

# Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(12) (2021) 849-852 DOI: 10.22060/mej.2019.16274.6319

# Optimal Vibration Reduction of the Flexible Shaft-Disk-Blades System Using a Set of Nonlinear Energy Sinks

J. Aghayari<sup>1</sup>, P. Safarpour<sup>1\*</sup>, A. Rahi<sup>1</sup>, S. Bab<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Faculty of Mechanical & Energy Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.
 <sup>2</sup> Department of Mechanical Rotary Equipment, Niroo Research Institute, Tehran, Iran.

**ABSTRACT:** In this paper, the application of nonlinear energy sinks for indirect vibration reduction of the blades in a flexible shaft-disk-blades system of a real steam turbine is conducted. 37 packets of seven-connected blades are mounted on the disk. The cyclic symmetric finite element analysis is employed to perform frequency analysis of this system. For the 11<sup>th</sup> mode, which is a combination of the second bending mode of shaft and the third bending mode of disk-blades, a two degrees of freedom reduced order model is identified. Nonlinear energy sinks with a small mass, an essential nonlinear stiffness and a linear damping are installed on the reduced order model in the anti-node position of the disk. The Runge-Kutta method is used to solve the nonlinear equations of motion numerically. Optimum stiffness and damping of the absorbers are determined to minimize the vibration amplitude of the blades. The results show that the occurrence of strongly modulated response around the resonance leads to the desired vibration reduction of the blades. If the absorbers have large nonlinear stiffness or low damping, a saddle-node bifurcation and a wide island is appeared in the negative detuning frequencies, and the blade could experience large amplitude periodic oscillation.

### **Review History:**

Received: 5 May. 2019 Revised: 28 Jun. 2019 Accepted: 22 Sep. 2019 Available Online: 16 Oct. 2019

### **Keywords:**

Flexible shaft-disk-blades Nonlinear energy sink Cyclic symmetry Frequency diagram Strongly modulated response

### 1. Introduction

Recently, modern turbines are designed close to their critical operating points with lower stability margin. Therefore, accurate dynamic analysis and using advanced vibration control systems are mandatory for them. Dynamic analysis of the shaft-disk-blades system of the turbine could be conducted using only a sector with fewer Degree Of Freedoms (DOFs) instead of the entire model [1,2]. The real resonances of bladed disk system are determined through Singh's Advanced Frequency Evaluation (SAFE) diagram. The major excitation on the blades is usually vane passing flow. The 2<sup>nd</sup> -6<sup>th</sup> Nodal Diameters (NDs) are more important in steam turbines and the occurrence of resonance in these NDs should be considered [3]. In-plane motion of a row of blades, at the first ND, is coupled by the bending and transversal modes of the rotor and No coupling exists with the torsional modes [4]. Three types of coupled motion could be seen in the system including inter-blade, shaft-disk-blade, and disk-blade [5]. The vibration amplitude of blades could be damped by adding Nonlinear Energy Sink (NES) into blades [6], on the disk of the Jeffcott rotor [7], or on bearings [8]. Because of the lack of own natural frequency of the NES, unlike the linear absorbers, two peaks is not appeared around resonance point of the system, and hence, NES has more effective performance.

Application of the NES in a real flexible shaft-disk-

\*Corresponding author's email: p\_safarpour@sbu.ac.ir



### 2. Methodology

The disk-blade system is the eleventh stage of a twelvestage 30 MW steam turbine. It is made of steel and its weight is 2001 kg. The periodic model of this system includes a set of 7-connected blades and a slice of the disk and shaft. This model has been meshed in a finite element software and the centrifugal force caused by the angular speed of 3000 rpm is applied on elements. Furthermore, the structural and modal analysis are conducted. The interaction between modes is investigated using the SAFE diagram. A strong structural coupling exists between blades, disk, and shaft motions in the 11<sup>th</sup> mode, and therefore, a high level of energy capturing

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.



Fig. 1. Schematic of the two-DOF reduced order model; NES has been shown by dotted lines.

and suppressing by the NESs, mounted on the disk, could be occurred. Thus, this mode is selected for the NES tuning. Furthermore, a 2DOF reduced order model (Fig. 1) is identified for modelling of the 11<sup>th</sup> and 12<sup>th</sup> modes.

Around the 1:1 resonance of the system, vane passing flow exerts as an excitation force on blades with the frequency of Vane Passing Frequency (VPF). The deformation of the shaft or disk could only change the magnitude of the force. In each sector, a NES is mounted on the anti-node position of the desired mode shape on the disk (Fig. 2). Sector equations of motion are as follow:

$$m_{b}\ddot{u}_{k,b} + c_{b}\dot{u}_{b} + k_{b}\left(u_{k,b} - u_{k,ds}\right) = f_{b}\cos\omega t$$

$$m_{ds}\ddot{u}_{k,ds} + (k_{b} + k_{ds} + 2k_{c1}\left(1 - \cos(\sigma_{k})\right) + 2k_{c2}\left(1 - \cos(2\sigma_{k})\right)u_{k,ds} - k_{b}u_{k,b} + \epsilon k_{N}\left(u_{k,ds} - u_{N}\right)^{3} + \epsilon c_{N}\left(\dot{u}_{k,ds} - \dot{u}_{N}\right) = 0$$

$$m_{N}\ddot{u}_{N} + \epsilon k_{N}\left(u_{N} - u_{k,ds}\right)^{3} + \epsilon c_{N}\left(\dot{u}_{N} - \dot{u}_{k,ds}\right) = 0$$
(1)

Aerodynamic damping was included in the system. System vibration is studied in the vicinity of the 1:1 resonance at the first ND of the 11th mode, therefore, the relative excitation frequency is  $\omega/\omega_{2,11}=1+\epsilon\sigma$ , where  $\sigma$  is the detuning parameter and  $\epsilon$  is a small number.



Fig. 2. Shaft-disk-blades system cross section view at the first ND of the 11<sup>th</sup> mode; circle shows the position of NES.

### **3. NES Optimization**

Nonlinear equations of motion of the system has been solved numerically using the Runge-Kutta method. Fig. 3 displays the 3Dimension (3D) plot of the blade maximum frequency response in terms of NESs' stiffness and damping.



Fig. 3. Maximum of the blade frequency response in terms of the NES stiffness and damping.

