



تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری صفحات پیزوالکتریک مبتنی بر روش نیمه تحلیلی اجزاء محدود با مرز مقیاس شده

ناصرالدین سپهری^{۱*}، محمد احسانی^۲ و مهناز شمشیرساز^۲

^۱ مهندسی مکانیک و مکترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

^۲ پژوهشکده فناوری نو، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۲۶

بازنگری: ۱۳۹۹/۰۲/۰۷

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۱۷

ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۵/۲۲

کلمات کلیدی:

اجزاء محدود با مرز مقیاس شده

نیمه تحلیلی

ارتعاشات

پیزوالکتریک

المان محدود

خلاصه: مدل سازی دقیق رفتار وصله های پیزوالکتریک نقش مهمی در درک مکانیزم عملکردی و همچنین گسترش روش های جدید مبتنی بر رفتار الکترومکانیکی آن ها ایفا می کند. این در حالی است که هزینه محاسباتی بالای روش های عددی موجود برای شبیه سازی رفتار ارتعاشی وصله های پیزوالکتریک، به خصوص در فرکانس های بالا، از چالش های جدی این حوزه محسوب می شود. هدف از این پژوهش استفاده از یک روش نیمه تحلیلی نوین موسوم به روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده به منظور تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری وصله های پیزوالکتریک است. به منظور ارزیابی دقت این روش در مدل سازی مسائل مختلف مانند رفتار وصله پیزوالکتریک در مسائل پایش سلامت و همچنین مکانیک شکست، چهار مسئله موردی شامل ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک، وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی، وصله پیزوالکتریک سوراخ دار و وصله پیزوالکتریک ترک خورده مورد تحلیل قرار گرفت. مقایسه نرخ همگرایی روش های اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء محدود نشان از دستیابی به نتایج دقیق به ازای تعداد درجات آزادی بسیار کمتر در روش اول دارد. به علاوه، تطابق مناسب نتایج حاصل از این دو روش، نشان از قابلیت روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در مدل سازی انواع مسائل با هزینه محاسباتی بسیار پایین دارد.

۱- مقدمه

توسعه یک مدل ریاضی دقیق به منظور توصیف رفتار مواد پیزوالکتریک، نقش مهمی در درک رفتار الکترومکانیکی وابسته آن ها ایفا می کند. مدل های تحلیلی علیرغم مزایای ویژه ای که در ایجاد یک بینش فیزیکی از نحوه تأثیرگذاری عوامل مختلف بر نحوه ارتعاشات مواد پیزوالکتریک مهیا می کنند، اغلب به واسطه اعمال فرضیات ساده کننده (به خصوص در فرکانس های تحریک بالا) با محدودیت های عملی شامل عدم امکان مدل سازی هندسه و شرایط مرزی پیچیده و همچنین رفتار دینامیکی دقیق سازه مواجه هستند. در این موارد مدل های عددی به عنوان جایگزین مناسبی برای تخمین طیف پاسخ سازه در فرکانس های بالا به شمار می روند.

تاکنون از روش های عددی متنوعی اعم از روش تفاضل محدود، روش اجزاء مرزی، روش بدون مش، روش اجزاء محدود، روش تربیع تغییرات ديفرانسیلی و روش اجزاء محدود طیفی برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری سازه ها و مواد پیزوالکتریک استفاده شده است [۳ و ۱۲-۵]. علیرغم مزایای به خصوص هر یک از روش های نام برده، هر یک با محدودیت های اجرایی به خصوص در شبیه سازی ارتعاشات سازه ها در فرکانس بالا محسوب

در سال های اخیر استفاده از مواد هوشمند در شاخه های مختلف علوم و مهندسی مانند حوزه پایش سلامت سازه، گسترش چشمگیری یافته است [۱]. خواص و ویژگی های منحصر به فرد مواد پیزوالکتریک به عنوان گونه ای از مواد هوشمند، آن ها را به گزینه ای مناسب برای به کارگیری در بخش عملگری و حسگری سامانه های مختلف صنعتی بدل کرده است. ذکر این نکته ضروری است که اغلب عملگرها و حسگرهای مورد استفاده در روش های مختلف پایش سلامت بر اساس خواص مواد پیزوالکتریک عمل می کنند، هرچند، استفاده از وصله های مینیا توری پیزوالکتریک، مزایای ویژه ای در حوزه شناسایی آسیب برخط به ارمغان می آورد [۴-۲]. به طور خاص، قابلیت عملگری و حسگری هم زمان وصله های پیزوالکتریک، مقاومت بالا، وزن کم، تأثیر ناچیز بر رفتار دینامیکی سازه تحت پایش و البته قیمت مناسب، جزء ویژگی های منحصر به فرد تراگذارهای ویفری در فرآیندهای شناسایی آسیب محسوب می شوند.

* نویسنده عهده دار مکاتبات: naser.sepehry@shahroodut.ac.ir



در راستای بهبود شیوه حل و تعیین پاسخ تحلیلی در راستای شعاعی انجام گرفته است. سانگ [۳۱] از تکنیک کسرهای دنباله‌دار برای تحلیل معادله سفتی دینامیکی بهره گرفت. استفاده از این تکنیک علاوه بر افزایش سرعت همگرایی، نیاز به مش بندی نواحی داخل المان برای در نظر گرفتن تأثیر اینرسی داخلی در فرکانس‌های بالا را از بین می‌برد. برک^۴ و سانگ [۳۲] با استفاده از ایده محلی سازی، حلی دقیق‌تر و پایدار برای معادلات دیفرانسیل کسری در حوزه فرکانس ارائه کردند. سانگ [۳۳] همچنین با اشاره به برخی کاستی‌های تکنیک مقادیر ویژه در حل مسائلی با تعداد مقادیر ویژه زیاد، از تکنیک توابع ماتریسی برای تعیین پاسخ نیمه‌تحلیلی توابع توانی و لگاریتمی استفاده کرد. امکان تعیین پاسخ بدون دانش قبلی در مورد نوع آن (لگاریتمی یا توانی) و همچنین تعیین پاسخ در نواحی انتقال، از جمله مزایای تکنیک توابع ماتریسی ذکر شد.

ارائه یک حل تحلیلی برای تنش در راستای شعاعی، روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده را به گزینه‌ای مناسب برای مدل‌سازی مسائل مکانیک شکست و تحلیل دقیق تکنیکی میدان تنش اطراف ترک با تعداد المان‌های بسیار کم بدل کرده است. در این راستا یانگ^۵ و دیکس [۳۴] از این روش برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش مختلط دینامیکی در اطراف نوک ترک موجود در فصل مشترک ماده دوجنسی استفاده کردند. تحلیل مسئله در حوزه فرکانس و انتقال آن توسط تبدیل فوریه معکوس به حوزه زمان، امکان تعیین تاریخچه زمانی عوامل شدت تنش مختلط مود ۱ و ۲ را میسر کرد. اویی^۶ و یانگ [۳۵] از روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده برای مدل‌سازی دینامیکی ترک استفاده کردند. الگوی ساده مش بندی مجدد برای دنبال کردن رشد دینامیکی ترک و همچنین نگاشت دقیق مش بندی از جمله مزایای این روش نسبت به روش اجزاء محدود ذکر شد [۳۶].

شبیه‌سازی رفتار عملگری و حسگری مواد پیزوالکتریک، از اهمیت ویژه‌ای در طراحی و بهینه‌سازی سامانه‌های شامل این قطعات برخوردار است. ارائه الگوهای جدید شناسایی آسیب، تحلیل قابلیت اطمینان سامانه حسگری، بهینه‌سازی نحوه ذخیره انرژی استک‌های پیزوالکتریک و نحوه بازپس‌دهی آن از جمله کاربردهای شبیه‌سازی رفتار الکترومکانیکی مواد پیزوالکتریک در حوزه پایش سلامت سازه محسوب می‌شود [۴۲-۳۷]. طی دو دهه گذشته تلاش‌های متعددی برای مدل‌سازی رفتار این مواد توسط روش اجزاء محدود صورت گرفته است [۴۳-۴۶]. مدل‌سازی و تحلیل رفتار

می‌شوند. استفاده از فرکانس‌های ارتعاشی بالا، حساسیت سیستم حسگری به عیوب ریز را افزایش داده و منجر به تشخیص زود هنگام آسیب (نسبت به روش‌های رایج دیگر مانند آنالیز مودال) می‌شود. فرایند پیچیده تنظیم اندازه المان‌ها و افزایش زمان حل به واسطه نیاز به استفاده از تعداد المان‌های زیاد و در نتیجه افزایش درجات آزادی، عمده‌ترین مشکلات روش‌های مبتنی بر مش بندی مانند اجزاء محدود، در مدل‌سازی مسائل ارتعاشات و انتشار موج در فرکانس‌های بالا به شمار می‌روند. هندسه‌های دارای ناپیوستگی مانند ترک یا سیستم‌های چند ماده‌ای سبب افزایش پیچیدگی و در نتیجه کاهش سرعت همگرایی خواهند شد [۱۳]. روش‌های اجزاء محدود طیفی علی‌رغم بهبود برخی از مشکلات روش اجزاء محدود و همچنین افزایش سرعت همگرایی، همچنان با پیچیدگی‌هایی شامل نیاز به گسسته سازی کل دامنه المان روبرو است [۳ و ۴].

روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده، یک روش عددی نوین برای حل معادلات مشتق جزئی حاکم بر انواع سیستم‌ها بوده که اولین بار توسط سانگ^۱ و ولف^۲ [۱۴] معرفی شد. این روش، از ترکیب ایده‌های موجود در دو رهیافت اجزاء محدود و اجزاء مرزی الهام گرفته شده است. در این روش کل دامنه به اجزایی تقسیم‌بندی شده و در هر المان، دامنه توسط توابع درون‌یابی گسسته سازی می‌شود. در این روش، تا زمانی که کل مرز از نقطه‌ای درون ناحیه قابل مشاهده باشد (موسوم به شرط لازم برای مقیاس بندی)، نیازی به مش بندی ناحیه درون المان وجود نداشته و گسسته سازی مرز کافی خواهد بود. استفاده از یک تحلیل در راستای شعاعی، روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده را در زمره روش‌های نیمه‌تحلیلی قرار می‌دهد. به علاوه، برخلاف روش‌های المان مرزی، در این روش نیازی به توسعه تابع گرین متناسب با مسئله وجود ندارد [۱۵]. روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در ابتدا برای تحلیل مسائل با شرایط مرزی نامحدود ارائه شد، هر چند سانگ و ولف [۱۶] و دیکس^۳ و ولف [۱۷] استفاده از آن را برای مسائل با شرایط مرزی محدود نیز گسترش دادند. تاکنون از این روش برای تحلیل مسائل مختلف در حوزه‌های پایش سلامت سازه (تحلیل ارتعاشات و انتشار موج) [۲۲-۱۸]، مکانیک شکست [۲۳ و ۲۴] و همچنین تحلیل میدان‌های وابسته از قبیل میدان‌های الکترومکانیکی (خصوصاً تحلیل مواد پیزوالکتریک) [۲۷-۲۵] و میدان‌های ترمومکانیکی [۳۰-۲۸]، استفاده شده است.

پس از ارائه روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده، تلاش‌های متعددی

4 Birk
5 Yang
6 Ooi

1 Song
2 Wolf
3 Deeks

و $[\varepsilon]$ ماتریس ضریب گذردهی الکتريکی هستند. معادلات فوق به ترتیب بیانگر اثر معکوس و مستقیم مواد پیزوالکتریک هستند. با ترکیب دو معادله فوق و اعمال فرض کرنش صفحه‌ای ($\varepsilon_{zz} = 0$) خواهیم داشت:

$$\bar{\sigma} = [H] \bar{\varepsilon} \quad (3)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & 0 & 0 & e_{yx} \\ c_{xy} & c_{yy} & 0 & 0 & e_{yy} \\ 0 & 0 & c_{xyxy} & e_{xxz} & 0 \\ 0 & 0 & e_{xxz} & -\varepsilon_{xx} & 0 \\ e_{yx} & e_{yy} & 0 & 0 & -\varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy} \quad -E_x \quad -E_y] \quad (5)$$

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \quad D_x \quad D_y] \quad (6)$$

با استفاده از روابط کرنش-جابجایی و رابطه بین میدان الکتريکی و پتانسیل الکتريکی، $\bar{\varepsilon}$ برحسب میدان جابجایی و پتانسیل الکتريکی عبارت است از:

$$\bar{\varepsilon} = [L] \bar{u} = [L] [u_x \quad u_y \quad \phi]^T \quad (7)$$

در این روابط قطبیت پیزوالکتریک در جهت محور y در نظر گرفته شده است. در این رابطه u_x و u_y به ترتیب جابجایی در جهات x و y ، ϕ پتانسیل الکتريکی در نقطه موردنظر و اپراتور $[L]$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۱]:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8)$$

وصله پیزوالکتریک به کمک روش اجزاء محدود سه‌بعدی توسط براس^۱ و کالتنچر^۲ [۳۷] و همچنین مان^۳ و همکاران [۴۷] از جمله پژوهش‌های مرتبط در این حوزه محسوب می‌شوند.

