



پاسخ زمانی ورق ساندویچ حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی ترکیب شده با لایه‌های پیزوالکتریک

حبیب عربی^{۱*}، احمد باقری^۲، غلامرضا زارع پور^۲

^۱ گروه مکانیک، پردیس دانشگاهی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

^۲ گروه دینامیک، کنترل و ارتعاشات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۱۰/۲۶
بازنگری: ۱۳۹۸/۰۳/۱۰
پذیرش: ۱۳۹۸/۰۴/۱۷
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۶/۲۱

کلمات کلیدی:

بارگذاری الکترو-مکانیکی
ساندویچ ورق حلقوی
مواد مدرج تابعی
لایه‌های پیزوالکتریک
روش تفاضلات مربعی

خلاصه: در این پژوهش به بررسی پاسخ زمانی ساندویچ ورق حلقوی متقارن که دارای هسته تشکیل شده از مواد تابعی و لایه‌های پیزوالکتریک است، پرداخته می‌شود. ورق ساندویچی به طور همزمان تحت بارگذاری نیروی مکانیکی هارمونیک و ولتاژ الکتریکی خارجی است. بر اساس مدل تابع توانی، فرض شده است که خواص مواد بکار رفته در هسته در جهت ضخامت هسته متغیر باشد. همچنین برای بیان میدان جابجایی، به دلیل ضخیم بودن هسته مرکزی ساخته شده از مواد تابعی، از تئوری برشی مرتبه سوم که اثرات نیروهای برشی را در نظر می‌گیرد استفاده شده است. در ادامه با استفاده از اصل همپلتون معادلات ساختاری بر حسب ترم‌های جابجایی بدست آمده و با استفاده از روش عددی تفاضلات مربعی حل شده است. نهایتاً پاسخ زمانی بر حسب تغییرات پارامترهای موثر مثل شعاع داخلی، ایندکس تابع توانی، ضخامت هسته و ولتاژ خارجی مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با افزایش شعاع داخلی دامنه نوسانات در بازه زمانی مورد نظر کاهش می‌یابد. بعلاوه با افزایش پارامتر ایندکس تابع توانی، دامنه پاسخ زمانی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش ایندکس تابع توانی پاسخ ورق به یک مجانب میل می‌کند که نشان دهنده هسته کاملاً فلزی می‌باشد. به علاوه افزایش ولتاژ اعمالی می‌تواند دامنه ورق را نسبت به حالت نامی به صورت خطی افزایش دهد. در نهایت مشاهده می‌گردد که با اعمال ولتاژ الکتریکی خارجی به خوبی می‌توان دامنه پاسخ زمانی را کاهش داد و از این مزیت در کنترل سیستم‌های ارتعاشی استفاده کرد.

۱- مقدمه

ورق‌های دایروی و حلقوی مرکب بصورت گسترده در صنایع مکانیکی، عمرانی، هسته‌ای، زیردریایی، هوافضایی و صنایع کامپیوتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. ورق‌های دایروی مرکب به طور گسترده در چرخنده‌ها، ترمزهای چرخنده، کلاچ‌ها، چرخ طیار، چرخ‌های قطار، اره‌های دایروی، بدنه‌ی موشک‌ها و موتورهای الکتریکی، دارای کاربرد صنعتی هستند. به همین دلیل بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری و آکوستیک آن‌ها اجتناب ناپذیر است. ویژگی کوبلینگ الکترومکانیکی سرامیک‌های پیزوالکتریک به شکل ورق‌های نازک سبب گردیده است که از آن‌ها در کنترل سازه‌ها، به عنوان حسگر یا عملگر استفاده شود. با توجه به کاربرد روزافزون مواد پیزوالکتریک در سازه‌های هوشمند، توجه بسیاری از محققین به مطالعه بر روی ورق‌هایی که دارای لایه‌های پیزوالکتریک می‌باشند، معطوف شده است. ویلیانی^۱ و همکاران [۱] روی مسأله‌ی کنترل کمانش صفحات مستطیلی ساخته شده

از مواد مدرج تابعی^۲ با لایه‌های سنسور و عملگر تحقیق کردند. فانگ و همکاران [۲] روشی کارآمد برای کنترل دینامیکی ورق کامپوزیت پیزوالکتریک ارائه نمودند. در این مطالعه معادلات حاکم بر اساس روش کلی لاگرانژ و با استفاده از کرنش‌های ون-کارمن بدست آمده و بوسیله روش عددی نیومارک حل شده‌اند. لیانگ و همکاران [۳] به بررسی نیمه تحلیلی پاسخ گذرای ورق دایروی ساخته شده از مواد مدرج تابعی در فضای سه بعدی بر روی بستر ویسکوالاستیک پرداختند. در این تحلیل از قانون تابع نامی در راستای ضخامت ماده مدرج تابعی استفاده شده است و این ورق دایروی بر روی یک بستر ویسکوالاستیک قرار گرفته است. کراولی و لوئیس [۴] به مدل‌سازی تیر اویلر برنولی با دو لایه عملگر پیزوالکتریک پرداختند. همچنین کراولی و لازاروسا [۵] مدل‌سازی ورق، همراه با لایه‌های پیزوالکتریک به روش ریتز را ارائه نمودند. یو و زیبا^۳ [۶] با استفاده از روش اجزا محدود به تحقیق درباره صفحات چند لایه شامل مواد پیزوالکتریک پرداختند. جعفری

2 . Functionally Graded Material (FGM)

3 Xia

1 . Viliani

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: harabi@phd.guilan.ac.ir



علاوه بر کارهای ذکر شده در بالا در زمینه مواد تابعی نیز تحقیقات گسترده‌ای صورت گرفته است. ردی و همکاران [۱۴] خمش متقارن صفحات تابعی دایروی و زاویه‌ای را تحت بار گسترده‌ی یکنواخت با استفاده از تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بررسی کردند. جواهری و اسلامی [۱۵ و ۱۶] کمناش ورق‌های مدرج تابعی را بر اساس تئوری کرشلف و تئوری مرتبه‌ی بالا محاسبه نمودند و معادلات پایداری و تعادل بدست آمده را تحت چهار نوع بار کمناشی محاسبه کرده و به صورت حل فرم بسته ارائه نمودند. همچنین مظفری و ایوب [۱۷] به بررسی تاثیر ضخامت بر نیروی کمناش ورق‌های مدرج تابعی پرداختند. آن‌ها با استفاده از تئوری کرشلف و رابطه جابجایی- کرنش ساندرس یک حل بسته برای محاسبه‌ی نیروی کمناش ارائه دادند. صحرایی و سعیدی [۱۸] نیز با استفاده از تئوری مرتبه‌ی سوم برشی^۴ به بررسی خمش متقارن صفحات ساخته شده از مواد تابعی دایروی پرداخته و حل‌های مربوطه را بر حسب تئوری کلاسیک بیان کردند. آن‌ها همچنین پاسخ‌های بدست آمده را با حل تئوری مرتبه اول میندلین و حل مرتبه بالای ردی و حتی با پاسخ دقیق الاستیسیته سه بعدی مقایسه نمودند و مشخص شد که پاسخ‌های بدست آمده از دقت خوبی برخوردار است.

مرور فوق به روشی نشان می‌دهد که اگرچه حجم وسیعی از مطالعات محققین در سال‌های اخیر به بررسی ورق‌های پیزوالکتریک با کاربردهای گوناگون تمرکز یافته است، مطالعه‌ی دقیقی بر روی پاسخ گذرای مواد تابعی ترکیب شده با لایه‌های پیزوالکتریک صورت نگرفته است. در مقاله حاضر با توجه به تغییرات خواص مواد تابعی در راستای ضخامت و ضخیم بودن ذاتی ورق، تئوری مرتبه سوم برشی که از دقت بیشتری در اینگونه مسائل برخوردار است، برای مدل‌سازی ورق دایروی ساخته شده از تابعی یکپارچه شده با لایه‌های پیزوالکتریک تحت بار فشاری گذرا و بارگذاری الکتریکی استفاده شده است. برای این منظور ابتدا معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از روابط تنش و کرنش و اصل همیلتون استخراج شده است. سپس با استفاده از روش تحلیلی سری فوریه و روش تفاضلات مربعی، قسمت مکانی و زمانی معادلات حاکم تحلیل شده است. در نهایت اثرات مختلف پارامترهای مکانیکی و فیزیکی بر رفتار دینامیکی سیستم مورد بررسی قرار گرفته است.

