Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(12) (2021) 845-848
DOI: 10.22060/mej.2019.16834.6451

Design of Three-dimensional Robust Guidance Law Using Adaptive Dynamic Programming with Input Saturation Constraint

S. Khan Kalantary, I. Izadi*, F. Shekholeslam

Department of Electrical and Computer Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

ABSTRACT: In this paper, a three-dimensional robust guidance law for an interceptor considering input saturation and first-order dynamic for the autopilot system is designed. To attain this goal, first, modeling of the system in three-dimensional spherical coordination using engagement basics has been derived and after that, the appropriate cost function for a collision of interceptor and target considering actuator constraints and in absence of target movement information has been formulated. According to robust control literature for achieving this type of guidance laws, Hamilton-Jacobi-Isaacs differential equation inequality should be solved which unfortunately does not have a closed-form solution in our problem. Therefore, to overcome this challenge, using adaptive dynamic programming theory for solving acquired Hamilton-Jacobi-Isaacs, an algorithm for designing robust guidance law has been presented. Simplification of the differential inequality and also satisfying the robustness of the controller to different unknown target movemnts, are the most important features of the proposed algorithm. Various simulations for targets with different movements and comparison of the proposed method with conventional augmented proportional navigation, show the effectiveness of the designed three-dimensional robust guidance law.

Review History:

Received: 27 Jul. 2019
Revised: 7 Sep. 2019
Accepted: 22 Sep. 2019
Available Online: 14 Oct. 2019

Keywords:

Guidance law
Interception
Robust control
Adaptive dynamic programming

1- Introduction

For interceptors, The main goal of designing guidance laws in terminal phase is to minimize the distance between the interceptor and the target. High maneuverable targets, dynamical complexities and performance limitations, and physical constraints, are severe challenges in designing a proper guidance law.

Proportional Navigation (PN) performance, as one of the most successful guidance laws for interceptors, diminishes against maneuvering targets significantly. H_∞ control, in which knowing target acceleration is not necessary, has become more popular in recent years [1-4]. Considering target acceleration as an external disturbance, the problem can be formulated as a zero-sum game, which needs a Hamilton - Jacobi - Isaacs (HJI) differential equation to be solved. Because of complexity due to nonlinear dynamics and constraints, a closed-form solution does not exist.

In this research, the goal is to design a robust controller for an interceptor, considering input saturation and first-order dynamics for the autopilot system. Unlike most of the papers which used two-dimentional model of engagement, here the persuit-evasion is modeled in the three-dimentional spherical coordinates. Considering target acceleration as an external disturbance and including input saturation constraints, a proper cost function is derived . For solving the resulted zero-sum game through its HJI differential equation, an Adaptive Dynamic Programming (ADP) method is used. The proposed algorithm will approximate the cost function of HJI inequality using neural network general function approximation ability. The assumed neural network weightigs are calculated by an offline method. Finally, a comparison is made between the proposed method and Augmented Proportional Navigation (APN) guidance law using different target maneuvers.

*Corresponding author's email: iman.izadi@cc.iut.ac.ir

2- Methodology

Pursuit-evasion geometry of target and interceptor in the spherical coordinate system is illustrated in Fig. 1. In this figure, r is the relative position along the line of sight [5]. By differentiating from r, one has:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\cos(\varphi)\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \tag{1}$$

in which θ, φ, and r are elevation, azimuth, and relative position, respectively. After differentiation from Eq. (1), we have:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2\cos^2(\varphi) = w_r - u_{Mr} \\ r\ddot{\theta}\cos\varphi + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos(\varphi) - 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\varphi) = w_\theta - u_{M\theta} \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\theta}^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) = w_\varphi - u_{M\varphi} \end{cases} \tag{2}$$

where w_r, w_θ, and w_φ are acceleration components of the target, and u_{Mr}, $u_{M\theta}$, and $u_{M\varphi}$ are acceleration components of the interceptor. To compensate for the difference between required and applied acceleration, first-order dynamics are considered for autopilot.

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

Fig. 1. Pursuit-evasion geometry in the three-dimensional spherical coordinate system

Fig. 3. Simulation results for robust guidance law and APN for a target with ramp maneuver: (a) distance between target and interceptor, (b) elevation angle rate, (c) azimuth angle rate

Fig. 2. Simulation results for robust guidance law and APN for a target with step maneuver: (a) distance between target and interceptor, (b) elevation angle rate, (c) azimuth angle rate.

Fig. 4. Simulation results for robust guidance law and APN for a target with sine maneuver: (a) distance between target and interceptor, (b) elevation angle rate, (c) azimuth angle rate

Formulation of a zero-sum game is depicted as follows:

$$\begin{aligned}&\min_u \max_d V(x,u,d):\int_0^\infty J(x,u,d)\,d\tau\\&=\int_0^\infty\left(h(x)^T h(x)+u^T u-\gamma^2 d^T d\right)dt\\&s.t.\quad\begin{cases}\dot{x}(t)=f(x)+g(x)u(t)+k(x)d(t)\\|u_r(t)|\le\beta_1\\|u_\theta(t)|\le\beta_2\\|u_\phi(t)|\le\beta_3\end{cases}\end{aligned}\tag{3}$$

in which, the disturbance is trying to increase the cost function, while the control aims at decreasing it. Using the following quasi-norm of reference [6]:

$$\|u\|_q^2=2\int_0^u\phi^{-1}(v)\mathrm{d}v=\sum_{k=1}^m 2\int_0^{u_k}\phi^{-1}(v)\mathrm{d}v\tag{4}$$

The problem is transformed to an unconstrained optimization which should be solved through the following differential equation:

$$\begin{aligned}&V_x^T f-V_x^T g\phi\left(\frac{1}{2}g^T V_x\right)+h^T h\\&+2\int_0^{-\phi\left(\frac{1}{2}g^T V_x\right)}\phi^{-1}(v)\mathrm{d}v+\frac{1}{4\gamma^2}V_x^T kk^T V_x=0\end{aligned}\tag{5}$$

Here, $V=\int_t^\infty J(x,u,d)\mathrm{d}\tau$ and $V_x=\partial V/\partial x$ are the value function and its partial derivative respectively. To solve Eq. (5), the proposed iterative algorithm of reference [7] is applied. Having an initial stabilizing controller of u_j, one solves for:

$$\begin{aligned}&\left(V_{xj}^i\right)^T\left(f(x)+g(x)u_j+kd^i\right)+h^T h\\&+2\int_0^{u_j}\phi^{-T}(v)\mathrm{d}v-\gamma^2\left\|d^i\right\|^2=0\end{aligned}\tag{6}$$

where, the worst case external disturbance is calculated as $d^{i+1} = \left(1/2\gamma^2\right) k^T V_{xj}^{i}$. After convergence of V_j^i to V_j^* in the inner loop, the external controller is updated to $u_{j+1} = -\phi\left(\frac{1}{2} g^T V_{xj}^*\right)$ in the outer loop. For computational reasons, the value function is approximated by the following neural network [21]:

$$\hat{V}_j^i(x) = \sum_{k=1}^{L} w_{j,k}^i \sigma_k(x) \tag{7}$$

where, $w_{j,k}^i$ and $\sigma_k(x)$, are weightings and activation functions respectively.

3- Results and Discussion

The comparison between initial conditions for the proposed guidance law and APN are considered for three different target accelerations: step, ramp, and sine.The obtained results are shown hereunder:

4- Conclusion

In this article, a robust guidance law of an interceptor with first-order autopilot dynamics and saturation constraints was developed. The guidance law design was formulated as a constrained zero-sum and, an ADP based method is proposed to solve the complicated nonlinear HJI equation. The most important advantage of the proposed method over the APN method is that the former does not need the target acceleration to be known. Simulation results for various target acceleration profiles, confirm the robustness of the proposed algorithm in comparision to APN.

References

[1] C.-D. Yang, H.-Y. Chen, Nonlinear H robust guidance law for homing missiles, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 21(6) (1998) 882-890.

[2] A.V. Savkin, P.N. Pathirana, F.A. Faruqi, Problem of precision missile guidance: LQR and H∞ control frameworks, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 39(3) (2003) 901-910.

[3] C.-S. Shieh, Tunable H∞ robust guidance law for homing missiles, IEE Proceedings-Control Theory and Applications, 151(1) (2004) 103-107.

[4] C.D. Yang, H.Y. Chen, Three-dimensional nonlinear H∞ guidance law, International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal, 11(2) (2001) 109-129.

[5] F.P. Adler, Missile guidance by three-dimensional proportional navigation, Journal of Applied Physics, 27(5) (1956) 500-507.

[6] M. Abu-Khalaf, F.L. Lewis, Nearly optimal control laws for nonlinear systems with saturating actuators using a neural network HJB approach, Automatica, 41(5) (2005) 779-791.

[7] M. Abu-Khalaf, F.L. Lewis, J. Huang, Policy iterations on the Hamilton–Jacobi–Isaacs equation for H∞ state feedback control with input saturation, IEEE Transactions on Automatic Control, 51(12) (2006) 1989-1995.