The optimized parameters of NESs are as follow:

$$k_{N} = 1.0 \times 10^{16} \frac{\text{N}}{\text{m}^{3}}$$

$$c_{N} = 8000 \frac{\text{N.s}}{\text{m}}$$
(2)

### 4. Discussion and Results

Shaft-disk-blades frequency response with the optimized NES has been shown in Fig. 4. The Strongly Modulated Response (SMR) has occurred in a frequency bandwidth of 4 Hz in the range of -0.02 $\leq \sigma \leq 0.15$ . Nonlinear system responses larger than the linear system is occurred in the ranges of 0.12 $\leq \sigma < 0.2$  and 0.33 $\leq \sigma < 0.47$ , of course, too smaller than the resonance amplitude. In other frequency ranges, the blade vibration amplitude is equal or smaller than the system without NES. Decreasing damping and increasing stiffness create an island near resonance and a saddle-node bifurcation occurs in frequency response. Therefore, blades response may be attracted by the large amplitude stable node in some initial conditions.



Fig. 4. Blade frequency response with NES (solid line) and without NES (dashed line).

### 5. Conclusions

Shaft is coupled with disk-blade motion only at zero and first NDs. The optimized NES could reduce the blade vibration amplitude up to 38% and its performance is more sensitive to the nonlinear stiffness than linear damping.

### References

- D. J. Mead, Wave propagation and natural modes in periodic systems: I. Mono-coupled systems. Journal of Sound and Vibration, 40 (1) (1975) 1–18.
- [2] G. Óttarsson, Dynamic modeling and vibration analysis of mistuned bladed disks. (1994).
- [3] P. Polach, Evaluation of the suitability of the bladed disk design regarding the danger of the resonant vibration excitation. Engineering Mechanics, 18 (3–4) (2011) 181– 191.
- [4] G. Genta, Dynamics of rotating systems, Springer Science & Business Media, 2007.
- [5] Y.-J. Chiu, X.-Y. Li, Y.-C. Chen, S.-R. Jian, C.-H. Yang, & I.-H. Lin, Three methods for studying coupled vibration in a multi flexible disk rotor system. Journal of Mechanical

Science and Technology, 31 (11) (2017) 5219-5229.

- [6] S. Bab, S. E. Khadem, M. K. Mahdiabadi, & M. Shahgholi, Vibration mitigation of a rotating beam under external periodic force using a nonlinear energy sink (NES). Journal of Vibration and Control, 23 (6) (2017) 1001–1025.
- [7] S. Bab, S. E. Khadem, & M. Shahgholi, Lateral vibration attenuation of a rotor under mass eccentricity force using non-linear energy sink. International Journal of Non-Linear Mechanics, 67 (2014) 251–266.
- [8] S. Bab, S. E. Khadem, M. Shahgholi, & A. Abbasi, Vibration attenuation of a continuous rotor-blisk-journal bearing system employing smooth nonlinear energy sinks. Mechanical Systems and Signal Processing, 84 (2017) 128–157.

This page intentionally left blank

نشريه مهندسي مكانيك اميركبير



نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۱۲، سال ۱۳۹۹، صفحات ۳۴۲۵ تا ۳۴۴۴ DOI: 10.22060/mej.2019.16274.6319

# کاهش بهینه ارتعاشات سیستم شفت-دیسک-پره انعطافپذیر با استفاده از مجموعه چاههای غیرخطی انرژی روی دیسک

جعفر آقایاری'، پدرام صفرپور '\* عباس رهی'، سعید باب<sup>۲</sup>

<sup>۱-</sup> دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی ، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران. <sup>۲-</sup> گروه تجهیزات دوار مکانیکی، پژوهشگاه نیرو، تهران، ایران.

خلاصه: در این مقاله کاربرد چاه غیرخطی انرژی در کاهش غیرمستقیم ارتعاشات پرههای سیستم شفت-دیسک-پره انعطاف پذیر نمونه توربین بخاری واقعی با نصب روی دیسک بررسی می شود. ۳۷ مجموعه هفت عددی پره متصل به هم در شراد به دور دیسک نصب شدهاند. از تحلیل المان محدود مدل متقارن چرخهای شفت-دیسک-پره برای استخراج مدهای طبیعی و نمودار فر کانسی استفاده می شود. مدل چرخهای شامل یک مجموعه هفت پرهای و برشی از دیسک-شفت است. برای دومین مد فر کانسی استفاده می شود. مدل چرخهای شامل یک مجموعه هفت پرهای و برشی از دیسک-شفت است. قابلیت مدل سازی نرم شوندگی فر کانسی سیستم شناسایی می شود. چاه غیر خطی انرژی که شامل یک جرم کوچک، فنر الزاماً غیر خطی و میرایی خطی است روی این مدل در محل جرم مودال دیسک-شفت نصب می شود. برای حا معادلات غیر خطی سیستم از حل عددی به روش رانگ-کوتا استفاده و پارامترهای ضریب سفتی و میرایی برای حداقل سازی دامنه ار تعاش پره بهینه می گردد. نتایج تحلیل، وقوع پاسخ مدوله قوی در بازهای صول رزونانس و کاهش مطلوب دامنه از پره را نشان می دهد. سیستم به سفتی غیر خطی در بازهای صول بر زوانس و کاهش مطلوب دامنه از تعاش زین مان می دهد. سیستم به سفتی غیر خطی حساس است و در ضریب سفتی بزرگ و یا میرایی های کوچک، انسعابی زین اسبی در نزدیک رزونانس ایجاد و امکان پاسخ نوسانی ساده دامنه بزرگ و وجود خواهد داشت.

**تاریخچه داوری:** دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۱۵ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۴/۰۷ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۳۱ ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۷/۲۴

**کلمات کلیدی:** شفت-دیسک-پره انعطافپذیر چاه غیرخطی انرژی تقارن چرخهای نمودار فرکانسی پاسخ مدوله قوی

### ۱– مقدمه

تقاضای صنعت برای بازدهی بالا و عملکرد بهتر تجهیزات دوار منجر به طراحی توربینها نزدیک به شرایط بحرانی شده است و حاشیه پایداریهای دینامیکی و آئرودینامیکی کوچکتر شده است. دامنههای بزرگ ارتعاش تجهیزات منجر به تماس و سایش قطعات ثابت و متحرک توربوماشینها میشود از این رو در سالهای اخیر توجه ویژهای معطوف به ارتعاشات تجهیزات دواری همچون توربینها شده است تا دامنه ارتعاشات اجزاء آن همچون دیسکها، پرهها و شفت برای افزایش عمر و پیشگیری از خرابی کاهش یابد.

