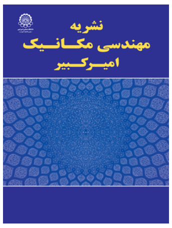
Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(12) (2021) 857-860
DOI: 10.22060/mej.2019.16027.6255



Free and Forced Vibration Analysis of Piezoelectric Patches Based on Semi-Analytic Method of Scaled Boundary Finite Element Method

N. Sepehry[1]*, M. Ehsani[2], M. Shamshirsaz[2]

[1] Faculty of Mechanical and Mechatronic Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
[2] New Technologies Research Center (NTRC), Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT: Development of a precise mathematical model of piezoelectric patches plays an important role in comprehending their operational mechanisms as well as developing new techniques based on their coupled electro-mechanical behavior. While, high computational cost of available numerical methods which are able to simulate vibrational behavior of piezoelectric patches, especially at high frequencies, is considered as a serious challenge in this area. The purpose of this study is to use a novel semi-analytical method, called Scaled Boundary Finite Element Method, to analyze free and forced vibration of piezoelectric patches. In order to evaluate the accuracy of this method in modeling of different problems occurred in structural health monitoring and fracture mechanics, the free and forced vibration of a piezoelectric patch, a piezoelectric patch attached to an aluminum structure, a piezoelectric patch with a circular hole and a cracked piezoelectric patch was analyzed as four case studies. Comparison of convergence rate of scaled boundary finite element method and finite element method indicates that the former provides exact results with much less degrees of freedom. In addition, proper matching of results demonstrates the capability of scaled boundary finite element method to model a variety of problems accurately at a very low computational cost.

Review History:

Received: 17 Mar. 2019
Revised: 7 May. 2019
Accepted: 8 Jul. 2019
Available Online: 13 Aug. 2019

Keywords:

Scaled boundary finite element method
Electro-mechanical coupled field
Vibration
Piezoelectric patch
Finite element method

1- Introduction

Recently, employing miniaturized piezoelectric patches in various branches of science and engineering such as structural health monitoring, has become widespread due to their unique characteristics including: simultaneous sensing/actuating capability, light weight high strength, non-intrusivity and low cost. Developing an accurate mathematical model to describe the behavior of piezoelectric patches, plays an important role in comprehending their coupled electromechanical behavior. So far, several numerical methods have been used to analyze vibration of piezoelectric patches such as: Finite Difference Method (FDM), Boundary Element Method (BEM), Finite Element Method (FEM), and Spectral Finite Element Method (SFEM) [1-3]. Despite some specific advantages of these methods, they confronts practical constraints dealing with multi-material systems, discontinuous configurations and complex process of mesh size tuning for simulation of high frequency vibrations which leads to overwhelming computational cost [1, 3-4].

Scaled Boundary Finite Element Method (SBFEM) is a relatively novel numerical method to solve governing partial differential equations of a variety of engineering systems [5]. In this method, the intended domain is first split into non-overlapping subdomains (sometimes called S-elements) to be able to sight each point on their boundaries directly known as scaling requirements. Discretizing only the boundary of each S-element as in BEM and treating the problem in radial direction rigorously, classifies SBFEM as a semi-analytical approach. This is while, there is no fundamental solution is necessary unlike BEM [6]. So far, SBFEM has been implemented in various fields including: elastodynamics and fracture mechanics.

Despite the considerable efforts which has been made toward implementation of SBFEM in various engineering areas, it has not been used to analyze elastodynamic behavior of piezoelectric patches at high frequencies. The purpose of this study is to investigate the capability of 2 dimensional coupled field SBFEM to model high-frequency vibration of piezoelectric patches in both time and frequency domain. The SBFEM results were also compared with their corresponding FEM results in terms of convergence rate, accuracy and computational cost.

2- Methodology

According to virtual work principle [7], the governing equation of SBFEM is obtained as follows [8]:

$$\left[E^{0}\right]\xi^{2}\bar{u}\left(\xi\right)_{,\xi\xi}+\left(\left[E^{0}\right]-\left[E^{1}\right]+\left[E^{1}\right]^{T}\right)\xi\bar{u}\left(\xi\right)_{,\xi} -\left[E^{2}\right]\bar{u}\left(\xi\right)-M^{0}\xi^{2}\ddot{\bar{u}}\left(\xi\right)=0 \tag{1}$$

Which can be reformulated in terms of dynamic stiffness in frequency domain as follows [8]:

$$\left(\left[S\left(\omega\right)\right]-\left[E^{1}\right]\right)\left[E^{0}\right]^{-1}\left(\left[S\left(\omega\right)\right]-\left[E^{1}\right]^{T}\right) +\omega\left[S\left(\omega\right)\right]_{,\omega}-\left[E^{2}\right]+\omega^{2}\left[M_{0}\right]=0 \tag{2}$$

*Corresponding author’s email: naser.sepehry@shahroodut.ac.ir

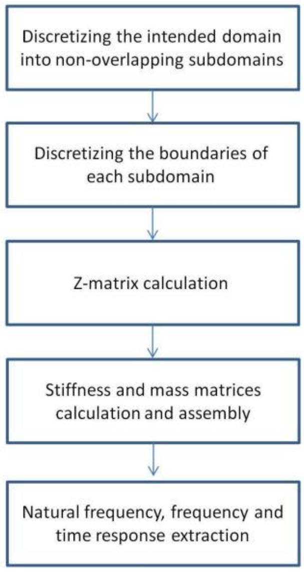


Fig. 1. Solution procedure of SBFEM

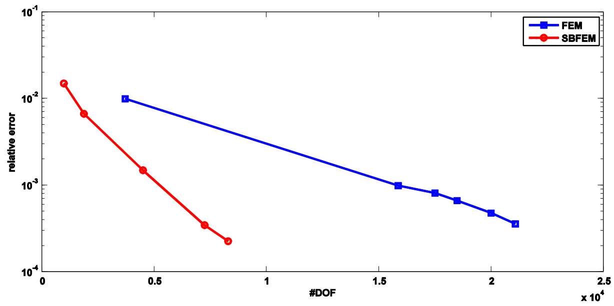


Fig. 2. Averaged relative error of the first 50 eigen-frequencies the perforated piezoelectric patch

To solve the above equation, the dynamic stiffness matrix is replaced by a continued fraction expansion in terms of frequency. The expansion order is closely related to the intended frequency range. Increasing the order of continued fraction expansion, improves the accuracy, especially at high frequencies. This is while, this approach is accompanied by introduction of additional auxiliary variables which will increase the number of Degrees Of Freedom (DOF) and thus, computational cost. To overcome this drawback, employment of finer subdomains in order to discretize the intended domain and ignoring the high-order terms in dynamic stiffness matrix expansion is recommended [9]:

$$[S(\omega)] = [K] - \omega^2 [M] \tag{3}$$

where [k] and [M] are stiffness and mass matrices of S-element, and are obtained through solving an algebraic Riccati equation and a Lyapunov equation, respectively. Collectively, the solving procedure of SBFEM for elastodynamic analysis of piezoelectric patch is summarized here:

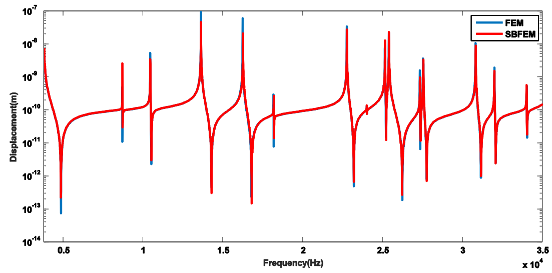


Fig. 3. Frequency response of the perforated piezoelectric patch (frequency range of 0-35 kHz)

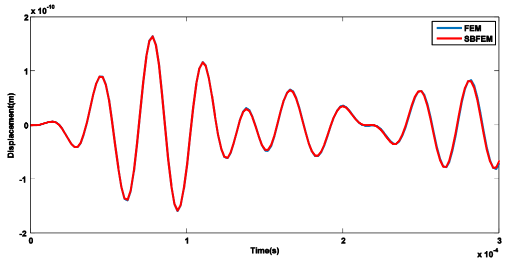


Fig. 4. Transient response of the perforated piezoelectric patch (0 - 300)

3- Results and Discussion

Fig. 2 compares the convergence rate of SBFEM and FEM in terms of first 50 eigen-value deviation index. According to steeper slope of SBFEM graph, its convergence rate is much greater than FEM, which indicates the lower number of DOF required to discretize the intended domain with SBFEM. Figs. 3 and 4 depict the system response to high frequency excitation in the form of point displacement in y direction in frequency and time domains, respectively. These results correspond to the system response to chirp (frequency analysis) and 5 cycle Hanning windowed tone burst (temporal analysis) excitation. The great agreement of the results demonstrates the potential of SBFEM to simulate high frequency standing and propagating waves behavior in perforated (source of discontinuity and stress concentration) piezoelectric patch; however, with much simpler mesh generation process and much less computational cost (the SBFEM DOF is about one-third of FEM).

4- Conclusions

The elastodynamic behavior of piezoelectric patches at high frequencies were investigated using SBFEM. In order to evaluate the accuracy of SBFEM, the free and forced vibration of a piezoelectric patch, a piezoelectric patch attached to an aluminum structure, a piezoelectric patch with a circular hole and a cracked piezoelectric patch was analyzed as four case studies. Comparison of convergence rate of SBFEM and FEM indicates that the former provides exact results with much less DOF. In addition, proper matching of results demonstrates the capability of SBFEM to model a variety of problems accurately at a very low computational cost.

References

[1] N. Sepehry, S. Asadi, M. Shamshirsaz, F. Bakhtiari Nejad, A new model order reduction method based on global kernel k-means clustering: Application in health monitoring of plate using Lamb wave propagation and impedance method, Structural Control and Health Monitoring, 25(9) (2018) e2211.

[2] A. Benjeddou, Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey, Computers & Structures, 76(1-3) (2000) 347-363.

[3] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, M. Shamshirsaz, Discrete singular convolution and spectral finite element method for predicting electromechanical impedance applied on rectangular plates, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 28(18) (2017) 2473-2488.

[4] C. Song, E.T. Ooi, S. Natarajan, A review of the scaled boundary finite element method for two-dimensional linear elastic fracture mechanics, Engineering Fracture Mechanics, 187 (2018) 45-73.

[5] C. Song, J.P. Wolf, The scaled boundary finite-element method—alias consistent infinitesimal finite-element cell method—for elastodynamics, Computer Methods in applied mechanics and engineering, 147(3-4) (1997) 329-355.

[6] J.P. Wolf, C. Song, The scaled boundary finite-element method–a primer: derivations, Computers & Structures, 78(1-3) (2000) 191-210.

[7] A.J. Deeks, J.P. Wolf, A virtual work derivation of the scaled boundary finite-element method for elastostatics, Computational Mechanics, 28(6) (2002) 489-504.

[8] C. Song, The scaled boundary finite element method in structural dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 77(8) (2009) 1139-1171.

[9] C. Song, The Scaled Boundary Finite Element Method: Introduction to Theory and Implementation, John Wiley & Sons, (2018).

[10] configuration of Darrieus and Savonius rotors for stand-alone wind turbine-generator systems, Electrical Engineering in Japan, 150(4) (2005) 13-22.

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۱۲، سال ۱۳۹۹، صفحات ۳۴۶۳ تا ۳۴۸۴
DOI: 10.22060/mej.2019.16027.6255

تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری صفحات پیزوالکتریک مبتنی بر روش نیمه‌تحلیلی اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده

ناصرالدین سپهری [۱*]، محمد احسانی [۲] و مهناز شمشیرساز [۲]

[۱] مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
[۲] پژوهشکده فناوری نو، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

خلاصه: مدل‌سازی دقیق رفتار وصله‌های پیزوالکتریک نقش مهمی در درک مکانیزم عملکردی و همچنین گسترش روش‌های جدید مبتنی بر رفتار الکتریکی-مکانیکی آن‌ها ایفا می‌کند. این در حالی است که هزینه محاسباتی بالای روش‌های عددی موجود برای شبیه‌سازی رفتار ارتعاشی وصله‌های پیزوالکتریک، به‌خصوص در فرکانس‌های بالا، از چالش‌های جدی این حوزه محسوب می‌شود. هدف از این پژوهش استفاده از یک روش نیمه‌تحلیلی نوین موسوم به روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده به‌منظور تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری وصله‌های پیزوالکتریک است. به‌منظور ارزیابی دقت این روش در مدل‌سازی مسائل مختلف مانند رفتار وصله پیزوالکتریک در مسائل پایش سلامت و همچنین مکانیک شکست، چهار مسئله موردی شامل ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک، وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی، وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار و وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده مورد تحلیل قرار گرفت. مقایسه نرخ همگرایی روش‌های اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده و اجزاء محدود نشان از دستیابی به نتایج دقیق به ازای تعداد درجات آزادی بسیار کمتر در روش اول دارد. به‌علاوه، تطابق مناسب نتایج حاصل از این دو روش، نشان از قابلیت روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده در مدل‌سازی انواع مسائل با هزینه محاسباتی بسیار پایین دارد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۲۶
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۲/۰۷
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۱۷
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۵/۲۲

کلمات کلیدی:
اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده
نیمه‌تحلیلی
ارتعاشات
پیزوالکتریک
المان محدود

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر استفاده از مواد هوشمند در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی مانند حوزه پایش سلامت سازه، گسترش چشمگیری یافته است [۱]. خواص و ویژگی‌های منحصربه‌فرد مواد پیزوالکتریک به‌عنوان گونه‌ای از مواد هوشمند، آن‌ها را به گزینه‌ای مناسب برای به‌کارگیری در بخش عملگری و حسگری سامانه‌های مختلف صنعتی بدل کرده است. ذکر این نکته ضروری است که اغلب عملگرها و حسگرهای مورداستفاده در روش‌های مختلف پایش سلامت بر اساس خواص مواد پیزوالکتریک عمل می‌کنند، هرچند، استفاده از وصله‌های مینیاتوری پیزوالکتریک، مزایای ویژه‌ای در حوزه شناسایی آسیب برخط به ارمغان می‌آورد [۴-۲]. به‌طور خاص، قابلیت عملگری و حسگری هم‌زمان وصله‌های پیزوالکتریک، مقـاومت بالا، وزن کم، تأثیر ناچیز بر رفتار دینامیکی سازه تحت پایش و البته قیمت مناسب، جزء ویژگی‌های منحصربه‌فرد تراگذارهای ویفری در فرآیندهای شناسایی آسیب محسوب می‌شوند.