علیرغم مطالعات انجام‌شده بر روی بهبود روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و استفاده از آن در حوزه‌های کاربردی مختلف از جمله پیزوالکتریک [۲۰-۲۲]، تاکنون تلاشی برای تحلیل ارتعاشات فرکانس بالای وصله‌های پیزوالکتریک و همچنین ارتعاشات اجباری سازه‌ها ناشی از تحریک الکتريکی توسط وصله‌های پیزوالکتریک انجام نگرفته است. هدف از این پژوهش، بررسی قابلیت روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری سامانه‌های متشکل از وصله‌های پیزوالکتریک است. تحلیل نحوه همگرایی، میزان دقت و همچنین میزان کاهش هزینه محاسباتی در این روش نسبت به روش اجزاء محدود از اهداف دیگر پژوهش حاضر محسوب می‌شود. مابقی این مقاله به صورت ذیل سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲ معادلات حاکم بر سیستم استخراج شده است. روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در بخش ۳ مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۴ روش حل معادلات ارائه شده است. در نهایت، بخش ۵ به ارائه مطالعات موردی جهت صحت‌گذاری روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده اختصاص دارد.

۲- معادلات حاکم بر سیستم

در این بخش به استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات سیستم شامل وصله پیزوالکتریک می‌پردازیم. در توسعه مدل رفتاری برای مواد پیزوالکتریک، اغلب از این فرض که کرنش کل، مجموع کرنش مکانیکی (ناشی از تنش) و کرنش الکتريکی (ناشی از میدان الکتريکی) است، استفاده می‌شود. به‌علاوه، با فرض کرنش‌های کوچک (رابطه خطی)، معادلات ساختاری مواد پیزوالکتریک به صورت شار-تنش پس از انتقال از شکل تانسوری به شکل برداری توسط معادلات ذیل بیان می‌شوند [۴]:

$$\sigma = [c] \varepsilon - [e]^T E \quad (1)$$

$$D = [e] \varepsilon + [\varepsilon] E \quad (2)$$

که در آن σ تنش، D جابجایی الکتريکی، ε کرنش، E میدان الکتريکی، $[c]$ ماتریس ثوابت الاستیک، $[e]$ ماتریس ثوابت پیزوالکتریک

1 Braess
2 Kaltenbacher
3 Man

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [\hat{J}(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

در این رابطه ماتریس ژاکوبی عبارت است از:

$$[\hat{J}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,\xi} & \hat{y}_{,\xi} \\ \hat{x}_{,\eta} & \hat{y}_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (12)$$

و عبارت‌های داخل ماتریس ژاکوبی توسط رابطه (۱۰) به دست می‌آیند که به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$[\hat{J}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\eta) & y(\eta) \\ x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ماتریس ژاکوبی روی مرز ($\xi = 1$) به صورت زیر است:

$$[J(\eta)] = \begin{bmatrix} x(\eta) & y(\eta) \\ x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$|J(\eta)| = x(\eta)y(\eta)_{,\eta} - y(\eta)x(\eta)_{,\eta} \quad (15)$$

عملگر خطی $[L]$ در رابطه (۸) به مختصات مرز مقیاس شده به صورت زیر منتقل می‌شود:

$$[L] = [b^1(\eta)] \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} [b^2(\eta)] \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (16)$$

که در آن [۳۱]

$$[b^1(\eta)] = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{bmatrix} y(\eta)_{,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & -x(\eta)_{,\eta} & 0 \\ -x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & y(\eta)_{,\eta} \\ 0 & 0 & -x(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (17)$$

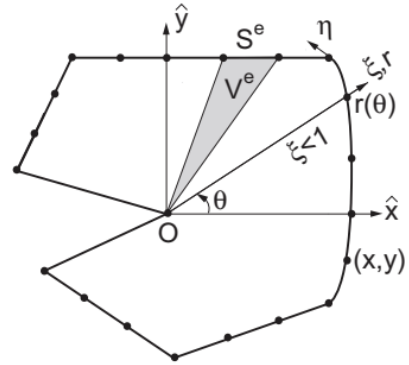


Fig. 1. Scaled boundary coordinate [27]

شکل ۱: مختصات مرز مقیاس شده [۲۷]

معادله دینامیکی حاکم بر سیستم در غیاب نیروها و شار الکتریکی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[L]^T \bar{\sigma} + [\rho] \omega^2 \bar{u} = 0 \quad (9)$$

که ω فرکانس زاویه‌ای، $\bar{u} = [u_x \quad u_y \quad \phi]$ و $[\rho] = \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۳- روش اجزاء محدود مقیاس شده برای ماده پیزوالکتریک

شکل ۱ یک دامنه دوبعدی (V) در مختصات مرز مقیاس شده را نشان می‌دهد. در این روش تنها مرزهای دامنه به وسیله المان‌های خطی گسسته سازی می‌شوند. مرکز مقیاس (O) باید به گونه‌ای انتخاب شود که کل مرز توسط آن قابل مشاهده باشد. مختصات گره‌های هر جزء خطی S^e (بالانویس e نشان‌دهنده المان است) به وسیله $\{x\}$ و $\{y\}$ در مختصات کارتزین ارائه شده است. اجزاء خطی به وسیله تابع شکل $N(\eta)$ در مختصات محلی η ، درون‌یابی می‌شوند. دامنه توسط مختصات بدون بعد شعاعی ξ از مرکز مقیاس ($\xi = 0$) تا انتهای مرز ($\xi = 1$) مقیاس می‌شود.

یک نقطه نماینده (\hat{x}, \hat{y}) در داخل دامنه به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{x}(\xi, \eta) &= \xi x(\eta) = \xi [N(\eta)] \{x\} \\ \hat{y}(\xi, \eta) &= \xi y(\eta) = \xi [N(\eta)] \{y\} \end{aligned} \quad (10)$$

انتقال از مختصات کارتزین به مختصات مرز مقیاس شده به صورت زیر

است:

$$[E^0] = \int_{-1}^{+1} [B^1(\eta)]^T [H] [B^1(\eta)] |J| d\eta \quad (25)$$

$$[E^1] = \int_{-1}^{+1} [B^2(\eta)]^T [H] [B^1(\eta)] |J| d\eta \quad (26)$$

$$[E^2] = \int_{-1}^{+1} [B^2(\eta)]^T [H] [B^2(\eta)] |J| d\eta \quad (27)$$

$$[M^0] = \int_{-1}^{+1} [N(\eta)]^T [\rho] [N(\eta)] |J| d\eta \quad (28)$$

نیروها و شار الکتریکی نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$\bar{q}(\xi) = [E^0] \xi \bar{u}(\xi)_{,\xi} + [E^1]^T \bar{u}(\xi) \quad (29)$$

که برای یک زیر دامنه با تعداد المان‌های خطی مشخص، این ماتریس‌ها سرهم‌بندی می‌شوند.

۴- روش حل

در ابتدا با فرض $\omega = 0$ پاسخ‌های استاتیکی مسئله با انتقال رابطه‌های (۲۴) و (۲۹) به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر به دست خواهد آمد [۳۱]:

$$\xi \left\{ \begin{matrix} \bar{u}(\xi) \\ \bar{q}(\xi) \end{matrix} \right\}_{,\xi} = -[Z] \left\{ \begin{matrix} \bar{u}(\xi) \\ \bar{q}(\xi) \end{matrix} \right\} \quad (30)$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} [E^0]^{-1} [E^1]^T & -[E^0]^{-1} \\ -[E^2] + [E^1][E^0]^{-1}[E^1]^T & -[E^1][E^0]^{-1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

بعد از اعمال روش مقادیر ویژه به ماتریس $[Z]$ داریم:

$$[Z][\Psi] = [\Psi][A] \quad (32)$$

$$[b^2(\eta)] = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{bmatrix} -y(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & x(\eta) & 0 \\ x(\eta) & -y(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & -y(\eta) \\ 0 & 0 & x(\eta) \end{bmatrix} \quad (18)$$

پتانسیل الکتریکی و جابجایی الکتریکی $\bar{u}(\xi)$ در نقطه (ξ, η) در داخل دامنه با درون‌یابی توسط توابع شکل عبارت است از:

$$\bar{u}(\xi, \eta) = [N(\eta)] \bar{u}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1(\eta)I & N_2(\eta)I & N_3(\eta)I & \dots \end{bmatrix} \bar{u}(\xi) \quad (19)$$

که در آن I ماتریس همانی ۳ در ۳ است. با جایگذاری رابطه‌های (۱۹) و (۱۶) در رابطه (۷) داریم:

$$\bar{\varepsilon}(\xi, \eta) = [B^1(\eta)] \bar{u}(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} [B^2(\eta)] \bar{u}(\xi) \quad (20)$$

$$[B^1(\eta)] = [b^1(\eta)] [N(\eta)] \quad (21)$$

$$[B^2(\eta)] = [b^2(\eta)] [N(\eta)]_{,\eta} \quad (22)$$

تنش و جابجایی الکتریکی از رابطه‌های (۲۰) و (۳) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\bar{\sigma}(\xi, \eta) = [H] [B^1(\eta)] \bar{u}(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} [H] [B^2(\eta)] \bar{u}(\xi) \quad (23)$$

با توجه به قانون کار مجازی [۱۷]، معادله حاکم بر روش اجزاء محدود با مرزی مقیاس شده به صورت زیر به دست می‌آید [۳۱]:

$$[E^0] \xi^2 \bar{u}(\xi)_{,\xi\xi} + \left([E^0] - [E^1] + [E^1]^T \right) \xi \bar{u}(\xi)_{,\xi} - [E^2] \bar{u}(\xi) - M^0 \xi^2 \ddot{\bar{u}}(\xi) = 0 \quad (24)$$

موردنظر وابسته بوده و با افزایش مرتبه بسط، دقت محاسبات در فرکانس بالا افزایش میابد. این در حالی است که افزایش مرتبه بسط که با معرفی متغیرهای کمکی اضافی همراه خواهد بود، تعداد درجات آزادی مسئله و در نتیجه هزینه محاسباتی را نیز به شدت افزایش خواهد داد. برای رفع این مشکل، استفاده از زیر دامنه‌های کوچک‌تر برای گسسته سازی ناحیه موردنظر و چشم‌پوشی از عبارت‌های مرتبه بالا برای بسط ماتریس سفتی دینامیکی پیشنهاد می‌شود [۴۸]:

$$[S(\omega)] = [K] - \omega^2 [M] \quad (38)$$

که در آن $[K]$ و $[M]$ به ترتیب ماتریس سفتی استاتیکی و جرم هستند. با جایگذاری رابطه (۳۸) در رابطه (۳۷) و با استناد به مرجع [۳۱]، ماتریس سفتی مشابه رابطه (۳۴) به دست می‌آید. برای ماتریس جرم یک معادله لیاپانوف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[M] \left([E^0]^{-1} ([K] - [E^1]^T) + [I] \right) + \left(([K] - [E^1]) [E^0]^{-1} + [I] \right) [M] = [M^0] \quad (39)$$

در نهایت معادله مربوط به جابجایی در حوزه فرکانس و زمان به ترتیب عبارت است از:

$$([K] - \omega^2 [M]) \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} \quad (40)$$

$$[M] \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}\} \\ \{\ddot{\varphi}\} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

به عنوان جمع‌بندی، الگوریتم حل در روش نیمه‌تحلیلی اجزاء محدود مرزی مقیاس شده را می‌توان در ۷ گام فلوچارت زیر خلاصه کرد:

۵- مطالعات موردی

در این بخش به منظور بررسی قابلیت روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در حل مسائل گوناگون، از این روش برای حل ۴ مسئله شامل ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک، وصله پیزوالکتریک متصل به سازه

با جزء بندی ماتریس $[\Psi]$ به صورت زیر داریم:

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_1^q & \Psi_2^u \\ \Psi_1^q & \Psi_2^q \end{bmatrix} \quad (33)$$

به این ترتیب ماتریس سفتی استاتیکی عبارت است از:

$$[K] = [\Psi_1^q] [\Psi_1^u]^{-1} \quad (34)$$

در روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده، مرکز مقیاس باید توسط کل مرز دامنه مشاهده شود. در صورتی که سازه از لحاظ هندسی پیچیده باشد ممکن است نتوان مرکزی با این شرایط برای کل دامنه در نظر گرفت. بنابراین کل دامنه به زیر دامنه‌هایی تقسیم‌بندی شده و رابطه (۳۴) سفتی هر زیر دامنه است. در نهایت مشابه روش اجزاء محدود این ماتریس‌ها سرهم‌بندی شده تا ماتریس سفتی کل سازه به دست آید.

