



## Single and Multi-objective Optimal Control Design by Genetic Programming and Comparison with Riccati Equation Solutions

A. Mohammadi<sup>1</sup>, N. Nariman-zadeh<sup>2\*</sup>, A. Jamali<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Mechanical Engineering, University Campus 2, University of Guilan, Rasht Iran

<sup>2</sup> Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

**ABSTRACT:** Gaining the function of control signal that transfer the system states from initial to desired final conditions is one of the main issues related to the optimal control of modern systems. Optimal control signal is usually obtained by numerical solution (such as dynamic programming algorithm) or analytical solution (like Hamilton-Jacobi-Bellman or Riccati equations approaches) of a single-objective performance index which is a weighted combination of control effort and the fitness of system's states. However, choosing proper weight coefficients in these approaches needs a lot of trial and error in addition to experience. In this papers, such time consuming procedures are eliminated by using Genetic programming in single and multi-objective optimization process to find those closed-form mathematical solutions of optimal control problems. In this way, it would be readily possible to trade-off among the objective functions using the obtained pareto-front of those solutions based on the needs of the control system designer. It will be shown that in the case of same weighting factors, the solution of the Riccati equation would also be obtained using the approach of this paper.

### Review History:

Received: 19 Mar. 2019

Revised: 31 May. 2019

Accepted: 22 Sep. 2019

Available Online: 28 Sep. 2019

### Keywords:

Optimal control

Genetic programming

Multi-objective optimization

Pareto front

Quadratic performance index

### 1- Introduction

The main aim in the subject of optimal control is finding a control signal which leads to convergence of the states toward the desired ones in the best way. There are many controls which can do such switching in the states of a dynamic system; however, only a few of them do it optimally. These control signals are commonly obtained by solving a performance index, which is a combination of several objectives with suitable weighting coefficients. There are a few approaches to find such optimal controls [1-3].

Rounding error in recurrence correlations, long-lasting time for loops and considerably high inaccuracy of solutions in addition to the single-objectivity of the ordinary approaches made researchers seek another approach, like a direct algorithm, for solving the optimization problems [4]. The Genetic Programming (GP) is an invaluable member of the evolutionary algorithms, which is a branch of the direct algorithm, whose efficiency in obtaining analytical solutions has been proved in many previous studies [5,6].

Some of the main deficiencies of the single-objective analysis could be highlighted as follow: 1) limitation of the designer's perspective on specifying the scalar values of the weighting coefficients, 2) Difficulty in choosing proper approaches to solve a single-objective problem and 3) Sensitivity of the final solution to the selected weighted coefficients.

In this work, a new modified GP algorithm is introduced whose efficacy is validated through the comparison of the single-objective solution with the exact Riccati solutions in

a specific case study. Thereafter, the multi-objective analysis for the optimal control problem is performed by omitting the weighting coefficients, which is then appraised by evaluating the optimal values of the separated cost functions on the Pareto fronts. Using the proposed algorithm and the multi-objective analysis, many non-dominant points are provided for the designer to choose any desired one according to the design requirements. In this way, the viewpoint of the design and analysis in the field of optimal control would be expanded.

### 2- The Suggested Genetic Programming Algorithm

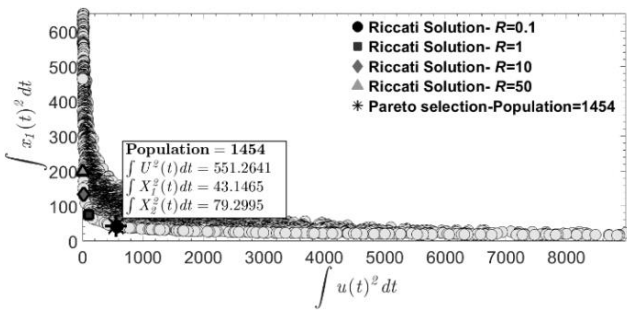
Genetic programming algorithm is an evolutionary method whose individuals are typical mathematical structures which are considered as solutions of a problem. The individual in this algorithm is shown in a tree structure in which variables and operators are placed in leaves and interior nodes of the tree, respectively. In GP, the initial population including a set of mathematical solutions is created randomly and then, in the next generation, premier individuals are preserved or created through an evolutionary procedure.

In this evolutionary trend, not only do individuals with more optimal values have more chance to be preserved, but also they are selected for producing new individuals of the following generation through the specific generation operators. After several cycles of the GP algorithm, it eventually leads to a generation with a set of optimal solutions. However, in the ordinary GP algorithm, the information of subtrees is totally overlooked, which finally causes the generated population to be less efficient.

In this study, the GP algorithm is promoted in a way that the subtree information is paid more attention, which makes the

\*Corresponding author's email: nnzadeh@guilan.ac.ir





**Fig. 1. Pareto front of the aircraft problem in the control effort and the first state trajectory viewpoint**

population of the following generations more efficient than the previous version of GP. Besides, there are specific configurations that cause the proposed GP algorithm to be perfectly suited to either single or multi objective optimization problems.

**3- Optimizing Using the Suggested GP Algorithm**

**3- 1- The single-objective optimization**

The main goal in the optimal control subject is to find a control signal which causes the system states to get to the final desired conditions and, at the same time, minimizes the quadratic performance index defined as follows:

$$J_Q^*(X(t), U_Q^*(t)) = \int_0^\infty ([X(t)]_{n \times 1}^T Q(t)_{n \times n} [X(t)]_{n \times 1} + [U^*(t)]_{1 \times 1}^T R(t)_{1 \times 1} [U_Q^*(t)]_{1 \times 1}) dt. \tag{1}$$

A particular case study where the control of the aircraft path was investigated has been selected for the validation of the suggested algorithm. In the previous study, the final solutions of this optimal problem were shown to be too sensitive to the selected weighting factors [7]. The steady space equation and the quadratic performance index J are respectively demonstrated as follow:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t), \quad (x(0) = 10, x(0) = 0). \tag{2}$$

$$J = \int_0^\infty [4 \cdot x_1^2(t) + Ru^2(t)] dt, \quad (R = 0.1, 1, 10, 50). \tag{3}$$

The exact optimal controls for such problems, which are in the specific form of linear feedback called control law, have been obtained through solving an equation typically known as Riccati equation. For this optimal control problem, the suggested GP in this paper has been configured with 200 populations, the terminal set of T={X1, X2} and the function of F= {Plus, Times, Minus}. Based on the comparisons between the solutions, the proposed GP solutions successfully converged to those obtained from the Riccati equation. Furthermore, all final suggested GP solutions are appropriately represented in the control law form while the error percentage of the worst solution is 0.003%. But with the same GP configuration, not only can the ordinary GP

not represent the solutions in the control law form, but also the convergence trends of the ordinary GP solutions are worse than the suggested one in this paper.

**3- 2- The multi-objective optimization**

In this section, all weighting coefficients (Q and R) would be omitted. Thus, unlike the single-objective analysis of the previous section where one objective was defined, the three cost functions of control effort, first and second state trajectories are defined and separately evaluated. The suggested GP would be configured the same as the previous section with the difference that the new population build method, specific to multi-objective analysis, is used. It is worth noting that a container is considered that was heaped with the populations of the last four generations and the non-dominant points for the mentioned problem would be obtained by comparison of all individuals in this container with each other.

The 10565 non-dominant points are acquired by the proposed GP. Since there were three objectives in the specified problem, the non-dominant can be demonstrated in a 3 dimensional Pareto front. The obtained non-dominant points were evaluated in the perspective of the control effort and the first state trajectory through which the single-objective problem was investigated. In this viewpoint, the single objective points were expected to truly be within the boundary of the optimal non-dominant points. For further assessment, the nearest non-dominant point to the optimal single-objective point with the weighting factor value of R=0.1 has been selected. The specifications of all non-dominant points, the selected point and the optimal single-objective solutions have been illustrated in Fig. 1.

Although the optimum value of the selected non-dominant point is shown to be insignificantly worse than the same value of the single objective point, its optimality in the objective functions of the control effort and the second state trajectory is quite remarkable. In addition to the selected sample, there are many optimal non-dominant points which could be selected according to the design requirements.

**4- Conclusions**

In this work, the functions of the optimal control were obtained using a developed kind of genetic programming algorithm. Since this algorithm doesn't have the limitation of the ordinary approaches in the optimal control to evaluate the analytical solutions, the function of optimal control in the single and multi-objective analysis is obtained through an evolutionary subsequence without using any complex mathematical computations. The objectives which are studied in this paper were the control effort and the trajectory of the states.

In terms of generating new populations, GP was upgraded in a way that, in the single objective problems, the algorithm convergence towards the final solution is faster and more accurate than the ordinary GP. Also, its diversity was promoted to produce more non-dominant points for the multi-objective analysis. In addition, with the comparison of the suggested GP solutions with those obtained from the ordinary algorithm, the claim about the development of the suggested GP is eventually proved.

**References**

[1] D.P. Bertsekas, Dynamic programming and optimal control, Athena scientific 2005.