توسعه یک مدل ریاضی دقیق به‌منظور توصیف رفتار مواد پیزوالکتریک، نقش مهمی در درک رفتار الکترومکانیکی وابسته آن‌ها ایفا می‌کند. مدل‌های تحلیلی علیرغم مزایای ویژه‌ای که در ایجاد یک بینش فیزیکی از نحوه تأثیرگذاری عوامل مختلف بر نحوه ارتعاشات مواد پیزوالکتریک مهیا می‌کنند، اغلب به‌واسطه اعمال فرضیات ساده کننده (به‌خصوص در فرکانس‌های تحریک بالا) با محدودیت‌های عملی شامل عدم امکان مدل‌سازی هندسه و شرایط مرزی پیچیده و همچنین رفتار دینامیکی دقیق سازه مواجه هستند. در این موارد مدل‌های عددی به‌عنوان جایگزین مناسبی برای تخمین طیف پاسخ سازه در فرکانس‌های بالا به شمار می‌روند.

تاکنون از روش‌های عددی متنوعی اعم از روش تفاضل محدود، روش اجزاء مرزی، روش بدون مش، روش اجزاء محدود، روش تربیع تغییرات دیفرانسیلی و روش اجزاء محدود طیفی برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری سازه‌ها و مواد پیزوالکتریک استفاده شده است [۳ و ۱۲-۵]. علیرغم مزایای به‌خصوص هر یک از روش‌های نام‌برده، هر یک با محدودیت‌های اجرایی به‌خصوص در شبیه‌سازی ارتعاشات سازه‌ها در فرکانس بالا محسوب

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: naser.sepehry@shahroodut.ac.ir

می‌شوند. استفاده از فرکانس‌های ارتعاشی بالا، حساسیت سیستم حسگری به عیوب ریز را افزایش داده و منجر به تشخیص زودهنگام آسیب (نسبت به روش‌های رایج دیگر مانند آنالیز مودال) می‌شود. فرایند پیچیده تنظیم اندازه المان‌ها و افزایش زمان حل به‌واسطه نیاز به استفاده از تعداد المان‌های زیاد و در نتیجه افزایش درجات آزادی، عمده‌ترین مشکلات روش‌های مبتنی بر مش بندی مانند اجزاء محدود، در مدل‌سازی مسائل ارتعاشات و انتشار موج در فرکانس‌های بالا به شمار می‌روند. هندسه‌های دارای ناپیوستگی مانند ترک یا سیستم‌های چند ماده‌ای سبب افزایش پیچیدگی و درنتیجه کاهش سرعت همگرایی خواهند شد [۱۳]. روش‌های اجزاء محدود طیفی علیرغم بهبود برخی از مشکلات روش اجزاء محدود و همچنین افزایش سرعت همگرایی، همچنان با پیچیدگی‌هایی شامل نیاز به گسسته سازی کل دامنه المان روبرو است [۳ و ۴].

روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده، یک روش عددی نوین برای حل معادلات مشتق جزئی حاکم بر انواع سیستم‌ها بوده که اولین بار توسط سانگ[1] و ولف[2] [۱۴] معرفی شد. این روش، از ترکیب ایده‌های موجود در دو رهیافت اجزاء محدود و اجزاء مرزی الهام گرفته شده است. در این روش کل دامنه به اجزایی تقسیم‌بندی شده و در هر المان، دامنه توسط توابع درون‌یابی گسسته سازی می‌شود. در این روش، تا زمانی که کل مرز از نقطه‌ای درون ناحیه قابل‌مشاهده باشد (موسوم به‌شرط لازم برای مقیاس بندی)، نیازی به مش بندی ناحیه درون المان وجود نداشته و گسسته سازی مرز کافی خواهد بود. استفاده از یک تحلیل در راستای شعاعی، روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده را در زمره روش‌های نیمه‌تحلیلی قرار می‌دهد. به‌علاوه، برخلاف روش‌های المان مرزی، در این روش نیازی به توسعه تابع گرین متناسب با مسئله وجود ندارد [۱۵]. روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در ابتدا برای تحلیل مسائل با شرایط مرزی نامحدود ارائه شد، هرچند سانگ و ولف [۱۶] و دیکس[3] و ولف [۱۷] استفاده از آن را برای مسائل با شرایط مرزی محدود نیز گسترش دادند. تاکنون از این روش برای تحلیل مسائل مختلف در حوزه‌های پایش سلامت سازه (تحلیل ارتعاشات و انتشار موج) [۲۲-۱۸]، مکانیک شکست [۲۳ و ۲۴] و همچنین تحلیل میدان‌های وابسته از قبیل میدان‌های الکترومکانیکی (خصوصاً تحلیل مواد پیزوالکتریک) [۲۷-۲۵] و میدان‌های ترمومکانیکی [۳۰-۲۸]، استفاده شده است.

پس از ارائه روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده، تلاش‌های متعددی در راستای بهبود شیوه حل و تعیین پاسخ تحلیلی در راستای شعاعی انجام گرفته است. سانگ [۳۱] از تکنیک کسرهای دنباله‌دار برای تحلیل معادله سفتی دینامیکی بهره گرفت. استفاده از این تکنیک علاوه بر افزایش سرعت همگرایی، نیاز به مش بندی نواحی داخل المان برای در نظر گرفتن تأثیر اینرسی داخلی در فرکانس‌های بالا را از بین می‌برد. برک[4] و سانگ [۳۲] با استفاده از ایده محلی سازی، حلی دقیق‌تر و پایدار برای معادلات دیفرانسیل کسری در حوزه فرکانس ارائه کردند. سانگ [۳۳] همچنین با اشاره به برخی کاستی‌های تکنیک مقادیر ویژه در حل مسائلی با تعداد مقادیر ویژه زیاد، از تکنیک توابع ماتریسی برای تعیین پاسخ نیمه‌تحلیلی توابع توانی و لگاریتمی استفاده کرد. امکان تعیین پاسخ بدون دانش قبلی در مورد نوع آن (لگاریتمی یا توانی) و همچنین تعیین پاسخ در نواحی انتقال، ازجمله مزایای تکنیک توابع ماتریسی ذکر شد.

ارائه یک حل تحلیلی برای تنش در راستای شعاعی، روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده را به گزینه‌ای مناسب برای مدل‌سازی مسائل مکانیک شکست و تحلیل دقیق تکینگی میدان تنش اطراف ترک با تعداد المان‌های بسیار کم بدل کرده است. در این راستا یانگ[5] و دیکس [۳۴] از این روش برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش مختلط دینامیکی در اطراف نوک ترک موجود در فصل مشترک ماده دوجنسی استفاده کردند. تحلیل مسئله در حوزه فرکانس و انتقال آن توسط تبدیل فوریه معکوس به حوزه زمان، امکان تعیین تاریخچه زمانی عوامل شدت تنش مختلط مود ۱ و ۲ را میسر کرد. اویی[6] و یانگ [۳۵] از روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده برای مدل‌سازی دینامیکی ترک استفاده کردند. الگوی ساده مش بندی مجدد برای دنبال کردن رشد دینامیکی ترک و همچنین نگاشت دقیق مش بندی ازجمله مزایای این روش نسبت به روش اجزاء محدود ذکر شد [۳۶].

شبیه‌سازی رفتار عملگری و حسگری مواد پیزوالکتریک، از اهمیت ویژه‌ای در طراحی و بهینه‌سازی سامانه‌های شامل این قطعات برخوردار است. ارائه الگوهای جدید شناسایی آسیب، تحلیل قابلیت اطمینان سامانه حسگری، بهینه‌سازی نحوه ذخیره انرژی استک‌های پیزوالکتریک و نحوه بازپس‌دهی آن ازجمله کاربردهای شبیه‌سازی رفتار الکترومکانیکی مواد پیزوالکتریک در حوزه پایش سلامت سازه محسوب می‌شود [۴۲-۳۷]. طی دو دهه گذشته تلاش‌های متعددی برای مدل‌سازی رفتار این مواد توسط روش اجزاء محدود صورت گرفته است [۴۶-۴۳]. مدل‌سازی و تحلیل رفتار

1 Song
2 Wolf
3 Deeks
4 Birk
5 Yang
6 Ooi

وصله پیزوالکتریک به کمک روش اجزاء محدود سه‌بعدی توسط براس[1] و کالتنبچر[2] [۳۷] و همچنین مان[3] و همکاران [۴۷] ازجمله پژوهش‌های مرتبط در این حوزه محسوب می‌شوند.

علیرغم مطالعات انجام‌شده بر روی بهبود روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و استفاده از آن در حوزه‌های کاربردی مختلف ازجمله پیزوالکتریک [۲۲-۲۰]، تاکنون تلاشی برای تحلیل ارتعاشات فرکانس بالای وصله‌های پیزوالکتریک و همچنین ارتعاشات اجباری سازه‌ها ناشی از تحریک الکتریکی توسط وصله‌های پیزوالکتریک انجام نگرفته است. هدف از این پژوهش، بررسی قابلیت روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده در تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری سامانه‌های متشکل از وصله‌های پیزوالکتریک است. تحلیل نحوه همگرایی، میزان دقت و همچنین میزان کاهش هزینه محاسباتی در این روش نسبت به روش اجزاء محدود از اهداف دیگر پژوهش حاضر محسوب می‌شود. مابقی این مقاله به‌صورت ذیل سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲ معادلات حاکم بر سیستم استخراج شده است. روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در بخش ۳ مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۴ روش حل معادلات ارائه شده است. درنهایت، بخش ۵ به ارائه مطالعات موردی جهت صحه‌گذاری روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده اختصاص دارد.

۲- معادلات حاکم بر سیستم

در این بخش به استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات سیستم شامل وصله پیزوالکتریک می‌پردازیم. در توسعه مدل رفتاری برای مواد پیزوالکتریک، اغلب از این فرض که کرنش کل، مجموع کرنش مکانیکی (ناشی از تنش) و کرنش الکتریکی (ناشی از میدان الکتریکی) است، استفاده می‌شود. به‌علاوه، با فرض کرنش‌های کوچک (رابطه خطی)، معادلات ساختاری مواد پیزوالکتریک به‌صورت شار-تنش پس از انتقال از شکل تانسوری به شکل برداری توسط معادلات ذیل بیان می‌شوند [۴]:

$$\sigma = [c]\varepsilon - [e]^T E \quad (۱)$$

$$D = [e]\varepsilon + [\epsilon]E \quad (۲)$$

که در آن σ تنش، D جابجایی الکتریکی، ε کرنش، E میدان الکتریکی، $[c]$ ماتریس ثوابت الاستیک، $[e]$ ماتریس ثوابت پیزوالکتریک و $[\epsilon]$ ماتریس ضریب گذردهی الکتریکی هستند. معادلات فوق به ترتیب بیانگر اثر معکوس و مستقیم مواد پیزوالکتریک هستند. با ترکیب دو معادله فوق و اعمال فرض کرنش صفحه‌ای ($\varepsilon_{zz} = 0$) خواهیم داشت:

$$\bar{\sigma} = [H]\bar{\varepsilon} \quad (۳)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & 0 & 0 & e_{yx} \\ c_{xy} & c_{yy} & 0 & 0 & e_{yy} \\ 0 & 0 & c_{xyxy} & e_{xxz} & 0 \\ 0 & 0 & e_{xxz} & -\epsilon_{xx} & 0 \\ e_{yx} & e_{yy} & 0 & 0 & -\epsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{xy} & -E_x & -E_y \end{bmatrix} \quad (۵)$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} & D_x & D_y \end{bmatrix} \quad (۶)$$

با استفاده از روابط کرنش-جابجایی و رابطه بین میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی، $\bar{\varepsilon}$ برحسب میدان جابجایی و پتانسیل الکتریکی عبارت است از:

$$\bar{\varepsilon} = [L]\bar{u} = [L]\begin{bmatrix} u_x & u_y & \phi \end{bmatrix}^T \quad (۷)$$

در این روابط قطبیت پیزوالکتریک در جهت محور y در نظر گرفته شده است. در این رابطه u_x و u_y به ترتیب جابجایی در جهات x و y، ϕ پتانسیل الکتریکی در نقطه موردنظر و اپراتور $[L]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳۱]:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{y}} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial}{\partial \hat{x}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

1 Braess
2 Kaltenbacher
3 Man

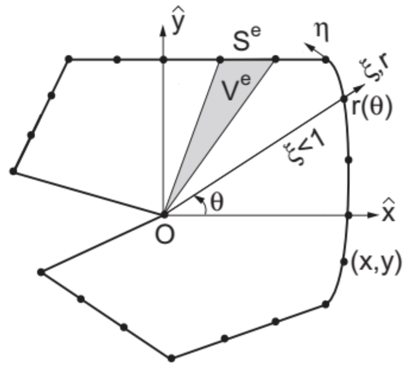


Fig. 1. Scaled boundary coordinate [27]

شکل ۱: مختصات مرز مقیاس شده [۲۷]

معادله دینامیکی حاکم بر سیستم در غیاب نیروها و شار الکتریکی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[L]^T \bar{\sigma} + [\rho]\omega^2 \bar{u} = 0 \qquad (۹)$$

که ω فرکانس زاویه‌ای، $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & \phi \end{bmatrix}$ و $[\rho] = \rho\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۳- روش اجزاء محدود مقیاس شده برای ماده پیزوالکتریک

شکل ۱ یک دامنه دوبعدی (V) در مختصات مرز مقیاس شده را نشان می‌دهد. در این روش تنها مرزهای دامنه به‌وسیله المان‌های خطی گسسته سازی می‌شوند. مرکز مقیاس (O) باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که کل مرز توسط آن قابل مشاهده باشد. مختصات گره‌های هر جزء خطی S^e (بالانویس e نشان‌دهنده المان است) به‌وسیله $\{x\}$ و $\{y\}$ در مختصات کارتزین ارائه شده است. اجزاء خطی به‌وسیله تابع شکل $N(\eta)$ در مختصات محلی η، درون‌یابی می‌شوند. دامنه توسط مختصات بدون بعد شعاعی ξ از مرکز مقیاس ($\xi=۰$) تا انتهای مرز ($\xi=۱$) مقیاس می‌شود.