برای مسائل دینامیکی، یک ماتریس دینامیکی سفتی به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۱]:

$$([S(\omega, \xi)] - \xi [E^1]) [E^0]^{-1} ([S(\omega, \xi)] - [E^1]^T) + \xi [S(\omega, \xi)]_{,\xi} - \xi [E^2] + \omega^2 [M^0] \xi^3 = 0 \quad (35)$$

که در مرز، شار الکتریکی و نیروهای گره برای دامنه‌های محدود برابر است با:

$$\bar{F} = [S(\omega)] \bar{u} \quad (36)$$

و رابطه (۳۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود [۳۱]:

$$([S(\omega)] - [E^1]) [E^0]^{-1} ([S(\omega)] - [E^1]^T) + \omega [S(\omega)]_{,\omega} - [E^2] + \omega^2 [M_0] = 0 \quad (37)$$

برای حل معادله فوق، ماتریس سفتی دینامیکی نسبت به فرکانس بسط و در معادله جایگزین می‌شود. مرتبه بسط مورد استفاده به حوزه فرکانسی

۵-۱- ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک

وصله‌های مینیاتوری پیزوالکتریک به‌عنوان عنصر اصلی در حوزه شناسایی آسیب مبتنی بر روش‌های امپدانس الکترومکانیکی و انتشار موج لمب محسوب می‌شوند. تحلیل رفتار این وصله‌ها به‌عنوان تشدیدگر به‌خصوص در فرکانس‌های بالا، از اهمیت ویژه‌ای در بررسی سلامت آن‌ها و در نتیجه تحلیل قابلیت اطمینان سامانه حسگری برخوردار است. به همین خاطر به‌عنوان اولین مسئله موردی، ارتعاشات آزاد و اجباری یک وصله پیزوالکتریک (شکل ۳(الف)) در بازه فرکانس ۰ تا ۳۵ کیلوهرتز به کمک روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده بررسی و نتایج آن با نتایج اجزاء محدود مقایسه شد. مشخصات ماده پیزوالکتریک مورد بررسی در این پژوهش در جدول ۱ آمده است. شرایط مرزی مکانیکی به‌صورت گیردار کردن ضلع سمت چپ و آزاد گذاشتن سه ضلع دیگر اعمال شد. به‌علاوه، شرایط مرزی الکتریکی نیز به‌صورت پتانسیل صفر برای ضلع سمت چپ در نظر گرفته شد. مانند سایر روش‌های عددی، بررسی همگرایی نقش کلیدی در ارزیابی صحت نتایج حاصل از روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده ایفا می‌کند. بررسی همگرایی نتایج در مسائل ارتعاشاتی با فرکانس بالا بسیار پیچیده‌تر از بررسی این موضوع در مسائل مشابه فرکانس پایین یا مسائل شبه استاتیکی است. علت این امر طول موج کوتاه ارتعاشات سیستم و گرادیان‌های شدید جابجایی نسبت به مکان بوده که نیاز به مش بندی صحیحی مسئله را دوچندان می‌کند. تاکنون روش‌های مختلفی برای بررسی همگرایی نتایج روش‌های عددی در تحلیل مسائل ارتعاشاتی فرکانس بالا ارائه شده است. در این پژوهش همگرایی به کمک شاخص میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول سازه در ارتعاشات آزاد توسط رابطه زیر مورد بررسی قرار گرفت.

$$\text{خطای نسبی میانگین} = \frac{\sum_{i=1}^{50} \left| \frac{f_i - F_i}{F_i} \right|}{50} \quad (42)$$

که در آن f_i و F_i به ترتیب فرکانس طبیعی و فرکانس طبیعی مرجع نام هستند. فرکانس‌های طبیعی ۱ تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزاء محدود و اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده در جدول ۲ ارائه شده است.

شکل ۵ نتایج مربوط به نحوه همگرایی نتایج روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده را به‌صورت میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول نسبت به تعداد درجات آزادی مدل نشان می‌دهد. در این شکل همچنین شاخص همگرایی فوق برای مدل اجزاء محدود توسعه داده شده همین

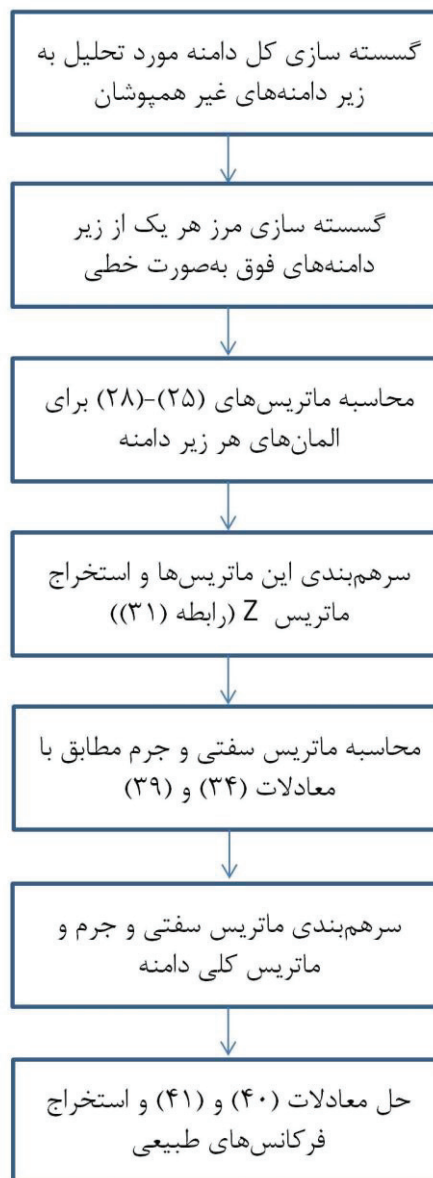


Fig. 2. Solution procedure of Scaled Boundary Finite Element Model (SBFEM)

شکل ۲: روند پیاده‌سازی روش اجزاء محدود با مرز مقیاس‌شده

آلومینیومی، وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار و وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده استفاده شد (شکل ۳). به‌عنوان مثال در این پژوهش از نرم‌افزار اباکوس برای گسسته سازی دامنه مورد نظر در تحلیل و المان محدود با مرز مقیاس‌شده استفاده شد (شکل ۴). در ادامه به ارائه نتایج حاصل از تحلیل این مسائل به کمک روش حاضر و مقایسه آن با نتایج روش اجزاء محدود خواهیم پرداخت.

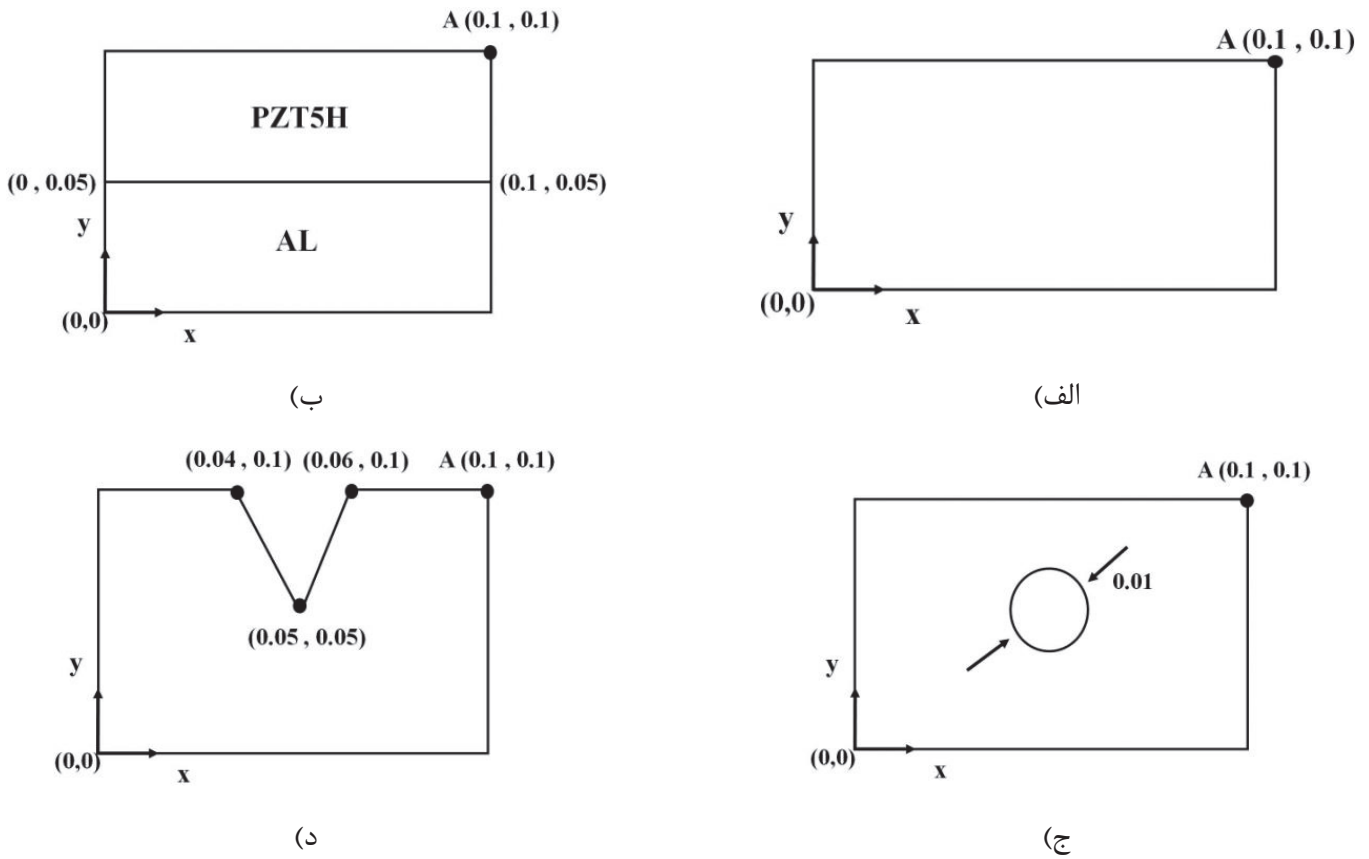


Fig. 3. Geometry of studied configurations a) piezoelectric patch b) piezoelectric patch attached to aluminum structure c) The perforated piezoelectric patch d) cracked piezoelectric patch

شکل ۳: هندسه پیکربندی‌های مورد مطالعه در پژوهش حاضر الف) وصله پیزوالکتریک (ب) وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی (ج) وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار (د) وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده