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۱۲، سال ۱۳۹۹، صفحات ۳۴۱۱ تا ۳۴۲۴
DOI: 10.22060/mej.2019.16834.6451

طراحی قانون هدایت مقاوم سه‌بعدی با رویکرد برنامه‌ریزی پویای تطبیقی و درنظرگرفتن اشباع ورودی

سعید خان کلانتری، ایمان ایزدی*، فرید شیخ الاسلام

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

خلاصه: در این مقاله، قانون هدایت مقاوم در فضای سه‌بعدی برای هدایت رهگیر زمین به هوا با درنظرگرفتن محدودیت اشباع در ورودی‌های سیستم به‌همراه دینامیک مرتبهٔ اول برای سیستم خودخلبان به منظور ارتقاء عملکرد سیستم‌های تدافعی ارائه می‌شود. برای دست‌یابی به این هدف، ابتدا مسئلهٔ موردمطالعه در دستگاه مختصات سه‌بعدی کروی مدل‌سازی شده و پس از آن با استفاده از اصول هندسهٔ درگیری برای دست‌یابی به برخورد رهگیر و هدف، تابع هزینهٔ مناسب با درنظرگرفتن محدودیت ورودی و عدم اطلاع از شتاب هدف، فرمول‌بندی می‌شود. پس از آن نشان داده می‌شود که حل مسئلهٔ موردنظر با استفاده از ادبیات طراحی کنترل مقاوم، نیازمند حل نامساوی معادلهٔ دیفرانسیلی همیلتون ـ ژاکوبی ـ ایزاک است که برای مسئلهٔ موردمطالعه جواب بسته ندارد. ازاین‌رو برای غلبه بر این مشکل، با استفاده از نظریهٔ برنامه‌ریزی پویای تطبیقی، یک الگوریتم حل مسئله برای طراحی قانون هدایت مقاوم پیشنهاد می‌شود که از ویژگی‌های آن، ساده‌شدن حل نامساوی دیفرانسیلی به‌همراه تضمین عملکرد مقاوم کنترل‌کننده در مقابل شتاب هدف است. شبیه‌سازی‌های انجام‌شده برای اهداف با قدرت مانورهای مختلف و مقایسهٔ عملکرد قانون پیشنهادی با روش مرسوم هدایت تناسبی افزوده‌شده، نشان‌دهندهٔ کارایی مناسب قانون هدایت مقاوم سه‌بعدی طراحی‌شده است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۸/۰۵/۰۵
بازنگری: ۱۳۹۸/۰۶/۱۶
پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۳۱
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۷/۲۱

کلمات کلیدی:
قانون هدایت
رهگیری
کنترل مقاوم
برنامه‌ریزی پویای تطبیقی

۱- مقدمه

اصول اساسی طراحی قانون هدایت برای رهگیر[1]های زمین به هوا در فاز نهایی حرکت، موضوعی شناخته‌شده در ادبیات سیستم‌های کنترل است که هدف اصلی از طراحی آن، دست‌یابی به کمترین فاصلهٔ ممکن با هدف تحت‌تعقیب می‌باشد. افزایش گریزپذیری اهداف مختلف در سالیان اخیر، در کنار پیچیدگی‌های دینامیکی و محدودیت‌های عملکردی و لزوم درنظرگرفتن وابستگی کانال‌های حرکتی رهگیر و محدودیت‌های فیزیکی به منظور افزایش چابکی رهگیر و در نتیجه آن نیاز به دقت بیشتر، چالش‌های جدی را برای طراحی قانون هدایت مناسب به‌وجود آورده است.

قانون هدایت مسیریابی تناسبی[2] ازجمله ابتدایی‌ترین و موفق‌ترین روش‌های کنترل رهگیرهای زمین به هوا است. سادگی در پیاده‌سازی، کاربرد برای انواع رهگیرهای مختلف و تاریخچهٔ مناسب موفقیت ازجمله ویژگی‌های مهم این روش است. این قانون ساده، برای معادلات موقعیت خطی‌شده با شرایط هدف فاقد مانور و رهگیر دارای سرعت ثابت و برای دستهٔ خاصی از توابع هزینه، بهینه محسوب می‌شود [۱]؛ اما علی‌رغم مزیت‌های مطرح‌شده، این قانون هدایت در مواجهه با اهداف با قدرت مانور بالا عملکرد مناسبی ندارد [۲].

سادگی در طراحی، عدم نیاز به اطلاعات فراوان پیرامون ورودی‌های اغتشاشی و نامعینی‌های سیستم ازجمله مزیت‌های طراحی کنترل‌کننده با استفاده از فیدبک ناهموار مد لغزشی[3] است [۳]. شتسل و همکاران[4] [۴] به طراحی کنترل مدل لغزشی مرتبهٔ دوم برای سیستم هدایت رهگیر زمین به هوا بر مبنای صفرشدن نرخ چرخش خط دید[5] پرداخته‌اند. اگرچه با افزایش مرتبهٔ کنترل‌کننده مقدار لرزش در سیگنال کنترلی به‌طور چشمگیری کاهش می‌یابد، اما کماکان این طراحی مهم‌ترین مشکل موجود برای کنترل مد لغزشی، یعنی پدیدهٔ لرزش[6]، را در پیاده‌سازی خواهد داشت. در واقع برای پیاده‌سازی این کنترل‌کننده نیاز به محرک‌هایی با فرکانس کاری بسیار بالا

1 Interceptor
2 Proportional navigation
3 Sliding mode
4 Shtessel et al.
5 Line of sight
6 Chattering

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: iman.izadi@cc.iut.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

خواهد بود که باتوجه به محدویت‌های حرکتی رهگیر، این مسئله امکان‌پذیر نیست. ازجمله روش‌هایی که برای کاهش مقدار لرزش در کنترل‌کننده‌های مد لغزشی در طراحی قانون هدایت استفاده شده است، تخمین کران بالای نامعینی (در این مسئله شتاب هدف) است. فادک و تالول[1] [۵] پس از طراحی کنترل‌کنندهٔ مد لغزشی، از الگوریتم کنترل زمان تأخیر برای تخمین شتاب هدف و در نتیجه کاهش محافظه‌کاری روش استفاده‌شده بهره برده‌اند. با این حال، استفاده از یک رؤیت‌گر در حلقهٔ قانون هدایت خطر کندشدن سیستم و عدم‌اصابت رهگیر به هدف را در پی خواهد داشت، زیرا در فاز نهایی تعقیب هدف، رهگیر بایستی توانایی انجام مانورهای سریع را داشته باشد. با پیشرفت مباحث تئوری مربوط به کنترل مد لغزشی، لی و همکاران[2] [۶] از رؤیت‌گر مد لغزشی مرتبهٔ بالا برای تخمین شتاب هدف استفاده کرده‌اند. همچنین از نکات مثبت مربوط به این مقاله، درنظرگرفتن دینامیک برای سیستم خودخلبان[3] به‌همراه نامعینی برای آن است. ژانگ و همکاران[4] [۷] برای به صفر رساندن نرخ زاویهٔ خط دید یا رساندن زاویهٔ خط دید به مقدار دلخواه، از کنترل مد لغزشی انتگرالی به‌همراه رؤیت‌گر مرتبهٔ بالا برای تخمین شتاب هدف استفاده کرده‌اند. دو مسئله در این مقاله مطرح است: نکتهٔ اول در این مقاله آن است که باتوجه به سطح لغزش انتخابی، لزوماً فاصلهٔ نسبی رهگیر با هدف صفر نمی‌شود، چنانکه در شبیه‌سازی‌ها این مسئله آورده نشده است. همچنین مانند لی و همکاران [۶] لزومی به تنظیم زاویهٔ خط دید دیده نمی‌شود، زیرا در فرمول‌بندی استفاده‌شده، حالت‌های حرکتی مختلفی را برای صفرشدن سطح لغزش می‌توان در نظر گرفت بدون آن‌که هدف مسئله یعنی برخورد برآورده شود. نکته‌ای که باید بدان توجه کرد این است که مقالات اشاره‌شده، همگی در فضای دو بعدی (صفحه‌ای) و با فرض عدم وابستگی کانال‌های حرکتی رهگیر به طراحی قانون هدایت پرداخته‌اند، این در حالی است که سونگ و سونگ[5] [۸] به طراحی قانون هدایت سه‌بعدی با استفاده از کنترل مد لغزشی انتگرالی و ترکیب آن با کنترل تطبیقی جهت کاهش محافظه‌کاری طراحی در تخمین کران بالای شتاب هدف پرداخته‌اند. البته باتوجه به حذف دینامیک مربوط به فاصلهٔ نسبی در این مقاله و کاهش ابعاد مسئله، بایستی صفرشدن فاصلهٔ رهگیر و هدف نیز علاوه بر نرخ زاویه‌های سمت و فراز موردبررسی قرار می‌گرفت که این‌گونه نیست.

