpha_{12} \\ \Gamma_{1,k,i} &= \xi_{111} - \frac{1}{2} C_4 / \alpha_{22} + \xi_{66} / \alpha_{32} - 2\xi_{112} / \alpha_{22} \\ \Gamma_{2,k,i} &= -C_6 / \alpha_{22} - \frac{3}{2} \chi_{6a1} / \alpha_{32} - \frac{3}{2} \chi_{6a1} / \alpha_{22} - 6\chi_{1b3} / \alpha_{22} - 2\chi_{1d1} / \alpha_{22} - 6\chi_{1d2} / \alpha_{22} - 9\chi_{1b1} / \alpha_{22} \\ &\quad - 2\chi_{6c1} / \alpha_{22} + 2\chi_{1d1} / \alpha_{12} + 6\chi_{1d2} / \alpha_{12} + 2\chi_{6c1} / \alpha_{12} - 3\chi_{1b2} / \alpha_{22} + \frac{3}{2} \chi_{6a1} / \alpha_{12} \\ \Gamma_{2,k,R,\lambda} &= -\frac{1}{2} (2C_{5,\lambda} \alpha_{12} + 36\alpha_{12}\chi_{1a1} + 48\alpha_{12}\chi_{1a20} + 6\alpha_{12}\chi_{1c1} + 12\alpha_{12}\chi_{1c16} + 12\alpha_{12}\chi_{1c17} + 4\alpha_{22}\chi_{6d1} \\ &\quad - 6\alpha_{12}\chi_{6b1} - 4\alpha_{12}\chi_{6d1} - 6\alpha_{22}\chi_{1c1} - 12\alpha_{22}\chi_{1c16} - 12\alpha_{22}\chi_{1c17} + 6\alpha_{22}\chi_{6b1}) / (\alpha_{22}\alpha_{12}) \\ \Gamma_{2,k,R,\omega} &= -\frac{1}{2} (2\alpha_{12}\chi_{1c1} + 4\alpha_{12}\chi_{1c16} + 4\alpha_{12}\chi_{1c17} - 2\alpha_{12}\chi_{6b1} + 2C_{5,\omega_{1,k}^2} \alpha_{12} + 32\alpha_{12}\chi_{1a20} + 24\alpha_{12}\chi_{1a1} \\ &\quad - 4\alpha_{22}\chi_{1c16} - 4\alpha_{22}\chi_{1c17} + 2\alpha_{22}\chi_{6b1} - 2\alpha_{22}\chi_{1c1}) / (\alpha_{22}\alpha_{12}) \\ \Gamma_{2,k,R,C} &= -\frac{1}{2} (12\chi_{1c14}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1c7}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\alpha_{22}^2\chi_{1a18}\alpha_{12} + 12\chi_{1c10}\alpha_{12}\alpha_{22} + 24\chi_{1c5}\alpha_{12}\alpha_{22} \\ &\quad + 6\chi_{1c3}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1c15}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1c4}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1a5}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1a3}\alpha_{12}\alpha_{22} + 48\chi_{1a6}\alpha_{12}\alpha_{22} \\ &\quad - 6\alpha_{22}^2\chi_{1a19}\alpha_{12} + 84\chi_{1a13}\alpha_{12}\alpha_{22} + 60\chi_{1a12}\alpha_{12}\alpha_{22} + 180\chi_{1a7}\alpha_{12}\alpha_{22} - 9\alpha_{22}^2\chi_{1a17}\alpha_{12} + 96\chi_{1a4}\alpha_{12}\alpha_{22} \\ &\quad + 24\chi_{1c9}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1a14}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1c6}\alpha_{12}\alpha_{22} - 18\alpha_{22}^2\chi_{1a10}\alpha_{12} + 60\chi_{1c8}\alpha_{12}\alpha_{22} + 144\chi_{1a8}\alpha_{12}\alpha_{22} \\ &\quad + 6\chi_{1c11}\alpha_{12}\alpha_{22} + 6\chi_{1c2}\alpha_{12}\alpha_{22} + 24\chi_{1c12}\alpha_{12}\alpha_{22} + 18\alpha_{22}^2\chi_{1a11}\alpha_{12} + 18\chi_{1c13}\alpha_{12}\alpha_{22} + 24\chi_{1a15}\alpha_{12}\alpha_{22} \\ &\quad - 9\alpha_{22}^2\chi_{1a2}\alpha_{12} + 2C_{5,Cons} \alpha_{22}\alpha_{12} + 6\chi_{6b2}\alpha_{22}\alpha_{12} + 12\chi_{6b3}\alpha_{22}\alpha_{12} + 6\chi_{6b4}\alpha_{22}\alpha_{12} - 24\alpha_{22}^2\chi_{1c12} \\ &\quad - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c15} - 6\alpha_{22}^2\chi_{1c2} - 6\alpha_{22}^2\chi_{1c3} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c4} - 24\alpha_{22}^2\chi_{1c5} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c6} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c7} \\ &\quad - 24\alpha_{22}^2\chi_{1c9} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c10} - 6\alpha_{22}^2\chi_{1c11} - 12\alpha_{22}^2\chi_{6b3} - 6\alpha_{22}^2\chi_{6b4} - 18\alpha_{22}^2\chi_{1a16}\alpha_{12} \\ &\quad - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c14} - 18\alpha_{22}^2\chi_{1c13} - 60\alpha_{22}^2\chi_{1c8} - 6\alpha_{22}^2\chi_{6b2}) / (\alpha_{22}\alpha_{12}) \\ \Gamma_{2,k,R} &= \lambda^2 \Gamma_{2,k,R,\lambda} + \Gamma_{2,k,R,\omega} \omega_{1,k}^2 + \Gamma_{2,k,R,C} \end{aligned} \quad (1.ج)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{1,k,i} &= -\omega_{1,k} (\lambda^2 \Gamma_{1,k,R} \Gamma_{2,k,i} - 2\Gamma_{1,k,i} \Gamma_{2,k,R}) / (\lambda^2 \Gamma_{1,k,R}^2 + 4\Gamma_{1,k,i}^2 \omega_{1,k}^2) \\ \gamma_{1,k,R} &= -\lambda (2\Gamma_{1,k,i} \Gamma_{2,k,i} \omega_{1,k}^2 + \Gamma_{1,k,R} \Gamma_{2,k,R}) / (\lambda^2 \Gamma_{1,k,R}^2 + 4\Gamma_{1,k,i}^2 \omega_{1,k}^2) \end{aligned} \quad (2.ج)$$

### پیوست چ: پارامترهای استفاده شده در معادلات مدولاسیون

$$\begin{aligned}
 C_3 &= 2\psi_{6,k} |_{s=1} \psi_{1,k} |_{s=1}, C_4 = -2(\psi_{1,k}'|_{s=1})\psi_{1,k} |_{s=1} \\
 C_{5,Cons} &= -6\psi_{1,k} |_{s=1} (\nu_{inv}^0 |_{s=1})^2 (\psi_{1,k}'|_{s=1})^3 - 3\psi_{1,k} |_{s=1} (\psi_{1,k}''|_{s=1})\psi_{6,k} |_{s=1}^2 (\nu_{inv}^0 |_{s=1}) \\
 &\quad - 6\psi_{1,k} |_{s=1} (\psi_{1,k}''|_{s=1})^2 (\psi_{1,k}'|_{s=1}) + \frac{3}{2}\psi_{6,k} |_{s=1}^2 (\nu_{inv}^0 |_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^2 \\
 &\quad - \frac{3}{2}\psi_{1,k} |_{s=1} \psi_{6,k} |_{s=1}^2 \nu_{inv}^0 |_{s=1} \psi_{1,k}' |_{s=1} + 3(\psi_{1,k}''|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^3 \\
 &\quad - \frac{3}{2}\psi_{1,k} |_{s=1} \psi_{6,k} |_{s=1}^2 (\psi_{1,k}'''|_{s=1}) - 3\psi_{1,k} |_{s=1} (\psi_{1,k}'''|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^2 \\
 &\quad - 3\psi_{1,k} |_{s=1} (\nu_{inv}^0 |_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^3 + \frac{3}{2}(\psi_{1,k}'|_{s=1})(\psi_{1,k}''|_{s=1})\psi_{6,k} |_{s=1}^2 \\
 &\quad - 18\psi_{1,k} |_{s=1} (\psi_{1,k}''|_{s=1})(\nu_{inv}^0 |_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^2 + 3(\nu_{inv}^0 |_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^4 \\
 C_{5,\omega_{1,k}^2} &= \frac{1}{2}\psi_{1,k}'|_{s=1} (\psi_{6,k} |_{s=1}^2 - 2\psi_{1,k}'|_{s=1}^2)\psi_{1,k} |_{s=1}, \\
 C_{5,\lambda^2} &= -\frac{3}{2}\psi_{1,k}'|_{s=1} (\psi_{6,k} |_{s=1}^2 + 2\psi_{1,k}'|_{s=1}^2)\psi_{1,k} |_{s=1} \\
 C_6 &= -\psi_{6,k} |_{s=1} (\psi_{6,k} |_{s=1}^2 + (\psi_{1,k}'|_{s=1})^2)\psi_{1,k} |_{s=1}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$