- [2] D. Liberzon, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*, Princeton University Press, 2011.
- [3] F. Lewis, D. Vrabie, V. Syrmos, *Optimal control*, Wiley, Hoboken, NJ, 2012.
- [4] C.A. Coello, G.B. Lamont, V. Veldhuizen, *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*, Springer, (second edition) (2007).
- [5] J.R. Koza, F.H. Bennett, D. Andre, M.A. Keane, F. Dunlap, Automated synthesis of analog electrical circuits by means of genetic programming, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(2) (1997) 109-128.
- [6] H. Assimi, A. Jamali, N. Nariman-Zadeh, Sizing and topology optimization of truss structures using genetic programming, *Swarm and Evolutionary Computation*, 37 (2017) 90-103.
- [7] D.E. Kirk, *Optimal Control Theory*, United Kingdom, in, Dover Publications, 2004.





## طراحی تک‌هدفه و چندهدفه سیستم‌های کنترل بهینه با استفاده از برنامه‌ریزی ژنتیکی و مقایسه آن با حل تحلیلی معادله ریگاتی

عادل محمدی<sup>۱</sup>، نادر نریمان زاده<sup>۲\*</sup>، علی جمالی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشکده مهندسی مکانیک، پردیس دانشگاهی دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

<sup>۲</sup>دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۲۸

بازنگری: ۱۳۹۸/۰۳/۱۰

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۳۱

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۷/۰۶

### کلمات کلیدی:

کنترل بهینه

برنامه‌ریزی ژنتیکی

بهینه‌سازی چندهدفه

جبهه پارتویی

شاخص عملکرد خطی درجه دوم

**خلاصه:** بدست آوردن ساختار ریاضی سیگنال کنترلی که بتواند حالت‌های سیستم را از حالت ابتدایی به حالت نهایی مطلوب برساند یکی از مهم‌ترین مباحث در حوزه کنترل بهینه سیستم‌های مدرن می‌باشد. به‌طور معمول سیگنال کنترلی بهینه با حل یک شاخص تک‌هدفه که ترکیبی از تلاش کنترلی و شاخص‌هایی از حالت‌های سیستم با استفاده از ضرایب وزنی می‌باشند، با استفاده از روش‌های عددی مانند برنامه‌ریزی دینامیکی و یا از روش‌های تحلیلی عددی مانند هامیلتون-جاکوبی-بلمن و یا معادلات ریگاتی بدست می‌آید. از آنجایی که انتخاب ضرایب وزنی مناسب در روش‌های متداول بهینه‌سازی مستلزم آزمون و خطا می‌باشد. در این مقاله با استفاده از برنامه‌ریزی ژنتیکی و بدون استفاده از هرگونه روش تحلیلی، ضرایب وزنی حذف و معیارهای بهینگی شامل تلاش کنترلی و خطای مسیر متغیر حالت جداسازی می‌شوند و در نتیجه مسائل بهینه‌سازی تک‌هدفه به چندهدفه ارتقا می‌یابند. در واقع با استفاده از برنامه‌ریزی ژنتیکی در این مقاله و با کمک پردازش موازی علاوه بر اینکه می‌توان به فرم تحلیلی حل معادلات ریگاتی در مسائل تک‌هدفه به‌عنوان سیگنال کنترلی بهینه دست یافت، در بهینه‌سازی چندهدفه امکان مصالحه توابع هدف با توجه به نمودارهای پارتو بدست آمده، توسط طراح امکان‌پذیر خواهد بود.

### ۱- مقدمه

کنترل بهینه به مسئله کنترل خطی درجه دوم<sup>۱</sup> وینر<sup>۲</sup> [۴ و ۵] به جنگ جهانی دوم برمی‌گردد. او برای کنترل شلیک تفنگ بر روی فیلتر میانگین مربع کار کرد. وینر فیلترهایی طراحی کرد که توانست یک شاخص عملکرد به اسم شاخص مربعات خطا را کمینه کند. در روش حساب تغییرات شرایط لازم بهینگی جهت حل مسائل کنترل بهینه منجر به یک مسئله مقدار مرزی می‌گردد. این مسئله که در حالت کلی غیرخطی و وابسته به مشتقات می‌باشد، موجب مشکلات زیادی در حل مسئله ایجاد می‌کند و حتی در مواردی موجب حل ناپذیری مسئله مذکور می‌شود. همانطور که در یفس در سال ۲۰۰۲ گزارش داد [۶]، محدود بودن روش حل حساب تغییرات به توابع مشتق‌پذیر پیوسته در حوز هی زمان، عدم توانایی در حل مسائل کنترل بهینه توابع گسسته زمانی و مشکلات این روش در مواجه با مسائل نامعین احتمالاتی در حوز هی زمان باعث شد که بلمن روش برنامه‌ریزی پویا را در سال ۱۹۴۹ ارائه دهد. از زمان ظهور این روش، ریاضی‌دانان و اقتصاددانان مسائل معین و نامعین احتمالاتی متنوعی در زمان محدود و

بهینه‌سازی یک مفهوم بنیادین است که بر اساس روش (ریاضی یا هندسی)، هدف (تک‌هدفه یا چندهدفه)، ماهیت سیگنال‌ها و مراحل آن‌ها (تک مرحله یا چند مرحله) معنی خاص خود را پیدا می‌کند و در حالت کلی، هدف اصلی در مسائل بهینه‌سازی پیدا کردن پارامترهای طراحی برای بهینه کردن (کمینه یا بیشینه کردن) یک یا چند تابع هدف می‌باشد.

در همین راستای برای کنترل مسائل بهینه، هدف پیدا کردن سیگنال کنترلی است که حالت‌های سیستم را از شرایط اولیه به شرایط نهایی مطلوب تغییر دهد. سیگنال‌های مختلفی وجود دارند که بتوانند این تغییر حالت را انجام دهند، اما سیگنال‌های کنترلی محدودی هستند که می‌توانند این تغییر حالت را به بهترین نحو در راستای هدف مدنظر طراح انجام دهند. روش‌های متعددی برای پیدا کردن چنین سیگنال‌های کنترلی بهینه با عنوان حل مسائل بهینه‌سازی توسط محققین ارائه شده است [۳-۱]. اولین مسئله

1 Linear quadratic problem

2 Norbert Wiener

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: moaven@um.ac.ir



تصادفی جزء روش‌های غیرهوشمند محسوب می‌شوند که عدم کارایی آن‌ها در حل مسائل کنترل بهینه باعث شد تا محققان به دنبال روش‌های حل دیگری در حل مسائل کنترل بهینه باشند. به این ترتیب روش‌های مستقیم هوشمند که اکثر آن‌ها از فرآیندهای طبیعی الهام گرفته‌اند، توسط محققین در سال‌های اخیر ارائه شدند. کلنی مورچگان<sup>۱۱</sup>، بهینه‌سازی تجمعی ذره<sup>۱۲</sup>، سیستم ایمنی مصنوعی<sup>۱۳</sup>، الگوریتم‌های تکامل تدریجی<sup>۱۴</sup> از جمله این روش‌ها می‌باشند [۱۷].

سان و همکاران [۱۸] با استفاده از یک نسخه توسعه داده شده از الگوریتم تجمعی ذره به حل مسئله‌ای از کنترل بهینه پرداختند. آن‌ها نشان دادن با استفاده از الگوریتم پیشنهادی، دستیابی به ورودی کنترلی بهینه برای نگهداشتن یک ماهواره در مدار زمین بدون نیاز به محاسبات پیچیده معمول در کنترل بهینه و سریع‌تر از الگوریتم‌های تجمعی ذره پیشین امکان‌پذیر است. اما قوی‌ترین و معتبرترین کارهای بهینه‌سازی به الگوریتم ژنتیک (زیرمجموعه‌های از الگوریتم‌های تکامل تدریجی) تعلق دارد [۱۹]. سال‌ها بعد از ظهور الگوریتم ژنتیک و در راستای استفاده از مفاهیم آن، برنامه‌ریزی ژنتیکی توسط کوزا اختراع شد. از زمان ارائه این الگوریتم، برنامه‌ریزی ژنتیکی بارها توسط مخترع خود و دیگر محققان در مسائل بهینه‌سازی استفاده شده است [۲۰، ۲۱]. ماحر و محمد<sup>۱۵</sup> [۲۲] در سال ۲۰۱۳ با استفاده از برنامه‌ریزی ژنتیکی به حل مسائل غیرخطی کنترل بهینه با شرایط مرزی ثابت پرداختند. در کار مذکور، کارایی برنامه‌ریزی ژنتیکی در حل شاخص‌های عملکرد تک‌هدفه غیرخطی مورد ارزیابی قرار گرفت و کارآمدی برنامه‌ریزی ژنتیکی را نسبت به روش عددی پارامتری کردن بردار کنترل<sup>۱۶</sup> در پیدا کردن سیگنال کنترلی بهینه برای مسائل غیرخطی کنترل بهینه نشان داده شد. جمالی و همکارانش [۲۳] کارایی برنامه‌ریزی ژنتیکی در مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی پیچیده را نشان دادند. در همان سال و در کاری دیگر آن‌ها یک کنترلر مقاوم چندهدفه با در نظر گرفتن نامعینی در داده‌های تجربی طراحی کردند [۲۴]. کیم و همکاران [۲۵] در سال ۲۰۱۶ به طراحی سیستم تبریدی بهینه به صورت چندهدفه پرداختند. آن‌ها در این کار شاخص‌های مختلف کیفی از یک سیستمی تبریدی را با ضرایب مناسب که از روشی به اسم روش سطح پاسخ<sup>۱۷</sup> تعیین می‌شود، به شاخصی تک‌هدفه