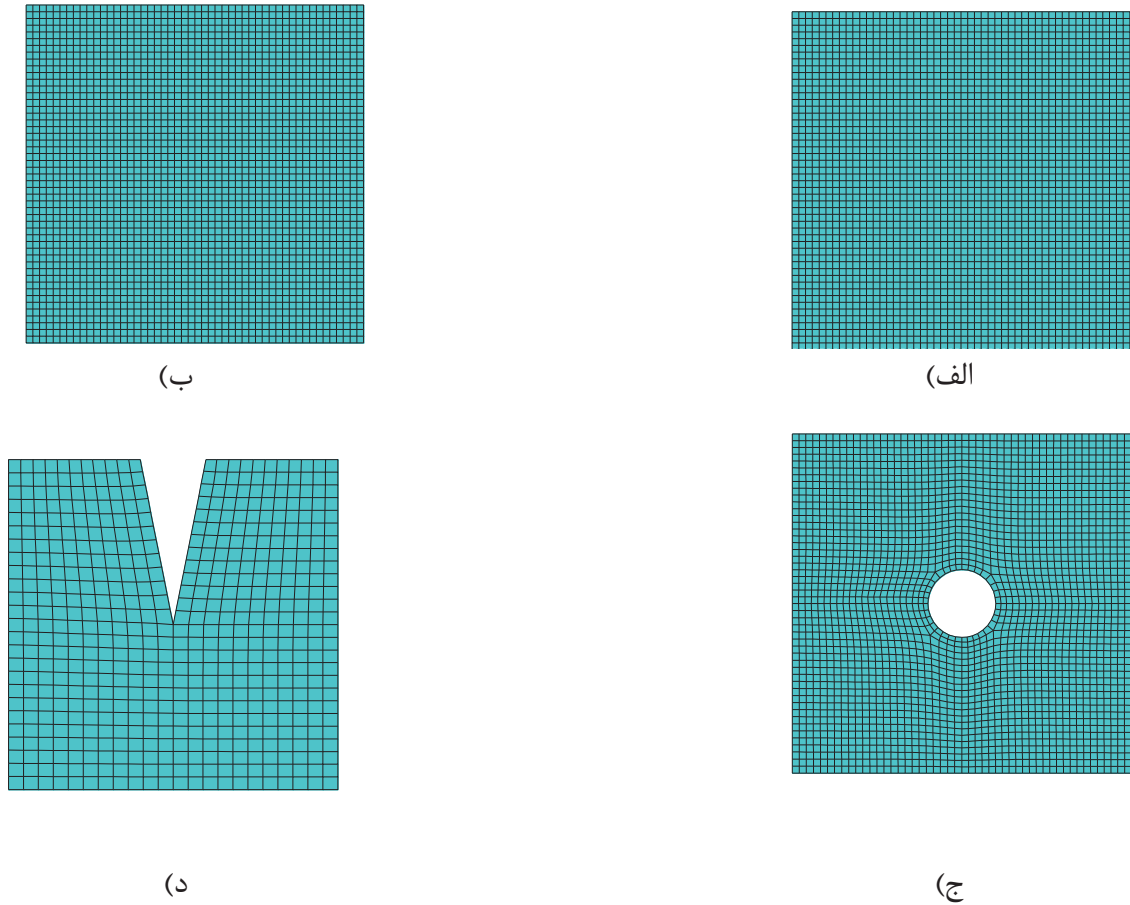


Fig. 4 Geometry discretization a) piezoelectric patch b) piezoelectric patch attached to aluminum structure c) perforated piezoelectric d) cracked piezoelectric patch

شکل ۴: نحوه مش بندی مدل‌های مورد مطالعه در پژوهش حاضر الف) وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی ب) وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی ج) وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار د) وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده

جدول ۱: خواص مواد پیزوالکتریک و آلومینیوم [۴]

Table 1. The piezoelectric and aluminum properties [4]

چگالی	گذردهی الکتریکی		ثابت پیزوالکتریک			ثابت الاستیک				ماده
	ϵ_{33}	ϵ_{11}	e_{15}	e_{33}	e_{31}	c_{44}	c_{33}	c_{13}	c_{11}	
۷۵۰۰	13×10^{-9}	$15 / 0.3 \times 10^{-9}$	۱۷/۴۴	۲۳/۳	-۶/۵	23×10^9	119×10^9	$84 / 1 \times 10^9$	126×10^9	پیزوالکتریک
۲۷۰۰	13×10^{-4}	$15 / 0.3 \times 10^{-4}$.	.	.	$23 / 3 \times 10^9$	$91 / 9 \times 10^9$	$45 / 3 \times 10^9$	$91 / 9 \times 10^9$	آلومینیوم

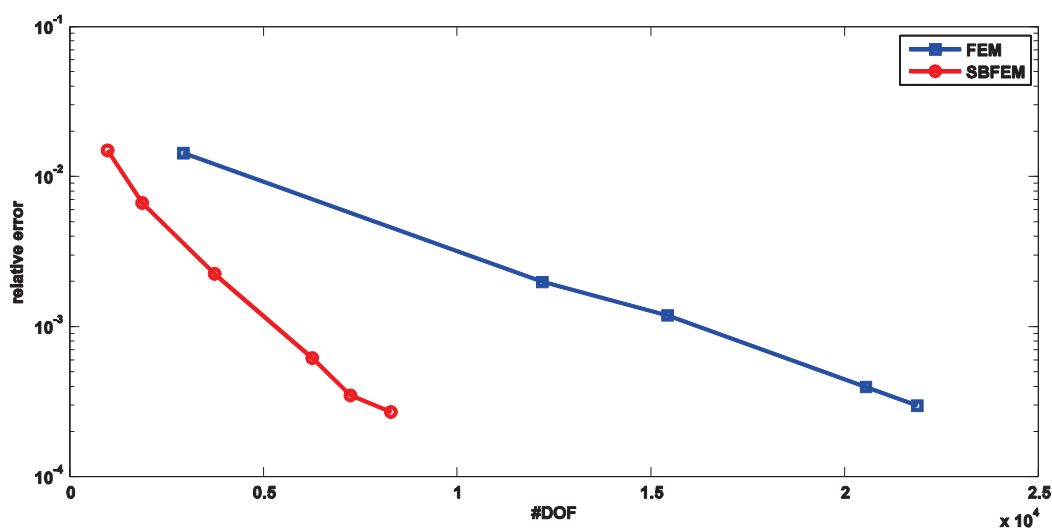


Fig. 5. Averaged relative error of the first 50 eigen-frequencies of the piezoelectric patch obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شکل ۵: شاخص همگرایی میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول برای دو روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده و اجزاء محدود در مسئله ارتعاشات آزاد وصله پیزوالکتریک

محدود مرزی مقیاس شده نسبت به روش اجزاء محدود دارد که این امر از جمله مزایای دیگر این روش به شمار می‌رود.

نتایج تحلیل ارتعاشات اجباری وصله پیزوالکتریک در حوزه فرکانس، به صورت جابجایی نقطه A در جهت y برحسب فرکانس تحریک، به ازای اعمال تحریک واحد هارمونیک در حوزه فرکانس در همان نقطه (متناظر با اعمال تحریک چیرپ در حوزه زمان)، به کمک دو روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده و اجزاء محدود در شکل ۶ نشان داده شده است. در این تحلیل، تعداد درجات آزادی برای روش‌های اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء

مسئله، که در آن از المان‌های مثلثی با تابع شکل درجه ۲ برای گسسته سازی استفاده شده است را نشان می‌دهد. در محاسبه شاخص همگرایی، نتایج تحلیل اجزاء محدود همگرا شده به عنوان پاسخ معیار در نظر شد. طبق نتایج، تعداد درجات آزادی مورد نیاز در روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده به ازای خطای یکسان، بسیار کمتر از روش اجزاء محدود است. نیاز به تعداد درجات آزادی کمتر برای دستیابی به نتایج دقیق، منجر به کاهش چشمگیر هزینه محاسباتی روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده می‌گردد. به علاوه نرخ همگرایی (شیب خطوط) نشان از سرعت همگرایی بیشتر روش اجزاء

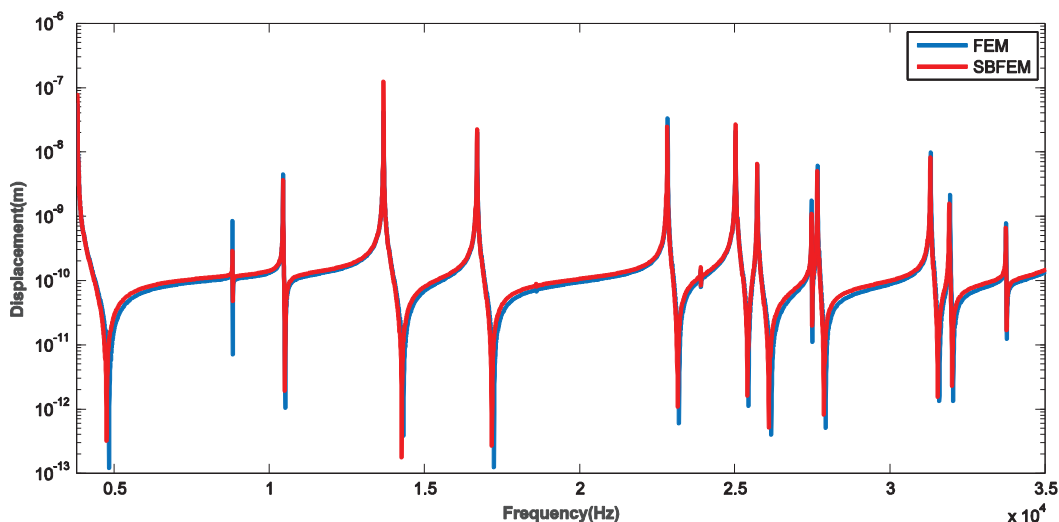


Fig. 6. Frequency response in the form of displacement in y direction at point A using harmonic excitation in the same direction and point for piezoelectric patch (frequency range 0 to 35 kHz)

شکل ۶: پاسخ فرکانسی وصله پیزوالکتریک به صورت جابجایی نقطه A در جهت Y ناشی از اعمال بار واحد هارمونیک در همان نقطه و در همان جهت (بازه فرکانسی ۰ تا ۳۵ کیلوهرتز)

محدود به ترتیب ۸۲۸۰ و ۲۱۸۵۲ لحاظ شد. طبق نتایج، روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده با درجات آزادی به مراتب کمتری نسبت به روش اجزاء محدود، پاسخ‌هایی با دقت بسیار مناسب ارائه می‌دهد. تطابق مناسب نتایج در فواصل بین دو قله، علاوه بر تشابه نتایج در محل قله‌ها و همچنین دامنه آن‌ها، نشان از دقت بسیار مناسب این روش در تحلیل مسائل ارتعاشی در فرکانس بالا دارد.

به منظور بررسی قابلیت روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در تحلیل مسائل ارتعاشات اجباری فرکانس بالا، پاسخ زمانی وصله پیزوالکتریک مورد نظر به تحریک تون برست با فرکانس مرکزی ۳۰ کیلوهرتز نیز مورد بررسی قرار گرفت. به طور خاص، وصله مورد نظر توسط تابع ذیل در نقطه A مورد تحریک اجباری در جهت Y قرار گرفت:

$$f(t) = \sin(2\pi \times 30000t) * (1 - \cos(2\pi \times 6000t)) \quad (43)$$

در شکل ۶ نتایج مربوط به نحوه ارتعاش همان نقطه تحریک (متناظر با نحوه محاسبه امیدانس مکانیکی) حاصل از دو تحلیل اجزای محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء محدود نشان داده شده است. تطابق نتایج در حوزه زمان نیز حاکی از دقت بسیار مناسب روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در حل مسائل دینامیکی در حوزه زمان دارد. این در حالی است که در این تحلیل،

جدول ۲: فرکانس‌های طبیعی ۱ تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزاء محدود و اجزاء محدود با مرز مقیاس شده برای وصله پیزوالکتریک

Table 2. 1st-5nd and 46nd -50nd natural frequencies of piezoelectric patch obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شماره	روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده	روش اجزاء محدود	خطای نسبی
۱	۳۸۰۱	۳۷۹۹	۰/۰۰۵
۲	۸۷۹۴	۸۷۹۱	۰/۰۲۷۳
۳	۱۰۴۲۰	۱۰۴۲۰	۰/۰۰۱
۴	۱۳۶۵۲	۱۳۶۵۲	۰/۰۰۰۲
۵	۱۶۶۶۶	۱۶۶۶۳	۰/۰۱۴۱
۴۶	۶۲۳۱۴	۶۲۳۰۲	۰/۰۱۸۳
۴۷	۶۳۱۹۸	۶۳۱۸۱	۰/۰۲۶۴
۴۸	۶۳۴۲۵	۶۳۴۱۲	۰/۰۲۱
۴۹	۶۴۷۶۶	۶۴۷۴۶	۰/۰۳۰۳
۵۰	۶۵۹۶۱	۶۵۹۳۵	۰/۰۳۹۵