راجاسخار و سریناتها[6] [۹] به مقایسهٔ روش استفاده از کنترل‌کننده با منطق فازی[7] با روش معروف و متداول مسیریابی تناسبی پرداخته‌اند. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که روش فازی، میزان سوخت و شتاب کمتری نسبت به روش مطرح‌شده برای اصابت به هدف نیاز دارد. چن و همکاران[8] [۱۰] پیشنهاد دادند که به‌عنوان یک مسیر میانبر برای طراحی H_∞، معادلات دینامیکی سیستم ابتدا با استفاده از روش فازی تاکاگی ـ سوگنو[9] تکه‌ای پیوسته شوند و سپس با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی، کنترل‌کنندهٔ مقاوم خطی محلی برای دست‌یابی به قانون هدایت طراحی شود. این روش مزایای کنترل‌کنندهٔ مقاوم غیرخطـــی را به‌طور محلی دارد و در ضمن، پیچیدگی طراحی آن در قیاس با روش غیرخطی کمتر است اما نیازمند طراحی ۱۸ قانون فیدبک است که از نظر محاسباتی منطقی نیست. به‌علاوه، درصورتی‌که مقدار متغیرهای فازی، خارج از بازه‌های تعیین‌شده قرار گیرند، در این حالت کنترل‌کننده عملکرد مطلوبی نخواهد داشت.

استفاده از روش کنترل مقاوم H_∞، که در آن نیازی به اندازه‌گیری شتاب جسم هدف نبوده و قانون هدایت طراحی‌شده نسبت به آن مقاوم باشد، موردتوجه محققان در این حوزه قرار گرفته است. یانگ و چن[10] [۱۱] با استفاده از کنترل‌کنندهٔ غیرخطی H_∞، به طراحی قانون هدایت در صفحهٔ دوبعدی پرداخته‌اند که مهم‌ترین ویژگی طراحی آن‌ها، حل نامساوی همیلتون ـ ژاکوبی ـ ایزاک[11] است. همچنین آن‌ها، دو قید مهم کاهش فاصله و عدم چرخش خط دید را نیز، با استفاده از توابع هزینه لحاظ کرده‌اند. ساوکین و همکاران[12] [۱۲] به طراحی کنترل‌کنندهٔ خطی برای مسئلهٔ هدایت با درنظرگرفتن زاویهٔ دلخواه برای برخورد رهگیر به هدف پرداخته‌اند. با این حال، نقطه‌ضعف بزرگ مقاله، خطی‌بودن مدل درنظرگرفته‌شده برای طراحی قانون هدایت است که باتوجه به خاصیت محلی‌بودن کنترل‌کنندهٔ طراحی‌شده در شرایط شدیداً غیرخطی سیستم، رهگیر عملکرد مناسبی را از خود نشان نخواهد داد. شیه[13] [۱۳] طراحی کنترل‌کنندهٔ مقاوم تنظیم‌پذیر برای مسئلهٔ هدایت رهگیر زمین به هوا را به‌صورت تحلیلی انجام داده است. نکتهٔ قابل‌توجه برای این مقاله، طراحی قانون کنترل بدون استفاده از نامساوی همیلتون ـ ژاکوبی ـ ایزاک است بدین‌صورت که قانون کنترل پیشنهاد شده و پس از آن شرایط بهینگی بررسی شده است، که البته این مسئله نقطه‌ضعف بزرگ مقاله نیز می‌تواند محسوب شود، زیرا راه‌حل ارائه‌شده با سعی و خطا

1 Phadke and Talole
2 Li et al.
3 Autopilot
4 Zhang et al.
5 Song and Song
6 Rajasekhar and Sreenatha

7 Fuzzy logic
8 Chen et al.
9 Takagi-Sugeno
10 Yang and Chen
11 Hamilton – Jacobi – Isaacs (HJI)
12 Savkin et al.
13 Shieh

به‌دست آمده و قابلیت ارائه برای مسئلهٔ مشابه با تغییرات کم را ندارد. یانگ و چن [۱۴] مسئله در سه‌بعد با طراحی قانون هدایت مقاوم برای آن را موردبررسی قرار داده‌اند. اگرچه این مقاله به‌دلیل حل تحلیلی مسئلهٔ نامعینی کنترل مقاوم از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است اما مسائل مهمی که خود را در پیاده‌سازی واقعی سیستم نشان می‌دهند، مانند محدودیت شتاب ورودی‌ها و دینامیک سیستم خودخلبان، در فرآیند طراحی لحاظ نشده است. از مهم‌ترین مقالاتی که از برنامه‌ریزی پویای تطبیقی[1] برای حل مسئلهٔ کنترل مقاوم غیرخطی استفاده کرده‌اند، می‌توان به کارهای سان و همکاران[2] [۱۵ و ۱۶] اشاره کرد. از مهم‌ترین نکات درنظرگرفته‌شده می‌توان به برخط‌بودن قوانین طراحی و اعمال قید اشباع ورودی اشاره کرد، اما مهم‌ترین مسئله‌ای که این پژوهش را از دو مرجع مطرح‌شده متمایز می‌کند، طراحی در فضای سه‌بعدی و درنظرگرفتن دینامیک‌های مربوط به سیستم خودخلبان است که در مراجع فوق موردبررسی قرار نگرفته‌اند. در تمامی مقالات اشاره‌شده هیچ‌گاه موارد مهم اشباع ورودی، دینامیک خودخلبان، طراحی در فضای سه‌بعدی و مقاومت نسبت به شتاب جسم هدف، در قالب یک مسئلهٔ طراحی قانون هدایت بررسی نشده‌اند که این موارد در این پژوهش درنظر گرفته شده است.

در این مقاله، هدف طراحی کنترل‌کنندهٔ مقاوم با درنظرگرفتن دینامیک خودخلبان در حضور اشباع ورودی‌ها برای سیستم هدایت رهگیر زمین به هوا است. در ابتدا، مدل‌سازی مناسب مسئله در مختصات تعقیب ـ گریز[3] برای رهگیر و هدف در فضای سه‌بعدی کروی ارائه می‌شود. پس از آن و برای برقراری شرایط برخورد، با درنظرگرفتن شتاب هدف به‌عنوان اغتشاش خارجی و قید اشباع موجود در ورودی‌های سیستم، تابع هزینهٔ مناسب استخراج می‌شود. حل مسئلهٔ بازی مجموع صفر به‌دست‌آمده، معادل حل نامساوی دیفرانسیلی همیلتون ـ ژاکوبی ـ ایزاک خواهد بود که به‌علت پیچیدگی ناشی از دینامیک‌های غیرخطی سیستم و قیود، دارای جواب بسته نخواهد بود. لذا در ادامه با استفاده از برنامه‌ریزی پویای تطبیقی، تابع مقدار موجود در نامساوی همیلتون ـ ژاکوبی ـ ایزاک با استفاده از شبکهٔ عصبی تقریب زده می‌شود. وزن‌های موجود در شبکهٔ عصبی با استفاده از یک الگوریتم برون‌خط محاسبه شده و با استفاده از آن‌ها ورودی کنترلی مناسب به‌دست خواهد آمد. برای بررسی کارایی قانون هدایت به‌دست‌آمده، عملکرد آن با قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده[4] برای رسیدن به اجسام با قدرت مانور بالا مقایسه می‌شود.

1 Adaptive dynamic programming
2 Sun et al.
3 Pursuit-evasion
4 Augmented Proportional Navigation (APN)

شکل ۱: هندسهٔ تعقیب ـ گریز در مختصات سه‌بعدی کروی

Fig. 1. Pursuit-evasion geometry in the three-dimensional spherical coordinate system

ادامهٔ مقاله بدین‌صورت تنظیم شده است: در بخش دوم فرمول‌بندی مسئلهٔ موردمطالعه در فضای سه‌بعدی کروی ارائه می‌شود. پس از آن تابع هزینهٔ مربوط به شرایط برخورد، در حضور قیود دلخواه ارائه می‌گردد. در بخش سوم به ارائهٔ راه‌حل برنامه‌ریزی پویای تطبیقی می‌پردازیم. بخش‌های چهارم و پنجم نیز به شبیه‌سازی و نتیجه‌گیری روش ارائه‌شده اختصاص داده شده‌اند.

۲- بیان مسئله

در این بخش، ابتدا به مدل‌سازی هندسهٔ تعقیب ـ گریز برای رهگیر زمین به هوا و هدف موردنظر پرداخته می‌شود و پس از آن مسئله برخورد در قالب یک مسئله کنترل مقاوم غیرخطی به‌همراه قیود اشباع در ورودی‌ها فرمول‌بندی می‌شود.

۲- ۱- مدل‌سازی

شکل ۱ هندسهٔ تعقیب ـ گریز را در فضای سه‌بعدی کروی نشان می‌دهد که در آن، منظور از $\vec{r}$ بردار موقعیت نسبی در امتداد خط دید است [۱۷]. با مشتق‌گیری از $\vec{r}$، سرعت نسبی در سه بعد به‌صورت رابطه (۱) خواهد بود

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\cos(\varphi)\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad (۱)$$

که در آن مقادیر θ، φ و r به‌ترتیب زاویه‌های سمت، فراز و فاصله نسبی هستند و در شکل ۱ نیز مشخص شده‌اند.