یک نقطه نماینده $(\hat{x}, \hat{y})$ در داخل دامنه به‌صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{x}(\xi,\eta) &= \xi x(\eta) = \xi\left[N(\eta)\right]\{x\} \\ \hat{y}(\xi,\eta) &= \xi y(\eta) = \xi\left[N(\eta)\right]\{y\} \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

انتقال از مختصات کارتزین به مختصات مرز مقیاس شده به‌صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \left[\hat{J}(\xi,\eta)\right] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{Bmatrix} \qquad (۱۱)$$

در این رابطه ماتریس ژاکوبی عبارت است از:

$$\left[\hat{J}(\xi,\eta)\right] = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,\xi} & \hat{y}_{,\xi} \\ \hat{x}_{,\eta} & \hat{y}_{,\eta} \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

و عبارت‌های داخل ماتریس ژاکوبی توسط رابطه (۱۰) به دست می‌آیند که به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\left[\hat{J}(\xi,\eta)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\eta) & y(\eta) \\ x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

ماتریس ژاکوبی روی مرز ($\xi=۱$) به‌صورت زیر است:

$$\left[J(\eta)\right] = \begin{bmatrix} x(\eta) & y(\eta) \\ x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

$$\left|J(\eta)\right| = x(\eta)\, y(\eta)_{,\eta} - y(\eta)\, x(\eta)_{,\eta} \qquad (۱۵)$$

عملگر خطی $[L]$ در رابطه (۸) به مختصات مرز مقیاس شده به‌صورت زیر منتقل می‌شود:

$$[L] = \left[b^1(\eta)\right]\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\left[b^2(\eta)\right]\frac{\partial}{\partial \eta} \qquad (۱۶)$$

که در آن [۳۱]

$$\left[b^1(\eta)\right] = \frac{1}{\left|J(\eta)\right|} \begin{bmatrix} y(\eta)_{,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & -x(\eta)_{,\eta} & 0 \\ -x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & y(\eta)_{,\eta} \\ 0 & 0 & -x(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

$$\left[b^2(\eta)\right]=\frac{1}{|J(\eta)|}\begin{bmatrix}-y(\eta) & 0 & 0\\ 0 & x(\eta) & 0\\ x(\eta) & -y(\eta) & 0\\ 0 & 0 & -y(\eta)\\ 0 & 0 & x(\eta)\end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

پتانسیل الکتریکی و جابجایی الکتریکی $\bar{u}(\xi)$ در نقطه (ξ,η) در داخل دامنه با درون‌یابی توسط توابع شکل عبارت است از:

$$\begin{gathered}\bar{u}(\xi,\eta)=\left[N(\eta)\right]\bar{u}(\xi)=\\ \left[N_1(\eta)I \quad N_2(\eta)I \quad N_3(\eta)I \quad \ldots\right]\bar{u}(\xi)\end{gathered} \tag{۱۹}$$

که در آن I ماتریس همانی ۳ در ۳ است. با جایگذاری رابطه‌های (۱۹) و (۱۶) در رابطه (۷) داریم:

$$\varepsilon(\xi,\eta)=\left[B^1(\eta)\right]\bar{u}(\xi)_{,\xi}+\frac{1}{\xi}\left[B^2(\eta)\right]\bar{u}(\xi) \tag{۲۰}$$

$$\left[B^1(\eta)\right]=\left[b^1(\eta)\right]\left[N(\eta)\right] \tag{۲۱}$$

$$\left[B^2(\eta)\right]=\left[b^2(\eta)\right]\left[N(\eta)\right]_{,\eta} \tag{۲۲}$$

تنش و جابجایی الکتریکی از رابطه‌های (۲۰) و (۳) به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{gathered}\bar{\sigma}(\xi,\eta)=[H]\left[B^1(\eta)\right]\bar{u}(\xi)_{,\xi}\\ +\frac{1}{\xi}[H]\left[B^2(\eta)\right]\bar{u}(\xi)\end{gathered} \tag{۲۳}$$

با توجه به قانون کار مجازی [۱۷]، معادله حاکم بر روش اجزاء محدود با مرزی مقیاس شده به‌صورت زیر به دست می‌آید [۳۱]:

$$\begin{gathered}\left[E^0\right]\xi^2\bar{u}(\xi)_{,\xi\xi}+\left(\left[E^0\right]-\left[E^1\right]+\left[E^1\right]^T\right)\xi\bar{u}(\xi)_{,\xi}\\ -\left[E^2\right]\bar{u}(\xi)-M^0\xi^2\ddot{\bar{u}}(\xi)=0\end{gathered} \tag{۲۴}$$

$$\left[E^0\right]=\int_{-1}^{+1}\left[B^1(\eta)\right]^T[H]\left[B^1(\eta)\right]|J|\,d\eta \tag{۲۵}$$

$$\left[E^1\right]=\int_{-1}^{+1}\left[B^2(\eta)\right]^T[H]\left[B^1(\eta)\right]|J|\,d\eta \tag{۲۶}$$

$$\left[E^2\right]=\int_{-1}^{+1}\left[B^2(\eta)\right]^T[H]\left[B^2(\eta)\right]|J|\,d\eta \tag{۲۷}$$

$$\left[M^0\right]=\int_{-1}^{+1}\left[N(\eta)\right]^T[\rho]\left[N(\eta)\right]|J|\,d\eta \tag{۲۸}$$

نیروها و شار الکتریکی نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$\bar{q}(\xi)=\left[E^0\right]\xi\bar{u}(\xi)_{,\xi}+\left[E^1\right]^T\bar{u}(\xi) \tag{۲۹}$$

که برای یک زیر دامنه با تعداد المان‌های خطی مشخص، این ماتریس‌ها سرهم‌بندی می‌شوند.

۴- روش حل

در ابتدا با فرض $\omega=0$ پاسخ‌های استاتیکی مسئله با انتقال رابطه‌های (۲۴) و (۲۹) به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به‌صورت زیر به دست خواهد آمد [۳۱]:

$$\xi\begin{Bmatrix}\bar{u}(\xi)\\ \bar{q}(\xi)\end{Bmatrix}_{,\xi}=-[Z]\begin{Bmatrix}\bar{u}(\xi)\\ \bar{q}(\xi)\end{Bmatrix} \tag{۳۰}$$

$$[Z]=\begin{bmatrix}\left[E^0\right]^{-1}\left[E^1\right]^T & -\left[E^0\right]^{-1}\\ -\left[E^2\right]+\left[E^1\right]\left[E^0\right]^{-1}\left[E^1\right]^T & -\left[E^1\right]\left[E^0\right]^{-1}\end{bmatrix} \tag{۳۱}$$

بعد از اعمال روش مقادیر ویژه به ماتریس $[Z]$ داریم:

$$[Z][\Psi]=[\Psi][\Lambda] \tag{۳۲}$$

با جزء بندی ماتریس $\left[\Psi\right]$ به‌صورت زیر داریم:

$$\left[\Psi\right]=\begin{bmatrix}\Psi_1^q & \Psi_2^u\\ \Psi_1^q & \Psi_2^q\end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

به‌این‌ترتیب ماتریس سفتی استاتیکی عبارت است از:

$$\left[K\right]=\left[\Psi_1^q\right]\left[\Psi_1^u\right]^{-1} \tag{۳۴}$$

در روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده، مرکز مقیاس باید توسط کل مرز دامنه مشاهده شود. درصورتی‌که سازه ازلحاظ هندسی پیچیده باشد ممکن است نتوان مرکزی با این شرایط برای کل دامنه در نظر گرفت. بنابراین کل دامنه به زیر دامنه‌هایی تقسیم‌بندی شده و رابطه (۳۴) سفتی هر زیر دامنه است. درنهایت مشابه روش اجزاء محدود این ماتریس‌ها سرهم‌بندی شده تا ماتریس سفتی کل سازه به دست آید.

برای مسائل دینامیکی، یک ماتریس دینامیکی سفتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳۱]:

$$\begin{gathered}\left(\left[S\left(\omega,\xi\right)\right]-\xi\left[E^1\right]\right)\left[E^0\right]^{-1}\left(\left[S\left(\omega,\xi\right)\right]-\left[E^1\right]^T\right)\\ +\xi\left[S\left(\omega,\xi\right)\right]_{,\xi}-\xi\left[E^2\right]+\omega^2\left[M^0\right]\xi^3=0\end{gathered} \tag{۳۵}$$

که در مرز، شار الکتریکی و نیروهای گره برای دامنه‌های محدود برابر است با:

$$\bar{F}=\left[S\left(\omega\right)\right]\bar{u} \tag{۳۶}$$

و رابطه (۳۵) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود [۳۱]:

$$\begin{gathered}\left(\left[S\left(\omega\right)\right]-\left[E^1\right]\right)\left[E^0\right]^{-1}\left(\left[S\left(\omega\right)\right]-\left[E^1\right]^T\right)\\ +\omega\left[S\left(\omega\right)\right]_{,\omega}-\left[E^2\right]+\omega^2\left[M_0\right]=0\end{gathered} \tag{۳۷}$$

برای حل معادله فوق، ماتریس سفتی دینامیکی نسبت به فرکانس بسط و در معادله جایگزین می‌شود. مرتبه بسط مورداستفاده به حوزه فرکانسی موردنظر وابسته بوده و با افزایش مرتبه بسط، دقت محاسبات در فرکانس بالا افزایش میابد. این در حالی است که افزایش مرتبه بسط که با معرفی متغیرهای کمکی اضافی همراه خواهد بود، تعداد درجات آزادی مسئله و درنتیجه هزینه محاسباتی را نیز به‌شدت افزایش خواهد داد. برای رفع این مشکل، استفاده از زیر دامنه‌های کوچک‌تر برای گسسته سازی ناحیه موردنظر و چشم‌پوشی از عبارت‌های مرتبه بالا برای بسط ماتریس سفتی دینامیکی پیشنهاد می‌شود[۴۸] :

$$\left[S\left(\omega\right)\right]=\left[K\right]-\omega^2\left[M\right] \tag{۳۸}$$

که در آن $\left[K\right]$ و $\left[M\right]$ به ترتیب ماتریس سفتی استاتیکی و جرم هستند. با جایگذاری رابطه (۳۸) در رابطه (۳۷) و با استناد به مرجع [۳۱] ،ماتریس سفتی مشابه رابطه (۳۴) به دست می‌آید. برای ماتریس جرم یک معادله لیاپانوف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{gathered}\left[M\right]\left(\left[E^0\right]^{-1}\left(\left[K\right]-\left[E^1\right]^T\right)+\left[I\right]\right)\\ +\left(\left(\left[K\right]-\left[E^1\right]\right)\left[E^0\right]^{-1}+\left[I\right]\right)\left[M\right]=\left[M^0\right]\end{gathered} \tag{۳۹}$$

درنهایت معادله مربوط به جابجایی در حوزه فرکانس و زمان به ترتیب عبارت است از:

$$\left(\left[K\right]-\omega^2\left[M\right]\right)\begin{Bmatrix}\{u\}\\ \{\varphi\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F\}\\ \{Q\}\end{Bmatrix} \tag{۴۰}$$

$$\left[M\right]\begin{Bmatrix}\{\ddot{u}\}\\ \{\ddot{\varphi}\}\end{Bmatrix}+\left[K\right]\begin{Bmatrix}\{u\}\\ \{\varphi\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F\}\\ \{Q\}\end{Bmatrix} \tag{۴۱}$$

به‌عنوان جمع‌بندی، الگوریتم حل در روش نیمه‌تحلیلی اجزاء محدود مرزی مقیاس شده را می‌توان در ۷ گام فلوچارت زیر خلاصه کرد:

۵- مطالعات موردی

در این بخش به‌منظور بررسی قابلت روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در حل مسائل گوناگون، از این روش برای حل ۴ مسئله شامل ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک، وصله پیزوالکتریک متصل به سازه

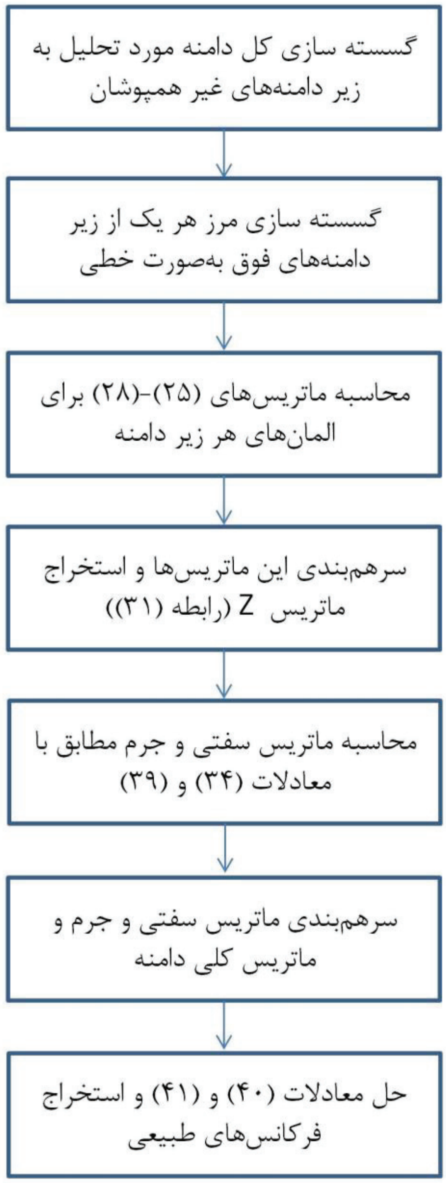


Fig. 2. Solution procedure of Scaled Boundary Finite Element Model (SBFEM)

شکل ۲: روند پیاده‌سازی روش اجزا محدود با مرز مقیاس شده

آلومینیومی، وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار و وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده استفاده شد (شکل ۳). به‌عنوان‌مثال در این پ‌ژوهش از نرم‌افزار اباکوس برای گسسته سازی دامنه موردنظر در تحلیل و المان محدود با مرز مقیاس شده استفاده شد (شکل ۴). در ادامه به ارائه نتایج حاصل از تحلیل این مسائل به کمک روش حاضر و مقایسه آن با نتایج روش اجزاء محدود خواهیم پرداخت.