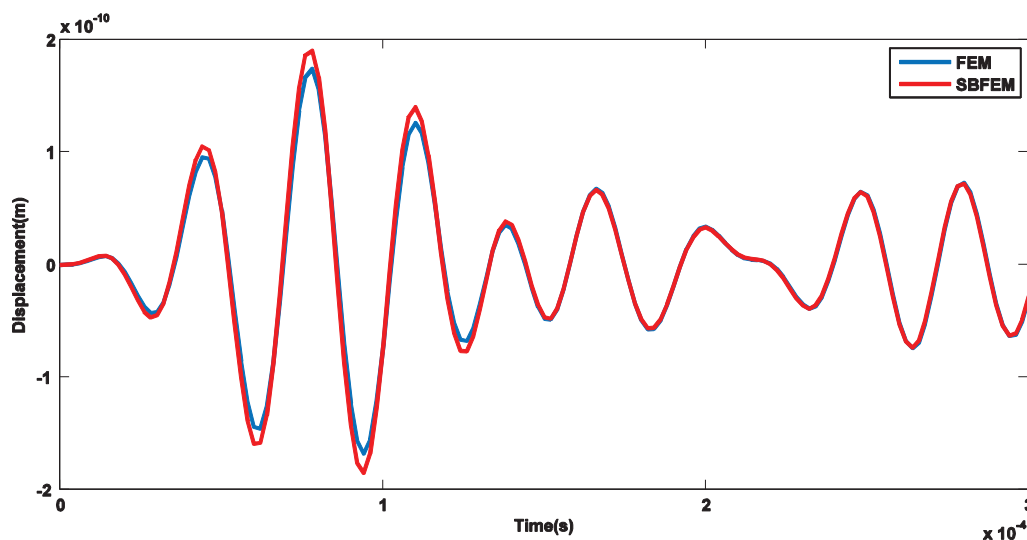


Fig. 7. Phase velocity dispersion curves for a steel pipe with outer diameter of 220 mm and wall thickness of 4.8 mm

شکل ۷: پاسخ زمانی وصله پیزوالکتریک به صورت جابجایی نقطه A در جهت y، ناشی از اعمال تحریک تون برست در همان نقطه و در همان جهت (بازه زمانی ۰ تا ۳۰۰ میکروثانیه)

فرکانس‌های طبیعی ۱ تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از روش اجزا محدود و اجزا محدود با مرز مقیاس شده در جدول ۳ ارائه شده است.

به همین خاطر نحوه همگرایی نتایج دو روش اجزا محدود با مرز مقیاس شده و اجزا محدود در این حالت نیز در شکل ۸ مورد مقایسه قرار گرفت. طبق نتایج در این حالت، روش اجزا محدود با مرز مقیاس شده علاوه بر نرخ همگرایی سریع‌تر نسبت به روش اجزا محدود، شاخص همگرایی (شاخص همگرایی مورد استفاده در مثال قبل) بهتری را با تعداد درجات آزادی بسیار کوچک‌تر ارائه می‌دهد.

شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان‌دهنده امپدانس مکانیکی (تحریک سیستم توسط رابطه (۴۳) در نقطه A و استخراج پاسخ به صورت جابجایی همان نقطه) پیکربندی مورد بررسی به ترتیب در حوزه فرکانس (تحریک هارمونیک با دامنه واحد متناظر با تحریک چیرپ در حوزه زمان) و زمان (تحریک تون برست متناظر با رابطه (۴۳)) هستند. برای استخراج نتایج حاصل، تعداد درجات آزادی روش‌های اجزا محدود با مرز مقیاس شده و اجزا محدود به ترتیب ۸۳۵۰ و ۲۳۰۵۷ لحاظ شد (حدود یک سوم کاهش هزینه محاسباتی). انطباق نتایج در هر دو حوزه زمان و فرکانس (خصوصاً محل و دامنه قله‌ها)، نشان از قابلیت منحصربه‌فرد این روش برای تحلیل مسائل ارتعاشاتی سامانه‌هایی با تغییر ناگهانی خواص مواد (مانند مسائل پایش سلامت سازه‌های آلومینیومی)

تعداد درجات آزادی مدل اجزا محدود با مرز مقیاس شده حدود یک سوم درجات آزادی مدل اجزا محدود لحاظ شده است و به این ترتیب، هزینه محاسباتی نیز به همین نسبت کاهش خواهد یافت.

۵-۲- ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی پس از بررسی رفتار وصله پیزوالکتریک به صورت جداگانه، بررسی نحوه تعامل آن با سازه میزبان در ارتعاشات فرکانس بالا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به همین خاطر در مسئله موردی دوم، امپدانس مکانیکی یک سازه غیر همگن شامل بستر آلومینیومی و وصله پیزوالکتریک به صورت دوعدی مورد بررسی قرار گرفته است (شکل ۳(ب)). مشابه مثال قبل، گیردار کردن وجه سمت چپ و آزاد گذاشتن سایر وجوه به عنوان شرط مرزی مکانیکی اعمال شد. به علاوه، پتانسیل الکتریکی وجه سمت چپ وصله پیزوالکتریک صفر در نظر گرفته شد. خواص مواد پیزوالکتریک و آلومینیوم مورد استفاده در جدول ۱ آمده است.

تغییرات ناگهانی خواص مواد، منجر به تغییرات ناگهانی تنش (کرنش) در فصل مشترک وصله پیزوالکتریک و سازه میزبان می‌شود. به همین خاطر در چنین مسائلی همگرایی پاسخ در روش‌های عددی به تعویق افتاده و استفاده از مش بندی ریز در نواحی فصل مشترک دو ماده توصیه می‌گردد.

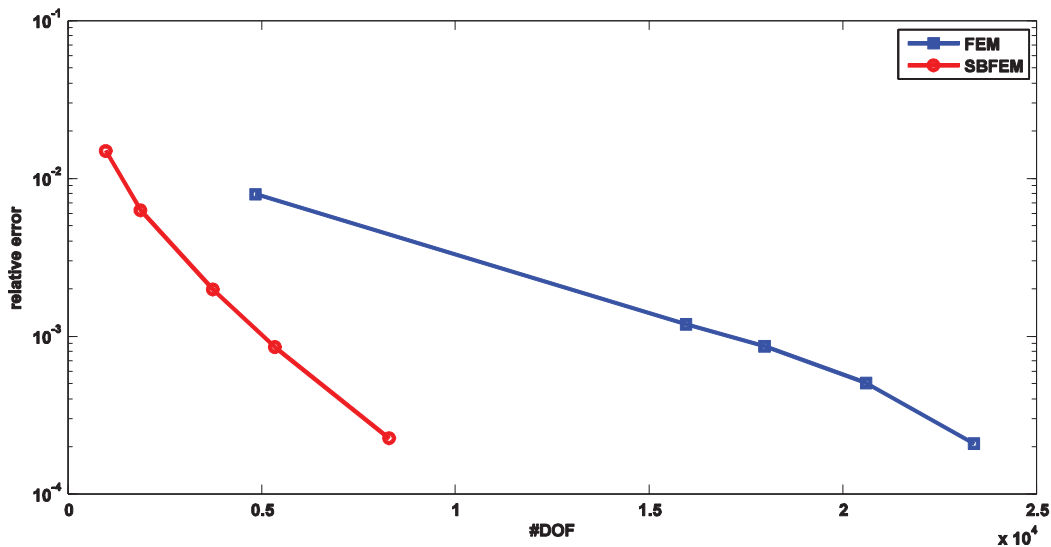


Fig. 8. Averaged relative error of the first 50 eigen-frequencies of the piezoelectric patch attached to aluminum structure obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شکل ۸: شاخص همگرایی میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول برای دو روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء محدود در مسئله ارتعاشات آزاد وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی

با هزینه محاسباتی بسیار پایین دارد. این مزیت، روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده را به عنوان گزینه‌ای بسیار مناسب برای حل مسائلی که نیاز به تحلیل متوالی سیستم مورد نظر وجود دارد (مانند مسائل شناسایی آسیب در حوزه پایش سلامت به عنوان مسئله‌ای معکوس) معرفی می‌کند.

۵-۳- ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار

وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار یکی از پیکربندی‌های رایج مواد پیزوالکتریک مورد استفاده در کاربردهای مختلف اعم از مبدل‌های اولتراسونیک، موتورهای پیزوالکتریک و جاذب‌های ارتعاشاتی به شمار می‌رود. تمرکز تنش به وجود آمده در اطراف نواحی سوراخ، تحلیل عددی و نحوه گسسته سازی این پیکربندی را دچار چالش می‌کند. به همین خاطر به عنوان مسئله موردی سوم، قابلیت روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در تحلیل این هندسه مورد ارزیابی قرار گرفت. به طور خاص، ارتعاشات آزاد و اجباری یک پیزوالکتریک مربعی با یک سوراخ دایروی درست در وسط آن مورد بررسی قرار گرفت (شکل ۳ ج)). همانند حالت‌های قبل، تمام درجات آزادی (مکانیکی و الکتریکی) لبه سمت چپ پیزوالکتریک صفر در نظر گرفته شد. مشخصات ماده پیزوالکتریک مورد استفاده در جدول ۱ ارائه شده است. گسسته سازی هندسه‌های پیچیده در کدهای عددی توسعه داده شده

جدول ۳: فرکانس‌های طبیعی ۱ تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزاء محدود و اجزاء محدود با مرز مقیاس شده برای وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی

Table 3. 1st-5th and 46th -50th natural frequencies of piezoelectric patch attached to Aluminum structure obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شماره	روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده	روش اجزاء محدود	خطای نسبی
۱	۴۲۸۹	۴۲۸۸	۰/۰۰۰۳
۲	۹۸۵۴	۹۸۵۳	۰/۰۰۰۱
۳	۱۲۲۲۸	۱۲۲۳۷	۰/۰۰۰۰۸
۴	۱۸۲۵۶	۱۸۲۵۶	۰/۰۰۰۰۲۶
۵	۲۱۱۱۲	۲۱۱۰۹	۰/۰۰۰۱
۴۶	۷۵۴۶۷	۷۵۴۴۵	۰/۰۰۰۲
۴۷	۷۶۵۴۱	۷۶۵۲۲	۰/۰۰۰۲
۴۸	۷۷۱۱۴	۷۷۰۹۱	۰/۰۰۰۳
۴۹	۷۷۸۶۶	۷۷۸۳۲	۰/۰۰۰۴
۵۰	۷۸۲۸۹	۷۸۲۵۸	۰/۰۰۰۴

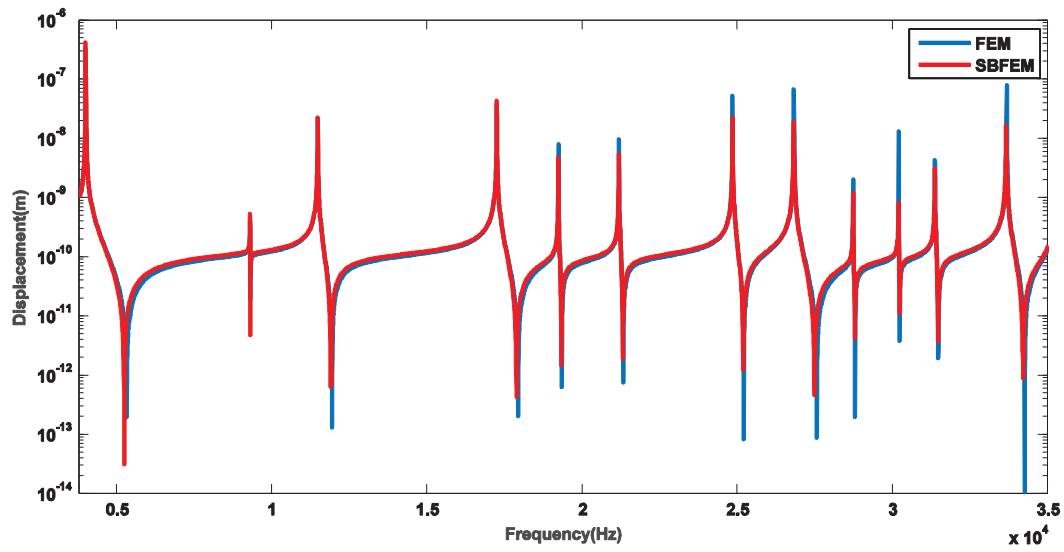


Fig. 9. Frequency response of y direction of displacement in point A using harmonic excitation in the same direction and point for The piezoelectric patch attached to aluminum structure (frequency range 0 to 35 kHz).