و همکاران [۷] به بررسی خمش گذرای ورق دایروی ساخته شده از مواد مدرج تابعی ادغام شده با لایه‌های پیزوالکتریک پرداختند. در این تحقیق حل دقیق و صریح برای پاسخ خمش گذرای ورق دایروی ساخته شده از مواد مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته است و برای ماده مدرج تابعی از قانون تابع نمایشی در راستای ضخامت ماده استفاده شده است. در این مطالعه همچنین اثرات شرایط مرزی برای حالات گیردار و ساده بر روی لبه ورق در نظر گرفته شده‌اند. همچنین جندقیان و رحمانی [۸] به بررسی ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی پیزوالکتریک ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های مکانیکی-الکتریکی و حرارتی پرداختند. در این تحلیل ورق تحت بارگذاری دومحوره همراه با افزایش دمای یکنواخت قرار گرفته است و برای بدست آمدن معادلات از تئوری کرشلف استفاده شده است. در نهایت به بررسی پارامترهایی همچون اندیس تابع توانی، ابعاد طولی، نسبت طول به ضخامت، بار الکتریکی خارجی و تغییرات دمایی پرداخته شده است. نارایانان و بالامورگان [۹] با استفاده از روش اجزای محدود و تئوری مرتبه اول به کنترل ارتعاشات ورق‌ها و پوسته‌های ادغام شده با لایه‌های پیزوالکتریک پرداختند. همچنین مویتا و همکاران [۱۰] یک فرمول‌بندی اجزای محدود برای ورق همراه با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری سنتی کرشلف ارائه دادند.

هونگ [۱۱] با استفاده از روش تفاضلات مربعی^۱ به محاسبه‌ی پاسخ گذرای تنش‌های حرارتی و جابجایی مرکزی ورق مگنتواستریکتیو^۲ چندلایه تحت ارتعاشات حرارتی پرداخت. مزیت روش تفاضلات مربعی در این است که روشی کارآمد برای محاسبه نتایج شامل اثرات تغییر شکل برشی با تعداد نقاط کم محاسباتی می‌باشد. همچنین هونگ [۱۲] پاسخ گذرای سیلندر ساخته شده از مواد مدرج تابعی با لایه‌های مگنتواستریکتیو را با استفاده از روش تفاضلات مربعی بدست آورد. همچنین اثر بار حرارتی و اندیس تابع توانی بر روی جابجایی نرمال غالب در پاسخ گذرا و همچنین بر روی تنش‌های حرارتی را بررسی نمود. هوانگ و شن [۱۳] به بررسی پاسخ غیرخطی دینامیکی و ارتعاشاتی ورق ساخته شده از مواد تابعی (ماده مدرج تابعی با قانون توانی) متصل شده به لایه‌های سطحی پیزوالکتریک در محیط دمایی یکنواخت پرداختند. آن‌ها خاصیت ماده را به صورت هادی گرما و وابسته به دما در نظر گرفتند و برای بدست آوردن روابط از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا^۳ و معادلات ون-کارمن استفاده نمودند.

4 . Third Order Shear Deformation Theory

1 . Generalized differential quadrature method

2 . Magnetostrictive

3 Higher Order Shear Deformation Theory

در این معادلات زیرنویس m و c بترتیب نمایانگر فلز (در اینجا آلومینیم) و سرامیک (در اینجا سیلیکون) هستند. K ایندکس تابع توانی که دارای مقادیر بزرگتر از صفر است. در این رابطه $(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_e})^k$ نمایانگر نسبت حجمی سرامیک می‌باشد [۱۷]. هنگامیکه $K = 0$ است جنس هسته تمام سرامیک می‌شود و هنگامی که $K = \infty$ است جنس هسته تمام فلز می‌گردد. همچنین فرض شده است که سازه متقارن باشد.

میدان جابجایی براساس تئوری ورق ردی (تئوری برشی مرتبه سوم) برای یک نقطه دلخواه از سازه در جهات r و z و در زمان t به صورت زیر بیان می‌شود [۱۷]:

$$u_r(r, z, t) = u_0(r, t) + z \theta_r(r, t) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\theta_r(r, t) + \frac{\partial w_0(r, t)}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$h = \frac{h_e}{2} + h_p$$

$$u_c(r, z, t) = 0 \quad u_z(r, z, t) = w_0(r, t)$$

که در آن u_0 و w_0 جابجایی صفحه خنثی در جهات r و z هستند. همچنین θ_r دوران صفحه خنثی حول محور r است. از طرفی روابط کرنش جابجایی با استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۷]:

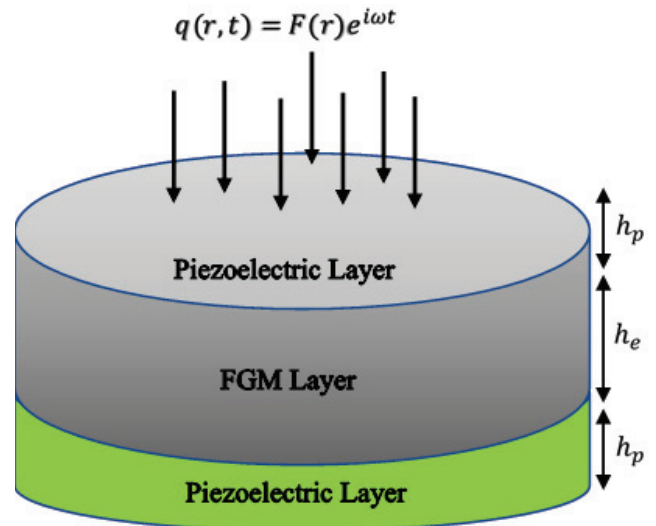
$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial \theta_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_0(r, t)}{\partial r^2} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} = \frac{u_0}{r} + \frac{z\theta_r}{r} - \frac{4z^3}{3rh^2} \left(\theta_r + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \quad (3)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \left(1 - \frac{4z}{h^2} \right) \left(\theta_r + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)$$

روابط تنش-کرنش برای هسته تشکیل شده از مواد تابعی با در نظر گرفتن میدان حرارتی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr}^e \\ \sigma_{\theta\theta}^e \\ \sigma_{rz}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(z)}{1-\nu^2} & \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & \frac{E(z)}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} \quad (4)$$



شکل ۱: هندسه مسئله

Fig. 1. Problem geometry.

۲- روابط ساختاری

استخراج معادلات حاکم

هندسه مسئله در شکل ۱ نمایش داده شده است. معادلات مربوط به میدان جابجایی در این مسئله، براساس تئوری برشی مرتبه سوم بدست آمده‌اند. خاصیت مواد تابعی به این صورت است که تغییرات خواص مواد بکار رفته در سازه در جهت ضخامت متغیر است. تغییرات خواص مکانیکی هسته با قانون تابعی بیان شده است. از طرفی بار خارجی $q(r, t)$ نیز به سیستم وارد می‌شود.

همانطور که گفته شد لایه میانی فرض شده، از مواد تابعی به صورت ترکیبی از سرامیک و فلز می‌باشد، به این صورت که در بالای هسته $(z = \frac{h_e}{2})$ سرامیک خالص و در پایین هسته $(z = -\frac{h_e}{2})$ فلز خالص وجود دارد. در این مسئله فرض شده است خواص ماده مانند مدول الاستیسیته $E(z)$ و چگالی جرمی $\rho(z)$ براساس ضخامت متغیر باشد. همچنین فرض شده است که تغییرات نسبت پواسون ν در جهت ضخامت هسته ثابت است. بنابراین بر اساس مدل تابع توانی، برای مواد تابعی داریم [۱۳]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_e} \right)^k$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_e} \right)^k \quad (5)$$

که $\phi(r, t)$ بیانگر تغییرات پتانسیل الکتریکی در جهت r است. علاوه بر ϕ_0 نشانگر پتانسیل الکتریکی خارجی است. از طرفی روابط ماکسول با در نظر گرفتن گرادیان منفی $\phi(r, z, t)$ می‌توانند ارضا شوند. بنابراین

داریم:

$$E_r = -\frac{\partial \phi(r, z, t)}{\partial r} = \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial r} \quad (۸)$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi(r, z, t)}{\partial z} = -\frac{\pi}{h_p} \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) \phi - \frac{2\phi_0}{h_p}$$

برای بدست آوردن معادلات حاکم بر حرکت، اصل همپلتون به صورت زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\int_0^t (\delta T - \delta U - \delta W_{ext}) dt = 0 \quad (۹)$$

در معادله فوق δT بیانگر تغییرات انرژی جنبشی، δU تغییرات انرژی کرنش و δW_{ext} کار نیروهای خارجی است.