توربینها معمولاً شامل چندین مرحله هستند و هر مرحله از یک ردیف ثابت و متحرک تشکیل شده است. ردیف متحرک معمولاً شامل یک دیسک دوار است که تعدادی پره در محیط پیرامون آن نصب شدهاند. ردیفهای متحرک معمولاً روی یک یا دو شفت نصب میشوند. به واسطه تقارن محوری مجموعه شفت-دیسک-پره، آنالیز استحکامی و ارتعاشی کل مجموعه، به آنالیز مجموعه کوچکتر با تعداد \*نویسنده عهدهدار مکاتبات: p\_safarpour@sbu.ac.ir

درجه آزادی کمتر به صورت تنها یک قطاع' منجر میشود [۱ و ۲] و میزان محاسبات به میزان قابل توجهی کاهش مییابد. علی رغم کاهش قابل توجه سایز سیستم ، باز هم تعداد درجات آزادی یک قطاع برای تحلیل سیستم زیاد است و بنابراین مدلهای کاهش مرتبه یافته مختلفی برای کاهش تعداد درجات آزادی یک قطاع نیز استفاده میشود. مدلهای کاهش مرتبه یافته در مطالعات متعددی برای بررسی خواص ارتعاشی دیسک-پرهها بکار گرفته شدهاند [۱، ۳ و یچیده شفت-دیسک-پره انعطاف پذیر میتواند با مدل جرم و فنر با تعداد محدودی درجه آزادی مدل شود. نوع مدل کاهش مرتبه یافته و تعداد درجات آزادی (جرمهای گسسته) آن با توجه به تعداد خانواده مد طبیعی مورد نظر برای مطالعه و تغییرات فرکانس این خانوادهها (بر حسب تعداد قطر ساکن) تعیین میشود. قطاعها با یک یا چند فنر

(Creative Commons License) حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) کی این السانس آفرینندگی مردمی (Rttps://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

<sup>1</sup> Sector

تا سیستم شفت-دیسک-پره کامل را تشکیل دهند. از این مدلهای کاهش مرتبه یافته برای بررسی رفتار سیستم هنگام افزودن تجهیزات جانبی مانند جاذب خطی [۵ و ۶] و غیرخطی [۷ و ۸] به سیستم دیسک-پره استفاده شده است.

معمولاً نمودار کمپبل برای بررسی رزونانس سیستمهای دوار استفاده می شود. در سیستمهای متقارن محوری همچون دیسک-پره، نمودار کمپبل رزونانسهای محتمل را ارائه می کند. رزونانسهای قطعی را نمودار ارزیابی فرکانسی سینگ یا نمودار سیف [۹] مشخص می کند. در این نمودار، فرکانسهای طبیعی و تحریک به صورت تابعی از تعداد قطر ساکن ۲ یا مد قطری نمایش داده می شوند. طبق نمودار سیف، برای رخداد رزونانس قطعی در سیستم، نه تنها فرکانسهای طبیعی و تحریک لازم است برابر باشند، بلکه شکل تحریک و شکل مد سازهای نیز لازم است بر هم منطبق باشند [۹-۱۱]. به عنوان نمونه اگر تحریکی با فرکانس fدر هارمونیک دوم (یعنی وقتی پیرامون دایره کامل دیسک حرکت شود، نیروی تحریک به صورت نوسانی دو پیک مثبت و دو پیک منفی داشته باشد و این شکل مد تحریک است) وارد شود مد طبيعي که در مد قطري سوم است (سه قطر ساکن روی دیسک تشکیل شده است) و فرکانس مشابه fرا دارد، نمی تواند fتحریک کند و رزونانس ایجاد نمی شود. اما اگر مد طبیعی در مد قطری دوم، فرکانس طبیعی آن نیز fباشد، قطعاً تحریک خواهد شد.

تحریک میتواند ناشی از عبور جریان سیال از پرههای ساکن باشد که در این صورت فرکانس تحریک مضرب تعداد پرههای ثابت و سرعت روتور است و به آن تحریک گذر پره<sup>۳</sup> نیز اطلاق میشود که در این صورت تعداد پرههای ثابت، هارمونیک نیرو یا همان شکل تحریک را مشخص خواهند کرد. همچنین هارمونیک تفاضل تعداد پرههای ثابت ردیفهای جلوتر یا عقب تر نیز ممکن است تحریک ایجاد کند [17]. در توربینهای بخار عمدتاً مدهای قطر ساکن ۲ تا ۶ در بررسی احتمال رزونانسهای ارتعاشی مهم میباشند [11]. از منابع تحریک ادر مرکز شفت و خمیدگی شفت اشاره کرد که موجب ویرل شفت با از مرکز شفت و خمیدگی شفت اشاره کرد که موجب ویرل شفت با

نماید. معمولاً فاصله فرکانسی زیادی بین فرکانس مدهای شفت با مدهای نوسانی روی پره و دیسک وجود دارد.

جنتا [۴] به بررسی حرکت هماهنگ پرهها و کوپل دینامیکی آن با حرکت جانبی، محوری و پیچشی دیسک و شفت پرداخته است و مشخص شده است که بجز چند دسته از مدهای اولیه مجموعه پرهها (مد قطری صفر و یک)، سایر حرکات مجموعه پرهها عملاً همدیگر را خنثی نموده و اینرسی موثری برای کوپل دینامیکی با حرکت دیسک و شفت نخواهند داشت. حرکت داخل صفحه همفاز پرهها با مد پیچشی دیسک و شفت کوپل می شود و با مدهای خمشی روتور (شفت و دیسک) کوپل نیست. حرکت هماهنگ پرهها در مد قطرى اول با خمش محور و جابجائي عرضي ديسك كويل مي شود و با مدهای پیچشی کوپل نیست. سیستم دیسک-روتور انعطاف پذیر، سه نوع کوپل ارتعاشی از خود نشان میدهد که شامل مدهای بین یرهای، شفت-دیسک-پره و دیسک-پره است [۱۳]. تجزیه حرکت مجموعه پرهها به صورت ترکیبی از حرکت هماهنگ آنها در مدهای مختلف قطری (و یا فازهای مختلف حرکتی پرهها نسبت به هم) که با تبديلات مودال [۱۴] و كلمن [۱۵] صورت مي گيرد كاهش قابل توجهی در تعداد معادلات و محاسبات داشته است [۴، ۱۴ و ۱۵].