شکل ۹: پاسخ فرکانسی وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی به صورت جابجایی نقطه A در جهت Y ناشی از اعمال بار واحد هارمونیک در همان نقطه و در همان جهت (بازه فرکانسی ۰ تا ۳۵ کیلوهرتز)

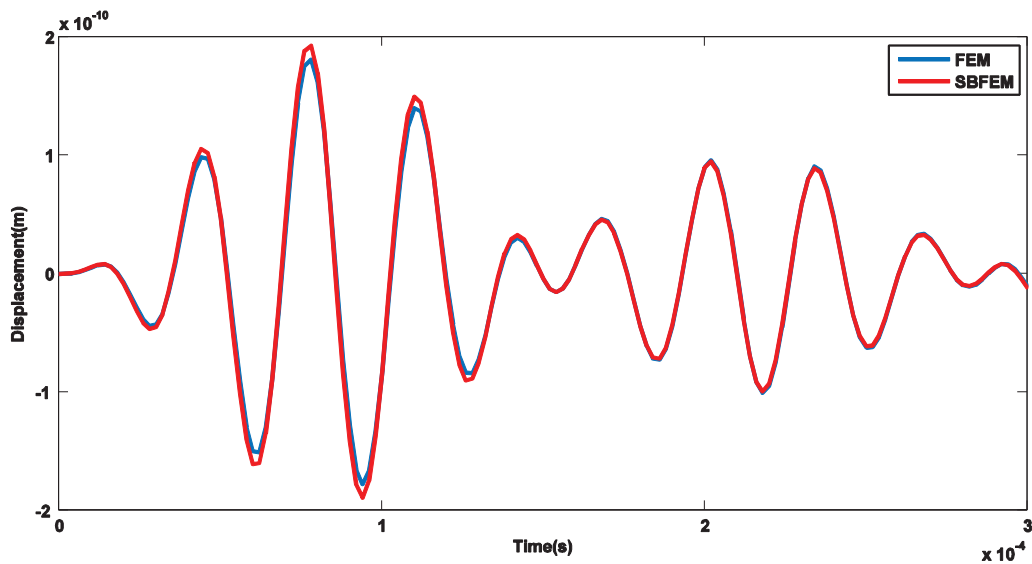


Fig. 10. Transient response of y direction of displacement in point A using harmonic excitation in the same direction and point for The piezoelectric patch attached to Aluminum structure (0 to 300).

شکل ۱۰: پاسخ زمانی وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی به صورت جابجایی نقطه A در جهت Y ناشی از اعمال تحریک تون برست در همان نقطه و در همان جهت (بازه زمانی ۰ تا ۳۰۰ میکروثانیه)

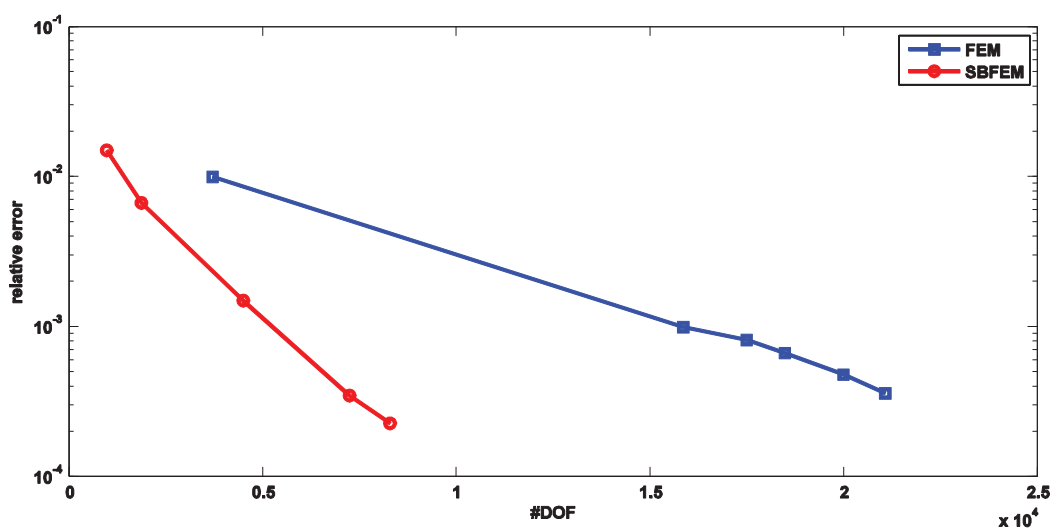


Fig. 11. Averaged relative error of the first 50 eigen-frequencies of the perforated piezoelectric patch obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شکل ۱۱: شاخص همگرایی میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول برای دو روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده و اجزاء محدود در مسئله ارتعاشات آزاد وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار

در نرم‌افزارهای غیرتجاری المان محدود، همواره از چالش‌های جدی در کد نویسی روش‌های عددی مختلف محسوب می‌شود. برای رفع این مشکل، در این پژوهش از قابلیت مش بندی مناسب نرم‌افزارهای تجاری استفاده و مش بندی مناسب به صورت ورودی، وارد کد عددی توسعه داده شد و پس از برخی از تنظیمات آماده استفاده در روش حل توسعه داده شده قرار گرفت. به این ترتیب، مشکل مش بندی و تحلیل سازه‌ها با پیکربندی‌های پیچیده توسط روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده مرتفع گردید. فرکانس‌های طبیعی ۱ تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزاء محدود و اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در جدول ۴ ارائه شده است.

بررسی همگرایی نتایج در مسائلی که با تمرکز تنش همراه هستند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. شکل ۱۱ شاخص همگرایی ارائه شده در این پژوهش را برای پیکربندی حاضر در دو روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء محدود نشان می‌دهد. همانند دو مثال قبل، در این حالت نیز روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده علاوه بر نرخ همگرایی سریع‌تر، به شاخص همگرایی مناسب‌تری به ازای تعداد درجات آزادی بسیار کمتر نسبت به روش اجزاء محدود دست پیدا می‌کند.

شکل‌های ۱۲ و ۱۳ پاسخ سیستم به تحریک فرکانس بالا را به صورت

جدول ۴: فرکانس‌های طبیعی ۱ تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزاء محدود و اجزاء محدود با مرز مقیاس شده برای وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار

Table 4. 1st-5th and 46th -50th natural frequencies of the perforated piezoelectric patch obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شماره	روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده	روش اجزاء محدود	خطای نسبی
۱	۳۷۵۹	۳۷۵۸	۰/۰۰۰۴
۲	۸۶۷۴	۸۶۷۱	۰/۰۰۰۲
۳	۱۰۴۲۵	۱۰۴۲۵	۰/۰۰۰۰۰۷
۴	۱۳۵۹۵	۱۳۵۹۵	۰/۰۰۰۰۰۳۴
۵	۱۶۱۸۷	۱۶۱۸۵	۰/۰۰۰۱
۴۶	۶۲۲۷۰	۶۲۲۵۸	۰/۰۰۰۲
۴۷	۶۲۶۰۱	۶۲۵۹۱	۰/۰۰۰۱
۴۸	۶۲۰۵۶	۶۳۰۴۸	۰/۰۰۰۱
۴۹	۶۴۵۵۴	۶۴۵۳۷	۰/۰۰۰۲
۵۰	۶۵۲۴۸	۶۵۲۳۵	۰/۰۰۰۱

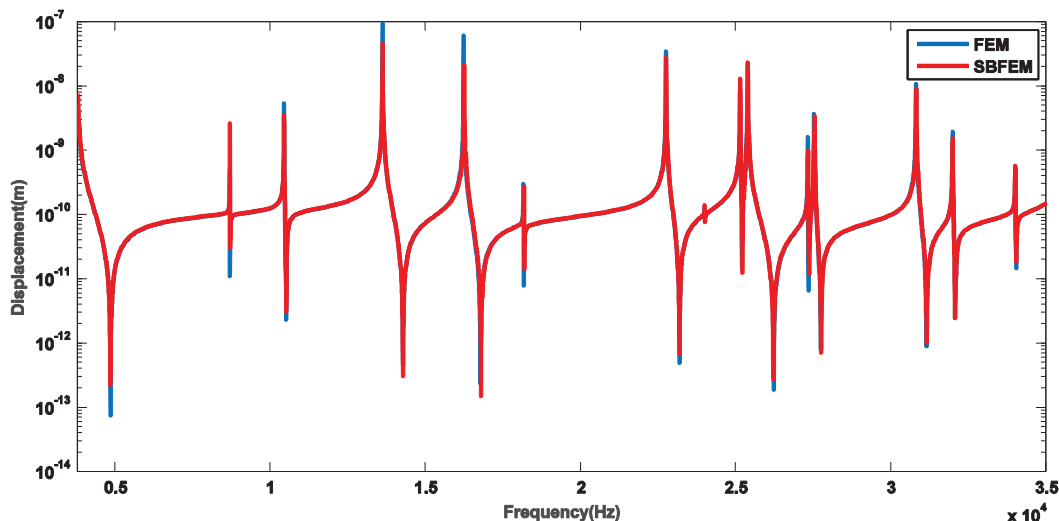


Fig. 12. Frequency response of y direction of displacement in point A using harmonic excitation in the same direction and point for the perforated piezoelectric patch (frequency range 0 to 35 kHz)

شکل ۱۲: پاسخ فرکانسی وصله پیزوالکتریک سوراخدار به صورت جابجایی نقطه A در جهت y ناشی از اعمال بار واحد هارمونیک در همان نقطه و در همان جهت (بازه فرکانسی ۰ تا ۳۵ کیلوهرتز)

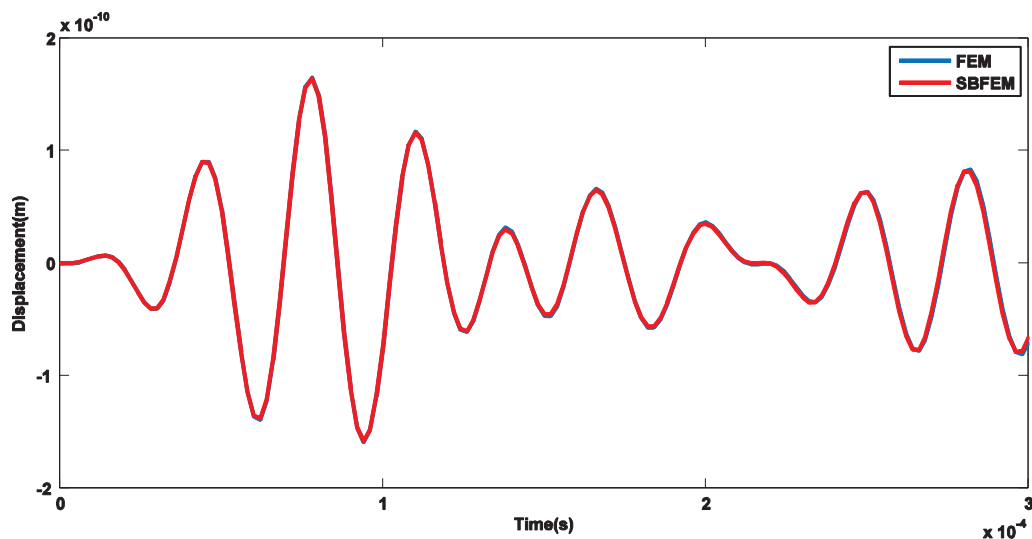


Fig. 13. Transient response in the form of displacement in y direction at point A using harmonic excitation in the same direction and point for the perforated piezoelectric patch (0 to 300 μ s)

شکل ۱۳: پاسخ زمانی وصله پیزوالکتریک سوراخدار به صورت جابجایی نقطه A در جهت y، ناشی از اعمال تحریک تون برست در همان نقطه و در همان جهت (بازه زمانی ۰ تا ۳۰۰ میکروثانیه)

آزادی به ترتیب ۹۱۳۲ و ۲۳۶۵۶ لحاظ شد. انحراف بسیار ناچیز نتایج روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده نسبت به روش اجزاء محدود، حاکی از قابلیت این روش در مدل سازی گرادین های شدید تنش (کرنش) در اطراف ناپیوستگی ها است. این در حالی است که استفاده از این روش در چنین مسائلی، هزینه محاسباتی را حدود یک سوم کاهش خواهد داد.