نامحدود فرمول‌بندی و حل کرده‌اند. روش برنامه‌ریزی پویا یکی از روش‌های مهم در حل مسائل بهینه مهندسی، هوافضا، فناوری اطلاعات، اقتصاد، مالی و ... می‌باشد. در واقع این روش، جایگزین بهتری نسبت به روش حساب تغییرات در مسائل کنترل بهینه می‌باشد. بلمن [۷] در سال ۱۹۵۲ نظریه اصل بلمن از بنیادین‌ترین مفاهیم برنامه‌ریزی پویا را بیان کرد. او همچنین در سال ۱۹۵۷ مفاهیم مربوط به برنامه‌ریزی پویا برای مسائل نامعین احتمالاتی را بسط داد [۸]. مقالات و کتاب‌های زیادی از او در خصوص برنامه‌ریزی پویا و کاربردهایش در مسائل کنترل بهینه منتشر شده است. هم‌زمان با کارهای بلمن در سال ۱۹۵۶ بولتیانسکی<sup>۱</sup> و همکاران [۹] با ارائه اصل بیشینه<sup>۲</sup> در مرجع [۱۰] تأثیر مهمی در حل مسائل کنترل بهینه داشتند. نظریه‌های کنترلر تنظیم‌کننده درجه دوم خطی و کنترل‌کننده گوسی درجه دوم خطی<sup>۳</sup> در طراحی کنترل‌های بازخوردی بهینه در سال ۱۹۶۰ اولین بار توسط کالمن<sup>۴</sup> [۱۱] ارائه شد. کالمن کارهای خود را با معرفی فیلتر بهینه و نظریه تخمین فیلتر کالمن گسسته [۱۲] و فیلتر کالمن پیوسته را با همکاری بوسی<sup>۵</sup> توسعه داد. حدود دو قرن بعد از معرفی معادله ریکاتی، این معادله به یکی از مهم‌ترین معادله‌های پرکاربرد در کنترل بهینه تبدیل شد. معادله ریکاتی در بسیاری از روش‌های کنترل بهینه استفاده شده است [۱۴]. شیائو<sup>۶</sup> و ونگ<sup>۷</sup> [۱۵] در سال ۱۹۹۹ با استفاده از موجک‌های هار<sup>۸</sup> و ادغام آن با معادلات ریکاتی به حل مسائل بهینه‌سازی تک‌هدفه سیستم متغیر با زمان پرداختند و حدود ۱۵ سال بعد، رادھوش و همکاران [۱۶] با استفاده از ایده‌ای مشابه با ادغام موجک‌های چیبیشف<sup>۹</sup> و معادلات لاگرانژ به حل دقیق‌تری برای سیستم‌های متغیر با زمان دست یافتند.

تقریب روابط بازگشتی با استفاده از مفاهیم مشتق توابع، بالا بودن زمان حلقه‌های الگوریتم و عدم دقت بالای جواب‌ها علاوه بر تک‌هدفه بودن در روش برنامه‌ریزی پویا و وابستگی به نقطه شروع و شرط مشتق‌پذیر بودن تابع هدف در روش حساب تغییرات از جمله مواردی هستند که سبب استفاده از الگوریتم‌های مستقیم در حل مسائل بهینه‌سازی شدند. جستجوی تصادفی<sup>۱۰</sup> یکی از اولین و ابتدایی‌ترین این الگوریتم‌ها است [۱۷]. روش‌های جستجوی

- 1 Boltyanskii
- 2 Maximum principle
- 3 Linear quadratic Gaussian
- 4 Rodulf Emil Kalman
- 5 Richard Snowden Bucy
- 6 Chun-Hua Hsiao
- 7 Wang
- 8 Haar wavelets
- 9 Chebyshev wavelets
- 10 Random search

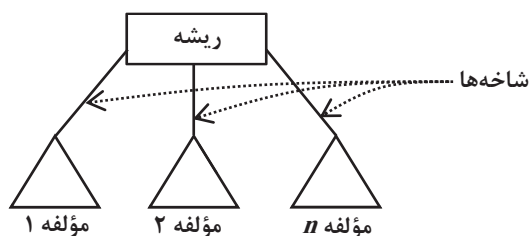
- 11 Ant system
- 12 Particle swarm optimization
- 13 Artificial immune system
- 14 Evolutionary algorithms
- 15 Mohamed
- 16 Control vector parameterization
- 17 Response surface methodology



بین توابع هدف مختلف بر روی جبهه‌های پارتویی فراهم می‌آید. در نهایت با استفاده از بهینه‌سازی چندهدفه و الگوریتمی که در دستیابی به جواب‌های تحلیلی محدودیت‌های روش‌های مرسوم کنترل بهینه ندارد، توسعه دیدگاه طراحی در تحلیل مسائل کنترل بهینه بررسی می‌شود.

## ۲- الگوریتم برنامه‌ریزی ژنتیکی پیشنهادشده

در برنامه‌سازی ژنتیکی هر واحد جمعیتی به‌عنوان یک کروموزوم به‌صورت یک راه‌حل، یک مدل ریاضی و یا یک برنامه کامپیوتری به شیوه درختی بیان می‌شود [۲۷]. ساختار اصلی برنامه‌سازی ژنتیکی به‌گونه‌ای است که ابتدا یک مجموعه‌ای از جواب‌های اولیه به‌صورت روش تصادفی نصف-نصف<sup>۲</sup> با ترکیب تصادفی از عملگرها، توابع ریاضی، اعداد و متغیرهای طراحی به‌عنوان جمعیت اولیه ایجاد می‌شود. شیوه درختی برای نمایش هر مدل (واحد) در برنامه‌ریزی ژنتیکی استفاده می‌شود. متغیرها و مقادیر ثابت در هر واحد به‌صورت برگ‌های درخت می‌باشند که در برنامه‌سازی ژنتیکی به آن‌ها ترمینال<sup>۳</sup> گفته می‌شود. همچنین عملگرهای محاسباتی (+, \*, max) که در ریشه و گره‌های داخلی واقع شده‌اند، توابع<sup>۴</sup> نامیده می‌شوند. ترکیب توابع و ترمینال‌های مؤثر به‌عنوان کروموزوم‌ها یا مؤلفه‌های هر واحد در برنامه‌سازی ژنتیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در حالت پیچیده‌تر، واحدهای برنامه می‌توانند ترکیبی از چند مؤلفه باشند. در این حالت نمایش برنامه به‌صورت ترکیبی از چند درخت است که با یک نود ریشه‌ای گروه‌بندی شده‌اند، یا به عبارتی هر یک از مؤلفه‌ها به‌عنوان یک شاخه به ریشه متصل است. این ساختار را چند کروموزومی<sup>۵</sup> یا چند مؤلفه‌ای می‌گویند. برازندگی هر واحد توسط مقدار عددی یک تابع برازندگی<sup>۶</sup> مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در برنامه‌ریزی ژنتیکی همانند سایر الگوریتم‌های تکاملی، اپراتورها روی واحدهایی به کار می‌روند که بر اساس احتمال و بر مبنای



شکل ۱: نمایش ساختار قطعه برنامه چند مؤلفه‌ای

Fig 1. Multigen structure.

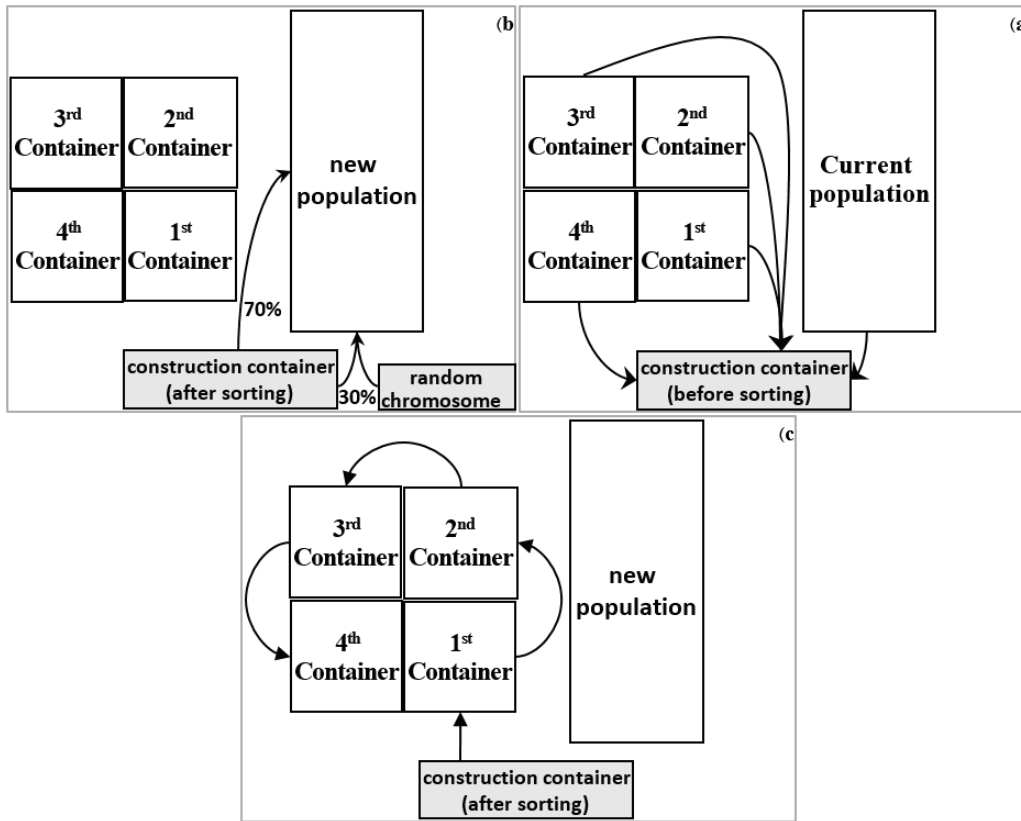
تبدیل کردند و در نهایت به حل شاخص تک‌هدفه شده با استفاده از الگوریتم ژنتیک پرداختند. در همان سال ساردهای [۲۶] در پایان‌نامه دکتری خود از الگوریتم چندهدفه ژنتیک به نام نسخه دوم الگوریتم ژنتیک چندهدفه غیر برتر<sup>۱</sup> برای طراحی بهینه کنترلر استفاده کرد. او در این کار پارامترهای بهینه غیربرتر در فضای پارتویی در قبال هدف‌هایی از فضای زمانی و فرکانسی را به‌صورت چندهدفه بررسی کرد.