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۱)، شتاب‌های نسبی سیستم به‌صورت رابطه (۲) به دست خواهند آمد.

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2\cos^2(\varphi) = w_r - u_{Mr} \\ r\ddot{\theta}\cos\varphi + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos(\varphi) - 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\varphi) = w_\theta - u_{M\theta} \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\theta}^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) = w_\varphi - u_{M\varphi} \end{cases} \quad (۲)$$

که در این معادله، w_r، w_θ و w_φ مؤلفه‌های شتاب جسم هدف و u_{Mr}، $u_{M\theta}$ و $u_{M\varphi}$ مؤلفه‌های شتاب اعمالی رهگیر در راستاهای مشخص‌شده در شکل ۱ هستند. اگرچه رابطه (۲) به‌خوبی توصیف‌کنندهٔ موقعیت تعقیب ـ گریز می‌باشند، اما در پیاده‌سازی واقعی مابین فرمان شتاب اعمالی به رهگیر و شتاب واقعی آن تفاوت وجود دارد که ناشی از ایده‌آل‌نبودن سیستم خودخلبان است. در اکثر هدف‌ها، شتاب جانبی درخواستی توسط مرکز هدایت با دینامیک مشخصی که وابسته به پارامترهایی مانند ساختار هدف، شرایط حرکتی و سیستم کنترل به‌کار رفته است، به شتاب واقعی تبدیل می‌شود. در حالت کلی، این دینامیک غیرخطی و پیچیده است. لذا در اغلب موارد طراحی قانون هدایت، از دینامیک‌های مرتبهٔ اول و یا دوم برای مدل‌کردن این دینامیک استفاده می‌شود که از آن به دینامیک خودخلبان تعبیر می‌شود. بنابراین، با درنظرگرفتن دینامیک‌های مرتبهٔ اول برای سیستم خودخلبان خواهیم داشت

$$\begin{cases} \tau\dot{u}_{Mr} + u_{Mr} = u_r \\ \tau\dot{u}_{M\theta} + u_{M\theta} = u_\theta \\ \tau\dot{u}_{M\varphi} + u_{M\varphi} = u_\varphi \end{cases} \quad (۳)$$

که در این معادله u_r، u_θ و u_φ مؤلفه‌های کنترلی شتاب رهگیر، و τ ثابت زمانی سیستم خودخلبان است. با درنظرگرفتن $V_r = \dot{r}$، $V_\theta = r\dot{\theta}\cos(\varphi)$ و $V_\varphi = r\dot{\varphi}$، رابطه‌های (۲) و (۳) به‌صورت فضای حالت رابطه (۴) تبدیل خواهند شد.

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t) + k(x)d(t) \quad (۴)$$

که در آن بردار حالت $x(t)$، میدان برداری $f(x)$، بردار شتاب رهگیر $u(t)$ و بردار شتاب هدف $d(t)$ به‌صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9\right]^T = \\ &\left[r\ \theta\ \varphi\ V_r\ V_\theta\ V_\varphi\ u_{Mr}\ u_{M\theta}\ u_{M\varphi}\right]^T \\ f(x) &= \left[x_4, \frac{x_5}{x_1\cos(x_3)}, \frac{x_6}{x_1}, \frac{(x_5^2 + x_6^2)}{x_1}\right. \\ &-x_7, \frac{-x_4x_5}{x_1} + \frac{x_5x_6\tan(x_3)}{x_1} - x_8, \\ &\left.\frac{-x_4x_6}{x_1} - \frac{x_5x_5\tan(x_3)}{x_1} - x_9, \frac{-x_7}{\tau}, \frac{-x_8}{\tau}, \frac{-x_9}{\tau}\right]^T \quad (۵) \\ g(x) &= \frac{1}{\tau}\begin{bmatrix} 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} \\ I_{3\times3} \end{bmatrix}, k(x) = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} \\ I_{3\times3} \\ 0_{3\times3} \end{bmatrix} \\ u(t) &= \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\varphi \end{bmatrix}, d(t) = \begin{bmatrix} w_r \\ w_\theta \\ w_\varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

که در آن منظور از 0 و I به‌ترتیب ماتریس صفر و واحد با ابعاد مناسب است.

با استفاده از فرمول‌بندی انجام‌شده در فضای سه‌بعدی برای مسئلهٔ برخورد، می‌توان شرایط مختلف رهگیر و هدف، مانند قرارگرفتن در صفحات مختلف، قدرت مانور متفاوت هدف و تغییرات در دینامیک سیستم خودخلبان، را موردمطالعه قرار داد.

۳- فرمول‌بندی شرایط برخورد

در طراحی یک قانون هدایت مناسب:

۱- بایستی هم‌زمان کاهش فاصلهٔ بین رهگیر و هدف ($x_1 \to ۰$) و به صفر رساندن سرعت نسبی در راستای محورهای θ و φ ($x_5, x_6 \to ۰$) موردتوجه قرار گیرد. برقراری این شرایط باعث می‌شود که رهگیر و هدف در موقعیت برخورد مستقیم قرار گرفته و در فاز پایانی با فعال‌شدن حسگرهای تشخیص مجاورت، برخورد با هدف صورت گیرد.

۲- ازآنجایی‌که هدف موردنظر در این کاربرد می‌تواند قدرت مانور زیادی داشته باشد، و ممکن است مشکلاتی در اندازه‌گیری دقیق این مقدار وجود داشته باشد، قانون هدایت باید مجزا از شتاب هدف طراحی شود. بدین‌وسیله، قانون هدایت طراحی‌شده نسبت به این اغتشاش خارجی مقاوم خواهد بود.

۳- علاوه بر موارد مطرح‌شده، مسئلهٔ مهم دیگر محدودیت در دامنه و انرژی شتاب رهگیر است، زیرا با افزایش ارتفاع از سطح زمین توانایی مانوردهی رهگیر کاهش یافته و برخورد بایستی با کمترین مقدار مصرف انرژی صورت گیرد؛ بنابراین در مسئلهٔ این مقاله وجود قید اشباع ورودی

و محدودیت در انرژی مصرفی از اهمیت خاصی برای نویسندگان برخوردار بوده و لذا این موارد نیز بایستی در طراحی قانون هدایت مدنظر قرار گیرند.

همچنین از دیگر موارد مهم در این طراحی، مـقاوم‌بودن قانون هدایت به‌دست‌آمده نسبت به تغییرات دینامیکی در سیستم خودخلبان است. با درنظرگرفتن موارد مطرح‌شده، فرمول‌بندی بازی مجموع صفر به‌صورت رابطه (۶) ارائه می‌شود به‌طوری‌که تمامی خواسته‌های طراحان سیستم را برآورده کند.

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty J(x,u,d)\,d\tau = \\ &\quad \int_0^\infty \left(k_1x_1^2+k_2x_5^2+k_3x_6^2+u^Tu-\gamma^2d^Td\right)dt \\ &s.t.\ \begin{cases}\dot{x}(t)=f(x)+g(x)u(t)+k(x)d(t)\\ |u_r(t)|\le\beta_1\\ |u_\theta(t)|\le\beta_2\\ |u_\phi(t)|\le\beta_3\end{cases}\end{aligned} \tag{۶}$$

در بازی با مجموع صفر، هدف اغتشاش بیشینه‌کردن تابع هزینه و هدف کنترل، کمینه‌کردن آن است. بنابراین تابع هزینه در رابطه (۶) را می‌توان به‌صورت زیر تفسیر کرد:

بیابید ورودی کنترلی را که تابع هزینه‌ای را که تحت‌تأثیر بیشینه‌کننده‌ترین اغتشاش قرار دارد کمینه کند.

این همان عملکرد کنترل H_∞ است. همچنین، در این معادله، β_i مشخص‌کنندهٔ حد تلاش کنترلی، k_i پارامتر آزاد مشخص‌کنندهٔ وزن متغیرهای سیستم و γ پارامتر آزاد مشخص‌کنندهٔ میزان تضعیف اغتشاش خارجی (شتاب هدف) می‌باشد.

در قسمت بعدی این مقاله به حل مسئله فوق با استفاده از برنامه‌ریزی پویای تطبیقی و طراحی قانون هدایت مقاوم می‌پردازیم.