جابجایی در نقطه A و در جهت y، به ترتیب در حوزه فرکانس (تحریک هارمونیک با دامنه واحد در نقطه A و در جهت y متناظر با تحریک چیرپ در حوزه زمان) و زمان (تحریک تون برست متناظر با رابطه (۴۳) در نقطه A و در جهت y) هستند. در مدل های اجزاء محدود مرزی مقیاس شده و اجزاء محدود توسعه داده شده برای پیزوالکتریک سوراخدار، تعداد درجات

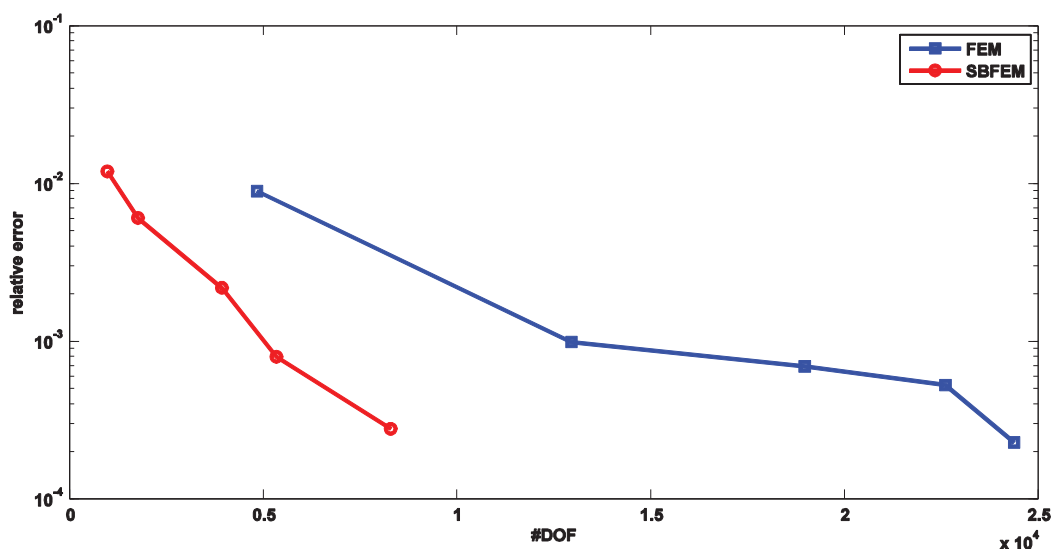


Fig. 14. Averaged relative error of the first 50 eigen-frequencies of the cracked piezoelectric patch obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شکل ۱۴: شاخص همگرایی میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول برای دو روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء محدود در مسئله ارتعاشات آزاد وصله پیزوالکتریک ترک خورده

ویژه‌های در مدل‌سازی تکینگی تنش (کرنش) در حوزه نوک ترک برخوردار است. به این خاطر، در این مثال نیز نحوه همگرایی نتایج در روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده مورد بررسی قرار گرفت و نتایج با روش اجزاء محدود مقایسه شد. فرکانس‌های طبیعی ۱ تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزاء محدود و اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در جدول ۵ ارائه شده است. طبق نتایج، نرخ همگرایی نتایج تحلیل ارتعاشات آزاد مسائل شامل ترک در روش اجزاء محدود مرز مقیاس شده بسیار سریع‌تر از نرخ همگرایی در روش اجزاء محدود است (شکل ۱۴) که این موضوع امکان استفاده از تعداد درجات آزادی کمتر برای دستیابی به نتایج دقیق‌تر را نسبت به روش اجزاء محدود فراهم می‌کند.

در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نیز پاسخ وصله پیزوالکتریک ترک خورده به صورت جابجایی نقطه A و در جهت y، به ترتیب در حوزه فرکانس (تحریک هارمونیک با دامنه واحد در نقطه A و در جهت y متناظر با تحریک چیرپ در حوزه زمان) و زمان (تحریک تون برست متناظر با رابطه (۴۳) در نقطه A و در جهت y) نشان داده شده است. تعداد درجات آزادی در مدل‌های اجزاء محدود با مرز مقیاس شده و اجزاء محدود توسعه داده شده به ترتیب ۸۹۳۵ و ۲۲۶۳۹ در نظر گرفته شد. تطابق بسیار مناسب نتایج، نشان از قابلیت

۵-۴- ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک ترک خورده

اطمینان از سلامت وصله پیزوالکتریک و تحلیل قابلیت اطمینان آن در بارگذاری‌های خستگی از اهمیت ویژه‌ای در کاربردهای مختلف، خصوصاً وصله‌های پیزوالکتریک مورد استفاده در سامانه‌های پایش برخط برخوردار است. جوانه‌زنی ترک‌های خستگی در این وصله و رشد آن، یکی از انواع مکانیزم‌های آسیب‌دیدگی وصله‌های پیزوالکتریک به شمار می‌رود. امکان مدل‌سازی وصله پیزوالکتریک ترک خورده و مقایسه طیف‌های به‌دست‌آمده با حالت سالم، امکان پایش سلامت سامانه حسگری را فراهم می‌کند. در این راستا، در این پژوهش پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری فرکانس بالای یک وصله پیزوالکتریک ترک خورده به کمک روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده مورد بررسی قرار گرفت. مشابه مثال‌های قبل، شرایط مرزی به صورت درجات آزادی صفر در وجه سمت چپ سامانه مورد تحلیل منظور شد. خواص ماده پیزوالکتریک مورد بررسی در جدول ۱ ارائه شده است. با توجه به پیچیدگی هندسی پیکربندی‌های دارای ترک، مشابه مثال قبل، موقعیت گره‌ها و ماتریس ارتباط گره‌ها پس از مش بندی در نرم‌افزارهای تجاری وارد کد عددی توسعه داده شد.

همگرایی نتایج و چگالی مش بندی در اطراف ناحیه ترک از اهمیت

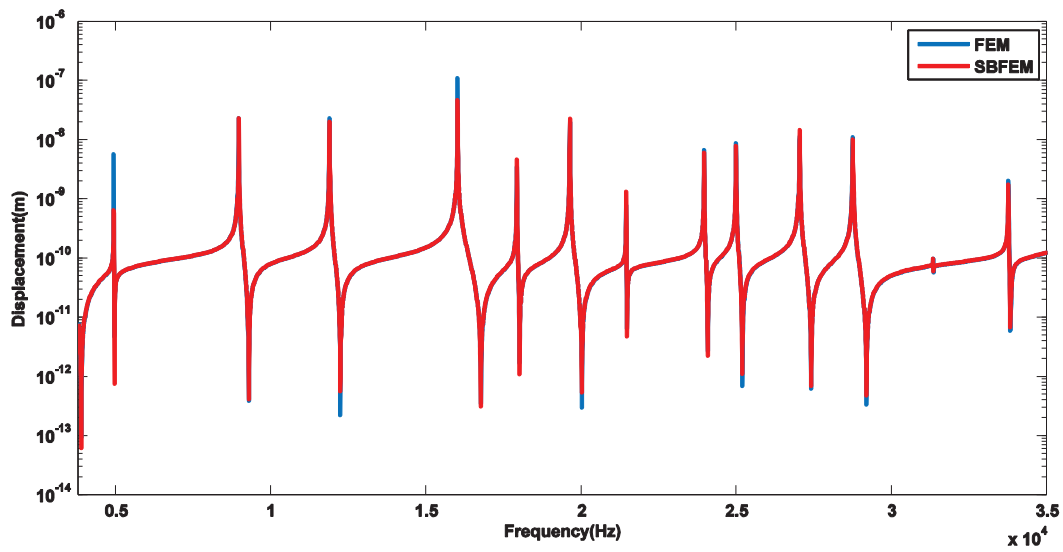


Fig. 15. Frequency response of y direction of displacement in point A using harmonic excitation in the same direction and point for the cracked piezoelectric patch (frequency range 0 to 35 kHz)

شکل ۱۵: پاسخ فرکانسی وصله پیزوالکتریک ترک خورده به صورت جابجایی نقطه A در جهت y ناشی از اعمال بار واحد هارمونیک در همان نقطه و در همان جهت (بازه فرکانسی ۰ تا ۳۵ کیلوهرتز)

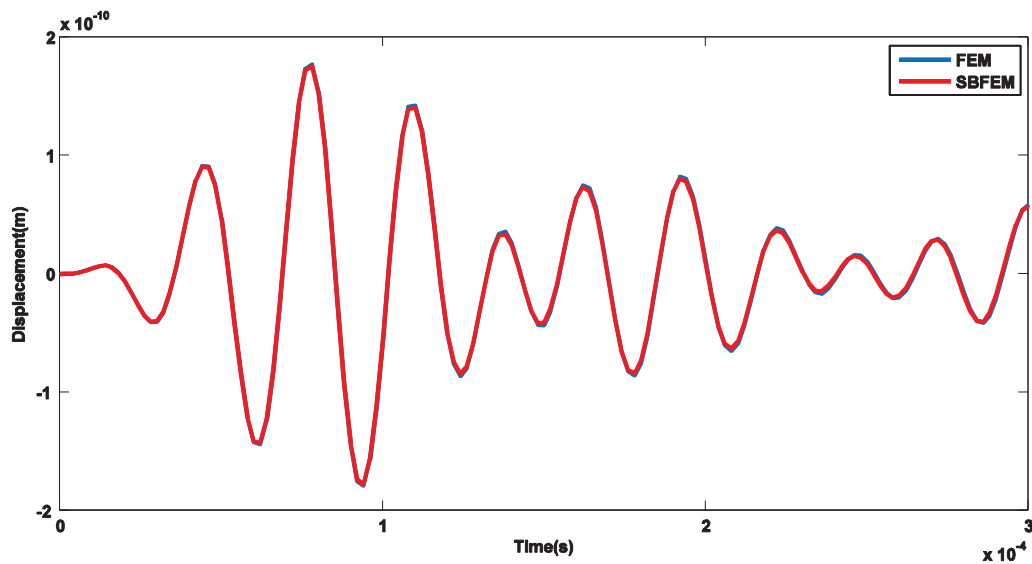


Fig. 16. Transient response in the form of displacement in y direction at point A using harmonic excitation in the same direction and point for the cracked piezoelectric patch (0 to 300 μ s).

شکل ۱۶: پاسخ زمانی وصله پیزوالکتریک ترک خورده به صورت جابجایی نقطه A در جهت y، ناشی از اعمال تحریک تون برست در همان نقطه و در همان جهت (بازه زمانی ۰ تا ۳۰۰ میکروثانیه)

داده شد و از آن برای تحلیل ارتعاشات ۴ مسئله موردی مختلف شامل، ارتعاشات آزاد و اجباری وصله پیزوالکتریک، وصله پیزوالکتریک متصل به سازه آلومینیومی، وصله پیزوالکتریک سوراخ‌دار و وصله پیزوالکتریک ترک‌خورده استفاده و در تمام موارد نتایج با پاسخ‌های حاصل از تحلیل اجزاء محدود مورد مقایسه قرار گرفت. در پژوهش حاضر همچنین، چالش مش بندی هندسه‌های پیچیده با برقراری ارتباط بین نرم‌افزارهای مش بندی تجاری و کد عددی توسعه داده شده مرتفع گردید. به علاوه، از یک شاخص همگرایی جدید موسوم به میانگین خطای نسبی ۵۰ فرکانس طبیعی اول به منظور بررسی نرخ همگرایی در روش حاضر استفاده شد. طبق نتایج، نرخ همگرایی روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده بسیار سریع‌تر از نرخ همگرایی نتایج روش اجزاء محدود است. این امر امکان دستیابی به نتایج دقیق با تعداد درجات آزادی بسیار کمتر (نسبت به روش اجزاء محدود) را فراهم می‌کند. به علاوه، روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده با درجات آزادی و در نتیجه هزینه محاسباتی کمتری (حدود یک‌سوم) نسبت به روش اجزاء محدود همگرا می‌شود. با توجه به بهره‌گیری از پاسخ تحلیلی در راستای شعاعی، این روش قابلیت مدل‌سازی نواحی ناپیوسته (مانند ترک) بدون نیاز به استفاده از مش بندی بسیار ریز را دارد. تطابق بسیار مناسب نتایج این روش با نتایج تحلیل اجزاء محدود در دو حوزه زمان و فرکانس، حاکی از قابلیت روش حاضر در شبیه‌سازی انواع مسائل در حوزه‌های مختلف اعم از پایش سلامت است. توسعه روند ارائه شده، به منظور فراهم کردن امکان شبیه‌سازی مسائل مختلف به کمک روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده سه‌بعدی، به عنوان موضوع پژوهش‌های آتی توصیه می‌گردد.