در کارهای پیشین انجام‌شده در حوزه کنترل بهینه، مسائل کنترل بهینه به‌صورت یک شاخص عملکرد تک‌هدفه که ترکیب وزنی از توابع هدف مختلف است، تعریف شده‌اند. کاهش دیدگاه طراح در تعیین ضرایب وزنی مناسب، محدود کردن مسائل کنترل بهینه به حل ریاضی شاخص‌های تک‌هدفه و ایجاد حساسیت شدید جواب نهایی به ضرایب تعیین‌شده از جمله مشکلات تحلیل‌های تک‌هدفه می‌باشند. در تحلیل‌های تک‌هدفه، نه تنها مسائل کنترل بهینه به حل‌پذیری بودن شاخص عملکرد محدود می‌شوند، بلکه زمان زیادی صرف تعیین ضرایب وزنی متناسب با نیازهای طراحی می‌شود. چنین ضرایب وزنی مناسبی تنها با تکرارهای فراوان و زمان بر آزمون و خطا تعیین می‌شوند. در این مقاله، دیدگاه طراحی کنترل بهینه سیستم‌های مدرن با حذف ضرایب وزنی و ارتقا شاخص عملکرد تک‌هدفه به معیارهایی چندهدفه توسعه می‌یابد. در بهینه‌سازی چندهدفه، سیگنال کنترلی بهینه به دور از حساسیت بر انتخاب ضریب مناسب و متناسب با نیازهای طراحی از میان نقاط غیربرتر در جبهه‌های پارتویی انتخاب می‌شود.

در راستای تحقق اهداف این مقاله، ابتدا الگوریتم برنامه‌ریزی ژنتیکی که کارایی آن در تاریخچه کارهای کنترل بهینه نشان داده شده است، به‌گونه‌ای توسعه داده می‌شود که سبب افزایش دقت و همگرایی جواب نهایی می‌شود. جهت بررسی کارایی الگوریتم پیشنهادی در این مقاله، جواب‌های تحلیلی تک‌هدفه بدست آمده از آن با جواب‌های معادلات ریگاتی مقایسه و صحت سنجی می‌شوند. جواب‌های تحلیلی حاصل از معادلات ریگاتی، حل دقیق برای معادلات تک‌هدفه صرفاً خطی محسوب می‌شود که در دستیابی به پاسخ‌های تحلیلی به‌غیر از این حالت، ناکارآمد است. در ادامه با استفاده از الگوریتم مذکور، بهینه‌سازی چندهدفه که روش‌های معمول کنترل بهینه همچون معادلات ریگاتی در این نوع تحلیل‌ها بلااستفاده می‌باشند، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نشان داده می‌شود که با استفاده از بهینه‌سازی چندهدفه، علاوه بر امکان دستیابی حل‌های تحلیلی مشابه به پاسخ‌های تک‌هدفه قبلی، پاسخ‌های بهینه دیگر در راستای نیاز طراحی با مصالحه

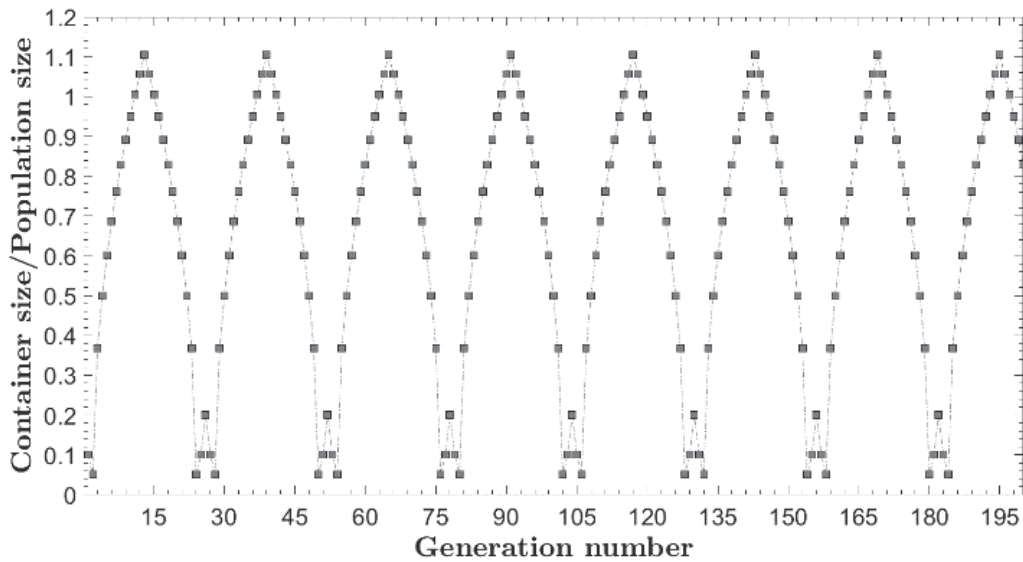
2 Ramped half and half  
3 Terminal  
4 Functions  
5 Multigene

1 NSGA-II



شکل ۲: مراحل ارتقا نسل‌ها

Fig 2. Generation construction process



شکل ۳: نحوه تغییر اندازه مخزن ساخت در طول ارتقا نسل برای مسائل تک‌هدفه

Fig 3. Size variation of the single-objective repository through generation evolution



کروموزومی در طول ارتقا نسل از تغییر اندازه مخزن ساخت به صورت شکل ۳ استفاده می شود.

مسائل چندهدفه برخلاف مسائل تک هدفه که تمرکز جواب مدنظر بود، نیازمند وسعت دامنه در عرصه جوابها می باشد که این امر موجب در نظر گرفتن افزایش دائمی مخزنهای ساخت در روند ارتقا نسلها می شود. افزایش اندازهها باید به گونه ای باشد که همواره ژنهای مناسب با کروموزومهای برتر در مخزنها قرار بگیرد که به علت همگرایی ژنها در نسلهای ابتدایی و به مرور کند شدن روند تولید ژنهای مطلوب، افزایش اندازه مخزن ساخت به صورت شکل ۴ پیشنهاد می شود. نمودار پارتویی نهایی که شامل نقاط غیر برتر می باشد، با ادغام تمام مخازن و جبهه بندی آنها بدست می آید.

### ۳- بهینه سازی با الگوریتم برنامه ریزی ژنتیکی پیشنهادی

#### ۳-۱- مدل سازی و شبیه سازی تک هدفه

سیگنال کنترلی بهینه به ضرایب وزنی انتخابی، حساسیت دارد. برای نشان دادن این حساسیت، مدل سازی و شبیه سازی کنترل مسیر یک فضاپیما با شاخص عملکرد به فرم خطی درجه دوم با ضرایب مختلف وزنی بررسی شده است [۲۸].