۵- ۱- ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک

وصله‌های مینیاتوری پیزوالکتریک به‌عنوان عنصر اصلی در حوزه شناسایی آسیب مبتنی بر روش‌های امپدانس الکترومکانیکی و انتشار موج لمب محسوب می‌شوند. تحلیل رفتار این وصله‌ها به‌عنوان تشدیدگر به‌خصوص در فرکانس‌های بالا، از اهمیت ویژه‌ای در بررسی سلامت آن‌ها و درنتیجه تحلیل قابلیت اطمینان سامانه حسگری برخوردار است. به همین خاطر به‌عنوان اولین مسئله موردی، ارتعاشات آزاد و اجباری یک وصله پیزوالکتریک (شکل ۳(الف)) در بازه فرکانس ۰ تا ۳۵ کیلوهرتز به کمک روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده بررسی و نتایج آن با نتایج اجزاء محدود مقایسه شد. مشخصات ماده پیزوالکتریک موردبررسی در این پژوهش در جدول ۱ آمده است. شرایط مرزی مکانیکی به‌صورت گیردار کردن ضلع سمت چپ و آزاد گذاشتن سه ضلع دیگر اعمال شد. به‌علاوه، شرایط مرزی الکتریکی نیز به‌صورت پتانسیل صفر برای ضلع سمت چپ در نظر گرفته شد.

مانند سایر روش‌های عددی، بررسی همگرایی نقش کلیدی در ارزیابی صحت نتایج حاصل از روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده ایفا می‌کند. بررسی همگرایی نتایج در مسائل ارتعاشاتی با فرکانس بالا بسیار پیچیده‌تر از بررسی این موضوع در مسائل مشابه فرکانس پایین یا مسائل شبه استاتیکی است. علت این امر طول‌موج کوتاه ارتعاشات سیستم و گرادیان‌های شدید جابجایی نسبت به مکان بوده که نیاز به مش بندی صحیحی مسئله را دوچندان می‌کند. تاکنون روش‌های مختلفی برای برسی همگرایی نتایج روش‌های عددی در تحلیل مسائل ارتعاشاتی فرکانس بالا ارائه شده است. در این پژوهش همگرایی به کمک شاخص میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول سازه در ارتعاشات آزاد توسط رابطه زیر موردبررسی قرار گرفت.

$$\text{خطای نسبی میانگین} = \frac{\sum_{i=1}^{50}\left|\dfrac{(f_i - F_i)}{F_i}\right|}{50} \qquad (۴۲)$$

که در آن f_i و F_i به ترتیب فرکانس طبیعی و فرکانس طبیعی مرجع iام هستند. فرکانس‌های طبیعی ۱تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزا محدود و اجزا محدود با مرز مقیاس شده در جدول ۲ ارائه شده است.

شکل ۵ نتایج مربوط به نحوه همگرایی نتایج روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده را به‌صورت میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول نسبت به تعداد درجات آزادی مدل نشان می‌دهد. در این شکل همچنین شاخص همگرایی فوق برای مدل اجزاء محدود توسعه داده شده همین

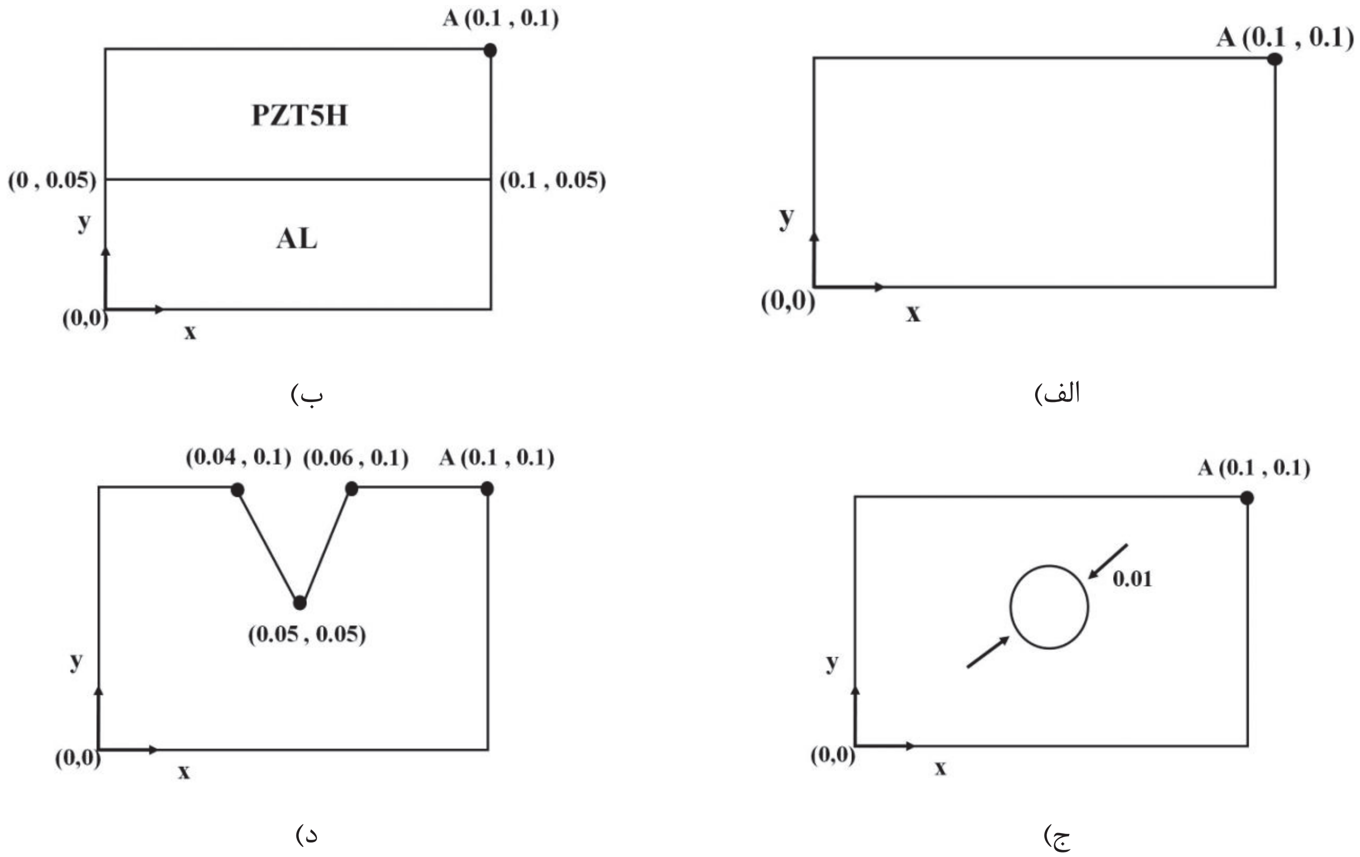


Fig. 3. Geometry of studied configurations a) piezoelectric patch b) piezoelectric patch attached to aluminum structure c) The perforated piezoelectric patch d) cracked piezoelectric patch

شکل ۳: هندسه پیکربندی‌های موردمطالعه در پژوهش حاضر الف) وصله پیزوالکتریک ب) وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی ج) وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار د) وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده

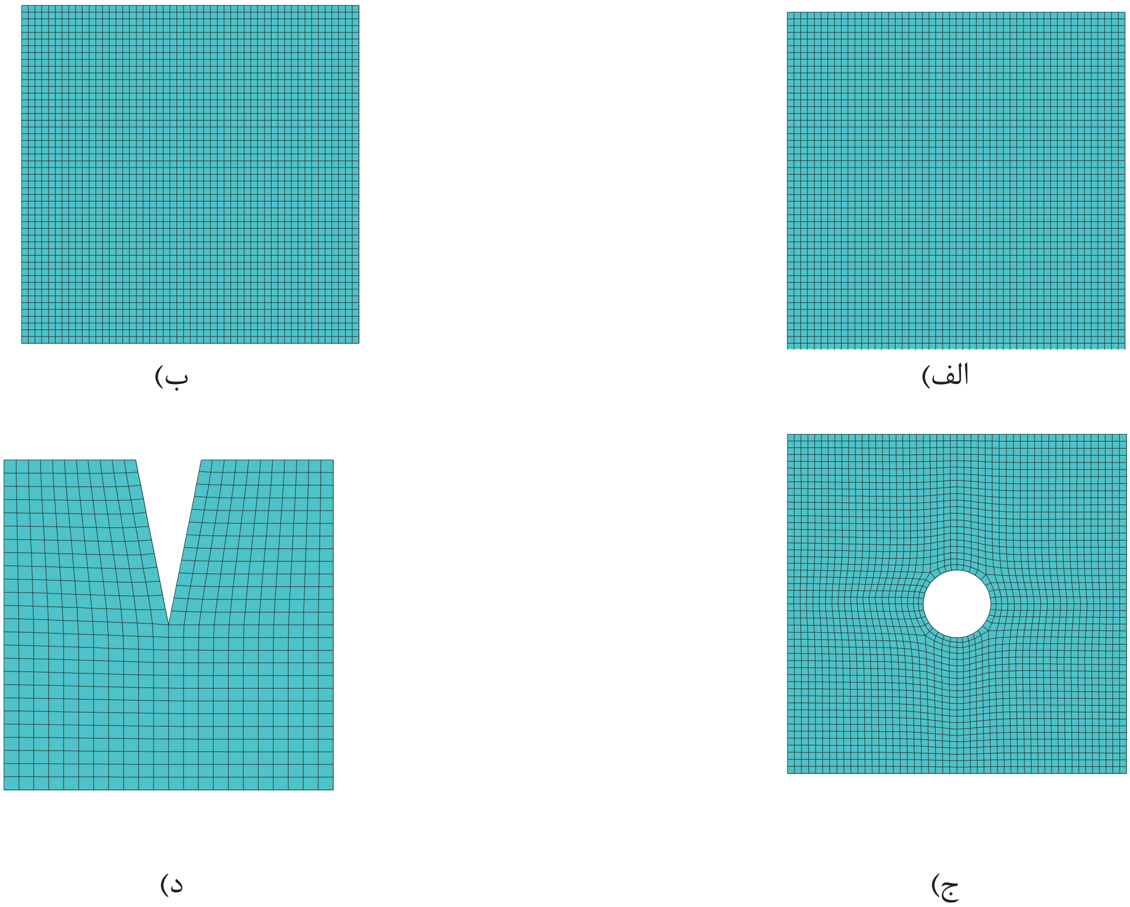


Fig. 4 Geometry discretization a) piezoelectric patch b) piezoelectric patch attached to aluminum structure c) perforated piezoelectric d) cracked piezoelectric patch

شکل ۴: نحوه مش بندی مدل‌های موردمطالعه در پژوهش حاضر الف) وصله پیزوالکتریک ب) وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی ج) وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار د) وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده

جدول ۱: خواص مواد پیزوالکتریک و آلومینیوم [۴]

Table 1. The piezoelectric and aluminum properties [4]

ماده	ثابت الاستیک				ثابت پیزوالکتریک			گذردهی الکتریکی		چگالی
	c_{11}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	e_{31}	e_{33}	e_{15}	ϵ_{11}	ϵ_{33}	ρ
پیزوالکتریک	۱۲۶×۱۰^۹	۸۴/۱×۱۰^۹	۱۱۹×۱۰^۹	۲۳×۱۰^۹	-۶/۵	۲۳/۳	۱۷/۴۴	۱۵/۰۳×۱۰^-۹	۱۳×۱۰^-۹	۷۵۰۰
آلومینیوم	۹۱/۹×۱۰^۹	۴۵/۳×۱۰^۹	۹۱/۹×۱۰^۹	۲۳/۳×۱۰^۹	۰	۰	۰	۱۵/۰۳×۱۰^-۴	۱۳×۱۰^-۴	۲۷۰۰

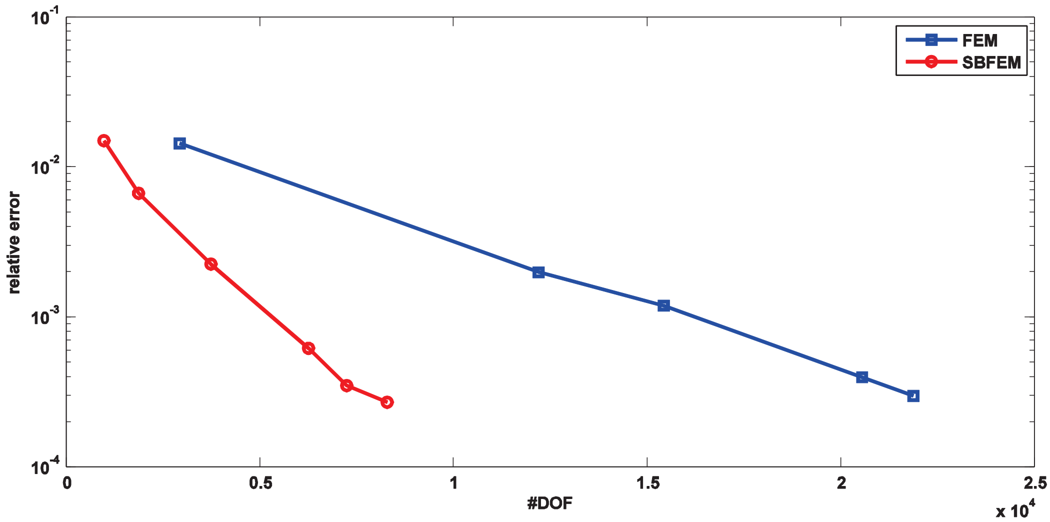


Fig. 5. Averaged relative error of the first 50 eigen-frequencies of the piezoelectric patch obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شکل ۵: شاخص همگرایی میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول برای دو روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده و اجزاء محدود در مسئله ارتعاشات آزاد وصله پیزوالکتریک

مسئله، که در آن از المان‌های مثلثی با تابع شکل درجه ۲ برای گسسته سازی استفاده شده است را نشان می‌دهد. در محاسبه شاخص همگرایی، نتایج تحلیل اجزاء محدود همگرا شده به‌عنوان پاسخ معیار در نظر شد. طبق نتایج، تعداد درجات آزادی موردنیاز در روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده به ازای خطای یکسان، بسیار کمتر از روش اجزاء محدود است. نیاز به تعداد درجات آزادی کمتر برای دستیابی به نتایج دقیق، منجر به کاهش چشمگیر هزینه محاسباتی روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده می‌گردد. به‌علاوه نرخ همگرایی (شیب خطوط) نشان از سرعت همگرایی بیشتر روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده نسبت به روش اجزاء محدود دارد که این امر ازجمله مزایای دیگر این روش به شمار می‌رود.