تغییرات انرژی کرنش به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta U = \int_S \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} (\sigma_{rr}^p \delta \varepsilon_{rr}^p + \sigma_{\theta\theta}^p \delta \varepsilon_{\theta\theta}^p + \sigma_{rz}^p \delta \gamma_{rz}^p - D_r^p \delta E_r^p - D_z^p \delta E_z^p) dz dS +$$

$$\int_S \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} (\sigma_{rr}^e \delta \varepsilon_{rr}^e + \sigma_{\theta\theta}^e \delta \varepsilon_{\theta\theta}^e + \sigma_{rz}^e \delta \gamma_{rz}^e) dz dS + (۱۰)$$

$$\int_S \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2} + h_p} (\sigma_{rr}^p \delta \varepsilon_{rr}^p + \sigma_{\theta\theta}^p \delta \varepsilon_{\theta\theta}^p + \sigma_{rz}^p \delta \gamma_{rz}^p - D_r^p \delta E_r^p - D_z^p \delta E_z^p) dz dS$$

علاوه ترم انرژی جنبشی به صورت زیر بیان می‌شود:

همچنین روابط تنش-کرنش برای لایه پیزوالکتریک با در نظر گرفتن میدان حرارتی به صورت زیر بیان می‌شود [۱۹]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr}^p \\ \sigma_{\theta\theta}^p \\ \sigma_{rz}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{11} & 0 \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ \bar{e}_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{bmatrix} \quad (۵)$$

$$\begin{bmatrix} D_r^p \\ D_\theta^p \\ D_z^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{15} \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{bmatrix}$$

D_{ij}^p جایابی الکتریکی برای لایه پیزوالکتریک است. ماتریس \bar{c}_{ij} بیانگر ثوابت اصلاح شده پیزوالکتریک، \bar{e}_{ij} ثوابت پیزوالکتریک، E_i بیانگر میدان الکتریکی و \bar{k}_{ij} ماتریس ثوابت دی الکتریک است. بر اساس حالت تنش صفحه‌ای، ثوابت ماده اصلاح شده به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۹]:

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \bar{c}_{12} = c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}, \bar{c}_{22} = c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}}$$

$$\bar{c}_{44} = c_{44}, \bar{c}_{55} = c_{55}, \bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{c_{13}e_{33}}{c_{33}} \quad (۶)$$

$$\bar{e}_{15} = e_{15}, \bar{e}_{32} = e_{32} - \frac{c_{23}e_{33}}{c_{33}}, \bar{k}_{11} = k_{11}, \bar{k}_{33} = k_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}$$

همچنین پتانسیل الکتریکی به صورت زیر بیان می‌شود [۱]:

$$\phi(r, z, t) = -\cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) \phi(r, t) + 2 \frac{(z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2})}{h_p} \phi_0 \quad (۷)$$

$$\delta u_0 : \frac{\partial N^{ABC}}{\partial r} + \frac{N^{ABC}}{r} - \frac{N^{ABC}}{r} \quad (14)$$

$$= I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\theta}_r - I_3 c_1 \ddot{\theta}_r - I_3 c_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial r}$$

$$\delta w_0 : \frac{c_1 \partial^2 p_{rr}^{ABC}}{\partial r^2} + 2 \frac{c_1 \partial p_{rr}^{ABC}}{\partial r} - c_1 \frac{\partial p_{\theta\theta}^{ABC}}{\partial r} + \frac{\partial Q_{rz}^{ABC}}{\partial r}$$

$$- 3c_1 \frac{\partial R_{rz}^{ABC}}{\partial r} + \frac{Q_{rz}^{ABC}}{r} - 3c_1 \frac{R_{rz}^{ABC}}{r} + (N^P) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{\partial w_0}{r \partial r} \right) \quad (15)$$

$$= q + I_0 \ddot{w}_0 + I_3 c_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial r} + I_3 c_1 \frac{\ddot{u}_0}{r} + I_4 c_1 \frac{\partial \ddot{\theta}_r}{\partial r} + I_4 c_1 \frac{\ddot{\theta}_r}{r}$$

$$- I_6 c_1^2 \frac{\partial \ddot{\theta}_r}{\partial r} - I_6 c_1^2 \frac{\ddot{\theta}_r}{r} - I_6 c_1^2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial r^2} - I_6 c_1^2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{r \partial r}$$

$$\delta \theta_r : \frac{\partial M^{ABC}}{\partial r} - c_1 \frac{\partial p_{rr}^{ABC}}{\partial r} + \frac{M^{ABC}}{r} - c_1 \frac{p_{rr}^{ABC}}{r}$$

$$- \frac{M_{\theta\theta}^{ABC}}{r} + c_1 \frac{p_{\theta\theta}^{ABC}}{r} - Q_{rz}^{ABC} + 3c_1 R_{rz}^{ABC} = \quad (16)$$

$$I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\theta}_r - I_3 c_1 \ddot{u}_0 - 2I_4 c_1 \ddot{\theta}_r + I_6 c_1^2 \ddot{\theta}_r -$$

$$I_4 c_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial r} + I_6 c_1^2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial r}$$

$$\delta T = \int_S \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2} + h_p} \left[\rho^p (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) - \rho^p z^4 \frac{4}{3h^2} (2\dot{\theta}_r \delta \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_r \delta \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} + \delta \dot{\theta}_r \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r}) \right. \\ \left. - \rho^p z^3 \frac{4}{3h^2} (\dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_r + \dot{u}_0 \delta \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} + \dot{\theta}_r \delta \dot{u}_0 + \delta \dot{u}_0 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r}) \right. \\ \left. + \rho^p z (\dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_r \delta \dot{u}_0) + \rho^p z^2 \dot{\theta}_r \delta \dot{\theta}_r \right. \\ \left. - \rho^p z^6 \left(\frac{4}{3h^2} \right)^2 (\dot{\theta}_r \delta \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_r \delta \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} + \delta \dot{\theta}_r \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} \delta \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r}) \right] dz dS \\ + \int_S \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \left[\rho^e (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) - \rho^e z^4 \frac{4}{3h^2} (2\dot{\theta}_r \delta \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_r \delta \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} + \delta \dot{\theta}_r \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r}) \right. \\ \left. - \rho^e z^3 \frac{4}{3h^2} (\dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_r + \dot{u}_0 \delta \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} + \dot{\theta}_r \delta \dot{u}_0 + \delta \dot{u}_0 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r}) \right. \\ \left. + \rho^e z (\dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_r \delta \dot{u}_0) + \rho^e z^2 \dot{\theta}_r \delta \dot{\theta}_r \right. \\ \left. - \rho^e z^6 \left(\frac{4}{3h^2} \right)^2 (\dot{\theta}_r \delta \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_r \delta \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} + \delta \dot{\theta}_r \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} \delta \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r}) \right] dz dS \\ + \int_S \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2} + h_p} \left[\rho^p (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) - \rho^p z^4 \frac{4}{3h^2} (2\dot{\theta}_r \delta \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_r \delta \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} + \delta \dot{\theta}_r \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r}) \right. \\ \left. - \rho^p z^3 \frac{4}{3h^2} (\dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_r + \dot{u}_0 \delta \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} + \dot{\theta}_r \delta \dot{u}_0 + \delta \dot{u}_0 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r}) \right. \\ \left. + \rho^p z (\dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_r \delta \dot{u}_0) + \rho^p z^2 \dot{\theta}_r \delta \dot{\theta}_r \right. \\ \left. - \rho^p z^6 \left(\frac{4}{3h^2} \right)^2 (\dot{\theta}_r \delta \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_r \delta \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} + \delta \dot{\theta}_r \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r} \delta \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial r}) \right] dz dS$$

کار حاصل از نیروهای خارجی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta W_{ext} = \int_S \left\{ (N^P) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\delta w_0}{\partial r} \right) + q \delta w_0 \right\} dS \quad (12)$$

در رابطه فوق N^P بار الکتریکی خارجی وارده از طرف لایه‌های

پیزوالکتریک به سازه است.

$$\delta \varphi : \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2} + h_p} \left[\frac{\partial D_r}{\partial r} \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) + \frac{D_r}{r} \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) \right. \\ \left. + \frac{\partial D_z}{\partial z} \left(\frac{\pi}{h_p} \right) \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) \right] dz \quad (17)$$

$$\int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2} + h_p} \left[\frac{\partial D_r}{\partial r} \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) + \frac{D_r}{r} \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) \right. \\ \left. + \frac{\partial D_z}{\partial z} \left(\frac{\pi}{h_p} \right) \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) \right] dz$$

$$N^P = 2 \left[\int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2} + h_p} \frac{\bar{e}_{31} \phi_0}{h_p} dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{\bar{e}_{31} \phi_0}{h_p} dz \right] \quad (13)$$

به منظور بدست آوردن معادلات حاکمه با استفاده از اصل همیلتون

ترم‌های انرژی کرنش را به صورت زیر دوباره نویسی می‌کنیم. نهایتاً پس

از جایگذاری ترم‌های اصل همیلتون و استفاده از روش جزء به جزء، پس از

اندکی ساده‌سازی، معادلات دینامیکی حرکت به صورت زیر حاصل می‌شوند:

ضرایب ذکر شده در رابطه‌های (۱۵) تا (۱۷) در ضمیمه مقاله، تعریف

شده‌اند. در ادامه به تحلیل معادلات حرکت پرداخته می‌شود.