با در نظر گرفتن  $\theta(t)$  به عنوان زاویه مسیر حرکت با سطح افق، معادلات حرکت فضاپیما مفروض به صورت رابطه (۱) بدست می آید:

$$I \frac{d^2}{dt^2} [\theta(t)] = \lambda(t) \quad (1)$$

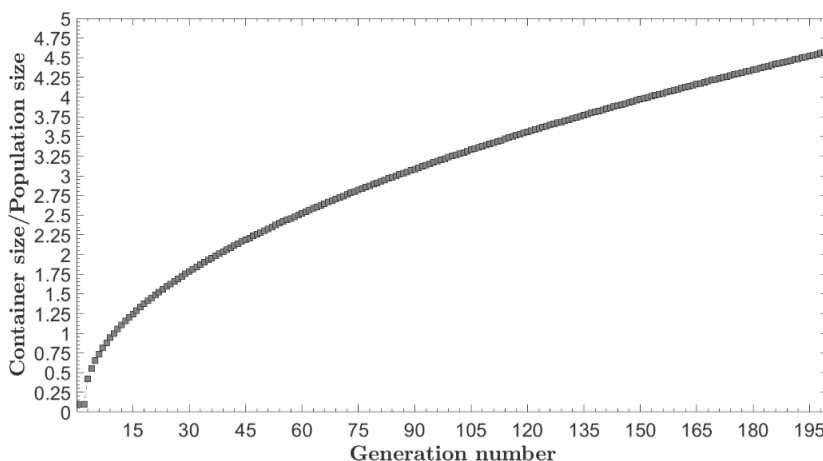
$I$  و  $\lambda(t)$  به ترتیب ممان اینرسی فضاپیما و پیچش تولیدی توسط گاز جت می باشد. با انتخاب  $x_1(t) \triangleq \theta(t)$  و  $x_2(t) \triangleq \dot{\theta}(t)$  به عنوان متغیرهای حالت و  $u(t) \triangleq \frac{\lambda(t)}{I}$  به عنوان ورودی کنترلی، معادلات حالت رابطه (۲) می شود.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

هدف اصلی در این مسئله نگهداری زاویه مسیر در نزدیکی صفر می باشد که برآورد سازی این هدف موجب ایجاد شتاب در فضاپیما می شود. برای این مسئله شاخصی عملکردی به فرم خطی درجه دوم با ضرایب وزنی  $q_{11}$ ،  $q_{22}$

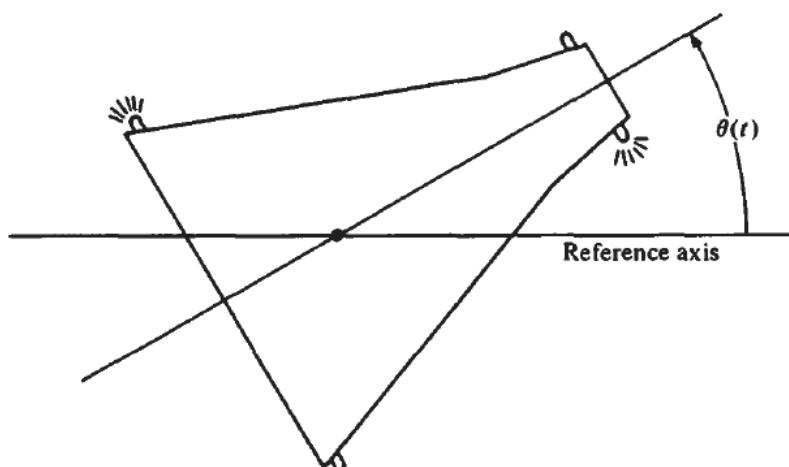
برازش انتخاب می شوند. به عبارت دیگر، واحدهای بهتر شانس بیشتری برای داشتن فرزند نسبت به واحدهای ضعیف تر دارند. متداول ترین روش برای انتخاب واحدها در برنامه ریزی ژنتیکی، انتخاب تورنمنت می باشد. در انتخاب تورنمنت، تعدادی از واحدها به طور تصادفی از جمعیت انتخاب می شوند. این واحدها با یکدیگر مقایسه شده و بهترین آنها به عنوان واحد انتخاب می شوند. در زمان اجرای عملگر پیوند، دو والد لازم است و لذا تورنمنت دو دور اجرا می شود. در نهایت با استفاده از عملگرهای پیوند، جهش و انتقال مستقیم از واحدهایی که برازندگی بهتری دارند، نسل جدیدی از مدل های ریاضی ساخته می شود. تکرار این روند در طی مراحل متعدد و با ارتقا نسلهای متوالی باعث می شود تا جوابهایی با برازندگی بالاتر و یا به عبارتی دیگر نسلهای بهینه تر از دیدگاه تابع هدف تولید گردد.

در روش معمول برنامه ریزی ژنتیکی هر واحد برنامه یک کروموزوم تعریف می شود و نسل جدید تنها با استفاده از اطلاعات کروموزومی در نسل فعلی ساخته می شود و این در حالی است که امکان دارد از نسلهای قدیم واحدی با اطلاعات زیر درختی برتر وجود داشته که بعد از گذر نسلها به علت حذف واحد مذکور اطلاعات زیر مؤلفه ای آن نیز حذف شود. در این مقاله اطلاعات سازنده واحدهای برتر مورد توجه قرار می گیرد و هر زیردرخت را به عنوان یک کروموزوم و واحدهای برنامه که ترکیبی از کروموزومها می باشد، ژن تعریف می شود. با ایجاد یک حافظه که به صورت شماتیک در شکل ۲ نشان داده شده است، واحدهای برتر تمام نسلها در مخزنی به اسم مخزن ساخت به گونه ای انباشته می شوند که واحدها با توجه به برازندگی شان مرتب و همچنین واحدهای یکسان جهت افزایش تنوع کروموزومی در تولید نسل جدید کارآمد حذف می شوند. سپس ۷۰٪ نسل جدید با پیوند کروموزومهای واحدهای موجود در مخزن ساخت و ۳۰٪ باقی مانده با تزریق کروموزومهای جدید به ساختار این واحدها ساخته می شوند و در نهایت بعد از ساخت نسل جدید اطلاعات مخزن ساخت در مخازنی ذخیره می شوند. در واقع این گونه می توان بیان کرد که برای تولید نسل جدید برخلاف روش معمول که واحدهای برتر استفاده می شود، در روش پیشنهادی اطلاعات سازنده واحدهای برتر از نسل ابتدایی تا نسل کنونی مورد توجه قرار می گیرد. در بررسیهای صورت گرفته برای همگرایی بهتر در مسائل کنترل بهینه تک هدفه توسط برنامه ریزی ژنتیکی پیشنهادی، جهت همگرایی سریع تر در بازه ای از ارتقا نسلها تمرکز کروموزومی بر واحدهای برتر محدود و در بازه ای دیگر تنوع کروموزومی بر روی واحدهای برتر وسیع تر احساس می شود. بنابراین در این مقاله با ترکیب هر دو حالت تمرکز و تنوع



شکل ۴: نحوه تغییر اندازه مخزن ساخت در طول ارتقا نسل برای مسائل چندهدفه

Fig 4. Size variation of the multi-objective repository through generation evolution



شکل ۵: کنترل حرکت یک فضاپیما [۲۸]

Fig5. Aircraft path control [28].

خطی با زمان) قانون کنترل بهینه<sup>۱</sup> به صورت خطی می باشد و به صورت رابطه (۴) بیان می شود [۸].

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TKx(t) \triangleq -F \cdot x(t) \quad (۴)$$

ثابت می شود که ماتریس K در حالت کلی از حل یک معادله دیفرانسیلی

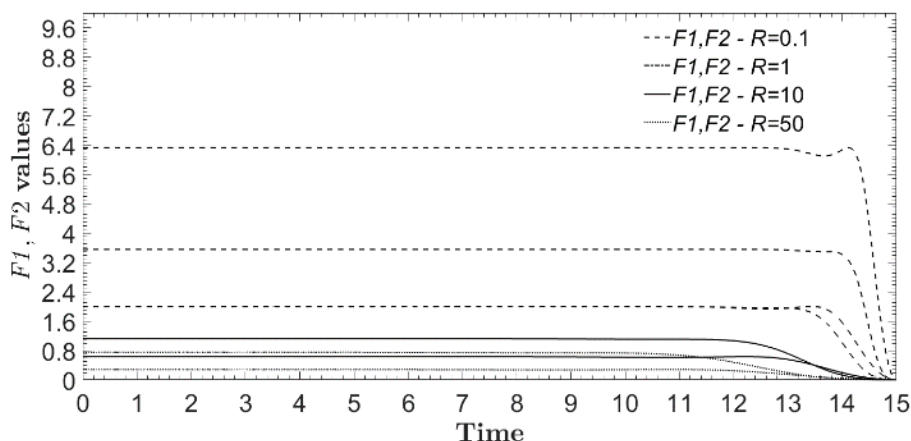
1 Optimal control law

و R در نظر گرفته شده است.

$$J = \int_0^{\infty} [q_{11}x_1^2(t) + q_{22}x_2^2(t) + Ru^2(t)] dt \quad (۳)$$

$$(q_{11} = 4, q_{22} = 0, R = 0.1, 1, 10, 50)$$

در سیستم های خطی ثابت با زمان، سیگنال کنترلی ورودی فیدبکی خطی ثابت با زمان از حالت های سیستم می باشد. در این شرایط (سیستم های



شکل ۶: مقادیر ماتریس F در قانون کنترل بهینه برای کنترل خطی فضاپیما

Fig 6. Gain matrix F in the control law for the aircraft problem.

مطابق معادله (۴) به صورت ضرایب ثابتی از حالت‌های سیستم می‌باشد که این مهم برای جواب‌های برنامه‌ریزی ژنتیکی پیشنهادی حداکثر تا نسل ۲۳ همانند شکل ۷ محقق شد. درحالی‌که با پیکربندی مشابه برای برنامه‌ریزی ژنتیکی معمول، نه تنها دستیابی به جواب‌ها به صورت شکل نهایی رابطه (۴) میسر نشد، بلکه در بهترین وضعیت جواب‌های برنامه‌ریزی ژنتیکی معمول تا نسل ۶۷ همگرایی مناسبی نداشتند.

### ۳-۲- مدل‌سازی و شبیه‌سازی چندهدفه

در کارهای بهینه‌سازی پیشین شاخص عملکرد به صورت تک‌هدفه و با ترکیب ضریب وزنی از سیگنال کنترلی و حالت‌های سیستم بررسی شده است. در این نوع مسائل، ضرایب وزنی مناسب عمدتاً با روش آزمون و خطا بدست می‌آیند که این امر به نوبه خود سبب کاهش دقت و دید طراح در تعیین درجه اولویت‌های توابع هدف (سیگنال کنترلی یا خط سیر حالت‌های سیستم) می‌شود.