نتایج تحلیل ارتعاشات اجباری وصله پیزوالکتریک در حوزه فرکانس، به‌صورت جابجایی نقطه A در جهت y برحسب فرکانس تحریک، به ازای اعمال تحریک واحد هارمونیک در حوزه فرکانس در همان نقطه (متناظر با اعمال تحریک چیرپ در حوزه زمان)، به کمک دو روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده و اجزاء محدود در شکل ۶ نشان داده شده است. در این تحلیل، تعداد درجات آزادی برای روش‌های اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء

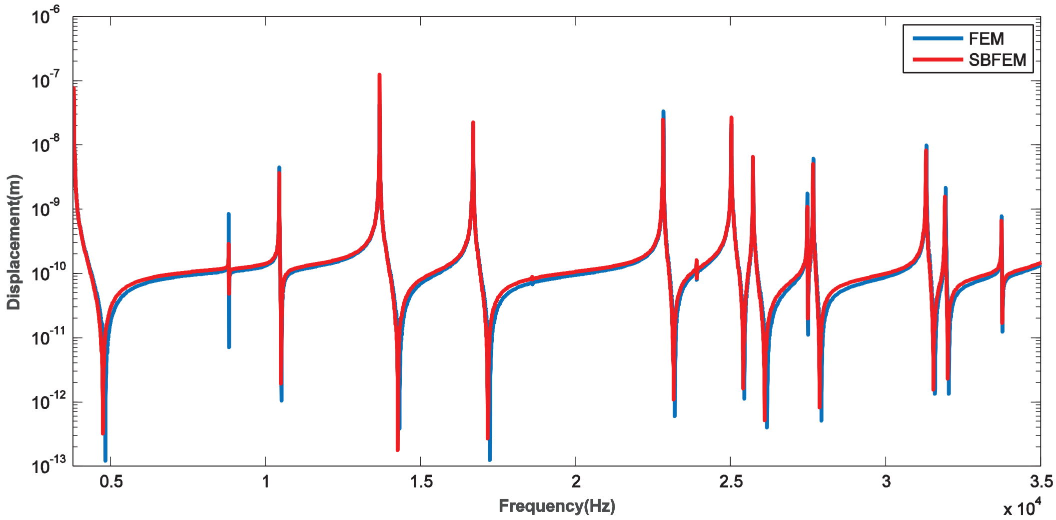


Fig. 6. Frequency response in the form of displacement in y direction at point A using harmonic excitation in the same direction and point for piezoelectric patch (frequency range 0 to 35 kHz)

شکل ۶: پاسخ فرکانسی وصله پیزوالکتریک به‌صورت جابجایی نقطه A در جهت y ناشی از اعمال بار واحد هارمونیک در همان نقطه و در همان جهت (بازه فرکانسی ۰ تا ۳۵ کیلوهرتز)

جدول ۲: فرکانس‌های طبیعی ۱تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزا محدود و اجزا محدود با مرز مقیاس شده برای وصله پیزوالکتریک

Table 2. 1st-5nd and 46nd -50nd natural frequencies of piezoelectric patch obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شماره	روش اجزا محدود با مرز مقیاس شده	روش اجزا محدود	خطای نسبی
۱	۳۸۰۱	۳۷۹۹	۰/۰۵
۲	۸۷۹۴	۸۷۹۱	۰/۰۲۷۳
۳	۱۰۴۲۰	۱۰۴۲۰	۰/۰۰۱
۴	۱۳۶۵۲	۱۳۶۵۲	۰/۰۰۰۲
۵	۱۶۶۶۶	۱۶۶۶۳	۰/۰۱۴۱
۴۶	۶۲۳۱۴	۶۲۳۰۲	۰/۰۱۸۳
۴۷	۶۳۱۹۸	۶۳۱۸۱	۰/۰۲۶۴
۴۸	۶۳۴۲۵	۶۳۴۱۲	۰/۰۲۱
۴۹	۶۴۷۶۶	۶۴۷۴۶	۰/۰۳۰۳
۵۰	۶۵۹۶۱	۶۵۹۳۵	۰/۰۳۹۵

محدود به ترتیب ۸۲۸۰ و ۲۱۸۵۲ لحاظ شد. طبق نتایج، روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده با درجات آزادی به‌مراتب کمتری نسبت به روش اجزاء محدود، پاسخ‌هایی با دقت بسیار مناسب ارائه می‌دهد. تطابق مناسب نتایج در فواصل بین دو قله، علاوه بر تشابه نتایج در محل قله‌ها و همچنین دامنه آن‌ها، نشان از دقت بسیار مناسب این روش در تحلیل مسائل ارتعاشی در فرکانس بالا دارد.

به‌منظور بررسی قابلیت روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده در تحلیل مسائل ارتعاشات اجباری فرکانس بالا، پاسخ زمانی وصله پیزوالکتریک موردنظر به تحریک تون برست با فرکانس مرکزی ۳۰ کیلوهرتز نیز مورد بررسی قرار گرفت. به‌طور خاص، وصله موردنظر توسط تابع ذیل در نقطه A مورد تحریک اجباری در جهت y قرار گرفت:

$$f(t)=\sin(2\pi\times 30000t)*(1-\cos(2\pi\times 6000t)) \quad (۴۳)$$

در شکل ۶ نتایج مربوط به نحوه ارتعاش همان نقطه تحریک (متناظر با نحوه محاسبه امپدانس مکانیکی) حاصل از دو تحلیل اجزای محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء محدود نشان داده شده است. تطابق نتایج در حوزه زمان نیز حاکی از دقت بسیار مناسب روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در حل مسائل دینامیکی در حوزه زمان دارد. این در حالی است که در این تحلیل،

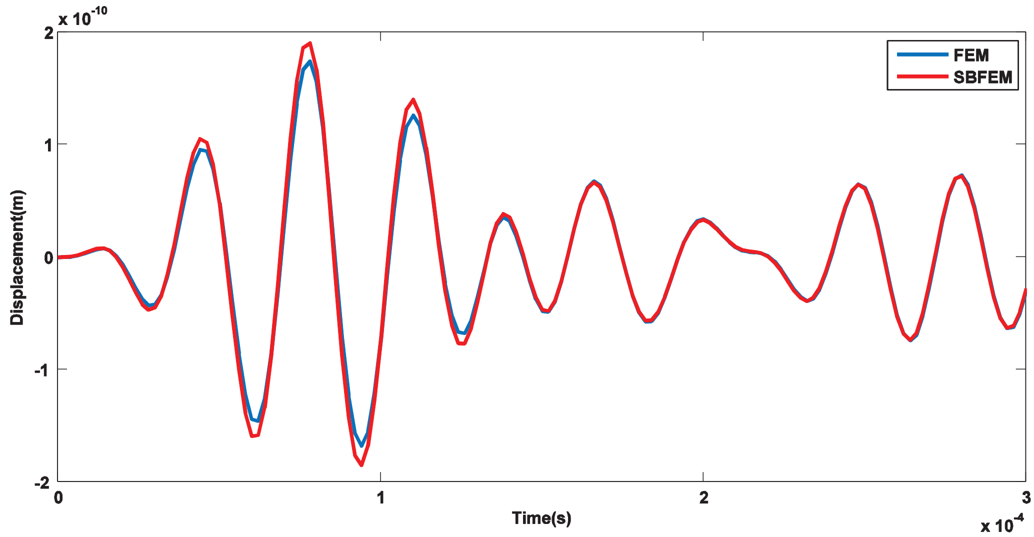


Fig. 7. Phase velocity dispersion curves for a steel pipe with outer diameter of 220 mm and wall thickness of 4.8 mm

شکل ۷: پاسخ زمانی وصله پیزوالکتریک به‌صورت جابجایی نقطه A در جهت y، ناشی از اعمال تحریک تون برست در همان نقطه و در همان جهت (بازه زمانی ۰ تا ۳۰۰ میکروثانیه)

تعداد درجات آزادی مدل اجزاء محدود با مرز مقیاس شده حدود یک‌سوم درجات آزادی مدل اجزاء محدود لحاظ شده است و به‌این‌ترتیب، هزینه محاسباتی نیز به همین نسبت کاهش خواهد یافت.

۵- ۲- ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی

پس از بررسی رفتار وصله پیزوالکتریک به‌صورت جداگانه، بررسی نحوه تعامل آن با سازه میزبان در ارتعاشات فرکانس بالا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به همین خاطر در مسئله موردی دوم، امپدانس مکانیکی یک سازه غیر همگن شامل بستر آلومینیومی و وصله پیزوالکتریک به‌صورت دوبعدی مورد بررسی قرار گرفته است (شکل ۳(ب)). مشابه مثال قبل، گیردار کردن وجه سمت چپ و آزاد گذاشتن سایر وجوه به‌عنوان شرط مرزی مکانیکی اعمال شد. به‌علاوه، پتانسیل الکتریکی وجه سمت چپ وصله پیزوالکتریک صفر در نظر گرفته شدد. خواص مواد پیزوالکتریک و آلومینیوم مورداستفاده در جدول ۱ آمده است.

تغییرات ناگهانی خواص مواد، منجر به تغییرات ناگهانی تنش (کرنش) در فصل مشترک وصله پیزوالکتریک و سازه میزبان می‌شود. به ممین خاطر در چنین مسائلی همگرایی پاسخ در روش‌های عددی به تعویق افتاده و استفاده از مش بندی ریز در نواحی فصل مشترک دو ماده توصیه می‌گردد.

فرکانس‌های طبیعی ۱تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از برای دو روش اجزا محدود و اجزا محدود با مرز مقیاس شده در جدول ۳ ارائه‌شده است.

به همین خاطر نحوه همگرایی نتایج دو روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء محدود در این حالت نیز در شکل ۸ مورد مقایسه قرار گرفت. طبق نتایج در این حالت، روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده علاوه بر نرخ همگرایی سریع‌تر نسبت به روش اجزاء محدود، شاخص همگرایی (شاخص همگرایی مورداستفاده در مثال قبل) بهتری را با تعداد درجات آزادی بسیار کوچک‌تر ارائه می‌دهد.

شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان‌دهنده امپدانس مکانیکی (تحریک سیستم توسط رابطه (۴۳) در نقطه A و استخراج پاسخ به‌صورت جابجایی همان نقطه) پیکربندی موردبررسی به ترتیب در حوزه فرکانس (تحریک هارمونیک با دامنه واحد متناظر با تحریک چیرپ در حوزه زمان) و زمان (تحریک تون برست متناظر با رابطه (۴۳)) هستند. برای استخراج نتایج حاصل، تعداد درجات آزادی روش‌های اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده و اجزاء محدود به ترتیب ۸۳۵۰ و ۲۳۰۵۷ لحاظ شد (حدود یک‌سوم کاهش هزینه محاسباتی). انطباق نتایج در هر دو حوزه زمان و فرکانس (خصوصاً محل و دامنه قله‌ها)، نشان از قابلیت منحصربه‌فرد این روش برای تحلیل مسائل ارتعاشاتی سامانه‌هایی با تغییر ناگهانی خواص مواد (مانند مسائل پایش سلامت سازه‌های آلومینیومی)

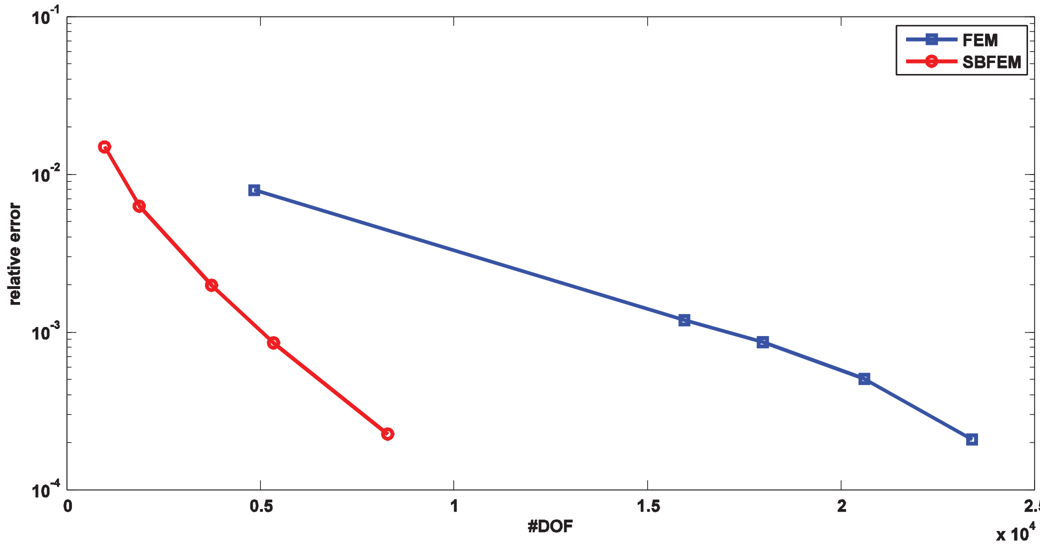


Fig. 8. Averaged relative error of the first 50 eigen-frequencies of the piezoelectric patch attached to aluminum structure obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شکل ۸: شاخص همگرایی میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول برای دو روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء محدود در مسئله ارتعاشات آزاد وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی

جدول ۳: فرکانس‌های طبیعی ۱تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزا محدود و اجزا محدود با مرز مقیاس شده برای وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی

Table 3. 1st-5th and 46th -50th natural frequencies of piezoelectric patch attached to Aluminum structure obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شماره	روش اجزا محدود با مرز مقیاس شده	روش اجزا محدود	خطای نسبی
۱	۴۲۸۹	۴۲۸۸	۰/۰۰۰۳
۲	۹۸۵۴	۹۸۵۳	۰/۰۰۰۱
۳	۱۲۲۳۸	۱۲۲۳۷	۰/۰۰۰۰۸
۴	۱۸۲۵۶	۱۸۲۵۶	۰/۰۰۰۰۲۶
۵	۲۱۱۱۲	۲۱۱۰۹	۰/۰۰۰۱
۴۶	۷۵۴۶۷	۷۵۴۴۵	۰/۰۰۰۲
۴۷	۷۶۵۴۱	۷۶۵۲۲	۰/۰۰۰۲
۴۸	۷۷۱۱۴	۷۷۰۹۱	۰/۰۰۰۳
۴۹	۷۷۸۶۶	۷۷۸۳۲	۰/۰۰۰۴
۵۰	۷۸۲۸۹	۷۸۲۵۸	۰/۰۰۰۴

با هزینه محاسباتی بسیار پایین دارد. این مزیت، روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده را به‌عنوان گزینه‌ای بسیار مناسب برای حل مسائلی که نیاز به تحلیل متوالی سیستم موردنظر وجود دارد (مانند مسائل شناسایی آسیب در حوزه پایش سلامت به‌عنوان مسئله‌ای معکوس) معرفی می‌کند.

۵- ۳- ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک سوراخدار

وصله پیزوالکتریک سوراخدار یکی از پیکربندی‌های رایج مواد پیزوالکتریک مورداستفاده در کاربردهای مختلف اعم از مبدل‌های اولتراسونیک، موتورهای پیزوالکتریک و جاذب‌های ارتعاشاتی به شمار می‌رود. تمرکز تنش به وجود آمده در اطراف نواحی سوراخ، تحلیل عددی و نحوه گسسته سازی این پیکربندی را دچار چالش می‌کند. به همین خاطر به‌عنوان مسئله موردی سوم، قابلیت روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در تحلیل این هندسه مورد ارزیابی قرار گرفت. به‌طور خاص، ارتعاشات آزاد و اجباری یک پیزوالکتریک مربعی با یک سوراخ دایروی درست در وسط آن مورد بررسی قرار گرفت (شکل ۳(ج)). همانند حالت‌های قبل، تمام درجات آزادی (مکانیکی و الکتریکی) لبه سمت چپ پیزوالکتریک صفر در نظر گرفته شد. مشخصات ماده پیزوالکتریک مورداستفاده در جدول ۱ ارائه شده است.

گسسته سازی هندسه‌های پیچیده در کدهای عددی توسعه داده‌شده

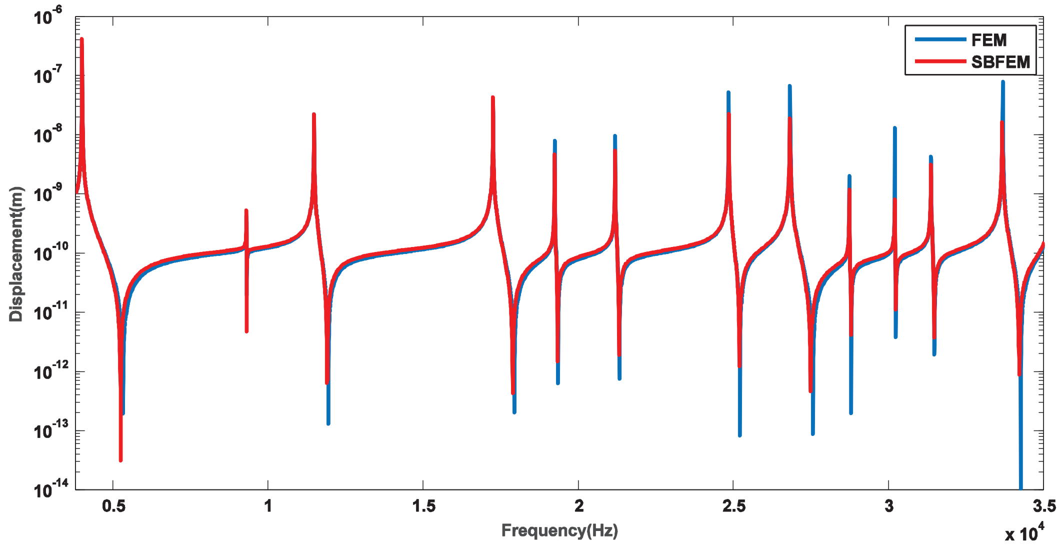


Fig. 9. Frequency response of y direction of displacement in point A using harmonic excitation in the same direction and point for The piezoelectric patch attached to aluminum structure (frequency range 0 to 35 kHz).

شکل ۹: پاسخ فرکانسی وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی به‌صورت جابجایی نقطه A در جهت y ناشی از اعمال بار واحد هارمونیک در همان نقطه و در همان جهت (بازه فرکانسی ۰ تا ۳۵ کیلوهرتز)

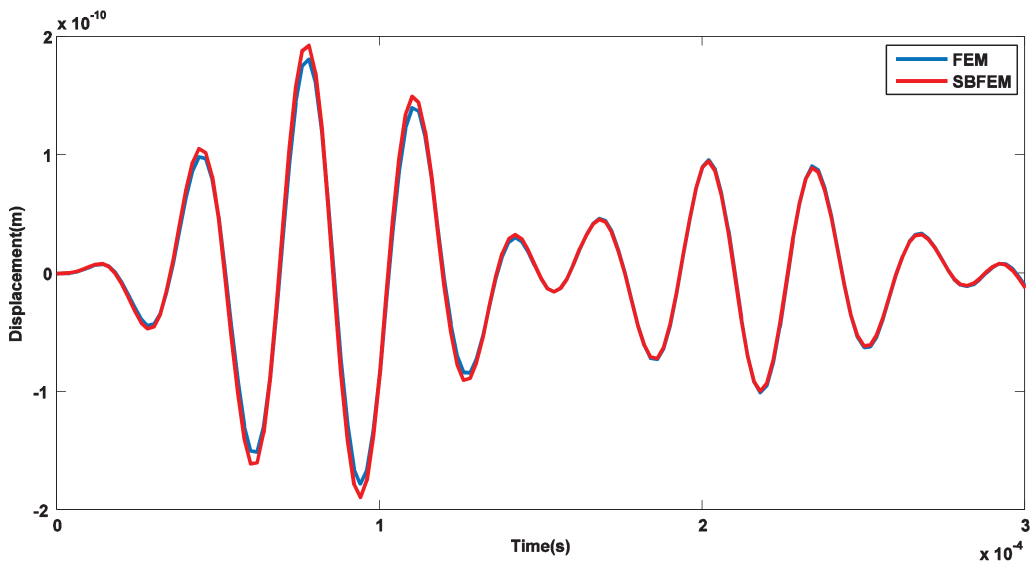


Fig. 10. Transient response of y direction of displacement in point A using harmonic excitation in the same direction and point for The piezoelectric patch attached to Aluminum structure (0 to 300).

شکل ۱۰: پاسخ زمانی وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی به‌صورت جابجایی نقطه A در جهت y ناشی از اعمال تحریک تون برست در همان نقطه و در همان جهت (بازه زمانی ۰ تا ۳۰۰ میکروثانیه)

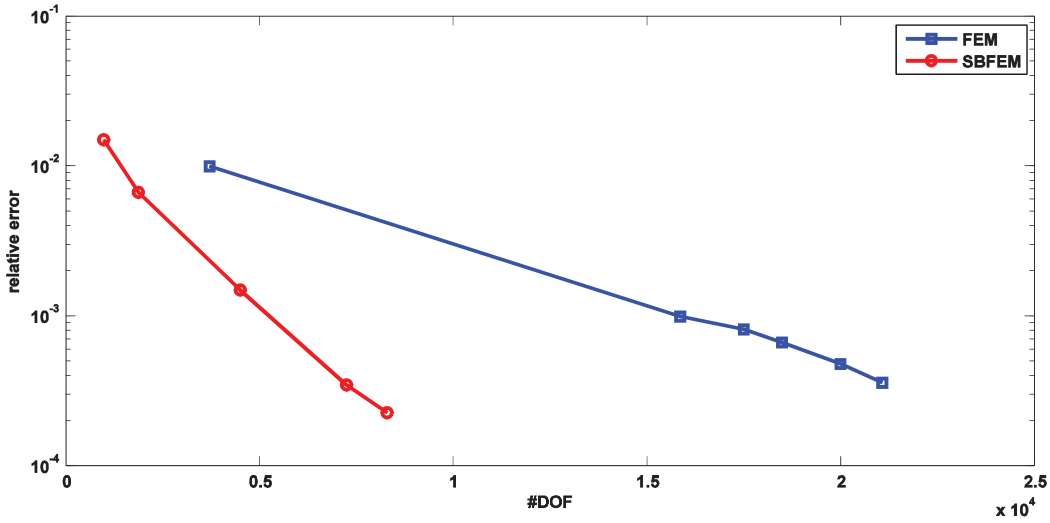


Fig. 11. Averaged relative error of the first 50 eigen-frequencies of the perforated piezoelectric patch obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شکل ۱۱: شاخص همگرایی میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول برای دو روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده و اجزاء محدود در مسئله ارتعاشات آزاد وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار

در نرم‌افزارهای غیرتجاری المان محدود، همواره از چالش‌های جدی در کد نویسی روش‌های عددی مختلف محسوب می‌شود. برای رفع این مشکل، در این پژوهش از قابلیت مش بندی مناسب نرم‌افزارهای تجاری استفاده و مش بندی مناسب به‌صورت ورودی، وارد کد عددی توسعه داده شد و پس از برخی از تنظیمات آماده استفاده در روش حل توسعه داده‌شده قرار گرفت. به‌این‌ترتیب، مشکل مش بندی و تحلیل سازه‌ها با پیکربندی‌های پیچیده توسط روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده مرتفع گردید. فرکانس‌های طبیعی ۱تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزا محدود و اجزا محدود با مرز مقیاس شده در جدول ۴ ارائه شده است.

بررسی همگرایی نتایج در مسائلی که با تمرکز تنش همراه هستند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. شکل ۱۱ شاخص همگرایی ارائه‌شده در این پژوهش را برای پیکربندی حاضر در دو روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء محدود نشان می‌دهد. همانند دو مثال قبل، در این حالت نیز روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده علاوه بر نرخ همگرایی سریع‌تر، به شاخص همگرایی مناسب‌تری به ازای تعداد درجات آزادی بسیار کمتر نسبت به روش اجزاء محدود دست پیدا می‌کند.

شکل‌های ۱۲ و ۱۳ پاسخ سیستم به تحریک فرکانس بالا را به‌صورت

جدول ۴: فرکانس‌های طبیعی ۱تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزا محدود و اجزا محدود با مرز مقیاس شده برای وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار

Table 4. 1st-5th and 46th -50th natural frequencies of the perforated piezoelectric patch obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شماره	روش اجزا محدود با مرز مقیاس شده	روش اجزا محدود	خطای نسبی
۱	۳۷۵۹	۳۷۵۸	۰/۰۰۰۴
۲	۸۶۷۴	۸۶۷۱	۰/۰۰۰۲
۳	۱۰۴۲۵	۱۰۴۲۵	۰/۰۰۰۰۰۷
۴	۱۳۵۹۵	۱۳۵۹۵	۰/۰۰۰۰۰۳۴
۵	۱۶۱۸۷	۱۶۱۸۵	۰/۰۰۰۱
۴۶	۶۲۲۷۰	۶۲۲۵۸	۰/۰۰۰۲
۴۷	۶۲۶۰۱	۶۲۵۹۱	۰/۰۰۰۱
۴۸	۶۳۰۵۶	۶۳۰۴۸	۰/۰۰۰۱
۴۹	۶۴۵۵۴	۶۴۵۳۷	۰/۰۰۰۲
۵۰	۶۵۲۴۸	۶۵۲۳۵	۰/۰۰۰۱