حل معادلات حاکم بر حرکت

در این قسمت با توجه به حل عددی تفاضلات مربعی که نخستین فرمت آن در سال ۱۹۷۱ توسط بلمن^۱ و کستی [۲۰] ارائه شده است، معادلات حاکم بر مسیر حرکت جداسازی می‌شوند و نقاط گره‌ای بر اساس نقاط چیبیشف^۲ به صورت زیر قرار داده می‌شود [۲۱]:

$$\varphi_i = \frac{R_1}{R_2} + \frac{1 - \frac{R_1}{R_2}}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{m-1}{n-1} \right) \pi \right), \quad (18)$$

$$m = 1, 2, \dots, n.$$

در رابطه فوق R_1 شعاع داخلی و R_2 شعاع خارجی است. انتخاب نقاط، در همگرایی روش تفاضلات مربعی بسیار موثر است. انتخاب نقاط با فاصله مساوی، انتخاب نقاط بر اساس ریشه چند جمله‌ای لژاندر، لاگرانژ و چیبیشف از جمله روش‌هایی است که می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد [۲۲]. در مسئله حاضر با توجه به همگرایی مناسب پاسخ، انتخاب نقاط بر اساس ریشه‌های چند جمله‌ای چیبیشف صورت گرفته است. نحوه انتخاب نقاط بر اساس ریشه‌های چند جمله‌ای چیبیشف در مرجع [۲۳] به طور کامل شرح داده شده است. همچنین n تعداد گره‌ها در جهت شعاعی است. براساس روش تفاضلات مربعی، میدان جابجایی u_0, θ_r, w_0 و φ به صورت زیر توصیف می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_0 &= \{u_{01}, u_{02}, u_{03}, \dots, u_{0m}\} \\ \theta_r &= \{\theta_{r1}, \theta_{r2}, \theta_{r3}, \dots, \theta_{rm}\} \\ w_0 &= \{w_{01}, w_{02}, w_{03}, \dots, w_{0m}\} \\ \varphi &= \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \{u_0, \theta_r, w_0, \varphi\} = \sum_{m=1}^n C_{im}^k \{u_{0m}, \theta_{rm}, w_{0m}, \varphi_m\}$$

به علاوه C_{im}^k بیانگر ضرایب وزنی هستند. همچنین $u_0(\xi_m, t), \theta_m = \theta_r(\xi_m, t), w_{0m} = w_0(\xi_m, t), \varphi_m = \varphi(\xi_m, t)$ نهایتاً با جایگذاری رابطه (۱۹) در رابطه‌های (۱۴) تا (۱۷)، فرم ماتریسی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

قابل ذکر است که $[K]_{N \times N}$ ، $[M]_{N \times N}$ بترتیب ماتریس‌های سختی و جرم سیستم هستند که از رابطه‌های (۱۰) تا (۱۳) با توجه به فرم جداشده روش تفاضلات مربعی حاصل می‌شوند. همچنین $\{u, w, \theta, \varphi\}_{N \times 1}^T$ نشانگر بردارهای ویژه هستند که برای حالت پاسخ زمانی با استفاده از روش نیومارک فرم ماتریسی رابطه (۱۷) حل شده و پاسخ زمانی براساس پارامترهای موثر رسم می‌شود.

۳- نتایج و بحث

در این قسمت به بررسی پاسخ ورق تحت بارگذاری خارجی الکترو-مکانیکی می‌پردازیم. لازم به ذکر است در صورتی که سمت راست رابطه (۲۰) صفر باشد، ارتعاشات آزاد سیستم حاصل می‌شود که برای دستیابی به فرکانس‌های طبیعی سیستم باید از فرم $\{u_0, w_0, \theta_r, \varphi\} = e^{i\omega t} \{u, w, \theta, \varphi\}$ استفاده شود. شرایط مرزی به صورت گیردار-گیردار در نظر گرفته می‌شود که به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} r = R_1 \\ u_0 = 0, w_0 = 0, \frac{\partial w_0}{\partial r} = 0, \theta_r = 0, \varphi = 0 \\ r = R_2 \\ u_0 = 0, w_0 = 0, \frac{\partial w_0}{\partial r} = 0, \theta_r = 0, \varphi = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

همچنین قبل از بررسی نتایج، پارامترهای هندسی و فیزیکی مورد نیاز برای تحلیل سیستم به این صورت در نظر گرفته می‌شود که هسته از مواد تابعی مرکب از فلز آلومینیم و سرامیک سیلیسیم تشکیل شده است. همچنین لایه‌های پیژوالکتریک که در دو طرف هسته‌ی ورق ساندویچی به کار رفته

1 Bellman
2 Chebyshev

Table 2. PZT-4 Piezoelectric material Properties.

جدول ۲: خواص مواد پیزوالکتریک PZT-4

مقدار	خواص مکانیکی
۱۳۹	C_{11} (GPa)
۷۷/۸	C_{12} (GPa)
۷۴	C_{13} (GPa)
۷۷/۸	C_{22} (GPa)
۷۴	C_{23} (GPa)
۱۱۵	C_{33} (GPa)
۲۵/۶	C_{44} (GPa)
۲۵/۶	C_{55} (GPa)
۳۰/۶	C_{66} (GPa)
۱۲/۷	e_{15} (C/m ²)
۱۲/۷	e_{24} (C/m ²)
-۵/۲	e_{31} (C/m ²)
-۵/۲	e_{32} (C/m ²)
۱۵/۱	e_{33} (C/m ²)
۶/۴۶	k_{11} (10 ⁻⁹ F/m)
۶/۴۶	k_{22} (10 ⁻⁹ F/m)
۵/۶۲	k_{33} (10 ⁻⁹ F/m)
۷۵۰۰	ρ (kg/m ³)

ولتاژ خارجی ۰/۳ ولت و ایندکس تابع توانی برابر ۵. به علاوه جهت نمایش بهتر شکل مودها، شرایط مرزی در شعاع داخلی به صورت آزاد در نظر گرفته شده است. در شکل ۲ برخی از شکل مودهای ورق نمایش داده شده است که n و m شماره مود در جهت مماسی و شعاعی می‌باشند.

همچنین نمودار پاسخ فرکانسی ورق در شکل ۳ نمایش داده شده است. برای این منظور ورق تحت تحریک هارمونیک با فرکانس متغیر قرار گرفته است. سپس نسبت حداکثر دامنه بدون بعد $(W(R_{av})/R_i)$ بر حسب فرکانس بدون بعد تحریک (λ) ترسیم گردیده است که در آن $W(R_{av})$ نمایش دهنده‌ی جابجایی در نقطه میانی شعاع می‌باشد.

است، از جنس PZT-4 می‌باشند. در جدول‌های ۱ و ۲ خواص این مواد بیان شده است.

قبل از بیان نتایج به صحنه‌گذاری روابط بدست آمده در این مقاله پرداخته می‌شود. بدین منظور فرکانس‌های طبیعی اول و دوم بدون بعد $\left(\lambda = \omega R_0^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right)$ یک ورق دایروی حلقوی با شرایط مرزی گیردار بدست آمده و با مرجع [۲۴] در جدول ۳ برای نسبت‌های شعاعی مختلف مقایسه شده است.

توجه شود که در مرجع [۲۴]، تئوری برشی مرتبه اول بکار رفته است و همچنین در مرجع ذکر شده از حل عددی ریلی ریتز استفاده شده است. با توجه به نتایج جدول ۳، صحت روابط بدست آمده قابل مشاهده است. بعد از اعتبارسنجی نتایج، اهمیت استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی که در این مقاله مورد توجه قرار گرفته است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور تغییرات فرکانس طبیعی نرمال شده نسبت به ضخامت نرمال شده صفحه با استفاده از تئوری‌های کلاسیک، تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم محاسبه شده و در جدول ۴ نمایش داده شده است. ابعاد ورق به صورت زیر در نظر گرفته شده است: شعاع‌های داخلی و خارجی به ترتیب ۱ m و ۰/۳ m، ضخامت هسته ۳ mm، ولتاژ خارجی ۰/۳ ولت و ایندکس تابع توانی برابر ۵.

همانطور که مشاهده می‌گردد، تئوری مرتبه اول برشی بیشترین فرکانس و تئوری کلاسیک کمترین فرکانس را پیشبینی می‌کنند. به علاوه با افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک (ضخامت کلی ورق) اختلاف فرکانس پیشبینی شده بین تئوری مرتبه اول و تئوری مرتبه سوم افزایش می‌یابد. به علاوه مطالعه دقیقی بر پاسخ تئوری مرتبه اول و سوم برشی توسط اقابابایی و ردی [۲۵] انجام شده است.

در ادامه پاسخ فرکانسی ورق مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابعاد ورق نامی به صورت زیر در نظر گرفته شده است: شعاع‌های داخلی و خارجی بترتیب ۱ m و ۰/۳ m، ضخامت هسته ۵ mm، ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک ۱ mm،

Table 1. Properties of functionally graded material with aluminum and silicon core.

جدول ۱: خواص مواد تابعی هسته آلومینیم و سیلیسیم.

خواص مکانیکی	سیلیسیم	آلومینوم
E (GPa)	۲۱۰	۷۰
ρ (kg/m ³)	۲۳۳۱	۲۷۰۰

Table 3 Results validation of natural frequencies analysis..

جدول ۳: اعتبار سنجی نتایج فرکانس طبیعی.