در این مقاله با حذف ضریب‌های وزنی و تبدیل شاخص عملکرد تک‌هدفه به شاخص‌هایی چندهدفه، شاخص‌ها به صورت مجزا و با استفاده از تحلیل‌های پارتویی بررسی می‌شوند. با این روش انتخاب نقاط مطلوب در بین نقاط غیربرتر و بدست آوردن سیگنال کنترلی با استفاده از برنامه‌ریزی ژنتیکی علاوه بر حذف حساسیت، افزایش دقت و کارایی طراحی کنترل بهینه سیستم‌های مدرن از منظر طراحی و تحلیل، امکان ترکیب آن با

که یک نوع از معادلات ریگاتی می‌باشد، بدست می‌آید. این ماتریس در حالت کلی وابسته به زمان بوده و ساختار آن به زمان نهایی بستگی دارد و در شرایط ثابت با زمان که زمان نهایی به بینهایت میل می‌کند ماتریس K به ماتریسی ثابت میل می‌کند که می‌توان آن را به زمان نهایی متناهی نیز تعمیم داد [۱۲]. برای نمونه از حل معادله ریگاتی برای کنترل مسیر فضاپیما و بدست آوردن ماتریس K و جایگذاری آن در رابطه (۴)، ماتریس F به صورت شکل ۶ بدست می‌آید.

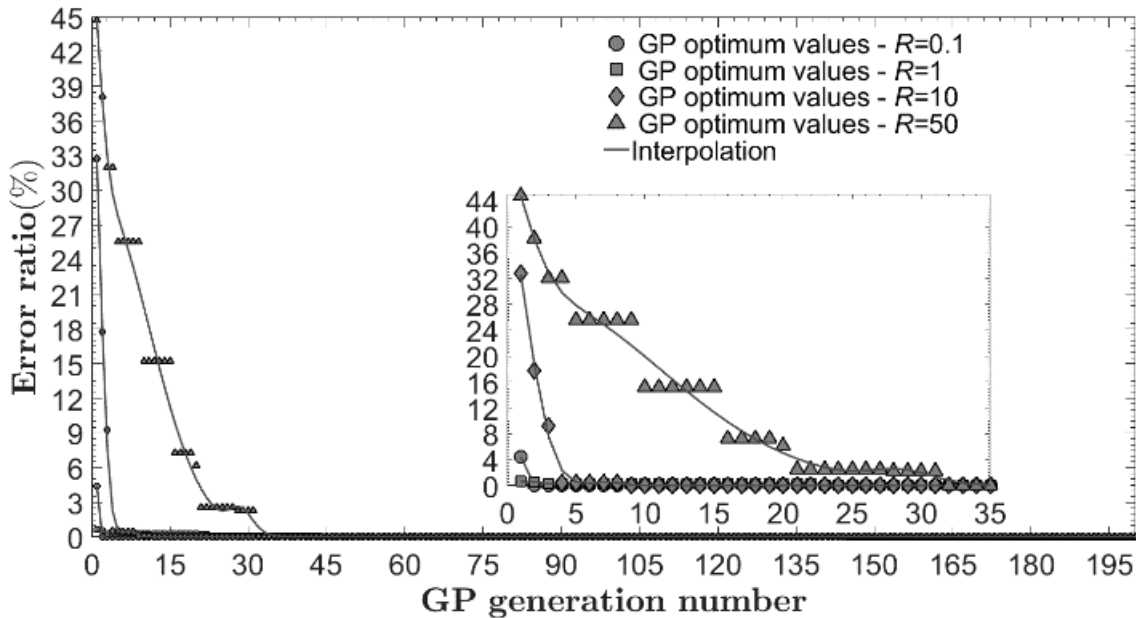
همان‌گونه که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، با چشم‌پوشی از جهش در نزدیکی به زمان‌های نهایی ۱۵ ثانیه، ماتریس F دارای مقادیر ثابتی می‌باشد و با جایگذاری در رابطه (۴) توابع سیگنال کنترلی به ازای هر R بدست می‌آید. در ادامه جهت صحت سنجی، معادله سیگنال کنترلی بدست آمده از بهینه‌سازی تک‌هدفه با استفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی ژنتیکی ارائه شده در این مقاله با سیگنال‌های کنترلی بدست آمده از حل معادله ریگاتی، مقایسه می‌شوند (جدول ۱). برنامه‌ریزی ژنتیکی پیشنهادی با ترمینال‌های  $F = \{-, +, \times\}$  عملگرهای محاسباتی  $T = \{X 1, X 2, constat value\}$  پیکربندی و تا نسل ۲۰۰ اجرا می‌شود. نحوه همگرایی نسل‌های برنامه‌ریزی ژنتیکی برای این مسئله و با پیکربندی مذکور در شکل ۷ نشان داده شده است.

با توجه به جدول ۱ سیگنال‌های کنترلی بدست آمده از روش برنامه‌ریزی ژنتیکی با درصد خطایی کمتر از ۰/۰۳٪ به سیگنال کنترلی بدست آمده از حل معادلات ریگاتی، همگرا می‌شوند. جواب‌ها در مسائل خطی ثابت با زمان

**Table 1. Comparison of the obtained optimal control signals between the suggested Genetic Programming (GP) and the Riccati equation.**

**جدول ۱: مقایسه سیگنال کنترلی بدست آمده از برنامه‌ریزی ژنتیکی و حل معادلات ریکاتی**

$R=0.1$	$R=1$	$R=10$	$R=50$	
$U(x) = X_2 - 3/5566 X_1 - 6/3246$	$U(x) = -2X_1 - 2 X_2$	$U(x) = X_2 - 1/1246 X_1 - 1/6224$	$U(x) = X_2 - 1/7521 X_1 - 1/2828$	
$J_1 = 562,8978$ $J_2 = 42,1795$ $J = 0.1 J_1 + 4 J_2 =$ ۲۳۵/۰۰۷۹	$J_1 = 100,8953$ $J_2 = 75,1282$ $J = 1 J_1 + 4 J_2 =$ ۴۰۱/۴۰۸۱	$J_1 = 17,932$ $J_2 = 133,8$ $J = 0.1 J_1 + 4 J_2 =$ ۴۱۳/۶۹۹۴	$J_1 = 5,3715$ $J_2 = 199,71$ $J = 0.1 J_1 + 4 J_2 =$ ۱۰۶۷/۴	معادله ریکاتی
$U(x) = X_2 - 3/5278 X_1 - 6/32756$	$U(x) = -2X_1 - 2 X_2$	$U(x) = X_2 - 1/1028 X_1 - 1/6223$	$U(x) = X_2 - 1/7690 X_1 - 1/2909$	
$J_1 = 558,7304$ $J_2 = 42,2843$ $J = 0.1 J_1 + 4 J_2 =$ ۲۳۵/۰۱۰۴	$J_1 = 100,8953$ $J_2 = 75,1282$ $J = 1 J_1 + 4 J_2 =$ ۴۰۱/۴۰۸۱	$J_1 = 17,6294$ $J_2 = 134,2022$ $J = 0.1 J_1 + 4 J_2 =$ ۷۱۳/۷۰۲۸	$J_1 = 5,5581$ $J_2 = 197,4754$ $J = 0.1 J_1 + 4 J_2 =$ ۱۰۶۷/۸	برنامه‌ریزی ژنتیکی
%/۰.۰۱	%	%/۰.۰۰۰۵	%/۰.۰۳	درصد خطا



**شکل ۷: خطای برازندگی شاخص عملکرد سیگنال کنترلی بهینه بدست آمده از هر نسل برنامه‌ریزی ژنتیکی**

**Fig7. Fitness percentage error of the control signal obtained from each GP generation.**

تحلیل چندهدفه در مسئله کنترل بهینه مذکور، نزدیکترین نقطه بهینه

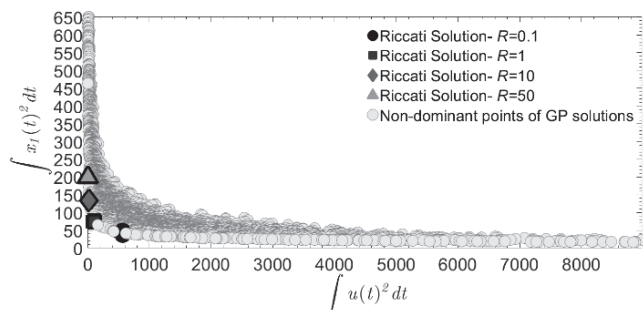
غیربرتر به نقطه سیگنال کنترلی بهینه تکهدفه با ضریب کنترلی  $R=0.1$  انتخاب می‌شود. جهت ارزیابی بیشتر، پاسخ زمانی آن‌ها در شکل ۱۰ رسم و شاخص‌های آن‌ها در جدول ۲ مقایسه می‌شوند.