برای بهبود عملکرد دینامیکی سیستم و کاهش دامنه ارتعاشات اجزاء، از تجهیزات افزاینده میرایی فعال و غیرفعال استفاده میشوند که روشهای غیرفعال به واسطه قیمت پایین تر و پیچیدگی کمتر، مورد توجه بیشتری هستند. متصل کردن پرهها به یکدیگر در نقاط میانی و نوک پرهها و استفاده از میراگرهای اصطکاکی بخصوص در زیر پرهها، که تداخلی با جریان ایجاد نکنند، روشهای غیرفعال متداول کاهش دامنه ارتعاشات، به ویژه در گذر از سرعتهای بحرانی است. تجهیزات اخیر میرایی قابل توجهی در سیستم ایجاد میکنند، اما پیچیدگی مدل سازی آنها و تمایل صنعت به ساخت یکپارچه میراکنندههای ارتعاشی که جاذب خطی و یا غیرخطی انرژی<sup>†</sup> نامیده میشوند، در سیستمهای دوار استفاده میشود. جاذبهای خطی میراکنندههای ارتعاشی که جاذب خطی و یا فیرخطی انرژی<sup>†</sup> نامیده انرژی که معمولاً قابلیت تنظیم مرتبه نیز با توجه به مرتبه تحریک را دارند، در انواع مختلفی همچون پیزوالکتریک روی دیسک [۱۷] و پره

<sup>1</sup> Sing's Advanced Frequency Evaluation (SAFE) diagram

<sup>2</sup> Nodal Diameter (ND)

<sup>3</sup> Vane Passing Frequency (VPF)

<sup>4</sup> Linear and Non-Linear Energy Absorber

دیسک [۱۸] یا پره [۳] مطالعه شدهاند که بطور موثری در کاهش ارتعاشات پره و یا پیچش روتور موثر هستند.

با ارائه مفهوم انتقال هدفمند انرژی یا پمپ انرژی [۱۹ و ۲۰]، مطالعات متعددی در زمینه استفاده از انواع جاذبهای غیرخطی مانند پیزوالکتریک [۸]، غیرخطی دورانی [۲۱]، ضربهای [۲۲] و چاه غیرخطی یکنواخت [۲۳] انجام شده است که سیستم اولیه عمده آنها نوسانگر خطی است. این جاذبهای غیرخطی با نام چاه غیرخطی انرژی٬ شناخته میشوند. جاذب خطی انرژی٬ میتواند در نقطه رزنانس، دامنه ارتعاش را به مقدار زیادی کاهش دهد، اما ضعف آن در ایجاد دو نقطه رزنانسی جدید در نزدیکی رزنانس اصلی است و این به معنای حساسیت بالای آن به تغییر پارامترهای سیستم در طول زمان است هر چند چاه غیرخطی انرژی در نقطه رزنانس ممکن است به اندازه جاذب خطی دامنه را کاهش ندهد [۲۳] اما فرکانس طبیعی ذاتی برای خود ندارد و دو پیک در اطراف رزنانس اصلی ایجاد نمی کند. جاذب خطی فقط می تواند روی یک مد کارا باشد و بنابراین لازم است برای نقطه رزنانسی مورد نظر تنظیم شود، در حالی که چاه غیرخطی می تواند برای چند رزنانس تنظیم شود و دامنه ارتعاشات همه آنها را تا حد معقولی همزمان کاهش دهد [۲۴ و ۲۵].

در اغلب مطالعات مربوط به چاه غیر خطی انرژی، سیستم اصلی خطی است [۲۶] و در تعداد کمی از موارد سیستم اصلی غیرخطی است [۲۷] که بدلیل پیچیدگی ناشی از غیرخطی شدن مضاعف کل سیستم، تحلیل این سیستمها معمولاً بصورت عددی انجام می گردد. در سیستمهای دوار همچون هلیکوپتر، کاربرد چاههای غیرخطی انرژی برای کاهش ارتعاشات پرهها با نصب آنها در کابین [۷] یا روی پرهها [۱۵] بررسی شده است. از تبدیل کلمن<sup>†</sup> و روش میانگین گیری نیچیدگی<sup>۵</sup> برای کاهش درجات آزادی سیستم و حل معادلات غیرخطی استفاده شده است. چاه غیرخطی انرژی، هنگام نصب روی پره عملکرد موثرتری در میراکردن ناپایداری ناشی از رزونانس زمین از خود نشان میدهد. با نصب و تنظیم مناسب چاه غیرخطی انرژی در روتورهای توخالی توربین-ژنراتور امکان کاهش دامنه ویرل شفت تحت

غیرخطی انرژی روی دیسک میتواند میرا شود [۱۴] و یا در سیستم پیچیدهتر پرهها-دیسک-شفت-یاتاقانها، چاههای غیرخطی نصب شده روی دیسک و یاتاقانها به طور محلی در کاهش دامنه ارتعاشات شفت و پرهها موثر هستند [۲۷]. در این مطالعات عموماً دیسک صلب است.

در ایرفویل هواپیما جذب انرژی ارتعاشی مد پیچ توسط چاه غیرخطی نصب شده در جهت لیفت بررسی تحلیلی [۲۹] و تجربی [۳۰] شده است و عملکرد مناسب آن در به تاخیر انداختن ناپایداری فلاتر هنگام نصب در آفست مثبت تائید شده است. البته گوئو و همکاران [۳۱] نشان دادند که در بعضی سرعتهای جریان سیال، چاه نصب شده روی ایرفویل عملکرد مناسب ندارد. در جذب انرژی ارتعاشی پرههای دیسک-پره با نصب چاه غیرخطی انرژی روی دیسک، قدرت کوپلینگ بین دو مد نقش کلیدی در عملکرد چاه غیرخطی خواهد داشت. مطالعه قدرت کوپلینگ و ارتعاشات کوپل پرهها و دیسک نیازمند مطالعه نمودار سیف سیستم است [۸، ۱۶ و ۱۷].