نسبت شعاع	روش	۰/۵	۰/۳	۰/۱
فرکانس بدون بعد اول	مقاله حاضر	۵۲/۵۲	۳۰/۸	۱۹/۶۵
	روش ریلی-ریتز [۲۴]	۴۸/۳۱	۳۰/۰۴	۱۹/۸۴
فرکانس بدون بعد دوم	مقاله حاضر	۱۱۳/۹۵	۶۹/۸۹	۴۶/۸۸
	روش ریلی-ریتز [۲۴]	۹۷/۳۹	۶۴/۲۳	۴۴/۹۱

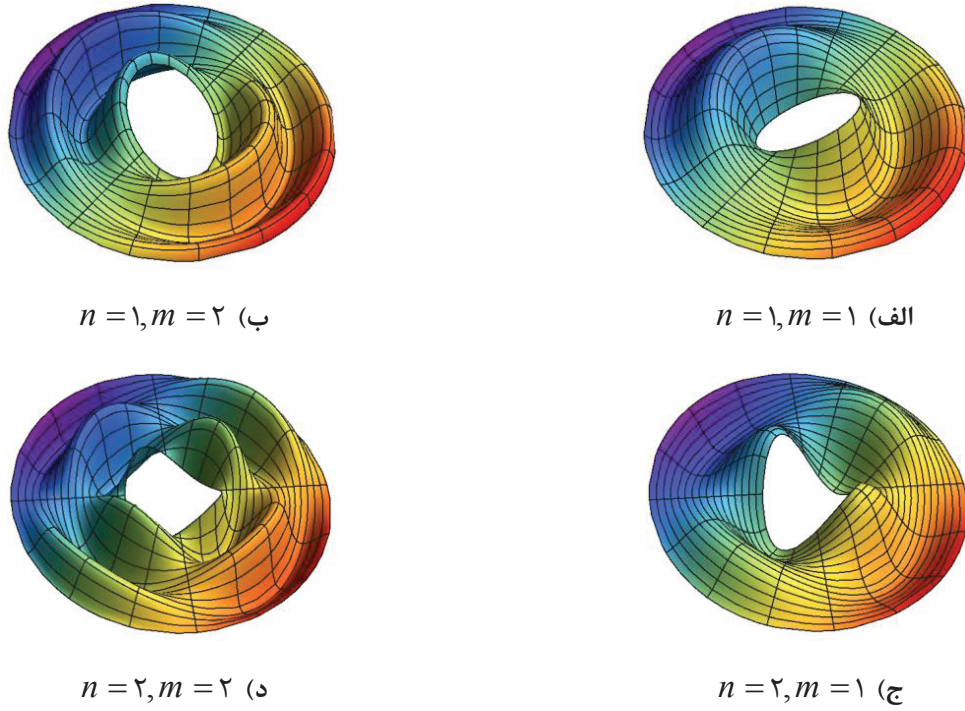
Table 4 Comparison of the dimensionless frequency (λ), predicted by different theories of the plate, for the various piezoelectric thicknesses..

جدول ۴: مقایسه فرکانس بدون بعد λ ، پیشبینی شده توسط تئوری‌های مختلف ورق، برای ضخامت‌های مختلف لایه پیزوالکتریک.

R_2 / h_p	تئوری مرتبه سوم برشی	تئوری مرتبه اول برشی	روش کلاسیک
۱۰۰۰	۶۵/۰۵	۶۵/۸	۶۳/۱۲
۵۰۰	۶۱/۰۲	۶۲/۳	۵۸/۳۱
۱۰۰	۶۲/۶۶	۶۳/۷۱	۶۰/۴۲

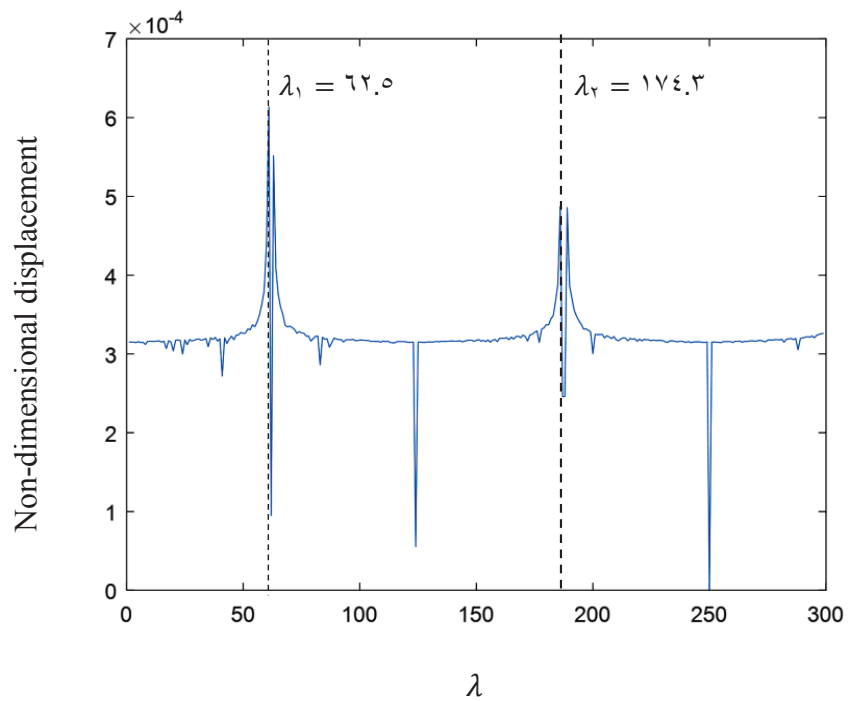
مجانِب میل می‌کند که نشان دهنده هسته کاملاً فلزی می‌باشد. در شکل ۴(ب) تغییرات پاسخ ورق به تغییر شعاع داخلی ترسیم گردیده است. همانطور که مشاهده می‌گردد، با افزایش شعاع داخلی، به دلیل شرایط مرزی گیردار، پاسخ ورق کاهش یافته است. در شکل ۴(ج) ولتاژ خارجی اعمالی به ورق نسبت به حالت نامی تغییر یافته است. همانطور که مشاهده می‌گردد، افزایش ولتاژ اعمالی می‌تواند دامنه ورق را نسبت به حالت نامی افزایش دهد. به علاوه اثر تغییر ولتاژ بر تغییر پاسخ ورق تقریباً خطی می‌باشد. در نهایت تغییرات پاسخ ورق نسبت به تغییر نسبت بدون بعد ضخامت هسته ترسیم شده است. همانطور که مشاهده می‌گردد، تغییر ضخامت هسته باعث افزایش سختی ورق می‌گردد که به شکل طبیعی منجر به کاهش دامنه پاسخ خواهد شد. به علاوه به دلیل تغییر فرکانس‌های ورق و هارمونیک بودن تحریک، در برخی از نسبت‌های ضخامت، دامنه افزایش یافته است که به دلیل نزدیکی

همانطور که انتظار می‌رود در محل فرکانس‌های طبیعی به علت نزدیکی فرکانس تحریک به فرکانس مدل، پاسخ ورق ناپایدار می‌گردد. به علاوه بین هر دو فرکانس طبیعی، یک آنتی رزونانس یا می‌نیمم قرار دارد. این موضوع در شکل ۳ نشان داده شده است. در ادامه اثر پارامترهای مختلف بر تغییر پاسخ ورق نامی (ابعاد فرض شده در بخش قبل) مورد بررسی قرار می‌گیرد برای این منظور، دامنه بدون بعد (حداکثر دامنه پاسخ گذرا به حداکثر دامنه در حالت نامی) بر حسب پارامترهای بی بعد (نسبت مقدار پارامتر به مقدار نامی آن) در شکل ۴ ارائه شده است. همانطور که شکل ۴(الف) نمایش می‌دهد، ایندکس تابع توانی تا ۲۰ برابر حالت نامی افزایش داده شده است. با تغییر نسبت ایندکس تابع توانی دامنه پاسخ افزایش یافته است که این امر به دلیل تغییر هسته از سرامیک به فلز می‌باشد. به علاوه با افزایش ایندکس تابع توانی پاسخ ورق به یک



شکل ۲: چهار شکل مود اول ورق ساندویچی مرکب.

Fig. 2 First four mode shapes of composite sandwich panel.



شکل ۳: نمودار پاسخ فرکانسی ورق ساندویچی.

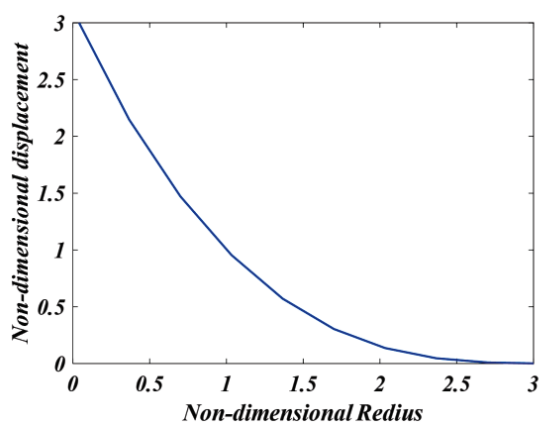
Fig. 3 Frequency response functions of sandwich panel.

پارامتر ایندکس تابع توانی ۲ است و شعاع خارجی یک متر است و ولتاژ خارجی صفر است. ضخامت هسته و لایه پیزوالکتریک نیز به ترتیب ۵ mm و ۱ mm فرض شده است.