همانطوری که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، برازندگی توابع هدف  $J_1$  و  $J_2$  برای نزدیکترین نقطه بهینه غیربرتر (واحد شماره ۱۴۵۴) از بین مجموع ۳۴۰۴ نقاط غیربرتر نسبت به جواب‌های بهینه‌سازی تکهدفه بهتر است. (بدون اینکه تابع هدف  $J_2$  تغییر زیادی نماید)

بدیهی است که با استفاده از تحلیل چندهدفه انجام شده و بررسی منحنی‌های پارتویی  $J_1-J_2$  و  $J_2-J_3$  علاوه بر  $J_1-J_2$  که در شکل ۹ نشان داده شده است، امکان انتخاب نقاط بهینه غیربرتر دیگری با توجه به نیاز طراحی، کاملاً وجود دارد.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله از یک نوع الگوریتم برنامه‌ریزی ژنتیکی توسعه یافته به منظور تعیین ساختار تلاش کنترلی بهینه در طراحی سیستم‌های کنترل بهینه خطی استفاده شده است. با استفاده از این الگوریتم که محدودیت‌های روش‌های معمول کنترل بهینه در دست‌یابی به جواب‌های تحلیلی مسائل کنترل بهینه را ندارد، ساختار سیگنال کنترلی به صورت مستقیم توسط ساختار درختی برنامه‌ریزی ژنتیکی، تولید شده و در یک روند بهینه‌سازی چندهدفه به گونه‌ای تعیین می‌شود که شاخص‌ها بهینه شوند. توابع هدف در بهینه‌سازی چندهدفه شامل تلاش کنترلی و مسیر متغیرهای حالت می‌باشند.



شکل ۹: نمودار پارتویی از توابع هدف  $J_1$  و  $J_2$

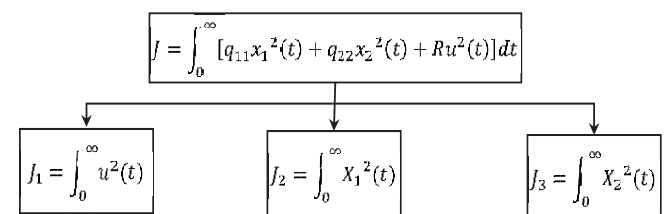
Fig 9. J1-J2 viewpoint of the Pareto front.

توابع هدف دلخواه طراح را فراهم می‌آورد. در ادامه با بررسی دو فرم ثابت با زمان و متغیر با زمان از شاخص چندهدفه این تحلیل مورد ارزیابی بیشتر قرار می‌گیرد.

در این نوع از شاخص عملکرد، ضرایب  $Q$  و  $R$  ماتریس‌های ثابت بوده و با حذف این ماتریس‌ها همچون شکل ۸ مسئله شاخص عملکرد تکهدفه به شاخص‌های چندهدفه تبدیل می‌شود. جهت ارزیابی بیشتر سیستم خطی ثابت با زمان بخش ۳-۱ به صورت چندهدفه شبیه‌سازی می‌شود.

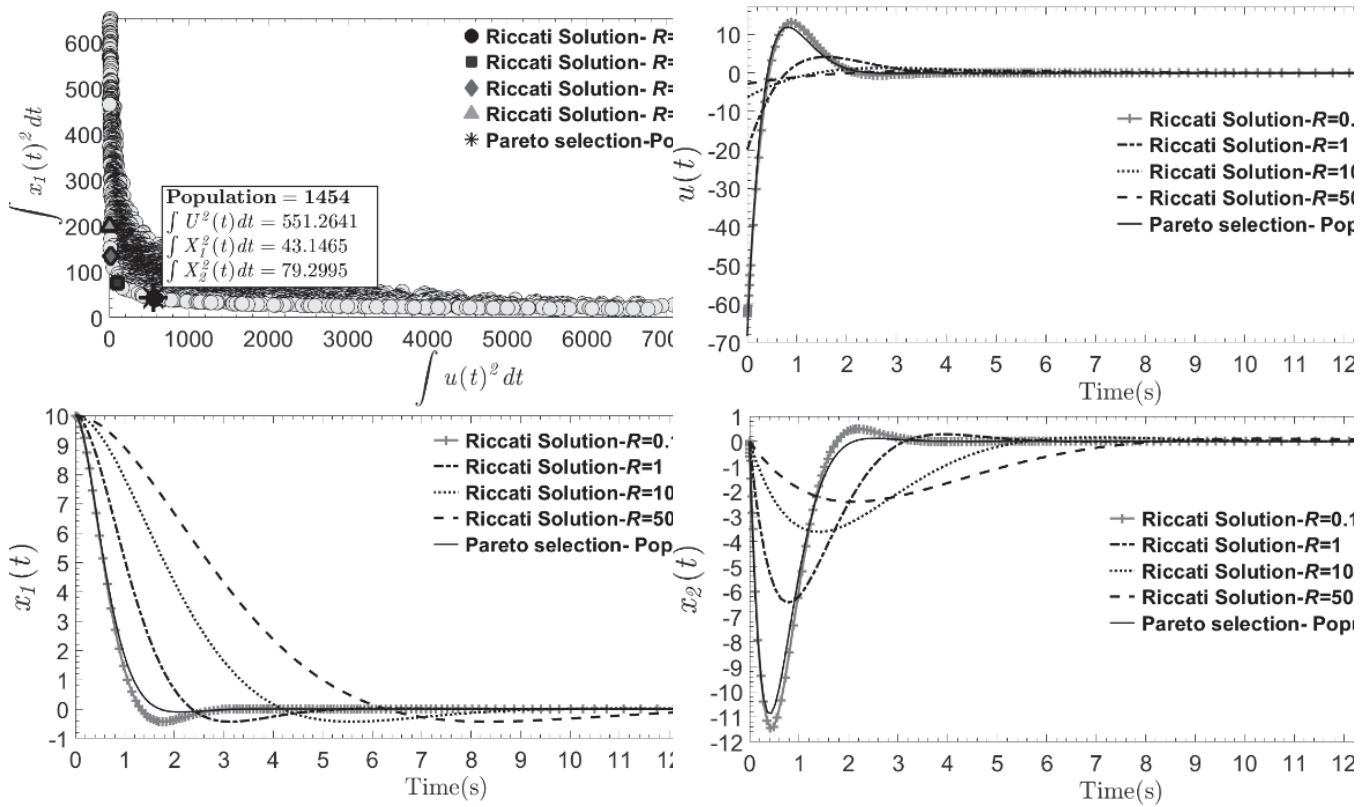
مشابه تحلیل تکهدفه، برنامه‌ریزی ژنتیکی پیشنهادی با ترمینال‌های  $F = \{-, +, \times\}$  و  $T = \{X_1, X_2 \text{ constat value}\}$  یکرندگی و تا نسل ۲۰۰ اجرا می‌شود. بعد از اجرای الگوریتم، جمعیت‌های ۴ نسل نهایی همراه با برازندگی‌شان در ماتریسی ذخیره می‌شود و جمعیت‌های آن با توجه به برازندگی‌هایشان جبهه‌بندی می‌شوند. حاصل این جبهه‌بندی شامل ۳۴۰۴ نقطه غیربرتر (جبهه اولی) می‌باشد. از آنجایی که مسئله بهینه‌سازی تکهدفه با استفاده از حل معادل ریگاتی، اولویت‌بندی بین تلاش کنترلی و مسیر متغیر حالت اولی بوده است، برازندگی مجموعه نقاط غیربرتر به همراه برازندگی‌های جواب‌های مسائل تکهدفه در صفحه پارتویی  $J_1$  و  $J_2$  شکل ۹ مقایسه و ترسیم می‌شوند.

هریک از نقاط شکل ۹ نماینده یک سیگنال کنترلی بهینه می‌باشد و از آنجا که تحلیل تکهدفه مسئله مذکور شامل توابع  $J_1$  و  $J_2$  بوده است، مطابق انتظار موقعیت این جواب‌ها در صفحه  $J_1$  و  $J_2$  در مرز پایینی نقاط بهینه غیربرتر قرار گرفته است. یکی از موارد حائز اهمیت که با بررسی نقاط بهینه غیربرتر مشاهده گردید این است که ساختار تمامی جمعیت‌های این مجموعه به ساختار معادله (۴) همگرا شده‌اند. از آنجا که رابطه (۴) جواب دقیق برای مسائل کنترلی خطی ثابت با زمان محسوب می‌شود، مصداقی از اعتبار الگوریتم پیشنهادی در این مقاله می‌باشد. حال برای بررسی از کارایی



شکل ۸: تبدیل شاخص عملکرد خطی درجه دوم ثابت با زمان به معیارهای چندهدفه

Fig 8. Converting the single-objective index into the multi-objective criteria.



شکل ۱۰: انتخاب واحد شماره ۱۴۵۴ از بین ۳۴۰۴ نقاط غیربرتر در حدود شاخص عملکرد تک‌هدفه با ضریب وزنی  $R=0.1$  و مقایسه پاسخ‌های زمانی آن‌ها

Fig 10. Selecting the sample point No. 1454 among the 3404 nondominant points around the single-objective point of  $R=0.1$  and their transient responses comparison.

Table 2. Comparison of the criteria values of the sample No. 1454 among the 3404 nondominant points with the control signal obtained from the single-objective problem of  $R=0.1$ .