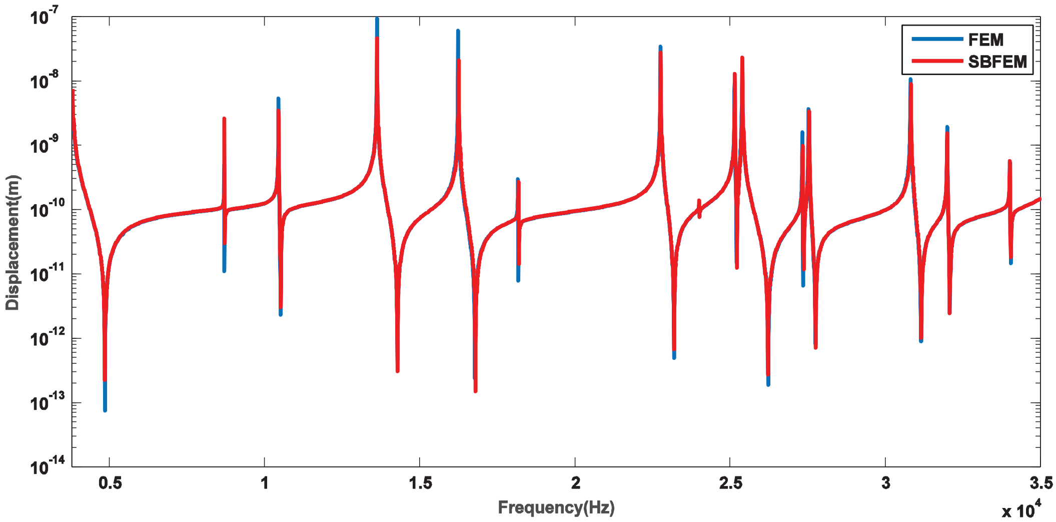


Fig. 12. Frequency response of y direction of displacement in point A using harmonic excitation in the same direction and point for the perforated piezoelectric patch (frequency range 0 to 35 kHz)

شکل ۱۲: پاسخ فرکانسی وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار به‌صورت جابجایی نقطه A در جهت y ناشی از اعمال بار واحد هارمونیک در همان نقطه و در همان جهت (بازه فرکانسی ۰ تا ۳۵ کیلوهرتز)

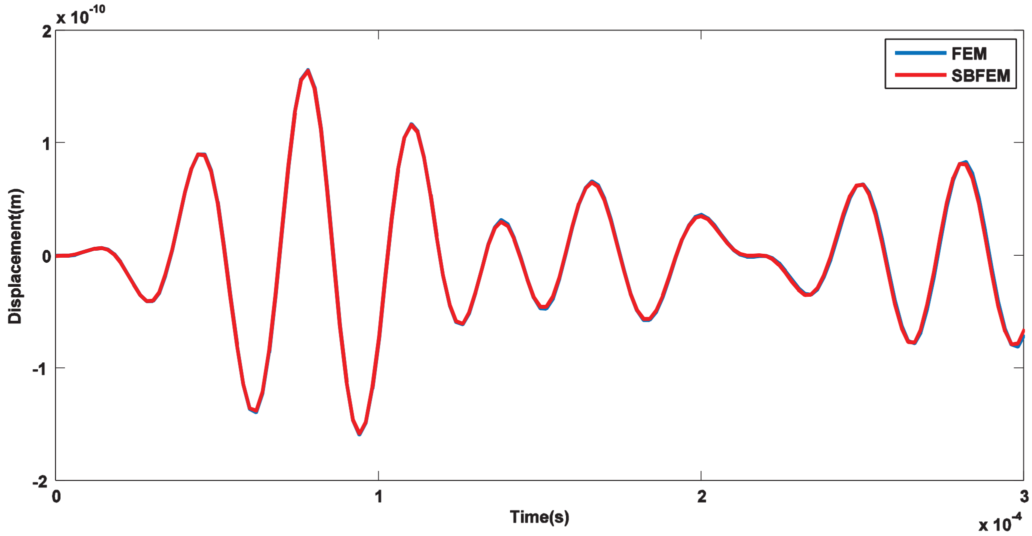


Fig. 13. Transient response in the form of displacement in y direction at point A using harmonic excitation in the same direction and point for the perforated piezoelectric patch (0 to 300 μ_s)

شکل ۱۳: پاسخ زمانی وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار به‌صورت جابجایی نقطه A در جهت y، ناشی از اعمال تحریک تون برست در همان نقطه و در همان جهت (بازه زمانی ۰ تا ۳۰۰ میکروثانیه)

جابجایی در نقطه A و در جهت y، به ترتیب در حوزه فرکانس (تحریک هارمونیک با دامنه واحد در نقطه A و در جهت y متناظر با تحریک چیرپ در حوزه زمان) و زمان (تحریک تون برست متناظر با رابطه (۴۳) در نقطه A و در جهت y) هستند. در مدل‌های اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده و اجزاء محدود توسعه داده‌شده برای پیزوالکتریک سوراخ‌دار، تعداد درجات آزادی به ترتیب ۹۱۳۲ و ۲۳۶۵۶ لحاظ شد. انحراف بسیار ناچیز نتایج روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده نسبت به روش اجزاء محدود، حاکی از قابلیت این روش در مدل‌سازی گرادیان‌های شدید تنش (کرنش) در اطراف ناپیوستگی‌ها است. این در حالی است که استفاده از این روش در چنین مسائلی، هزینه محاسباتی را حدود یک‌سوم کاهش خواهد داد.

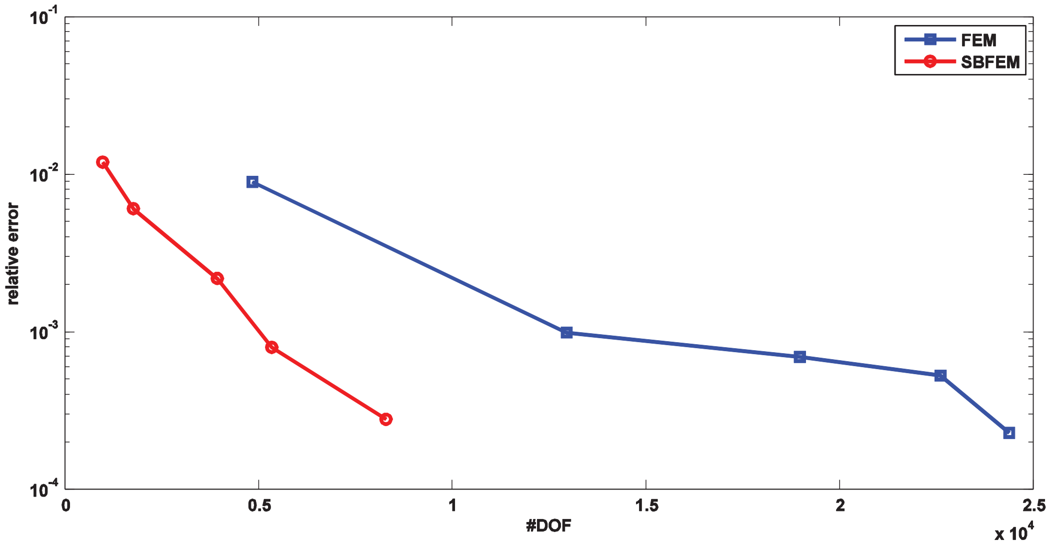


Fig. 14. Averaged relative error of the first 50 eigen-frequencies of the cracked piezoelectric patch obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شکل ۱۴: شاخص همگرایی میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول برای دو روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده و اجزاء محدود در مسئله ارتعاشات آزاد وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده

۵- ۴- ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده

اطمینان از سلامت وصله پیزوالکتریک و تحلیل قابلیت اطمینان آن در بارگذاری‌های خستگی از اهمیت ویژه‌ای در کاربردهای مختلف، خصوصاً وصله‌های پیزوالکتریک مورداستفاده در سامانه‌های پایش برخط برخوردار است. جوانه‌زنی ترک‌های خستگی در این وصله و رشد آن، یکی از انواع مکانیزم‌های آسیب‌دیدگی وصله‌های پیزوالکتریک به شمار می‌رود. امکان مدل‌سازی وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده و مقایسه طیف‌های به‌دست‌آمده با حالت سالم، امکان پایش سلامت سامانه حسگری را فراهم می‌کند. در این راستا، در این پژوهش پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری فرکانس بالای یک وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده به کمک روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده مورد بررسی قرار گرفت. مشابه مثال‌های قبل، شرایط مرزی به‌صورت درجات آزادی صفر در وجه سمت چپ سامانه مورد تحلیل منظور شد. خواص ماده پیزوالکتریک موردبررسی در جدول ۱ ارائه شده است. با توجه به پیچیدگی هندسی پیکربندی‌های دارای ترک، مشابه مثال قبل، موقعیت گره‌ها و ماتریس ارتباط گره‌ها پس از مش بندی در نرم‌افزارهای تجاری وارد کد عددی توسعه داده شد.

همگرایی نتایج و چگالی مش بندی در اطراف ناحیه ترک از اهمیت ویژه‌ای در مدل‌سازی تکینگی تنش (کرنش) در حوزه نوک ترک برخوردار است. به این خاطر، در این مثال نیز نحوه همگرایی نتایج در روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده مورد بررسی قرار گرفت و نتایج با روش اجزاء محدود مقایسه شد. فرکانس‌های طبیعی ۱تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزا محدود و اجزا محدود با مرز مقیاس شده در جدول ۵ ارائه شده است.

طبق نتایج، نرخ همگرایی نتایج تحلیل ارتعاشات آزاد مسائل شامل ترک در روش اجزا محدود مرز مقیاس شده بسیار سریع‌تر از نرخ همگرایی در روش اجزا محدود است (شکل ۱۴) که این موضوع امکان استفاده از تعداد درجات آزادی کمتر برای دستیابی به نتایج دقیق‌تر را نسبت به روش اجزا محدود فراهم می‌کند.

در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نیز پاسخ وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده به‌صورت جابجایی نقطه A و در جهت y، به ترتیب در حوزه فرکانس (تحریک هارمونیک با دامنه واحد در نقطه A و در جهت y متناظر با تحریک چیرپ در حوزه زمان) و زمان (تحریک تون برست متناظر با رابطه (۴۳) در نقطه A و در جهت y) نشان داده شده است. تعداد درجات آزادی در مدل‌های اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء محدود توسعه داده شده به ترتیب ۸۹۳۵ و ۲۲۶۳۹ در نظر گرفته شد. تطابق بسیار مناسب نتایج، نشان از قابلیت

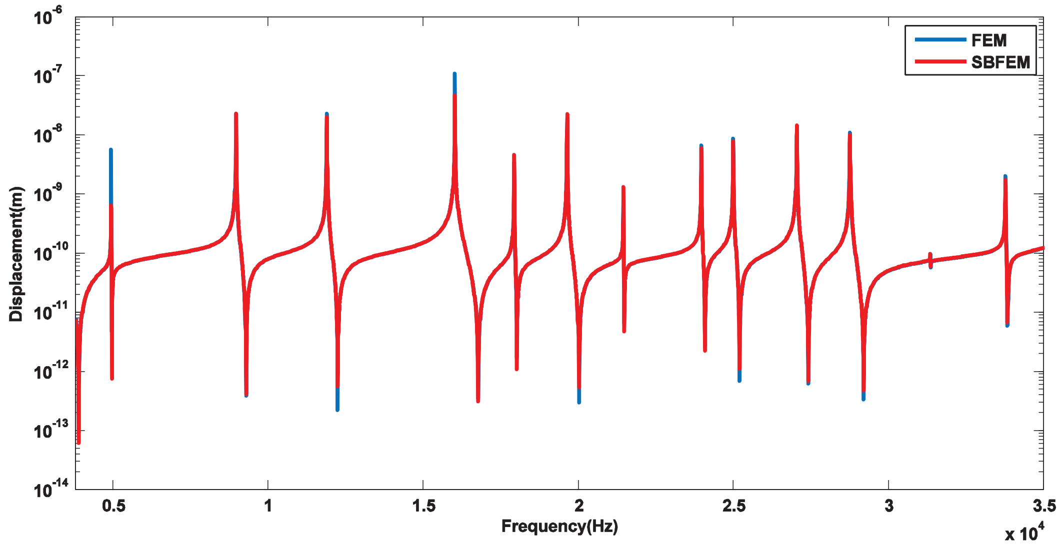


Fig. 15. Frequency response of y direction of displacement in point A using harmonic excitation in the same direction and point for the cracked piezoelectric patch (frequency range 0 to 35 kHz)

شکل ۱۵: پاسخ فرکانسی وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده به‌صورت جابجایی نقطه A در جهت y ناشی از اعمال بار واحد هارمونیک در همان نقطه و در همان جهت (بازه فرکانسی ۰ تا ۳۵ کیلوهرتز)

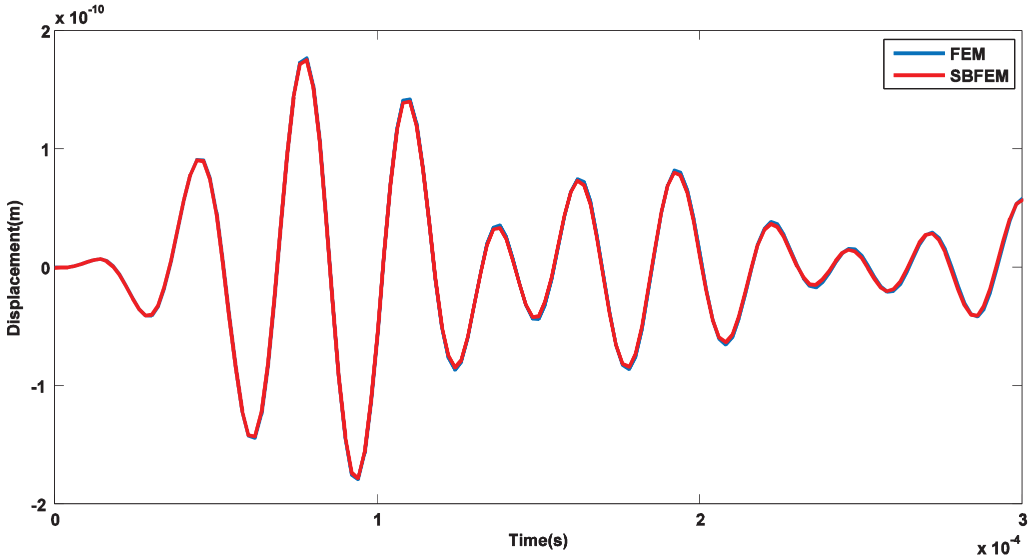


Fig. 16. Transient response in the form of displacement in y direction at point A using harmonic excitation in the same direction and point for the cracked piezoelectric patch (0 to 300 μ_S).