تحریک وارد بر سیستم در اغلب تحقیقات در زمینه کاربرد چاه غیرخطی از نوع ضربه یا شوک است و بخاطر فقدان فرکانس طبیعی ذاتی برای چاه، انتقال انرژی ارتعاشی سیستم از طریق تعدادی کانال انرژی با فرکانسهای مختلف بنام مدهای متعامد غیرخطی<sup>2</sup> صورت میگیرد. چاه غیرخطی انرژی معمولاً عملکرد بهتری هنگام اعمال ضربه بزرگ از خود نشان میدهد [۳۲]، البته برای تحریکهای خیلی بزرگ چاه غیرفعال میشود. در سیستمهای تحت تحریک نوسانی جذب انرژی توسط چاه و اتلاف آن برپایه رخداد نوسانات تخفیفیافته<sup>۷</sup> در پاسخ سیستم یا پاسخ مدوله قوی<sup>۸</sup> است. در واقع، پاسخ مدوله قوی یک پرش ممتد بین دامنههای پایین و بالا هنگام تحریک نوسانی است [۳۲ و ۲۵].

بررسی کاربرد چاه غیرخطی در کاهش ارتعاشات پره سیستم شفت-دیسک-پره انعطاف پذیر با مشخصات نمونه واقعی و با تعداد زیاد پره که تاکنون انجام نشده است، در این تحقیق مورد توجه است. تحلیل روی سیستم واقعی دیسک-پره شامل ۲۵۹ پره که در ۳۷ مجموعه ۷ پرهای قرار گرفتهاند صورت خواهد گرفت. پرههای هر مجموعه توسط شراد نوک به هم متصل هستند. مدل متقارن چرخهای<sup>۹</sup> از سازه با استفاده از نرمافزار المان محدود تحلیل مودال

8 Strongly Modulated Response (SMR)

<sup>1</sup> Targeted Energy Transfer (TET)

<sup>2</sup> Nonlinear Energy Sink (NES)

<sup>3</sup> Linear Absorber or Tuned Mass Damper

<sup>4</sup> Coleman

<sup>5</sup> Complexification-Averaging Method

<sup>6</sup> Nonlinear Normal Mode

<sup>7</sup> Relaxation Oscillation

<sup>9</sup> Cyclic Symmetric Model

ویژگیهای ناشی از تقارن چرخهای که مشخصه تمام دیسک-پرههای میزان است برای مدلسازی سیستم این مطالعه استفاده خواهد شد. دیسک-پره، آرایه قطبی از قطاعها است که هر قطاع شامل یک یا تعداد پره و قطاعی از دیسک یا دیسک-شفت است. قطاع شامل یک یا تعداد پره و قطاعی از دیسک یا دیسک-شفت است. قطاع شامل یک یا تعداد پره و قطاعی از دیسک یا دیسک مفت است که هر نمامل یک یا تعداد پره و قطاعی از دیسک یا دیسک مفت است که هر است قطاع سفتی [M] است. ابعاد این ماتریس ها  $m \times m$  است که m تعداد  $[K_c]$  است در هر قطاع است. ماتریس سفتی کوپلینگ با نشان داده می شود و فرض می شود نیروی تحریک  $f_i$  به قطاع وارد می شود. با صرفنظر از میرایی، معادله حرکت قطاع به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \ddot{U} + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} U_i + \begin{bmatrix} K_c \end{bmatrix} (U_i - U_{i-1}) + \\ \begin{bmatrix} K_c \end{bmatrix} (U_i - U_{i+1}) = f_i, i = 1...N$$
(1)

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \ddot{U}_{i} + (\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} K_{c} \end{bmatrix}) U_{i} - \\ \begin{bmatrix} K_{c} \end{bmatrix} U_{i-1} - \begin{bmatrix} K_{c} \end{bmatrix} U_{i+1} = f_{i}, i = 1...N$$
(7)

که N تعداد قطاعهای دیسک پره است. معادله کل سیستم با لحاظ تمام درجات آزادی به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} \end{bmatrix} \ddot{U} + \begin{bmatrix} \tilde{K} \end{bmatrix} U = f \tag{(f)}$$

که در آن  $\left[ ilde{M}
ight]$  و  $\left[ ilde{K}
ight]$  ماتریسهای جرم و سفتی کل سیستم است و رابطه (۴) نشان میدهد که ماتریس جرم به شکل بلوکهای قطری است و هر دو ماتریس، ماتریس بلوکهای گردشی هستند. یک

خواهد شد. مدل چرخهای شامل یک قطاع است و هر قطاع شامل یک مجموعه پره متصل به هم و یک برش قطاعی از دیسک-شفت است. نمودار فركانسى سيف سيستم با استفاده از نتايج آناليز مودال ترسيم و مدهای مختلف نمودار فرکانسی و شکل مدهای سیستم مطالعه و بررسی می شود و ناحیه تداخل دینامیکی سه جزء مشخص شده و مدل کاهش مرتبه یافته دو درجه آزادی برای مدلسازی ارتعاشی ناحیه مورد نظر شناسایی میشود. برای کاهش دامنه ارتعاشات پره، چاه غیرخطی انرژی با جرم کوچک، فنر الزاماً غیرخطی و میراگر خطی، به شکم مد مورد نظر روی دیسک اضافه می شود. در ادامه، پارامترهای چاه غیرخطی طراحی و بهینهسازی میشود. برای بهینهسازی و استخراج پاسخ فرکانسی سیستم، معادلات دینامیکی غیرخطی سیستم به روش عددی رانگ-کوتا به ازاء تحریک ۱:۱ رزونانسی تحلیل خواهد شد. پاسخ فرکانسی سیستم بهینهشده، میزان عمکرد آن در فرکانسهای مختلف، نواحی تشکیل پاسخ مدوله قوی و نوسانی و میزان حساسیت سیستم بهینه به پارامترهای چاه غيرخطي ارائه خواهد شد.