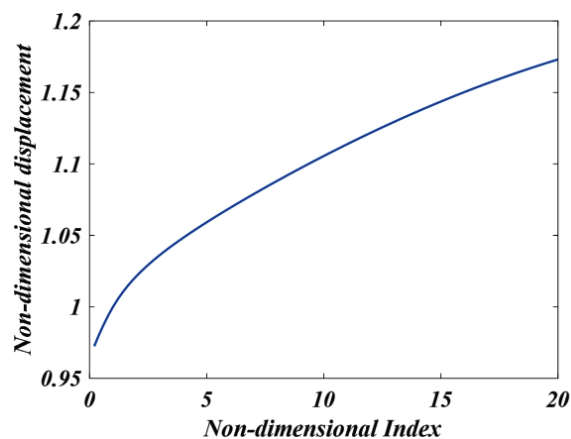
در شکل ۶ اثرات ایندکس تابع توانی بر پاسخ زمانی سیستم نشان داده شده است. ایندکس تابع توانی بیان می‌کند که خواص مواد تابعی بکار رفته در هسته بر حسب ضخامت متفاوت و تابعی از خواص آلومینیم و سیلیسیم است. در این قسمت ولتاژ خارجی وارده بر لایه‌های پیزوالکتریک صفر است. همچنین شعاع‌های داخلی و خارجی به ترتیب ۱ m و ۳/۰ m است. همچنین ضخامت هسته و لایه‌های پیزوالکتریک به ترتیب ۵ mm و ۱ mm است. همانطور که از شکل مشاهده می‌شود. با افزایش پارامتر ایندکس تابع توانی

فرکانس ورق به فرکانس تحریک خارجی می‌باشد. به علاوه شکل ۴(ب) نشان می‌دهد که تغییر شعاع داخلی بیشترین تاثیر را بر دامنه نوسانات داشته است.

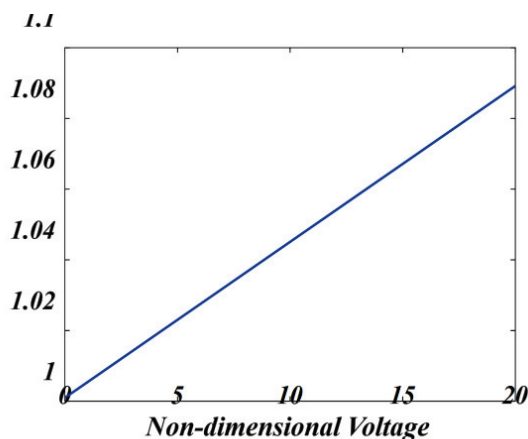
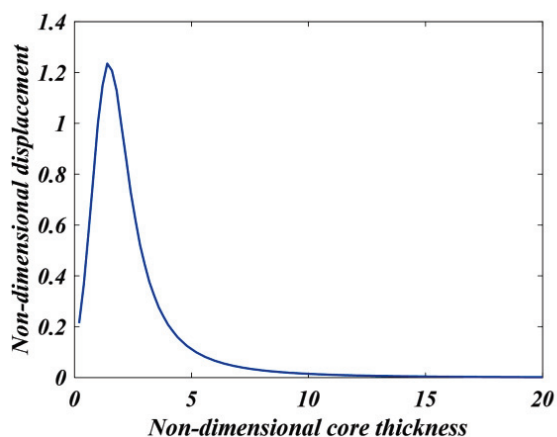
در انتها به بررسی پاسخ زمانی هنگام ایجاد تغییرات پارامترهای موثری از قبیل نسبت ابعاد، ایندکس تابع توانی و ولتاژ اعمالی، بر پاسخ ورق پرداخته می‌شود. در شکل ۵ پاسخ زمانی سیستم تحت اثر تغییرات شعاع داخلی در بازه زمانی صفر تا ده ثانیه رسم شده است. همانطور که شکل ۵ نشان می‌دهد، با افزایش شعاع داخلی، دامنه نوسانات در بازه‌ی زمانی مورد نظر کاهش می‌یابد. این امر به دلیل افزایش نسبی سختی ورق با وجود شرایط مرزی گیردار در لبه داخلی می‌باشد. لازم به ذکر است که در این شکل مقدار



(ب)

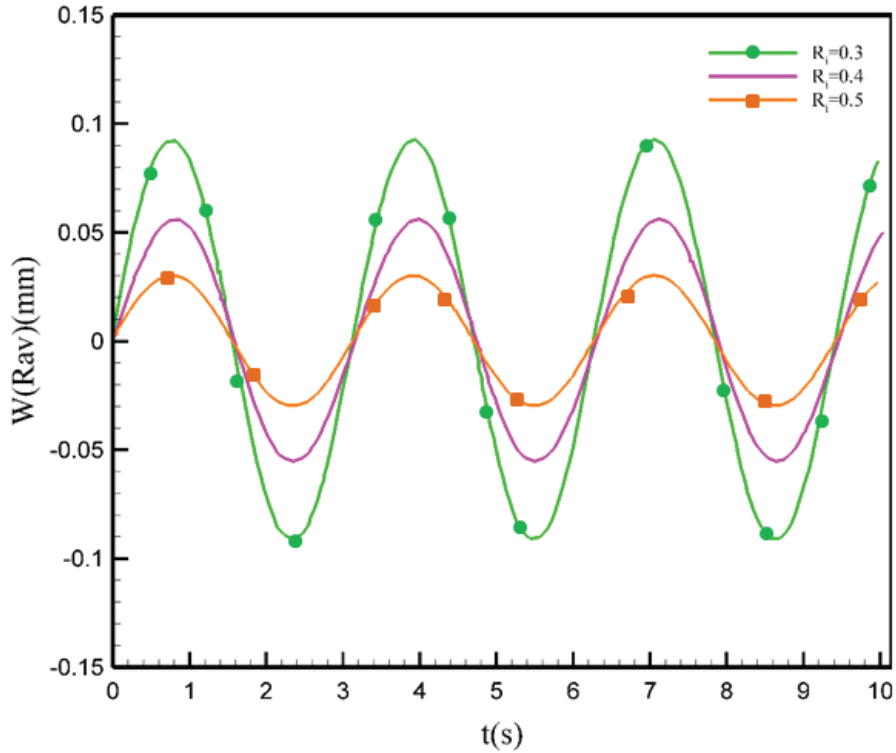


(الف)



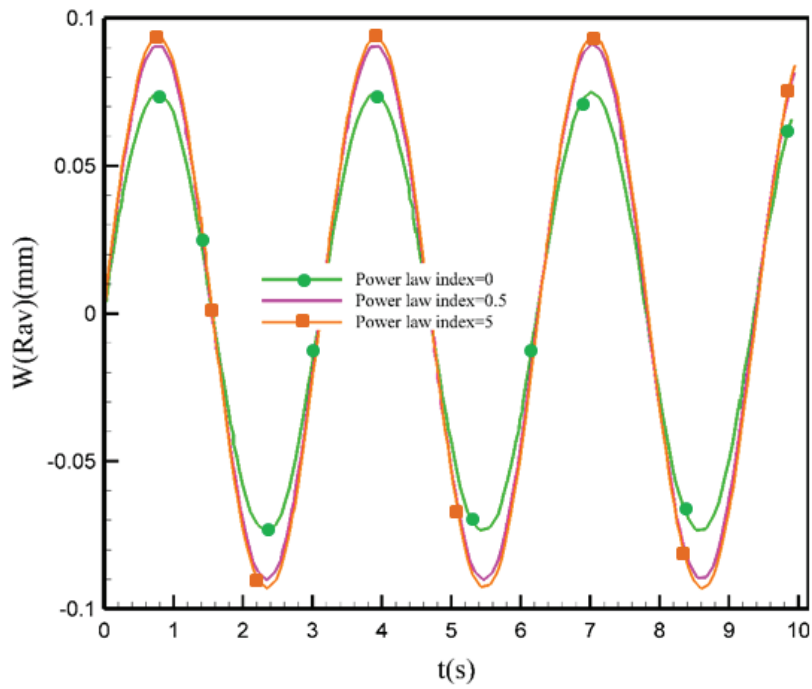
شکل ۴: تغییر دامنه بدون بعد ورق نسبت به تغییرات نسبت بدون بعد: (الف) ایندکس تابع توانی نسبت به حالت نامی (،)، (ب) شعاع داخلی نسبت به حالت نامی (،)، (ج) ولتاژ خارجی نسبت به حالت نامی، (د) ضخامت هسته نسبت به حالت نامی.

Fig. 4 Variation the dimensionless amplitude of the panel relative to the non-dimensional aspect ratio: a) the index of the power function relative to the nominal state ($K = 5$), b) the internal radius relative to the nominal state ($R_i = 0.3$ m), c) the external voltage relative to the nominal state, d) the core thickness relative to the nominal state.



شکل ۵: اثر شعاع داخلی بر تعبیرات پاسخ زمانی.

Fig. 5 Effect of internal radius on the panel amplitude time history.



شکل ۶: اثر ایندکس تابع توانی بر پاسخ زمانی

Fig. 6 Effect of index of the power function on the panel amplitude time history.

به ترتیب ۵ mm و ۱ mm می‌باشد. همانطور که از شکل مشخص است، با اعمال ولتاژ الکتریکی خارجی به خوبی می‌شود دامنه پاسخ زمانی را تغییر داد و از این مزیت در کنترل سیستم‌های ارتعاشی استفاده کرد.