منابع

- [1] N. Sepehry, M. Shamshirsaz, F. Bakhtiari Nejad, Low-cost simulation using model order reduction in structural health monitoring: Application of balanced proper orthogonal decomposition, *Structural Control and Health Monitoring*, 24(11) (2017) e1994.
- [2] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, M. Shamshirsaz, W. Zhu, Nonlinear Modeling of Cracked Beams for Impedance Based Structural Health Monitoring, *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Volume 4B: Dynamics, Vibration, and Control, 2017, pp.

جدول ۴: فرکانس‌های طبیعی ۱ تا ۵ و ۴۶ تا ۵۰ حاصل از دو روش اجزاء محدود و اجزاء محدود با مرز مقیاس شده برای وصله پیزوالکتریک ترک‌دار

Table 4. 1st-5th and 46th -50th natural frequencies of the cracked piezoelectric patch obtained by scaled boundary finite element method and finite element method

شماره	روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده	روش اجزاء محدود	خطای نسبی
۱	۲۲۴۹	۲۲۴۳	۰/۰۰۲۷
۲	۴۹۰۴	۴۸۹۴	۰/۰۰۰۲
۳	۸۹۳۳	۸۹۲۶	۰/۰۰۰۸
۴	۱۱۸۶۰	۱۱۸۵۵	۰/۰۰۰۴
۵	۱۵۹۷۵	۱۵۹۵۹	۰/۰۰۰۱
۴۶	۶۱۸۶۴	۶۱۸۳۰	۰/۰۰۰۵
۴۷	۶۲۹۱۳	۶۲۸۹۴	۰/۰۰۰۳
۴۸	۶۳۶۵۸	۶۳۶۲۱	۰/۰۰۰۵
۴۹	۶۴۰۴۴	۶۴۰۲۷	۰/۰۰۰۲
۵۰	۶۴۸۵۶	۶۴۸۳۸	۰/۰۰۰۳

این روش در مدل‌سازی مسائل مکانیک شکست و امکان استفاده از آن در کاربردهای ارزیابی قابلیت اطمینان سامانه حسگری (تحلیل این‌گونه مسائل مستلزم شبیه‌سازی‌های متوالی پاسخ سیستم به ازای اندازه‌های مختلف ترک است) دارد.

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش ارتعاشات فرکانس بالای آزاد و اجباری سامانه‌های شامل وصله‌های پیزوالکتریک به کمک یک روش نیمه‌تحلیلی نوین موسوم به روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده مورد بررسی قرار گرفت. حل تحلیلی معادلات حاکم بر سیستم در یک بعد و گسسته سازی آن در بعد دیگر، این روش را در زمره روش‌های نیمه‌تحلیلی قرار داده و منجر به کاهش زمان تحلیل می‌گردد. به منظور صحت‌سنجی روش فوق، کد عددی روش اجزاء محدود با مرز مقیاس شده در دو حوزه زمان (استفاده از روش نیومارک به منظور گسسته سازی حوزه زمان) و فرکانس (روش مقادیر ویژه) توسعه

- vibration analysis of FG-CNTRC cylindrical shells under thermal loading using a numerical strategy, *International Journal of Applied Mechanics*, 9(08) (2017) 1750108.
- [11] E. Hasrati, R. Ansari, J. Torabi, A novel numerical solution strategy for solving nonlinear free and forced vibration problems of cylindrical shells, *Applied Mathematical Modelling*, 53 (2018) 653-672.
- [12] J. Torabi, R. Ansari, Nonlinear free vibration analysis of thermally induced FG-CNTRC annular plates: Asymmetric versus axisymmetric study, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 324 (2017) 327-347.
- [13] C. Song, E.T. Ooi, S. Natarajan, A review of the scaled boundary finite element method for two-dimensional linear elastic fracture mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 187 (2018) 45-73.
- [14] C. Song, J.P. Wolf, The scaled boundary finite-element method—alias consistent infinitesimal finite-element cell method—for elastodynamics, *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, 147(3-4) (1997) 329-355.
- [15] J.P. Wolf, C. Song, The scaled boundary finite-element method—a primer: derivations, *Computers & Structures*, 78(1-3) (2000) 191-210.
- [16] C. Song, J.P. Wolf, The scaled boundary finite-element method—a primer: solution procedures, *Computers & Structures*, 78(1-3) (2000) 211-225.
- [17] A.J. Deeks, J.P. Wolf, A virtual work derivation of the scaled boundary finite-element method for elastostatics, *Computational Mechanics*, 28(6) (2002) 489-504.
- [18] A. Yaseri, M. Bazyar, N. Hataf, 3D coupled scaled boundary finite-element/finite-element analysis of ground vibrations induced by underground train V04BT05A034-V04BT05A042
- [3] N. Sepehry, S. Asadi, M. Shamshirsaz, F. Bakhtiari Nejad, A new model order reduction method based on global kernel k-means clustering: Application in health monitoring of plate using Lamb wave propagation and impedance method, *Structural Control and Health Monitoring*, 25(9) (2018) e2211.
- [4] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, M. Shamshirsaz, Discrete singular convolution and spectral finite element method for predicting electromechanical impedance applied on rectangular plates, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 28(18) (2017) 2473-2488.
- [5] A. Benjeddou, Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey, *Computers & Structures*, 76(1-3) (2000) 347-363.
- [6] P. Lloyd, M. Redwood, Finite-Difference Method for the Investigation of the Vibrations of Solids and the Evaluation of the Equivalent-Circuit Characteristics of Piezoelectric Resonators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 39(2) (1966) 346-354.
- [7] X. Zhao, K.M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded conical shell panels by a meshless method, *Composite Structures*, 93(2) (2011) 649-664.
- [8] E. Carrera, E. Zappino, G. Li, Analysis of beams with piezo-patches by node-dependent kinematic finite element method models, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 29(7) (2018) 1379-1393.
- [9] R. Ansari, J. Torabi, E. Hasrati, Axisymmetric nonlinear vibration analysis of sandwich annular plates with FG-CNTRC face sheets based on the higher-order shear deformation plate theory, *Aerospace Science and Technology*, 77 (2018) 306-319.
- [10] E. Hasrati, R. Ansari, J. Torabi, Nonlinear forced

- analysis for piezoelectric plate using the scaled boundary finite-element method, *Computers & Structures*, 137 (2014) 47-62.
- [27] C. Li, H. Man, C. Song, W. Gao, Analysis of cracks and notches in piezoelectric composites using scaled boundary finite element method, *Composite Structures*, 101 (2013) 191-203.
- [28] M.H. Bazyar, A. Talebi, Scaled boundary finite-element method for solving non-homogeneous anisotropic heat conduction problems, *Applied Mathematical Modelling*, 39(23-24) (2015) 7583-7599.
- [29] C. Song, J.P. Wolf, The scaled boundary finite element method—alias consistent infinitesimal finite element cell method—for diffusion, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(10) (1999) 1403-1431.
- [30] F. Li, P. Ren, A novel solution for heat conduction problems by extending scaled boundary finite element method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 95 (2016) 678-688.
- [31] C. Song, The scaled boundary finite element method in structural dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(8) (2009) 1139-1171.
- [32] C. Birk, C. Song, An improved non-classical method for the solution of fractional differential equations, *Computational Mechanics*, 46(5) (2010) 721-734.
- [33] C. Song, A matrix function solution for the scaled boundary finite-element equation in statics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(23-26) (2004) 2325-2356.
- [34] Z. Yang, A. Deeks, Calculation of transient dynamic stress intensity factors at bimaterial interface cracks using a SBFEM-based frequency-domain approach, *Science movement, Computers and Geotechnics*, 60 (2014) 1-8.
- [19] R. Ansari, R. Rajabiehfard, B. Arash, Nonlocal finite element model for vibrations of embedded multi-layered graphene sheets, *Computational Materials Science*, 49(4) (2010) 831-838.
- [20] M.H. Bazyar, C. Song, Transient analysis of wave propagation in non-homogeneous elastic unbounded domains by using the scaled boundary finite-element method, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 35(14) (2006) 1787-1806.
- [21] H. Gravenkamp, C. Song, J. Prager, A numerical approach for the computation of dispersion relations for plate structures using the scaled boundary finite element method, *Journal of Sound and Vibration*, 331(11) (2012) 2543-2557.
- [22] H. Gravenkamp, C. Birk, C. Song, Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the scaled boundary finite element method, *Journal of Computational Physics*, 295 (2015) 438-455.
- [23] S. Chidgzy, J. Trevelyan, A. Deeks, Coupling of the boundary element method and the scaled boundary finite element method for computations in fracture mechanics, *Computers & Structures*, 86(11-12) (2008) 1198-1203.
- [24] Z. Yang, A. Deeks, H. Hao, Transient dynamic fracture analysis using scaled boundary finite element method: a frequency-domain approach, *Engineering Fracture Mechanics* 74(5) (2007) 669-687.
- [25] C. Li, H. Man, C. Song, W. Gao, Fracture analysis of piezoelectric materials using the scaled boundary finite element method, *Engineering Fracture Mechanics*, 97 (2013) 52-71.
- [26] H. Man, C. Song, W. Gao, F. Tin-Loi, Semi-analytical

- 136.
- [42] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, W. Zhu, Scaled Boundary Finite Element Method for Modeling of Impedance Based Structural Health Monitoring of 2D Structure, in: ASME 2018 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers, 2018, pp. V008T010A034-V008T010A034.
- [43] M. Kögl, E.C.N. Silva, Topology optimization of smart structures: design of piezoelectric plate and shell actuators, *Smart Materials and Structures*, 14(2) (2005) 387-399.
- [44] B. Zheng, C.-J. Chang, H.C. Gea, Topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38(1) (2008) 17-23.
- [45] M.C. Ray, R. Bhattacharyya, B. Samanta, Static analysis of an intelligent structure by the finite element method, *Computers & Structures*, 52(4) (1994) 617-631.
- [46] J. Joseph, S. Raja, Y.C. Lu, Finite Element Analysis of Piezoelectric Composite Actuators, *SAE International Journal of Materials and Manufacturing*, 4(1) (2011) 328-339.
- [47] H. Man, C. Song, W. Gao, F. Tin-Loi, A unified 3D-based technique for plate bending analysis using scaled boundary finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(5) (2012) 491-515.
- [48] C. Song, *The Scaled Boundary Finite Element Method: Introduction to Theory and Implementation*, John Wiley & Sons, (2018).
- in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy, 51(5) (2008) 519-531.
- [35] E. Ooi, Z. Yang, Modelling dynamic crack propagation using the scaled boundary finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88(4) (2011) 329-349.
- [36] E.T. Ooi, C. Song, F. Tin-Loi, Z. Yang, Polygon scaled boundary finite elements for crack propagation modelling, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(3) (2012) 319-342.
- [37] D. Braess, M. Kaltenbacher, Efficient 3D-finite element formulation for thin mechanical and piezoelectric structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(2) (2007) 147-161.
- [38] M.C. Ray, K.M. Rao, B. Samanta, Exact analysis of coupled electroelastic behaviour of a piezoelectric plate under cylindrical bending, *Computers & Structures*, 45(4) (1992) 667-677.
- [39] T. Kant, S.M. Shiyekar, Cylindrical bending of piezoelectric laminates with a higher order shear and normal deformation theory, *Computers & Structures*, 86(15-16) (2008) 1594-1603.
- [40] X.Y. Li, J. Wu, H.J. Ding, W.Q. Chen, 3D analytical solution for a functionally graded transversely isotropic piezoelectric circular plate under tension and bending, *International Journal of Engineering Science*, 49(7) (2011) 664-676.
- [41] J.-Y. Chen, H.-J. Ding, W.-Q. Chen, 3D Analytical Solution for a Transversely Isotropic Magneto-electroelastic Rotating Disc with Functionally Graded Property, in: *Piezoelectricity, Acoustic Waves and Device Applications*, World Scientific, 2007 pp. 129-