### ۲– مدلسازی و آنالیز مودال

# ۲-۱- مدلسازی سیستمهای متقارن چرخهای

سازههای متقارن چرخهای یا پریودیک از تکرار دوار یک قطاع در یک دایره کامل ایجاد میشوند (شکل ۱). در سازههای میزان<sup>۱</sup>-پریودیک، تمام شرایط هندسی، توزیع جرمی و مکانیکی این اجزاء یکسان است و فقط حول یک محور دوران داده شدهاند و متقارن محوری است.



l Tuned

ماتریس گردشی<sup>۱</sup> است اگر هر ردیف آن با یک ستون انتقال ارایههای ردیف قبلی به سمت راست ساخته شده باشد. اگر هر آرایه خود یک ماتریس باشد، به آن ماتریس بلوکهای گردشی گفته میشود. برای حل معادلات دینامیکی سیستم متقارن چرخهای تبدیلی از مختصات فیزیکی به مختصات مودال صورت می گیرد که به شکل زیر است:

$$\boldsymbol{U} = \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{u} \tag{(a)}$$

که در آن [E] و [I] به ترتیب، ماتریس فوریه و همانی هستند و  $\otimes$  ضرب کرونیکر است. ستونهای ماتریس فوریه، بردارهای ویژه ماتریس گردشی سیستم است و میتواند آن را قطری نماید و به صورت زیر میباشد:

$$\begin{bmatrix} E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{I\sigma_2} & e^{I\sigma_3} & \dots & e^{I\sigma_{N-1}} & -1 \\ 1 & e^{I2\sigma_2} & e^{I2\sigma_3} & \dots & e^{I2\sigma_{N-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{I(N-1)\sigma_2} & e^{I(N-1)\sigma_3} & \dots & e^{I2\sigma_{N-1}} & -1 \end{bmatrix}$$
( $\mathcal{F}$ )

که در آن  $N = 2\pi (k-1)/N$  ، زاویه فاز بین پرهای در مد مودال k ام یا اختلاف فاز بین دامنه حرکت پرههای مجاور هم در قطر ساکن ۱ – k ام است. با استفاده از تبدیل مودال  $u = ([I] \otimes [I]) = U$ ، بررسی دینامیک سیستم در مختصات مودال به جای مختصات فیزیکی صورت خواهد گرفت. با جایگذاری تبدیل رابطه (۵) در معادلات حرکت کل سیستم ( رابطه (۴)) و ضرب معادلات در ترانهاده ماتریس فوریه و همچنین بسط نیروی تحریک با استفاده از بردارهای ویژه متعامد ماتریس فوریه، در نهایت معادله زیر نتیجه خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} M_{D1} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & [M_{DN}] \end{bmatrix}^{\mathbf{i}} \mathbf{i} + \\\begin{bmatrix} K_{D1} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & [K_{DN}] \end{bmatrix}^{\mathbf{i}} \mathbf{u} = \\\begin{bmatrix} (\mathbf{F})^T \otimes [\mathbf{I}] \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}) \\\begin{bmatrix} \tilde{M}_D \\ \vdots \\ \tilde{N}_L \end{bmatrix}^{\mathbf{i}} + \begin{bmatrix} \tilde{K}_D \\ \vdots \\ \mathbf{u} = \\\begin{bmatrix} \tilde{M}_D \\ \vdots \\ \tilde{N} \end{bmatrix}^{\mathbf{i}} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \tilde{K}_D \\ \vdots \\ \mathbf{u} = \\\begin{bmatrix} \tilde{M}_D \\ \vdots \\ \tilde{N} \end{bmatrix}^{\mathbf{i}} \mathbf{u} = \\\begin{bmatrix} \tilde{M}_D \\ \vdots \\ \tilde{N} \\ [\mathbf{E}]^T \otimes [\mathbf{I}] \end{bmatrix} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}) = \\\begin{bmatrix} \tilde{M}_D \\ \vdots \\ \tilde{N} \\ [\mathbf{E}]^T \mathbf{e}_i \end{bmatrix} \otimes ([\mathbf{I}] \mathbf{f}) \end{aligned}$$
(A)

1 Circulant Matrix

که در آن  $\begin{bmatrix} \tilde{M}_D \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} \tilde{K}_D \end{bmatrix}$  ماتریس های جرم و سفتی قطری هستند و i ستون i ام ماتریس فوریه است. معادله فوق نشان می دهد که با تبدیل مودال، معادلات سیستم دی کوپل شدهاند. با توجه می دهد که با تبدیل مودال، معادلات سیستم دی کوپل شدهاند. با توجه به رابطه  $k \neq i; \cdot \}$   $e_i^* e_i = \{e_i^* e_i + e_i^* e_i\}$  مودال k ام یا قطر ساکن (1 - k + 1) وارد شود، تمام مولفه های نیروی مودال k ام یا قطر ساکن (1 - k + 1) وارد شود، تمام مولفه های نیروی تعمیم یافته (سمت راست معادله فوق) بجز مولفه مربوط به مد قطری مورد نظر صفر خواهد شد  $\{\cdots, \cdot, u_k, \cdot, \dots, v_k\} = \mathbf{u}$ ، و این به این معنی است که تنها پاسخ غیر صفر سیستم، پاسخ مد k ام خواهد بود و حل سیستم رابطه (۸) به حل سیستم کوچکتری تبدیل خواهد شد. پاسخ قطاع مرجع (i = 1) و سایر قطاعهای سیستم در فضای

$$\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \dots, \boldsymbol{U}_N\}^T = \left\{\boldsymbol{u}_k, e^{j\sigma_k}\boldsymbol{u}_k, e^{2j\sigma_k}\boldsymbol{u}_k, \dots, e^{j(N-1)\sigma_k}\boldsymbol{u}_k\right\}^T$$
(9)

رابطه (۹) نشان میدهد که وقتی شکل تحریک مشخصی (در مد قطری خاصی) به سیستم وارد شود، دامنه پاسخ تمام قطاعها یکسان خواهد بود و فقط به اندازه زاویه فاز بین پرهای در مد قطری k ام ( $\sigma_k$  خواهد دوله به اندازه زاویه فاز بین پرهای در مد قطری  $r_k$  ام ( $\sigma_k$ ) بین پاسخ قطاعهای مجاور اختلاف فاز وجود خواهد داشت. از اینرو بجای تحلیل پاسخ فرکانسی کل سیستم، فقط کافی است پاسخ یکی از قطاعها به تحریک مشخص شود تا پاسخ سایر قطاعها نیز از روی آن بدست آید. این خاصیت سیستمهای متقارن چرخهای است. فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد سیستم طی تبدیل مودال سیستم فرکانس میماند ( $[4 \ e\ A]$ ) و برای سیستم رابطه (۲) یا رابطه (۸)، محاسبه فرکانسهای طبیعی یک قطاع بجای کل سیستم کافی است.