۴- طراحی قانون هدایت مقاوم

برای مسائل بهینه‌سازی دینامیکی، استفاده از تابع همیلتونین متداول‌ترین شیوه برای یافتن پاسخ بهینه است لذا برای حل مسئله بازی مجموع صفر مطرح شده، ابتدا تابع همیلتونین را به‌صورت رابطه (۷) تشکیل می‌دهیم [۱]:

$$\begin{aligned}H(x,V_x,u,d) &= V_x^T(f+gu+kd) \\ &\quad + h^Th+\|u\|^2-\gamma^2\|d\|^2\end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن $h^Th=k_1x_1^2+k_2x_5^2+k_3x_6^2$ ، $V=\int_t^\infty J(x,u,d)\,\mathrm{d}\tau$ تابع مقدار و $V_x=\partial V/\partial x$ است. برای به‌دست‌آوردن قانون کنترل بایستی نقاط ایستای تابع همیلتونین محاسبه شوند یعنی:

$$\begin{aligned}&\min_{u\in U}\max_d H(x,V_x,u,d)\\ &\max_d\min_{u\in U} H(x,V_x,u,d)\end{aligned} \tag{۸}$$

برای حل مسئلهٔ کنترل بهینهٔ کلاسیک، یک پاسخ بهینه و در واقع یک نقطهٔ کمینه برای تابع هزینه به‌دست می‌آید، اما در مسائل بازی تفاضلی که از آن‌ها تعبیر به مسئلهٔ بهینهٔ دوطرفه می‌شود، یک پاسخ بهینه برای ورودی و یک پاسخ بهینه برای اغتشاش به‌دست می‌آید و تابع هزینه در نقطهٔ پاسخ‌های بهینه به‌صورت زینی خواهد بود. در واقع رابطه (۸) شامل دو معادله جهت یافتن پاسخ‌های بهینه برای ورودی و اغتشاش است. منظور از $u\in U$ قوانین کنترلی است که در ناحیهٔ شدنی تعریف‌شده در رابطه (۶) قرار گیرند؛ اما همان‌طور که مشاهده می‌شود محاسبهٔ رابطه (۸) نیازمند حل بهینه‌سازی مقید است که برای مسئلهٔ تعریف‌شده در این مقاله (و بسیاری مسائل دیگر) قابلیت حل ندارد؛ بنابراین قدم اول در حل مسئلهٔ بازی مجموع صفر تعریف‌شده مواجهه با قیود اشباع ورودی‌ها و تبدیل مسئله به یک مسئلهٔ نامقید می‌باشد. ابوخلف و لویس[1] [۱۸]، برای دخالت‌دادن قید اشباع ورودی‌ها پیشنهاد داده‌اند که به‌جای تعریف نُرم، از شبه‌نرم رابطه (۹) استفاده شود.

$$\|u\|_q^2 = 2\int_0^u \phi^{-1}(v)\mathrm{d}v = \sum_{k=1}^m 2\int_0^{u_k}\phi^{-1}(v)\mathrm{d}v \tag{۹}$$

در این رابطه ϕ^{-1} یک تابع اکیداً افزایشی است که دراین‌صورت به‌عنوان نمونه، تابع $\phi(\cdot)$ می‌تواند $\tanh(v)$ باشد. شبه‌نرم تعریف‌شده تمامی خاصیت‌های نرم عادی را غیر از خاصیت همگنی دارا می‌باشد [۱۹]. با این تعریف، تابع همیلتونین تعریف‌شده در رابطه (۷) به‌صورت رابطه (۱۰) بازنویسی خواهد شد.

1 Abu-Khalaf and Lewis

$$H\left(x,V_x,u,d\right)=V_x^{\,T}\left(f+gu+kd\right)+h^T h+2\int_0^u \phi^{-1}(v)\mathrm{d}v-\gamma^2\|d\|^2 \quad (۱۰)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با استفاده از روش پیشنهادشده، مسئله به نسخهٔ بهینه‌سازی غیرمقید تبدیل‌شده است. با برابر قراردادن شرایط رابطه (۸) برای به‌دست‌آوردن کنترل‌کننده، بایستی معادلهٔ دیفرانسیل رابطه (۱۱) حل شود [۲۰].

$$V_x^{\,T} f-V_x^{\,T} g\phi\left(\frac{1}{2}g^T V_x\right)+h^T h+2\int_0^{-\phi\left(\frac{1}{2}g^T V_x\right)}\phi^{-1}(v)\mathrm{d}v+\frac{1}{4\gamma^2}V_x^{\,T}kk^T V_x=0 \quad (۱۱)$$

این معادله در واقع حالت تعمیم‌یافتهٔ نامساوی همیلتون ـ ژاکوبی ـ ایزاک است که برای مسئلهٔ موردبررسی در این مقاله دارای جواب بسته نیست. لذا در ادامه با استفاده از ادبیات سیستم‌های کنترل، شیوهٔ محاسبه تابع $V(x)$ با استفاده از یک الگوریتم بیان می‌شود. همچنین توجه شود که براساس خواص شبه‌نرم تعریف‌شده، قانون کنترل به‌دست‌آمده قید اشباع تعریف‌شده را برآورده می‌کند.

در مرجع [۲۰] نشان داده شده است که می‌توان رابطه (۱۱) را با استفاده از یک الگوریتم با دو حلقهٔ تکرار حل کرد، بدین‌صورت که با داشتن یک کنترل‌کنندهٔ ابتدایی پایدارکنندهٔ u_j در حلقهٔ داخلی، ابتدا رابطه (۱۲) حل شود:

$$\left(V_{xj}^i\right)^T\left(f_j+kd^i\right)+h^T h+2\int^{u_j}\phi^{-T}(v)\mathrm{d}v-\gamma^2\left\|d^i\right\|^2=0 \quad (۱۲)$$

که در آن $f_j(x)=f(x)+g(x)u_j$ است. در این حلقه، مقدار اغتشاش خارجی به‌صورت $d^{i+1}=\frac{1}{2\gamma^2}k^T V_{xj}^{\,i}$ محاسبه می‌شود. پس از آنکه در این حلقه، مقدار $V_j^{\,i}$ به مقدار نهایی $V_j^{\,*}$ رسید در حلقهٔ خارجی، کنترل‌کننده با استفاده از رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود.

$$u_{j+1}=-\phi\left(\frac{1}{2}g^T V_{xj}^*\right) \quad (۱۳)$$

این کنترل‌کننده به‌عنوان شرایط اولیه مجدداً در حلقه داخلی برای به‌دست‌آوردن اغتشاش و تابع مقدار به‌روزشده استفاده می‌شود.

اگرچه حل رابطه (۱۲) از همیلتون ـ ژاکوبی ـ ایزاک داده‌شده در رابطه (۱۱) ساده‌تر است، اما هنوز در فرآیند تکراری داده‌شده پیچیدگی در محاسبهٔ $V(x)$ وجود دارد، لذا برای کاهش این پیچیدگی از شبکهٔ عصبی برای تقریب جواب تابع مقدار رابطه (۱۲) استفاده شده است [۲۱]. در این مرجع تقریب تابع مقدار به‌صورت رابطه (۱۴) در نظر گرفته شده است.

$$\hat{V}_j^i(x)=\sum_{k=1}^{L}w_{j,k}^i\sigma_k(x)=\left(w_j^i\right)^T\sigma_L(x) \quad (۱۴)$$

که در آن:

$$\boldsymbol{\sigma_L(x)}=\left[\sigma_1(x)\quad\sigma_2(x)\quad\cdots\quad\sigma_L(x)\right]^T$$
$$\boldsymbol{w}=\left[w_1\quad w_2\quad\cdots\quad w_L\right]^T \quad (۱۵)$$

است. اگرچه می‌توان از توابع فعال‌ساز مانند $\tanh(\cdot)$ و سیگموئید[1] در شبکهٔ عصبی استفاده نمود، اما پیچیدگی حاصل‌شده در محاسبات پارامترهای شبکهٔ عصبی نویسندگان را بر آن داشته است که از توابع فعال‌ساز چندجمله‌ای بهره ببرند. اثبات شده است که وزن‌های شبکهٔ عصبی پیشنهاد شده را می‌توان با استفاده از رابطهٔ حداقل مربعات رابطه (۱۶) به دست آورد.

$$\boldsymbol{w_j^i}=-\left(\left(\boldsymbol{X_j^i}\right)^T\boldsymbol{X_j^i}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{X_j^i Y_j^i}\right) \quad (۱۶)$$

که در این رابطه برای محاسبه $\boldsymbol{X_j^i}$ و $\boldsymbol{Y_j^i}$ ابتدا بایستی p نقطهٔ مجزا در ناحیهٔ قرارگیری حالت‌های سیستم درنظر گرفت و با استفاده از آن‌ها، ماتریس‌های موردنظر را به‌صورت رابطه (۱۷) محاسبه کرد.

$$\boldsymbol{X_j^i}=\left[\nabla\sigma_L F_j^i\big|_{x_1}\quad\nabla\sigma_L F_j^i\big|_{x_2}\quad\ldots\quad\nabla\sigma_L F_j^i\big|_{x_p}\right]^T$$
$$\boldsymbol{Y_j^i}=\left[H_j^i\big|_{x_1}\quad H_j^i\big|_{x_2}\quad\ldots\quad H_j^i\big|_{x_p}\right]^T \quad (۱۷)$$

نماد ∇ بیانگر گرادیان و به‌معنای مشتق‌گیری برداری و نماد $F\big|_{x_i}$ بیانگر محاسبه مقدار تابع F در نقطهٔ x_i است. همچنین در این معادله،