شکل ۱۶: پاسخ زمانی وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده به‌صورت جابجایی نقطه A در جهت y، ناشی از اعمال تحریک تون برست در همان نقطه و در همان جهت (بازه زمانی ۰ تا ۳۰۰ میکروثانیه)

جدول ۴: فرکانس‌های طبیعی ۱تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزا محدود و اجزا محدود با مرز مقیاس شده برای وصله پیزوالکتریک ترک‌دار

Table 4. 1st-5th and 46th -50th natural frequencies of the cracked piezoelectric patch obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شماره	روش اجزا محدود با مرز مقیاس شده	روش اجزا محدود	خطای نسبی
۱	۲۲۴۹	۲۲۴۳	۰/۰۰۲۷
۲	۴۹۰۴	۴۸۹۴	۰/۰۰۲
۳	۸۹۳۳	۸۹۲۶	۰/۰۰۰۸
۴	۱۱۸۶۰	۱۱۸۵۵	۰/۰۰۰۴
۵	۱۵۹۷۵	۱۵۹۵۹	۰/۰۰۱
۴۶	۶۱۸۶۴	۶۱۸۳۰	۰/۰۰۰۵
۴۷	۶۲۹۱۳	۶۲۸۹۴	۰/۰۰۰۳
۴۸	۶۳۶۵۸	۶۳۶۲۱	۰/۰۰۰۵
۴۹	۶۴۰۴۴	۶۴۰۲۷	۰/۰۰۰۲
۵۰	۶۴۸۵۶	۶۴۸۳۸	۰/۰۰۰۳

این روش در مدل‌سازی مسائل مکانیک شکست و امکان استفاده از آن در کاربردهای ارزیابی قابلیت اطمینان سامانه حسگری (تحلیل این‌گونه مسائل مستلزم شبیه‌سازی‌های متوالی پاسخ سیستم به ازای اندازه‌های مختلف ترک است) دارد.

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش ارتعاشات فرکانس بالای آزاد و اجباری سامانه‌های شامل وصله‌های پیزوالکتریک به کمک یک روش نیمه‌تحلیلی نوین موسوم به روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده مورد بررسی قرار گرفت. حل تحلیلی معادلات حاکم بر سیستم در یک بعد و گسسته سازی آن در بعد دیگر، این روش را در زمره روش‌های نیمه‌تحلیلی قرار داده و منجر به کاهش زمان تحلیل می‌گردد. به‌منظور صحت‌سنجی روش فوق، کد عددی روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در دو حوزه زمان (استفاده از روش نیومارک به‌منظور گسسته سازی حوزه زمان) و فرکانس (روش مقادیر ویژه) توسعه داده شد و از آن برای تحلیل ارتعاشات ۴ مسئله موردی مختلف شامل، ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک، وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی، وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار و وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده استفاده و در تمام موارد نتایج با پاسخ‌های حاصل از تحلیل اجزاء محدود مورد مقایسه قرار گرفت. در پژوهش حاضر همچنین، چالش مش بندی هندسه‌های پیچیده با برقراری ارتباط بین نرم‌افزارهای مش بندی تجاری و کد عددی توسعه داده‌شده مرتفع گردید. به‌علاوه، از یک شاخص همگرایی جدید موسوم به میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول به‌منظور بررسی نرخ همگرایی در روش حاضر استفاده شد. طبق نتایج، نرخ همگرایی روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده بسیار سریع‌تر از نرخ همگرایی نتایج روش اجزاء محدود است. این امر امکان دستیابی به نتایج دقیق با تعداد درجات آزادی بسیار کمتر (نسبت به روش اجزاء محدود) را فراهم می‌کند. به‌علاوه، روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده با درجات آزادی و درنتیجه هزینه محاسباتی کمتری (حدود یک‌سوم) نسبت به روش اجزاء محدود همگرا می‌شود. با توجه به بهره‌گیری از پاسخ تحلیلی در راستای شعاعی، این روش قابلیت مدل‌سازی نواحی ناپیوسته (مانند ترک) بدون نیاز به استفاده از مش بندی بسیار ریز را دارد. تطابق بسیار مناسب نتایج این روش با نتایج تحلیل اجزاء محدود در دو حوزه زمان و فرکانس، حاکی از قابلیت روش حاضر در شبیه‌سازی انواع مسائل در حوزه‌های مختلف اعم از پایش سلامت است. توسعه روند ارائه‌شده، به‌منظور فراهم کردن امکان شبیه‌سازی مسائل مختلف به کمک روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده سه‌بعدی، به‌عنوان موضوع پژوهش‌های آتی توصیه می‌گردد.

منابع

[1] N. Sepehry, M. Shamshirsaz, F. Bakhtiari Nejad, Low-cost simulation using model order reduction in structural health monitoring: Application of balanced proper orthogonal decomposition, Structural Control and Health Monitoring, 24(11) (2017) e1994.

[2] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, M. Shamshirsaz, W. Zhu, Nonlinear Modeling of Cracked Beams for Impedance Based Structural Health Monitoring, ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Volume 4B: Dynamics, Vibration, and Control, 2017, pp.

V04BT05A034-V04BT05A042

[3] N. Sepehry, S. Asadi, M. Shamshirsaz, F. Bakhtiari Nejad, A new model order reduction method based on global kernel k-means clustering: Application in health monitoring of plate using Lamb wave propagation and impedance method, Structural Control and Health Monitoring, 25(9) (2018) e2211.

[4] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, M. Shamshirsaz, Discrete singular convolution and spectral finite element method for predicting electromechanical impedance applied on rectangular plates, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 28(18) (2017) 2473-2488.

[5] A. Benjeddou, Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey, Computers & Structures, 76(1-3) (2000) 347-363.

[6] P. Lloyd, M. Redwood, Finite-Difference Method for the Investigation of the Vibrations of Solids and the Evaluation of the Equivalent-Circuit Characteristics of Piezoelectric Resonators. The Journal of the Acoustical Society of America, 39(2) (1966) 346-354.

[7] X. Zhao, K.M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded conical shell panels by a meshless method, Composite Structures, 93(2) (2011) 649-664.

[8] E. Carrera, E. Zappino, G. Li, Analysis of beams with piezo-patches by node-dependent kinematic finite element method models, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 29(7) (2018) 1379-1393.

[9] R. Ansari, J. Torabi, E. Hasrati, Axisymmetric nonlinear vibration analysis of sandwich annular plates with FG-CNTRC face sheets based on the higher-order shear deformation plate theory, Aerospace Science and Technology, 77 (2018) 306-319.

[10] E. Hasrati, R. Ansari, J. Torabi, Nonlinear forced vibration analysis of FG-CNTRC cylindrical shells under thermal loading using a numerical strategy, International Journal of Applied Mechanics, 9(08) (2017) 1750108.

[11] E. Hasrati, R. Ansari, J. Torabi, A novel numerical solution strategy for solving nonlinear free and forced vibration problems of cylindrical shells, Applied Mathematical Modelling, 53 (2018) 653-672.

[12] J. Torabi, R. Ansari, Nonlinear free vibration analysis of thermally induced FG-CNTRC annular plates: Asymmetric versus axisymmetric study, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 324 (2017) 327-347.

[13] C. Song, E.T. Ooi, S. Natarajan, A review of the scaled boundary finite element method for two-dimensional linear elastic fracture mechanics, Engineering Fracture Mechanics, 187 (2018) 45-73.

[14] C. Song, J.P. Wolf, The scaled boundary finite-element method—alias consistent infinitesimal finite-element cell method—for elastodynamics, Computer Methods in applied mechanics and engineering, 147(3-4) (1997) 329-355.

[15] J.P. Wolf, C. Song, The scaled boundary finite-element method–a primer: derivations, Computers & Structures, 78(1-3) (2000) 191-210.

[16] C. Song, J.P. Wolf, The scaled boundary finite-element method–a primer: solution procedures, Computers & Structures, 78(1-3) (2000) 211-225.

[17] A.J. Deeks, J.P. Wolf, A virtual work derivation of the scaled boundary finite-element method for elastostatics, Computational Mechanics, 28(6) (2002) 489-504.

[18] A. Yaseri, M. Bazyar, N. Hataf, 3D coupled scaled boundary finite-element/finite-element analysis of ground vibrations induced by underground train

movement, Computers and Geotechnics, 60 (2014) 1-8.

[19] R. Ansari, R. Rajabiehfard, B. Arash, Nonlocal finite element model for vibrations of embedded multi-layered graphene sheets, Computational Materials Science, 49(4) (2010) 831-838.

[20] M.H. Bazyar, C. Song, Transient analysis of wave propagation in non-homogeneous elastic unbounded domains by using the scaled boundary finite-element method, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 35(14) (2006) 1787-1806.

[21] H. Gravenkamp, C. Song, J. Prager, A numerical approach for the computation of dispersion relations for plate structures using the scaled boundary finite element method, Journal of Sound and Vibration, 331(11) (2012) 2543-2557.

[22] H. Gravenkamp, C. Birk, C. Song, Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the scaled boundary finite element method, Journal of Computational Physics, 295 (2015) 438-455.

[23] S. Chidgzey, J. Trevelyan, A. Deeks, Coupling of the boundary element method and the scaled boundary finite element method for computations in fracture mechanics, Computers & Structures, 86(11-12) (2008) 1198-1203.

[24] Z. Yang, A. Deeks, H. Hao, Transient dynamic fracture analysis using scaled boundary finite element method: a frequency-domain approach, Engineering Fracture Mechanics 74(5) (2007) 669-687.

[25] C. Li, H. Man, C. Song, W. Gao, Fracture analysis of piezoelectric materials using the scaled boundary finite element method, Engineering Fracture Mechanics, 97 (2013) 52-71.

[26] H. Man, C. Song, W. Gao, F. Tin-Loi, Semi-analytical analysis for piezoelectric plate using the scaled boundary finite-element method, Computers & Structures,137 (2014) 47-62.

[27] C. Li, H. Man, C. Song, W. Gao, Analysis of cracks and notches in piezoelectric composites using scaled boundary finite element method, Composite Structures, 101 (2013) 191-203.

[28] M.H. Bazyar, A. Talebi, Scaled boundary finite-element method for solving non-homogeneous anisotropic heat conduction problems, Applied Mathematical Modelling, 39(23-24) (2015) 7583-7599.

[29] C. Song, J.P. Wolf, The scaled boundary finite element method—alias consistent infinitesimal finite element cell method—for diffusion, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45(10) (1999) 1403-1431.

[30] F. Li, P. Ren, A novel solution for heat conduction problems by extending scaled boundary finite element method, International Journal of Heat and Mass Transfer, 95 (2016) 678-688.

[31] C. Song, The scaled boundary finite element method in structural dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 77(8) (2009) 1139-1171.

[32] C. Birk, C. Song, An improved non-classical method for the solution of fractional differential equations, Computational Mechanics, 46(5) (2010) 721-734.

[33] C. Song, A matrix function solution for the scaled boundary finite-element equation in statics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(23-26) (2004) 2325-2356.

[34] Z. Yang, A. Deeks, Calculation of transient dynamic stress intensity factors at bimaterial interface cracks using a SBFEM-based frequency-domain approach, Science

in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy, 51(5) (2008) 519-531.

[35] E. Ooi, Z. Yang, Modelling dynamic crack propagation using the scaled boundary finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 88(4) (2011) 329-349.

[36] E.T. Ooi, C. Song, F. Tin□Loi, Z. Yang, Polygon scaled boundary finite elements for crack propagation modelling, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 91(3) (2012) 319-342.

[37] D. Braess, M. Kaltenbacher, Efficient 3D-finite element formulation for thin mechanical and piezoelectric structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 73(2) (2007) 147-161.

[38] M.C. Ray, K.M. Rao, B. Samanta, Exact analysis of coupled electroelastic behaviour of a piezoelectric plate under cylindrical bending, Computers & Structures, 45(4) (1992) 667-677.

[39] T. Kant, S.M. Shiyekar, Cylindrical bending of piezoelectric laminates with a higher order shear and normal deformation theory, Computers & Structures, 86(15-16) (2008) 1594-1603.

[40] X.Y. Li, J. Wu, H.J. Ding, W.Q. Chen, 3D analytical solution for a functionally graded transversely isotropic piezoelectric circular plate under tension and bending, International Journal of Engineering Science, 49(7) (2011) 664-676.

[41] J.-Y. Chen, H.-J. Ding, W.-Q. Chen, 3D Analytical Solution for a Transversely Isotropic Magnetoelectroelastic Rotating Disc with Functionally Graded Property, in: Piezoelectricity, Acoustic Waves and Device Applications, World Scientific, 2007 pp. 129-136.

[42] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, W. Zhu, Scaled Boundary Finite Element Method for Modeling of Impedance Based Structural Health Monitoring of 2D Structure, in: ASME 2018 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers, 2018, pp. V008T010A034-V008T010A034.

[43] M. Kögl, E.C.N. Silva, Topology optimization of smart structures: design of piezoelectric plate and shell actuators, Smart Materials and Structures, 14(2) (2005) 387-399.

[44] B. Zheng, C.-J. Chang, H.C. Gea, Topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials, Structural and Multidisciplinary Optimization, 38(1) (2008) 17-23.

[45] M.C. Ray, R. Bhattacharyya, B. Samanta, Static analysis of an intelligent structure by the finite element method, Computers & Structures, 52(4) (1994) 617-631.

[46] J. Joseph, S. Raja, Y.C. Lu, Finite Element Analysis of Piezoelectric Composite Actuators, SAE International Journal of Materials and Manufacturing, 4(1) (2011) 328-339.

[47] H. Man, C. Song, W. Gao, F. Tin-Loi, A unified 3D-based technique for plate bending analysis using scaled boundary finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 91(5) (2012) 491-515.

[48] C. Song, The Scaled Boundary Finite Element Method: Introduction to Theory and Implementation, John Wiley & Sons, (2018).