# ۲-۲- آنالیز مودال سیستم شفت-دیسک-پره نمونه

اثر انعطاف پذیری شفت در عملکرد سیستم دیسک-پره و چاه غیرخطی انرژی در این بخش مطالعه می شود. دیسک-پره مورد مطالعه نمونه، دارای ۲۵۹ پره در ۳۷ مجموعه ۷ پرهای است. پرههای هر مجموعه توسط شراد نوک پره به هم متصل هستند. این دیسک-پره، ردیف ۱۱ یک توربین بخار ۱۲ مرحلهای ۳۰ مگاواتی است. مدل سازی سیستم واقعی برای بررسی اثر شفت، نیازمند مدل سازی ۱۱ ردیف دیگر است که خود می تواند موضوع مطالعه مفصل دیگری در آینده باشد. برای مطالعه اثر انعطاف پذیری شفت، سیستم دیسک-پره در



شکل ۲. (الف) مدل کامل شفت-دیسک-پره ردیف متحرک توربین بخار نمونه، (ب) یک قطاع از شفت-دیسک-پره (شامل یک مجموعه پره متصل به هم و یک قطاع از دیسک و شفت) با شرایط مرزی پریودیک

Fig. 2. (a) A complete model of the shaft-disk-blade system, (b) a sector of shaft-disk-blade (includes a packet of connected blades and a slice of disk-shaft) with the periodic boundary condition.

میانه شفتی به طول ۲ متر و قطر ۳۵۰ میلیمتر فرض می شود. قطر شفت برابر قطر شفت واقعی است. مدل سیستم در شکل ۲ (الف) نشان داده شده است. این مدل از جنس فولاد با چگالی ۷۸۵۰ کیلوگرم بر مترمکعب است و جرم مجموعه ۲۰۰۱ کیلوگرم است. برای بررسی دینامیک سیستم و ترسیم نمودار فرکانسی، از مدل پریودیک سیستم استفاده خواهد شد. مدل پریودیک سیستم شامل یک ست ۷ پرهای با شراد مشترک و برشی از دیسک و شفت است و در شکل ۲ (ب) نشان داده شده است. مجموعه کل سیستم شامل ۷۳ قطاع نشان داده شده است. این قطاع، کوچکترین مدل پریودیک قابل استخراج برای سیستم است. قطاعها از طریق دیسک و شفت به هم متصل هستند و شرادها به هم متصل نیستند. این مدل پریودیک برای تحلیل سازهای و مودال مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

مدل پریودیک با لحاظ شرایط پریودیک در نرمافزار المان محدود انسیس [۳۳] با استفاده از المانهای حجمی سازهای مشبندی شده و مدل المان محدود در شکل ۳(الف) نشان داده شده است. این مدل دارای ۶۰۵۷ المان حجمی سازهای و ۱۲۲۵۲ گره است. این مدل با اعمال شرایط مرزی، برای تحلیل سازهای استفاده گردید تا پیشتنش

برای تحلیل مودال انجام گیرد. شرایط مرزی پریودیک در شکل ۳(ب) نشان داده و اعمال شده است. علاوه بر قید پریودیک بودن مدل، درجات آزادی حرکتی گرههای مدل المان محدود در دو انتهای شفت نیز مقید شده است. بار حجمی به صورت سرعت دورانی ۳۰۰۳ حول محور شفت به مدل اعمال شده است. آنالیز سازهای انجام شده و به عنوان آنالیز تنش اولیه در آنالیز مودال مورد استفاده قرار می گیرد. آنالیز مودال برای شناسایی ۴۰ مد اول سیستم در نرم افزار انسیس انجام می گیرد.

نرمافزار انسیس با استفاده از تقارن چرخهای، مدل قطاع را تحلیل نموده و فرکانسهای طبیعی خمشی و پیچشی را بر حسب اندیس هارمونیک ارائه میکند و اختلاف فاز بین دامنه ارتعاش قطاعها که تابعی از اندیس هارمونیک است، بدست آمده و مدل کامل تغییر شکل یافته در هر مد را ترسیم مینماید. نتایج آنالیز که به صورت شناسایی فرکانسهای طبیعی مدهای مختلف سیستم در اندیسهای هارمونیک مختلف است در نرمافزار متلب بررسی گردید و با حصول اطمینان از همگرایی نتایج المان محدود، نمودار فرکانسی زیر ۲۰۰۰ هرتز سیستم کوپل، در شکل ۴ نشان داده شده است. خط تحریک



شکل ۳. (الف) مدل المان محدود قطاع شفت-دیسک-پره با ۶۰۵۷ المان حجمی سازهای، (ب) شرایط مرزی مدل پریودیک Fig. 3. (a) Finite element model of the sector included of 6057 structural elements, (b) Boundary condition of the periodic model.

۵۰ هرتز نیز در شکل ترسیم شده است. مدها به چند دسته تقسیم می شوند. دسته ای از مدها مربوط به پره هستند که عمدتاً بخش های با خطوط افقی منحنیهای نمودار فرکانسی آن را نشان میدهند. در این مدها، حرکت غالب با پره است و انرژی کرنشی در پره نهفته است و دیسک و شفت انرژی کرنشی چندانی ندارند و عملا در مد شرکت ندارند. هارمونیکهای اولیه مد دوم و همچنین مد قطری سوم تا هجدهم مد اول از نوع پره-غالب هستند. دسته بزرگی از مدهای محلی بین مد ۴ تا ۱۰ و بالای ۱۴ نیز مدهای ارتعاش محلی پرهها هستند و از نوع پره غالب می باشند. دسته دیگر مدها، دیسک-غالب هستند و انرژی کرنشی قابل توجهی در دیسک نیز وجود دارد. مدهای قطری اولیه مد اول و همچنین مدهای قطری ۳ و بالاتر خانواده دوم مدهای طبیعی از نوع دیسک-غالب هستند. مدهای دیسک غالب و پره غالب معمولاً در مد قطری خاصی تداخل انرژی بالایی با هم دارند که به این ناحیه، ناحیه پسزنی فرکانسی ٔ گفته میشود. خانواده اول و دوم مدهای طبیعی در قطر ساکن سوم تداخل فرکانسی را تجربه می کنند. از سوی دیگر در این دو مد چنانچه در شکل ۵ (ردیفهای ۱ و ۲) نیز نشان داده شده است تغییر شکل در شفت وجود ندارد و انرژی کرنشی کوچکی در شفت وجود دارد و این مدها عملا بین دیسک و پره هستند. مدهای دیگری که در شکل ۴ با خطوط خطچین نمایش داده شدهاند نیز شفت در مد شرکت ندارد یعنی مربوط به دیسک یا پره و یا دیسک-پره است. خطوط توپر شکل نشاندهنده مدهای