1 Sigmoid

داریم:

$$H_j^i = h^T h + 2\int_0^{u_j} \phi^{-1}(v)\mathrm{d}v - \gamma^2 \left\| d^i \right\|^2 \qquad (۱۸)$$

شکل ۲ الگوریتم مطرح‌شده را به‌صورت کلی نشان می‌دهد [۲۱]. در این الگوریتم، ابتدا شرایط اولیهٔ مناسب اعم از توابع هزینه، نرون‌های شبکهٔ عصبی، ناحیهٔ تقریب به‌همراه قانون کنترل پایدار مجانبی اولیه و تعداد تکرار حلقهٔ داخلی و خارجی انتخاب می‌شوند. پس از آن، با استفاده از رابطه (۱۶) وزن‌های شبکهٔ عصبی و اغتشاش مربوط به آن به‌دست می‌آیند. این حلقه به‌میزان I_1 بار تکرار شده و پس از این تعداد تکرار، قانون کنترل به‌روزرسانی می‌شود، بدین معنا که قانون کنترل به‌دست‌آمده به‌عنوان شرایط اولیهٔ سیستم درنظر گرفته می‌شود. این فرآیند به تعداد I_2 بار تکرار می‌شود و پس از آن، با کاهش مقدار تضعیف در کنترل‌کنندهٔ مقاوم و استفاده از آخرین کنترل‌کنندهٔ به‌دست‌آمده به‌عنوان شرایط اولیهٔ جدید، الگوریتم تکرار می‌شود. همچنین الگوریتم مطرح‌شده، دارای اثبات پایداری با استفاده از نظریهٔ پایداری لیاپانوف است که در اینجا از تکرار آن خودداری می‌شود.

۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش از مقاله، به شبیه‌سازی قانون هدایت مقاوم به‌دست‌آمده در مواجهه با اهداف با قدرت مانورهای مختلف می‌پردازیم. الگوریتم مطرح‌شده برای اجرا نیازمند انتخاب شرایط اولیهٔ متناسب با مسئلهٔ تعریف‌شده می‌باشد. در این مسئله، این شرایط به‌همراه مقدار پارامترهای مربوط به درجات آزادی تعریف‌شده در رابطه (۶)، در رابطه (۱۹) داده شده‌اند.

$$u_0 = \begin{bmatrix} 50\tanh\left(0.01x_4\right) \\ 50\tanh\left(2x_5\right) \\ 50\tanh\left(3x_6\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} |x_1| \le 6000 \\ |x_i| \le \pi \quad i=2,3 \\ |x_i| \le 500 \quad i=4,5,6 \\ |x_i| \le 200 \quad i=7,8,9 \end{cases} , \quad \begin{cases} k_1 = 100 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = 1 \end{cases} \qquad (۱۹)$$

$$\beta_i = 200 \quad i=1,2,3 \quad , \quad \tau = 0.1$$

برای بخش تکرارِ سیاست[1]، از شبکهٔ عصبی با توابع فعال‌ساز چندجمله‌ای از درجهٔ دو و سه استفاده می‌شود [۲۰]. تعداد جملات در این حالت $L = ۷۴$ بوده و اهداف مطرح‌شده برای مسئله را برآورده می‌کند. همچنین مقدار ابتدایی تضعیف درنظرگرفته‌شده برای حل همیلتون ـ ژاکوبی ـ ایزاک، $\gamma = ۱۰$ است.

$$\begin{aligned}\sigma_L(x) = [&x_1x_7, x_2x_7, x_3x_7, x_4x_7, x_5x_7, x_6x_7, \\ &x_7^2, x_8x_7, x_9x_7, x_1x_7^2, x_2x_7^2, x_3x_7^2, x_4x_7^2, \\ &x_5x_7^2, x_6x_7^2, x_7^3, x_8x_7^2, x_9x_7^2, x_1^2x_7, x_2^2x_7, \\ &x_3^2x_7, x_4^2x_7, x_5^2x_7, x_6^2x_7, x_8^2x_7, x_9^2x_7, \\ &x_1x_8, x_2x_8, x_3x_8, x_4x_8, x_5x_8, x_6x_8, \\ &x_8^2, x_9x_8, x_1x_8^2, x_2x_8^2, x_3x_8^2, x_4x_8^2, x_5x_8^2, \\ &x_6x_8^2, x_7x_8^2, x_8^3, x_9x_8^2, x_1^2x_8, x_2^2x_8, x_3^2x_8, \\ &x_4^2x_8, x_5^2x_8, x_6^2x_8, x_7^2x_8, x_9^2x_8, x_2x_9, \\ &x_3x_9, x_4x_9, x_5x_9, x_6x_9, x_9^2, x_1x_9^2, x_2x_9^2, \\ &x_3x_9^2, x_4x_9^2, x_5x_9^2, x_6x_9^2, x_9^3, x_8x_9^2, \\ &x_7x_9^2, x_1^2x_9, x_2^2x_9, x_3^2x_9, x_4^2x_9, \\ &x_5^2x_9, x_6^2x_9, x_7^2x_9, x_8^2x_9]\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

با فرض‌های درنظرگرفته‌شده، الگوریتم مطرح‌شده در شکل ۲ به‌خوبی اجرا گردید و مقدار $\gamma = ۰/۱$ در پایان اجرای الگوریتم به‌دست آمد. وزن‌های شبکهٔ عصبی به‌صورت رابطه (۲۱) هستند.

$$\begin{aligned} w = 40[&-1.14, 45.04, 22.67, -4.39, 1.89, \\ &-0.21, 4.25, -1.77, 1.42, -0.001, -0.16, \\ &0.19, 0.01, 0.007, -0.008, 0.03, -0.025, \\ &-0.03, 4.1\times10^{-4}, -16.41, 28.5, 1.47\times10^{-4}, \\ &-6.2\times10^{-4}, 1.28\times10^{-4}, 0.004, 0.013, -1.08, \\ &-185.66, 82.76, -1.08, 4.37\times10^{-4}, 1.74, -0.88, \\ &-1.29, -3.01\times10^{-4}, -0.07, -0.026, 4.75\times10^{-4}, \\ &1.78\times10^{-4}, 9.27\times10^{-4}, -0.004, -0.001, -0.001, \\ &1.57\times10^{-4}, 17.64, -41.73, 9.71\times10^{-4}, 0.001, 2.73\times10^{-4}, \\ &0.02, 0.018, 319.93, -52.82, 3.23, -0.62, -0.1968, 2.05, \\ &0.002, -0.52, 0.28, 0.007, 0.003, -0.009, -0.08, \\ &-0.018, 0.027, -9.4\times10^{-4}, -18.1, 69.7, \\ &-2.08\times10^{-4}, 0.001, -4.95\times10^{-4}, -0.03, 0.001]^T \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

1 Policy iteration

شکل ۲: الگوریتم طراحی کنترل مقاوم مقید با استفاده از برنامه‌ریزی پویای تطبیقی

Fig. 2. Design algorithm of robust constraint control using adaptive dynamic programming

لذا کنترل‌کننده با استفاده از وزن‌های به‌دست‌آمدهٔ رابطه (۲۱) به‌صورت رابطه (۲۲) خواهد بود.

$$u=-\beta\tanh\left(\frac{1}{2\beta}g^T(x)\nabla\sigma_L^T w\right) \tag{۲۲}$$

سه دسته شبیه‌سازی برحسب نوع شتاب جسم هدف (اغتشاش خارجی) در فضای سه‌بعدی انجام شده است. در تمامی موارد، شرایط ابتدایی به‌گونه‌ای درنظر گرفته شده است که رهگیر و هدف در یک صفحه قرار نگرفته باشند. این ملاحظات در رابطه‌های (۲۳) تا (۲۵) آورده شده‌اند [۲۲].

۱) هدف با شتاب پله

$$\begin{aligned}&\left[r(0),\theta(0),\varphi(0),V_r(0),V_\theta(0),V_\varphi(0)\right]^T=\\&\left[4\text{km},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},-500\frac{\text{m}}{\text{s}},200\frac{\text{m}}{\text{s}},300\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]^T\\&w_r=\lambda_T\vec{e}_r\\&w_\theta=\lambda_T\frac{-\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}\cos^2(\varphi)}}\vec{e}_\theta\\&w_\varphi=\lambda_T\frac{\dot{\theta}\cos(\varphi)}{\sqrt{\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}\cos^2(\varphi)}}\vec{e}_\varphi\end{aligned} \tag{۲۳}$$

۲) هدف با شتاب شیب

$$\begin{aligned}&\left[r(0),\theta(0),\varphi(0),V_r(0),V_\theta(0),V_\varphi(0)\right]^T=\\&\left[5\text{km},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},-500\frac{\text{m}}{\text{s}},300\frac{\text{m}}{\text{s}},300\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]^T\\&w_r=\lambda_T t\vec{e}_r\\&w_\theta=\lambda_T t\frac{-\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}\cos^2(\varphi)}}\vec{e}_\theta\\&w_\varphi=\lambda_T t\frac{\dot{\theta}\cos(\varphi)}{\sqrt{\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}\cos^2(\varphi)}}\vec{e}_\varphi\end{aligned} \tag{۲۴}$$