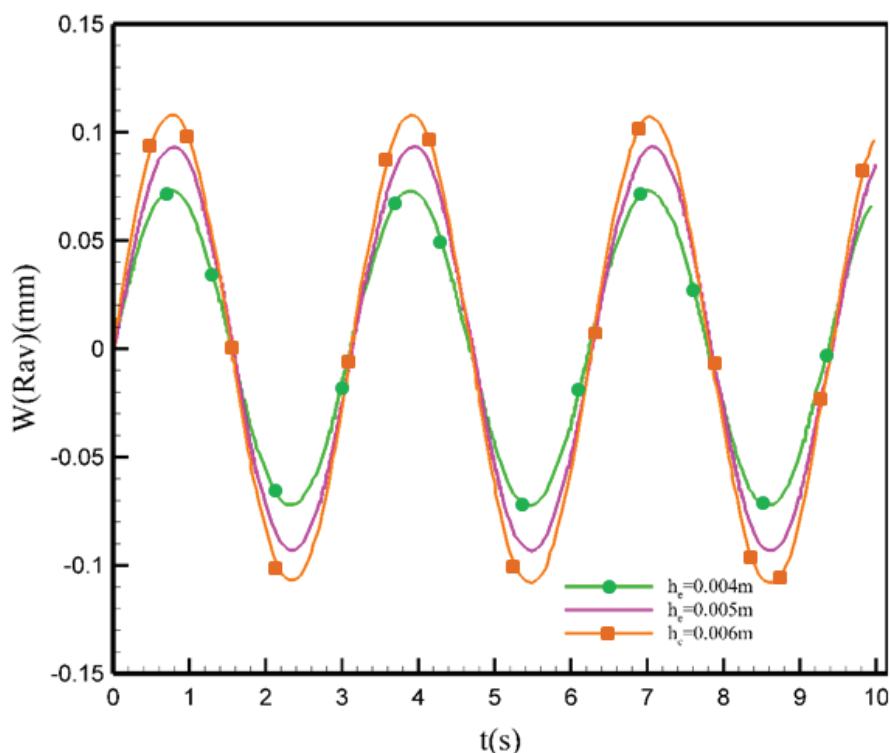
۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق به بررسی اثرات نسبت مواد تابعی استفاده شده در هسته ساندویچ ورق حلقوی با لایه‌های پیزوالکتریک، تحت ولتاژ الکتریکی خارجی پرداخته شده است. با استفاده از میدان جابجایی مربوط به تئوری برشی مرتبه سوم و بهره‌مندی از اصل همیلتون، معادلات دیفرانسیلی جزئی حاکم بر مسیر حرکت بدست آمده و سپس با استفاده از روش عددی تفاضلی مربعی جداسازی شده و برای شرایط مرزی گیردار حل شده است. تغییرات دامنه پاسخ زمانی سیستم تحت بار سینوسی برحسب پارامترهای مختلف مورد ارزیابی قرار گرفته است. مهمترین یافته‌های پژوهش را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

- بدست آوردن پاسخ زمانی ساندویچ ورق حلقوی با لایه‌های پیزوالکتریک

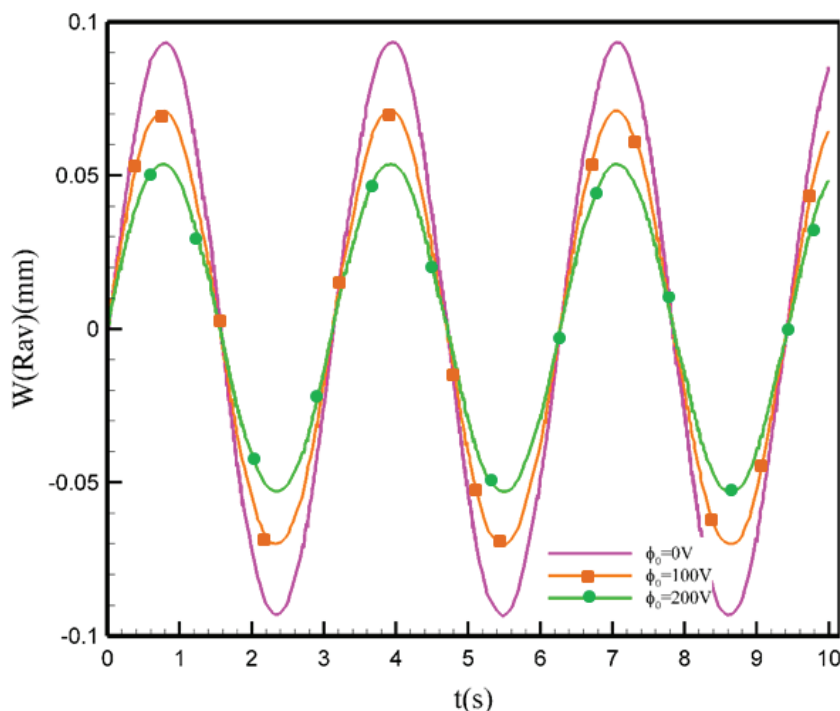
پاسخ زمانی افزایش می‌یابد. این امر به این علت است که با افزایش پارامتر ایندکس، خواص ماده از سرامیک سیلیسیم به سمت فلز آلومینیم میل کرده و سختی کاهش می‌یابد، در نتیجه دامنه نوسانات بر حسب زمان افزایش پیدا می‌کند.

در شکل ۷ به بررسی اثرات ضخامت هسته تشکیل شده از مواد تابعی بر پاسخ زمانی پرداخته شده است. در این قسمت ولتاژ خارجی وارده بر لایه‌های پیزوالکتریک صفر است. ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک ۱ mm می‌باشد و پارامتر ایندکس تابع توانی ۵ است. همانگونه از این شکل دیده می‌شود دامنه پاسخ زمانی با افزایش ضخامت هسته زیاد می‌شود. همانطور که در شکل ۴ نیز مشاهده گردید، با افزایش ضخامت هسته، فرکانس طبیعی ورق به فرکانس تحریک نزدیک شده است. بنابراین با وجود افزایش سختی ورق، دامنه نوسانات افزایش یافته است. با عبور از محدوده مشخصی از ضخامت هسته (شکل ۴ (د))، با افزایش ضخامت، دامنه نوسانات کاهش خواهد یافت. در شکل ۸ به بررسی اثرات ولتاژ خارجی بر پاسخ زمانی سیستم در بازه زمانی مشخص پرداخته شده است. ضخامت هسته و لایه‌های پیزوالکتریک



شکل ۷: اثر ضخامت هسته تشکیل شده از مواد تابعی بر پاسخ زمانی.

Fig. 7 Effect of core thickness on the panel amplitude time history.



شکل ۷: اثر ولتاژ خارجی بر پاسخ زمانی.

Fig. 8 Effect of external voltage on the panel amplitude time history.

فرکانس‌های ورق و هارمونیک بودن تحریک، در برخی از نسبت‌های ضخامت، دامنه افزایش یافته است که به دلیل نزدیکی فرکانس ورق به فرکانس تحریک خارجی می‌باشد.

• افزایش ولتاژ اعمالی می‌تواند دامنه ورق را نسبت به حالت نامی افزایش دهد. اثر تغییر ولتاژ بر تغییر پاسخ ورق تقریباً خطی می‌باشد. به علاوه با اعمال ولتاژ الکتریکی خارجی به خوبی می‌شود دامنه پاسخ زمانی نوسانات را تغییر داد و از این مزیت در کنترل سیستم‌های ارتعاشی استفاده کرد.

و هسته تشکیل شده از مواد تابعی با ضخامت دلخواه

- اعمال میدان جابجایی مربوط به تئوری برشی مرتبه سوم
- ارائه یک حل شبه تحلیلی براساس روش تفاضلات مربعی
- بررسی پارامتری رفتار ورق و توصیف نتایج
- همچنین بر اساس بررسی‌های انجام گرفته در این پژوهش، نتایج کمی و توصیفی زیر بدست آمده است:
- با افزایش شعاع داخلی، دامنه نوسانات ورق در بازه زمانی مورد نظر کاهش می‌یابد. این امر به دلیل افزایش نسبی سختی ورق با وجود شرایط مرزی گیردار در لبه داخلی می‌باشد.
- با افزایش پارامتر ایندکس تابع توانی، دامنه پاسخ زمانی ورق افزایش می‌یابد. این امر به دلیل تغییر خواص هسته از سرامیک به فلز می‌باشد. به علاوه با افزایش ایندکس تابع توانی پاسخ ورق به یک مجانب میل می‌کند که نشان دهنده هسته کاملاً فلزی می‌باشد.
- تغییر ضخامت هسته باعث افزایش سختی ورق می‌گردد که به شکل طبیعی منجر به کاهش دامنه پاسخ خواهد شد. به علاوه به دلیل تغییر