جدول ۲: مقایسه شاخص‌های واحد شماره ۱۴۵۴ از بین ۳۴۰۴ نقاط غیربرتر با شاخص‌های سیگنال کنترلی بدست آمده از مسئله تک‌هدفه با ضریب وزنی  $R=0.1$

تلاش کنترلی	مسیر متغیر حالت اول	مسیر متغیر حالت دوم	سیگنال کنترلی ( $u(x)$ )	
$(J_1 = \int_0^{15} u^2(t) dt)$	$(J_2 = \int_0^{15} X_1^2(t) dt)$	$(J_3 = \int_0^{15} X_2^2(t) dt)$		
۵۵۷/۸۹۲۸	۴۲/۵۵۷۶	۸۱/۸۳۰۲	$-۴/۱۶۴۳ X_1$ $-۶/۸۱۵۴ X_2$	نقطه انتخابی
۵۶۲/۸۹۷۸	۴۲/۱۷۹۵	۸۸/۸۹۸۰	$-۳/۵۶۶ X_1$ $-۶/۳۲۴۶ X_2$	معادله ریگاتی
+۰/۰/۸۹	-۰/۰/۹۰	+۰/۷/۹۵		$PRE = \frac{(J_{Riccati} - J_{Selected})}{J_{Riccati}} \times 100$



### سیستم کلاستر

برای اجرای برنامه‌های کامپیوتری مربوط به روش‌های مدل‌سازی در این مقاله، از سیستم کلاستر آزمایشگاه پردازش موازی دانشکده فنی دانشگاه گیلان بهره گرفته شده است. این مجموعه شامل ۹ دستگاه کامپیوتر پر قدرت SMTP با مشخصه فنی زیر می‌باشد.

کارهای این مقاله جمعاً با ۳۶ عدد کارگر متلب<sup>۱</sup> که از این مجموعه گرفته شده، اجرا شده است. جدول الف ۲ مقایسه‌ای از میانگین زمان محاسبه شاخص‌های برنامه‌های کنترل بهینه این کار در حالت‌های تک‌هدفه و چندهدفه به صورت تک سیستمی و کلاستر شده ارائه شده است.

ساختار الگوریتم برنامه‌ریزی ژنتیکی در تولید جمعیت در هر نسل به گونه‌ای اصلاح شده است که افزایش دقت و همگرایی در جواب بهینه‌سازی تک‌هدفه و افزایش پراکندگی در جواب‌های بهینه‌سازی چندهدفه میسر گردید. با مقایسه جواب‌های بدست آمده از الگوریتم برنامه‌ریزی ژنتیکی پیشنهادی با جواب تحقیقات پیشین، نشان داده شد که پاسخ‌ها و تحلیل سیستم‌های کنترل بهینه از منظر طراحی بهینه، ارتقا می‌یابند.

### ضمیمه الف:



شکل الف ۱: سیستم کلاستر آزمایشگاه پردازش موازی دانشکده فنی دانشگاه گیلان

Fig. A1. Parallel laboratory cluster at University of Guilan.

1 Matlab worker

**Table A1. Configuration of the parallel laboratory cluster presenting at the engineering department of University of Guilan.**

**جدول الف ۱:** مشخصات فنی مجموعه کلاستر آزمایشگاه پردازش موازی دانشکده فنی دانشگاه گیلان

مشخصات کلاینت	- سرور سوپر میکرو ایکس ال ۱۰ - دو عدد پردازنده اینتل زئون ایکس ۵۵۶۰ فرکانس ۲/۸ گیگاهرتز - دو عدد رم دو گیگابایت پی سی ۳ - دو عدد هارد اس آ اس فوجیتسو ۱۴۶ گیگابایت ۱۰ هزار دور بر دقیقه
مشخصات گره‌ها	- سرور سوپر میکرو ایکس ال ۱۰ - دو عدد پردازنده اینتل زئون ای ۵۶۲۰ فرکانس ۲/۴ گیگاهرتز - دو عدد رم دو گیگابایت پی سی ۳ - یک عدد هارد ساتا وسترن دیجیتال ۵۰۰ گیگابایت ۵۴۰۰ دور بر دقیقه
شبکه	- شبکه گیگابیتی
سیستم عامل	- ویندوز ۱۰ پرو
نرم افزار کلاستر	- سرور پردازش گسترده متلب
نرم افزار محاسباتی	- متلب

**Table A2. Run-time evaluation of the single and multi objective criteria until the 200th generation for different computer configurations.**

**جدول الف ۲:** زمان محاسبه شاخص‌های تک‌هدفه و چندهدفه تا نسل ۲۰۰ در سیستم‌های مختلف

مسئله کنترل بهینه ۳ هدفه	مسئله کنترل بهینه تک‌هدفه	
۱۲:۰۴:۴۲	۰۲:۰۹:۴۸	سیستم خانگی <sup>i</sup>
۰۶:۰۱:۰۱	۰۱:۲۰:۱۳	سیستم دانشگاهی <sup>ii</sup>
۰۱:۳۶:۲۵	۰۰:۲۵:۲۲	یک گره از سیستم کلاستر
۰۰:۳۰:۱۶	۰۰:۱۲:۰۳	سیستم کلاستر (۳۶ عدد کارگر متلب <sup>iii</sup> )

i Intel® Core™ 2 Duo CPU E7400 (2 logical processors)

ii Intel® Core™ i7 2.80GHz ۸۶۰ (8 Logical Processors)

iii Matlab Worker

- and prediction theory, Transactions ASME J. Basic Eng., 83:95-107, (1961).
- [14] S. Bittanti, A.J. Laub, J.C. Willems, The Riccati Equation, Springer-Verlag, New York, NY, (1991).
- [15] C.-H. Hsiao, W.-J. Wang, Optimal control of linear time-varying systems via Haar wavelets, Journal of optimization theory and applications, 103(3) (1999) 641-655.
- [16] S. Radhoush, M. Samavat, M.A. Vali, Optimal control of linear time-varying systems using the Chebyshev wavelets (a comparative approach), Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal, 2(1) (2014) 691-698.
- [17] C.A. Coello, G.B. Lamont, V. Veldhuizen, Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems, Springer, (second edition) (2007).
- [18] R. Sun, Q. Hong, G. Zhu, A novel optimal control method for impulsive-correction projectile based on particle swarm optimization, Discrete Dynamics in Nature and Society, 2016 (2016).
- [19] K.-F. Man, K.-S. Tang, S. Kwong, Genetic algorithms: concepts and designs, Springer Science & Business Media, 2012.
- [20] J.R. Koza, F.H. Bennett, D. Andre, M.A. Keane, F. Dunlap, Automated synthesis of analog electrical circuits by means of genetic programming, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1(2) (1997) 109-128.
- [21] H. Assimi, A. Jamali, N. Nariman-Zadeh, Sizing and topology optimization of truss structures using genetic programming, Swarm and Evolutionary Computation, 37 (2017) 90-103.
- [22] R. A. Maher, M.J. Mohamed, An Enhanced Genetic Programming Algorithm for Optimal Controller Design, [1] D.P. Bertsekas, Dynamic programming and optimal control, Athena scientific 2005.
- [2] D. Liberzon, Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction, Princeton University Press, 2011.
- [3] F. Lewis, D. Vrabie, V. Syrmos, Optimal control, Wiley, Hoboken, NJ, 2012.
- [4] N. Wiener, Cybernetics, Wiley, New York, NY, (1948).
- [5] N. Wiener, Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, Technology Press, Cambridge, MA, (1949).
- [6] S. Dreyfus, Richard Bellman on the Birth of Dynamic Programming, Operations Research, 50 No. 1, (2002) 48-51.
- [7] R.E. Bellman, "On the Theory of Dynamic Programming, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 38 No.8, (1952) 716-719.
- [8] R.E. Bellman, Dynamic Programming, Sixth Edition, Princeton University Press, New Jersey, (1957).
- [9] V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, L.S. Pontryagin, On the theory of optimal processes, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 110:7-10, (1956).
- [10] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Wiley-Interscience, New York, NY, (1962).
- [11] R.E. Kalman, A new approach to linear filtering in prediction problems, ASME Journal of Basic Engineering, 82:34-45, (1960).
- [12] R.E. Kalman, Contributions to the theory of optimal control, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 5(2) (1960) 102-119.
- [13] R.E. Kalman, R.S. Bucy, New results in linear filtering

- [25] W. Kim, S.W. Jeon, Y. Kim, Model-based multi-objective optimal control of a VRF (variable refrigerant flow) combined system with DOAS (dedicated outdoor air system) using genetic algorithm under heating conditions, *Energy*, 107 (2016) 196-204.
- [26] Y.H. Sardahi, Multi-objective optimal design of control systems, UC Merced, 2016.
- [27] J.R. Koza, Genetic Programming II Videotape: The Next Generation, MIT Press Cambridge, MA, 1994.
- [28] D.E. Kirk, Optimal Control Theory, United Kingdom, in, Dover Publications, 2004.
- Intelligent Control and Automation, 9 (2013) 94-101.
- [23] A. Jamali, E. Khaleghi, I. Gholaminezhad, N. Nariman-zadeh, Modelling and prediction of complex non-linear processes by using Pareto multi-objective genetic programming, *International Journal of Systems Science*, 47(7) (2016) 1675-1688.
- [24] I. Gholaminezhad, A. Jamali, H. Assimi, Automated synthesis of optimal controller using multi-objective genetic programming for two-mass-spring system, in: Robotics and Mechatronics (ICRoM), 2014 Second RSI/ISM International Conference on, 2014, pp. 041-046.