۳)هدف با شتاب سینوسی

$$\begin{aligned}&\left[6\text{km},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},-500\frac{\text{m}}{\text{s}},200\frac{\text{m}}{\text{s}},300\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]^T\\&w_r=\lambda_T\sin(\omega t)\vec{e}_r\\&w_\theta=\lambda_T\sin(\omega t)\frac{-\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}\cos^2\varphi}}\vec{e}_\theta\\&w_\varphi=\lambda_T\sin(\omega t)\frac{\dot{\theta}\cos\varphi}{\sqrt{\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}\cos^2\varphi}}\vec{e}_\varphi\end{aligned} \tag{۲۵}$$

که در این معادلات، $\omega=۱۰\ \text{rad/s}$ و λ یک عدد تصادفی در بازهٔ $(۰,۸g]$ است که برای شتاب پله و شیب با علامت مثبت (هدف دورشونده از رهگیر) و برای شتاب سینوسی با علامت منفی (هدف نزدیک‌شونده به رهگیر) درنظر گرفته می‌شود. همچنین لازم به ذکر است که هدف انتخابی در دستهٔ اهداف با قدرت مانور بالا قرار می‌گیرد که برای دست‌یابی به آن‌ها باید سرعت رهگیر از سرعت هدف بیشتر باشد. در خصوص اهداف با سرعت بالا ، باتوجه به محدودیت حرکتی رهگیر دفاعی بایستی از تنظیم زاویهٔ برخورد و یا استفاده از سیستم‌های چندعامله استفاده کرد.

عملکرد روش پیشنهادی با قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده تحت شرایط یکسان هدف برای هر دو قانون هدایت (طراحی‌شده و هدایت تناسبی افزوده‌شده) مقایسه شده و نتایج آن نیز ارائه می‌گردد. قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده به‌صورت زیر است [۱]:

$$\begin{aligned}u_\theta&=-N\dot{r}\dot{\theta}+w_\theta\\u_\varphi&=-N\dot{r}\dot{\varphi}+w_\varphi\end{aligned} \tag{۲۶}$$

که در آن، پارامتر N برابر با ۴ درنظر گرفته می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده مؤلفه‌های شتاب هدف نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. ازاین‌رو بایستی این مقادیر اندازه‌گیری شوند که این مسئله برخلاف قانون طراحی‌شده در روش پیشنهادی در این مقاله است که در آن مقاومت قانون هدایت نسبت به مقدار شتاب هدف تضمین می‌گردد. جهت بررسی مقاومت قانون پیشنهادی به شتاب جسم، فرض می‌شود که در تمام حالت‌های تحت بررسی، اندازه‌گیری هرکدام از مؤلفه‌های شتاب هدف با نایقینی به شکل نویز سفید با $\mu=۰$ و $\sigma=۵$ همراه است. همچنین کلیهٔ شرایط شبیه‌سازی برای هر دو قانون هدایت یکسان درنظر گرفته شده‌اند و زمان لازم برای برخورد به‌همراه کمترین فاصله با هدف در جدول ۱ آورده شده‌اند.

Table 1. Impact time for designed guidance law and APN for different target maneuver

جدول ۱: زمان برخورد برحسب ثانیه برای قانون هدایت طراحی شده و هدایت تناسبی افزوده‌شده با تغییر شتاب هدف

نوع شتاب هدف	روش پیشنهادی		قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده	
	کمترین فاصله (متر)	زمان برخورد (ثانیه)	کمترین فاصله (متر)	زمان برخورد (ثانیه)
پله	۰٫۲۵	۶٫۳۰	۰٫۱	۸٫۸۱
شیب	۰٫۳	۷٫۷۸	۷۰۰	عدم برخورد
سینوس	۰٫۱	۶٫۱۱	۱٫۳	۶٫۸۴

شکل ۳: نتایج شبیه‌سازی قانون هدایت مقاوم و قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده برای هدف دارای شتاب پله: (a) فاصلهٔ رهگیر و هدف، (b) سرعت پیچش زاویهٔ θ (c)، سرعت پیچش زاویهٔ φ و (d)، (e)، (f) تلاش کنترلی در راستای محورهای r,θ,φ

Fig. 3. Simulation results for robust guidance law and APN for a target with step maneuver: (a) distance between target and interceptor, (b) elevation angle rate, (c) azimuth angle rate, (d), (e), and (f) control efforts along r, θ, and φ axes

شکل ۳ نتایج شبیه‌سازی قانون هدایت مقاوم طراحی‌شده و هدایت تناسبی افزوده‌شده را برای هدف با شتاب پله نشـان می‌دهد. در این نسخه از شبیه‌سازی، فرض می‌شود که شتاب هدف با ثابت زمانی ۰٫۳ ثانیه در دسترس الگوریتم هدایت تناسبی افزوده‌شده قرار می‌گیرد. همان‌طور که از شکل ۳ مشاهده می‌شود، کنترل‌کنندهٔ طراحی‌شده به‌خوبی توانسته است برخورد را با به صفر رساندن فاصله و نرخ پیچش زاویه‌های θ و φ محقق سازد. همچنین این مسئله با قرارگرفتن مقدار قانون کنترل در محدودهٔ مجـاز تعیین‌شده محقق شده است. از سوی دیگر قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده عملکرد ضعیف‌تری نسبت به روش پیشنهادی دارد، زیرا در ثانیهٔ ۶٫۳ که تحت هدایت قانون طراحی‌شده رهگیر به هدف برخورد کرده است، فاصلهٔ نسبی رهگیر و هدف برای هدایت تناسبی افزوده‌شده، ۱۱۵۰ متر است و برخورد در ثانیهٔ ۸٫۸ رخ می‌دهد که در شرایط حساس برخورد، این زمان طولانی‌تر مورد رضایت نمی‌باشد.

در این قسمت به شبیه‌سازی قانون هدایت طراحی‌شده و قانون هدایت

شکل ۴: نتایج شبیه‌سازی قانون هدایت مقاوم و قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده برای هدف دارای شتاب شیب: (a) فاصلهٔ رهگیر و هدف، (b) سرعت پیچش زاویهٔ θ (c) سرعت پیچش زاویهٔ φ و (d)، (e)، (f) تلاش کنترلی در راستای محورهای r, θ, φ

Fig. 4. Simulation results for robust guidance law and APN for a target with ramp maneuver: (a) distance between target and interceptor, (b) elevation angle rate, (c) azimuth angle rate, (d), (e), and (f) control efforts along r, θ, and φ axes

تناسبی افزوده‌شده در مقابل اهداف با شتاب شیب می‌پردازیم. از جمله مشکلات موجود در اندازه‌گیری شتاب هدف وجود قطعی سیگنال به‌دلیل ازکارافتادن سنسور و یا رؤیت‌گر شتاب است. برای اعمال این مشکل، در این قسمت فرض می‌شود که در ۸ ثانیهٔ ابتدایی پرواز رهگیر، هیچ‌گونه اطلاعاتی پیرامون شتاب به الگوریتم‌های هدایت نمی‌رسد. نتایج شبیه‌سازی قانون هدایت رهگیر طراحی‌شده و قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده برای این شبیه‌سازی در شکل ۴ نشان داده شده است. همان‌طور که شکل‌های ۴(a) تا ۴(c) نشان می‌دهد، قانون هدایت طراحی‌شده به‌خوبی توانسته است خواستهٔ مسئله، یعنی برخورد موفقیت‌آمیز با هدف، را در ثانیهٔ ۷٫۷۸ به سرانجام برساند، این در حالی است که به‌دلیل قدرت بالای مانور هدف، قانون هدایت هدایت تناسبی افزوده‌شده اگرچه توانسته است پیچش زوایای سمت V_θ و فراز V_φ را به صفر برساند، اما این قانون در نهایت نتواسته برخورد موفقیت‌آمیز با هدف را برآورده کند.