- [1] N. Viliani, S. Khalili, H. Porrostami, Buckling analysis of FG plate with smart sensor/actuator, (2009).
- [2] P. Phung-Van, L.B. Nguyen, L.V. Tran, T.D. Dinh, C.H. Thai, S. Bordas, M. Abdel-Wahab, H. Nguyen-Xuan, An efficient computational approach for control of nonlinear transient responses of smart piezoelectric composite plates, International Journal of Non-Linear Mechanics, 76 (2015) 190-202.
- [3] X. Liang, Z. Wang, L. Wang, G. Liu, Semi-analytical solution for three-dimensional transient response of functionally graded annular plate on a two parameter viscoelastic foundation, Journal of Sound and Vibration, 333(12) (2014) 2649-2663.
- [4] E. CRAWLEY, D. Luis, Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures, AIAA journal, 25(10) (1987) 1373-1385.
- [5] E.F. Crawley, K.B. Lazarus, Induced strain actuation of isotropic and anisotropic plates, AIAA journal, 29(6) (1991) 944-951.
- [6] Y. Yu, R. Xia, Study on finite element analysis and shape control of composite laminate containing piezoelectric actuator/sensor, Acta Mater. Compos. Sinica, 14(2) (1997) 114-119.
- [7] A.A. Jafari, A.A. Jandaghian, O. Rahmani, Transient bending analysis of a functionally graded circular plate with integrated surface piezoelectric layers, International Journal of Mechanical and Materials Engineering, 1(9) (2014) 1-14.
- [8] A.A. Jandaghian, O. Rahmani, Size-dependent free vibration analysis of functionally graded piezoelectric plate subjected to thermo-electro-mechanical loading, Journal of Intelligent Material Systems and Structures,

C_{im}^k	ضرایب وزنی
\bar{c}_{ij}	ثوابت اصلاح شده پیزوالکتریک
E	مدول الاستیسیته، N/m ²
E_i	میدان الکتریک
h_e	ضخامت هسته
h_p	ضخامت لایه پیزوالکتریک
K	ماتریس سختی
κ	ایندکس تابع توانی
\bar{k}_{ij}	ثوابت اصلاح شده دی الکتریک
M	ماتریس جرم
n	تعداد گره‌ها در جهت شعاعی
q	بار خارجی
R_1	شعاع داخلی
R_2	شعاع خارجی
T	انرژی جنبشی
U	انرژی کرنشی
u_0	جابجایی صفحه خنثی در جهت r
W_{ext}	کار نیروهای خارجی
w_0	جابجایی صفحه خنثی در جهت Z
γ_{rz}	کرنش برشی هسته مرکزی
ϵ_{rr}	کرنش هسته مرکزی در جهت شعاعی
$\epsilon_{\theta\theta}$	کرنش هسته مرکزی در جهت مماسی
θ_r	دوران صفحه خنثی در جهت θ
ϕ	پتانسیل الکتریک
ϕ_0	ولتاژ خارجی

- functionally graded materials, *Procedia Technology*, 1 (2012) 496-504.
- [18] S. Sahraee, A. Saidi, Axisymmetric bending analysis of thick functionally graded circular plates using fourth-order shear deformation theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(5) (2009) 974-984.
- [19] E.F. Crawley, J. De Luis, Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures, *AIAA journal*, 25(10) (1987) 1373-1385.
- [20] R. Bellman, J. Casti, Differential quadrature and long-term integration, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34(2) (1971) 235-238.
- [21] S. Kosari, M. Erfanianb, Using Chebyshev polynomials zeros as point grid for numerical solution of linear and nonlinear PDEs by differential quadrature-based radial basis functions.
- [22] X. Wang, Differential quadrature for buckling analysis of laminated plates, *Computers & structures*, 57(4) (1995) 715-719.
- [23] M. Mohammadimehr, M. Emdadi, H. Afshari, B. Rousta Navi, Bending, buckling and vibration analyses of MSGT microcomposite circular-annular sandwich plate under hydro-thermo-magneto-mechanical loadings using DQM, *International Journal of Smart and Nano Materials*, 9(4) (2018) 233-260.
- [24] K.-M. Liew, Y. Xiang, S. Kitipornchai, C. Wang, *Vibration of Mindlin plates: programming the p-version Ritz method*, Elsevier, 1998.
- [25] R. Aghababaei, J. Reddy, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Journal of Sound and Vibration*, 326(1-2) (2009) 277-289.
- (2017) 1045389X17704920.
- [9] S. Narayanan, V. Balamurugan, Finite element modelling of piezolaminated smart structures for active vibration control with distributed sensors and actuators, *Journal of sound and vibration*, 262(3) (2003) 529-562.
- [10] J.M.S. Moita, I.F. Correia, C.M.M. Soares, C.A.M. Soares, Active control of adaptive laminated structures with bonded piezoelectric sensors and actuators, *Computers & Structures*, 82(17-19) (2004) 1349-1358.
- [11] C. Hong, Transient responses of magnetostrictive plates by using the GDQ method, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 29(6) (2010) 1015-1021.
- [12] C.-C. Hong, Transient Response of Functionally Graded Material Circular Cylindrical Shells with Magnetostrictive Layer, *Journal of Mechanics*, 32(4) (2016) 473-478.
- [13] X.-L. Huang, H.-S. Shen, Vibration and dynamic response of functionally graded plates with piezoelectric actuators in thermal environments, *Journal of Sound and Vibration*, 289(1-2) (2006) 25-53.
- [14] J. Reddy, C. Wang, S. Kitipornchai, Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 18(2) (1999) 185-199.
- [15] R. Javaheri, M. Eslami, Thermal buckling of functionally graded plates, *AIAA journal*, 40(1) (2002) 162-184.
- [16] R. Javaheri, M. Eslami, Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory, *Journal of thermal stresses*, 25(7) (2002) 603-625.
- [17] H. Mozafari, A. Ayob, Effect of thickness variation on the mechanical buckling load in plates made of

پارامترهای موجود در رابطه‌های (۱۴) تا (۱۷) به صورت زیر تعریف

می‌شوند:

$$D_{44} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{44} z^3 dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} z^3 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{44} z^3 dz$$

$$G_{11} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{11} z^4 dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} z^4 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{11} z^4 dz$$

$$G_{12} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{12} z^4 dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} z^4 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{12} z^4 dz$$

$$H_{11} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{11} z^6 dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} z^6 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{11} z^6 dz$$

$$H_{12} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{12} z^6 dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} z^6 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{12} z^6 dz$$

$$D_{12} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{12} z^3 dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} z^3 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{12} z^3 dz$$

$$M_{15} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{e}_{15} \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{e}_{15} \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz$$

$$K_{15} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{e}_{15} z^2 \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{e}_{15} z^2 \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz$$

$$L_{31} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{e}_{31} z \left(\frac{\pi}{h_p}\right) \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{e}_{31} z \left(\frac{\pi}{h_p}\right) \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz$$

$$A_{11} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{11} dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{11} dz$$

$$A_{12} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{12} dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{12} dz$$

$$A_{44} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{44} dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{44} dz$$

$$B_{11} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{11} z dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} z dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{11} z dz$$

$$B_{12} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{12} z dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} z dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{12} z dz$$

$$B_{44} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{44} z dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} z dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{44} z dz$$

$$E_{11} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{11} z^2 dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} z^2 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{11} z^2 dz$$

$$E_{12} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{12} z^2 dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} z^2 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{12} z^2 dz$$

$$E_{44} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{44} z^2 dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} z^2 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{44} z^2 dz$$

$$D_{11} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{11} z^3 dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} z^3 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{11} z^3 dz$$

$$D_{12} = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{c}_{12} z^3 dz + \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} z^3 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_p} \bar{c}_{12} z^3 dz$$

$$AA_6 = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{k}_{33} \left(\frac{\pi}{h_p} \right)^3 \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \bar{k}_{33} \left(\frac{\pi}{h_p} \right)^3 \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz$$

$$I_0 = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho^p dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho^e(z) dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \rho^p dz$$

$$I_1 = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho^p z dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho^e(z) z dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \rho^p z dz$$

$$I_2 = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho^p z^2 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho^e(z) z^2 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \rho^p z^2 dz$$

$$I_3 = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho^p z^3 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho^e(z) z^3 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \rho^p z^3 dz$$

$$I_4 = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho^p z^4 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho^e(z) z^4 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \rho^p z^4 dz$$

$$I_6 = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho^p z^6 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho^e(z) z^6 dz + \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \rho^p z^6 dz$$

$$D_{13} = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{e}_{31} z^3 \left(\frac{\pi}{h_p} \right) \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz +$$

$$\int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \bar{e}_{31} z^3 \left(\frac{\pi}{h_p} \right) \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz$$

$$AA_1 = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{e}_{15} \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz +$$

$$\int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \bar{e}_{15} \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz$$

$$AA_2 = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{e}_{15} z \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz +$$

$$\int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \bar{e}_{15} z \cos\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz$$

$$AA_3 = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{k}_{11} \cos^2\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz +$$

$$\int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \bar{k}_{11} \cos^2\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz$$

$$AA_4 = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{e}_{31} \left(\frac{\pi}{h_p} \right) \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz +$$

$$\int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \bar{e}_{31} \left(\frac{\pi}{h_p} \right) \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz$$

$$AA_5 = \int_{\frac{h_e-h_p}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \bar{e}_{31} z^2 \left(\frac{\pi}{h_p} \right) \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz +$$

$$\int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e+h_p}{2}} \bar{e}_{31} z^2 \left(\frac{\pi}{h_p} \right) \sin\left(\pi \frac{z - \frac{h_e}{2} - \frac{h_p}{2}}{h_p}\right) dz$$