در این قسمت به بررسی عملکرد قانون هدایت طراحی شده برای اهداف دارای شتاب سینوسی که از جمله اهداف با دست‌یابی مشکل محسوب می‌شوند، می‌پردازیم. همچنین فرض می‌گردد که شتاب اندازه‌گیری‌شده هدف دارای بایاس ۳۰- و تأخیر ۰٫۳ ثانیه نیز می‌باشد که این مسئله با واقعیت‌های موجود در مورد اندازه‌گیری شتاب هدف همخوانی دارد. شکل ۵ نتایج شبیه‌سازی قانون هدایت طراحی شده و هدایت تناسبی افزوده‌شده را برای هدفی با این نوع شتاب نشـان می‌دهد. همان‌طور که از شکل‌های ۵(a) تا ۵(c) می‌توان مشاهده کرد قانون هدایت طراحی شده با موفقیت توانسته است برخورد رهگیر با هدف را در کمتر از ۶٫۱۱ ثانیه محقق سازد؛ اما از سوی دیگر قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده ، در این حالت عملکرد مناسبی نداشته و نمی‌تواند فاصلهٔ نسبی بین جسم و هدف را به کمتر از یک متر برساند. در خصوص پیچش زاویه‌های سمت V_θ و فراز V_φ نیز می‌توان گفت که نتیجهٔ حاصل از شبیه‌سازی هدایت تناسبی افزوده‌شده، دینامیک کندتری در قیاس با روش پیشنهادی دارد و در لحظهٔ تغییر علامت فاصلهٔ نسبی مقدار غیرصفر دارند. بررسی مقدار تلاش کنترلی لازم برای حالت‌های شبیه‌سازی صورت‌گرفته نشان می‌دهد که نوع شتاب هدف به‌صورت مستقیم در خروجی کنترلی قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده ظاهر می‌شود. ازاین‌رو وجود نویز سفید در اندازه‌گیری، باعث اعمال آن به محرک‌های رهگیر نیز خواهد شد که قانون کنترلی طراحی‌شده از این جهت نیز دارای برتری قابل‌توجهی است؛ زیرا نسبت به نوع شتاب هدف و وجود نویز اندازه‌گیری در آن مقاوم است.

شکل ۵: نتایج شبیه‌سازی قانون هدایت مقاوم و قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده برای هدف دارای شتاب سینوسی: (a) فاصلهٔ رهگیر و هدف، (b) سرعت پیچش زاویهٔ θ، (c) سرعت پیچش زاویهٔ φ و (d)، (e)، (f) تلاش کنترلی در راستای محورهای r,θ,φ

Fig. 5. Simulation results for robust guidance law and APN for a target with sine maneuver: (a) distance between target and interceptor, (b) elevation angle rate, (c) azimuth angle rate, (d), (e), and (f) control efforts along r, θ, and φ axes

در خصوص نقطه‌ضعف قانون هدایت مقاوم پیشنهادی، می‌توان به نوسانات شدید آن در هر سه حالت شبیه‌سازی اشاره کرد که دلیل آن هم جبران نبود اطلاعات از شتاب هدف می‌باشد. لازم به ذکر است که با به‌کارگیری محرک‌های با پهنای باند مناسب می‌توان سیگنال طراحی‌شده را در عمل نیز پیاده‌سازی کرد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از برنامه‌ریزی پویای تطبیقی به طراحی قانون هدایت مقاوم برای رهگیر زمین به هوا با درنظرگرفتن دینامیک مرتبهٔ اول برای سیستم خودخلبان و همچنین قید اشباع ورودی‌ها در فضای سه‌بعدی کروی پرداخته شد. بدین منظور، پس از مدل‌سازی مسئله موردمطالعه در فضای سه‌بعدی کروی به‌منظور برقراری شرایط برخورد، طراحی قانون هدایت به‌صورت یک بازی مجموع صفر برای دستیابی به برخورد رهگیر به هدف فرمول‌بندی گردید. در ادامه، با استفاده از نظریهٔ برنامه‌ریزی پویای تطبیقی، الگوریتم محاسبهٔ قانون کنترل مقاوم برای هدایت رهگیر و حل مسئلهٔ نامساوی دیفرانسیلی همیلتون ـ ژاکوبی ـ ایزاک ارائه شد. مهم‌ترین مزیت قانون هدایت طراحی‌شده نسبت به قانون هدایت تناسبی افزوده‌شده، عدم نیاز به اندازه‌گیری شتاب هدف و در نتیجهٔ آن، مقاومت نسبت به آن بوده که این موارد در شبیه‌سازی‌های صورت‌گرفته به خوبی نشان داده شده‌اند.

۷- فهرست علائم

علائم انگلیسی

R^n	فضای برداری n بعدی
r	فاصله نسبی رهگیر و هدف در راستای خط دید
u_φ,u_θ,u_r	شتاب اعمالی به رهگیر در راستای r، θ و φ
V_φ,V_θ,V_r	سرعت نسبی در راستای r، θ و φ
w_φ,w_θ,w_r	شتاب هدف در راستای r، θ و φ
e_φ,e_θ,e_r	بردارهای یکهٔ دستگاه مختصات کروی
$u_{M\varphi},u_{M\theta},u_{Mr}$	مؤلفه‌های شتاب اعمالی رهگیر در دستگاه کروی
$x(t)$	بردار حالت
$f(x)$	میدان برداری
$u(t)$	بردار شتاب هدف
$d(t)$	بردار اغتشاش
V	تابع مقدار
V_x	مشتق تابع مقدار
k_3,k_2,k_1	پارامترهای وزن‌دهی

H	همیلتونین
w	وزن در شبکهٔ عصبی
p	تعداد مش
I_2, I_1	تعداد تکرارهای سیاست
u_0	شرایط اولیهٔ شبیه‌سازی
N	نسبت ناوبری مؤثر
L	تعداد لایه‌های پنهان شبکهٔ عصبی

علائم یونانی

γ	مقدار تضعیف اغتشاش خارجی
τ	ثابت زمانی خودخلبان
θ	زاویهٔ سمت خط دید
φ	زاویهٔ فراز خط دید
$\beta_3, \beta_2, \beta_1$	حد تلاش کنترلی
$\phi(\cdot)$	تابع استفاده‌شده در تعریف شبه‌نرم
σ_i	تابع فعالساز شبکهٔ عصبی
Ω	ناحیهٔ تقریب شبکهٔ عصبی
λ	عدد تصادفی برای شتاب هدف
μ	میانگین نویز سفید
σ	انحراف معیار نویز سفید

منابع

[1] A.E. Bryson, Applied optimal control: optimization, estimation and control, Routledge, 2018.

[2] R. Yanushevsky, W. Boord, New approach to guidance law design, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 28(1) (2005) 162-166.

[3] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, A. Levant, Sliding mode control and observation, Springer, 2014.

[4] Y.B. Shtessel, I.A. Shkolnikov, A. Levant, Guidance and control of missile interceptor using second-order sliding modes, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 45(1) (2009) 110-124.

[5] S. Phadke, S.E. Talole, Sliding mode and inertial delay control based missile guidance, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 48(4) (2012) 3331-3346.

[6] G.L. Li, H. Yan, H.-B. Ji, A guidance law with finite time convergence considering autopilot dynamics and uncertainties, International Journal of Control, Automation and Systems, 12(5) (2014) 1011-1017.

[7] Z. Zhang, S. Li, S. Luo, Terminal guidance laws of missile based on ISMC and NDOB with impact angle constraint, Aerospace Science and Technology, 31(1) (2013) 30-41.

[8] J. Song, S. Song, Three-dimensional guidance law based on adaptive integral sliding mode control, Chinese Journal of Aeronautics, 29(1) (2016) 202-214.

[9] V. Rajasekhar, A. Sreenatha, Fuzzy logic implementation of proportional navigation guidance, Acta Astronautica, 46(1) (2000) 17-24.

[10] B.S. Chen, Y.Y. Chen, C.-L. Lin, Nonlinear fuzzy H∞ guidance law with saturation of actuators against maneuvering targets, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 10(6) (2002) 769-779.

[11] C.D. Yang, H.Y. Chen, Nonlinear H robust guidance law for homing missiles, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 21(6) (1998) 882-890.

[12] A.V. Savkin, P.N. Pathirana, F.A. Faruqi, Problem of precision missile guidance: LQR and H∞ control frameworks, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 39(3) (2003) 901-910.

[13] C.S. Shieh, Tunable H∞ robust guidance law for homing missiles, IEE Proceedings-Control Theory and Applications, 151(1) (2004) 103-107.

[14] C.D. Yang, H.Y. Chen, Three-dimensional nonlinear H∞ guidance law, International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal, 11(2) (2001) 109-129.

[15] J. Sun, C. Liu, Finite-horizon differential games for

missile–target interception system using adaptive dynamic programming with input constraints, International Journal of Systems Science, 49(2) (2018) 264-283.

[16] J. Sun, C. Liu, Q. Ye, Robust differential game guidance laws design for uncertain interceptor-target engagement via adaptive dynamic programming, International Journal of Control, 90(5) (2017) 990-1004.

[17] F.P. Adler, Missile guidance by three-dimensional proportional navigation, Journal of Applied Physics, 27(5) (1956) 500-507.

[18] M. Abu-Khalaf, F.L. Lewis, Nearly optimal control laws for nonlinear systems with saturating actuators using a neural network HJB approach, Automatica, 41(5) (2005) 779-791.

[19] T.M. Apostol, Mathematical analysis, Addison-Wesley Reading, 1964.

[20] M. Abu-Khalaf, F.L. Lewis, J. Huang, Policy iterations on the Hamilton–Jacobi–Isaacs equation for H∞ state feedback control with input saturation, IEEE Transactions on Automatic Control, 51(12) (2006) 1989-1995.

[21] M. Abu-Khalaf, F.L. Lewis, J. Huang, Neurodynamic programming and zero-sum games for constrained control systems, IEEE Transactions on Neural Networks, 19(7) (2008) 1243-1252.

[22] C.F. Lin, Modern navigation, guidance, and control processing, Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.