شکل ۴. نمودار فرکانسی سیستم شفت-دیسک-پره انعطاف پذیر ردیف متحرک یازدهم توربین بخار نمونه؛ مدهای ترکیب سه جزء (خطوط توپر) و مدهای محلی دیسک-پره و پره (خطچین).

Fig. 4. Frequency diagram of the flexible shaft-disk-blades system of the 11<sup>th</sup> stage of the steam turbine; combined modes of the three components (solid lines) and disk-blade and blade local modes (dashed lines).

ترکیبی شفت با دیسک و پره هستند یعنی شفت در مد شرکت دارد. البته در مدهای قطری بیش از ۱ (تعداد قطر ساکن ۲ و بیشتر)، پره و دیسک اینرسی موثری روی شفت ندارند [۴] و کوپلینگ بین حرکت دیسک و پره با خمش عرضی و یا پیچشی شفت وجود ندارد. ستون میسک و پره با خمش عرضی و یا پیچشی شفت موجود ندارد. ستون موثر میک ۵ نیز نشان میدهد در هیچ یک از این مدها شفت موثر نمی باشد. بنابراین تنها مدهای با قطر ساکن صفر و یک (۱و ۰ =ND ) امکان تداخل حرکتی شفت با دیسک و پره خواهند داشت.

طبق شکل مدهای نشان داده شده در شکل ۵، خانواده اول و دوم مدهای طبیعی سیستم، مد محلی بین دیسک و پره هستند و شفت حرکت و انرژی موثری ندارد. خانواده مد سوم در هارمونیک صفر کوپل پیچش شفت با پیچش دیسک-پره است و هارمونیک یک نیز بوپل خمش عرضی شفت با حرکت داخل صفحه دیسک-پره است. به عبارت دیگر در هر دو این دو مد، دیسک حرکت عمود بر صفحه دیسک همانند خمش خارج صفحه دیسک ندارد. کوپل حرکت عرضی خمشی شفت با چاههای صفحه ای نصب شده روی دیسک، به طوریکه امکان حرکت صفحهای داشته باشند توسط باب و همکاران [۱۴] نصب شده روی دیسک با قابلیت حرکت عمود بر صفحه دیسک (متاثر نصب شده روی دیسک با قابلیت حرکت عمود بر صفحه دیسک (متاثر کسب کند چرا که دیسک جابجایی عمود بر صفحه ندارد.

هارمونیک صفر و اول مد ۴ نیز پیچش شفت-دیسک و خمش دیسک-پره است و در هارمونیک صفر چاه تحریک نمی شود و در هارمونیک اول، شفت در مد شرکت ندارد. از مدهای فرکانس بالا نیز تنها در دو هارمونیک اول مدهای ۱۱ و ۱۴، شفت به طور موثری در حرکت سیستم مشارکت دارد. مد ۱۴ نیز حرکت دیسک-پره در صفحه دیسک است و حرکت عمودی ندارد و چاه تحریک نمی شود. هارمونیک اول مد ۱۱، اولین مد (از لحاظ فرکانسی) است که مد ترکیبی بیرون صفحه شفت-دیسک-پره است و انرژی قابل توجهی در هر سه جزء وجود دارد و از سوی دیگر حرکت شفت و دیسک به نحوی است که دیسک نوسان قابل توجهی در جهت عمود بر دیسک دارد و انرژی موثری از طریق دیسک می تواند به چاه منتقل شود. بررسی شکل مدهای سیستم انعطاف پذیر (شکل ۵) نشان می دهد

2 Shaft Bending (SB2)

<sup>1</sup> Veering Region



شکل ۵. شکل مدهای مختلف سیستم انعطافپذیر شفت-دیسک-پره در قطرهای ساکن پایین Fig. 5. Various mode shapes of the flexible shaft-disk-blade system at low NDs.



شکل ۶. نمودار فرکانسی سیستم پره-دیسک-شفت انعطافپذیر در نزدیکی خانوادههای یازدهم و دوازدهم مدهای طبیعی سیستم (خطوط توپر)؛ نمودار فرکانسی مدلهای کاهش مرتبه یافته (خطنقطه .-، خطچین --، نقطه ...)

Fig. 6. Frequency diagram of the flexible shaft-disk-blade system close to the 11th and 12th families of natural modes (solid lines); frequency diagram of the reduced order models (ROM) (-., --, ...)

۳- تحریک در سیستم شفت-دیسک-پره انعطاف پذیر در نظر گرفتن انعطاف پذیری شفت از دو دیدگاه میتواند مورد توجه باشد. یک دیدگاه، اعمال اثر انعطاف پذیری شفت روی دینامیک سیستم است و موجب تغییر فرکانسهای طبیعی و شکل مد سیستم میشود و رزونانسهایی ممکن است به سیستم افزوده شود. دیدگاه دیگر اثرات جانبی و تحریکات ناشی از انعطاف پذیری شفت را در نظر میگیرد. یعنی با انعطاف پذیری شفت و به ویژه ویرل شفت، نیروها و تحریکات جدیدی ممکن است روی پرهها وارد شود و یا بزرگی نیروهای قبلی تغییر نماید. در بخش قبل بررسی مفصلی در مورد دیدگاه اول با استفاده از نمودار فرکانسی سیستم صورت گرفت و بیرون صفحه دیسک-پره <sup>۱</sup>است، کوپلینگ قابل توجهی بین حرکت پره با دیسک و همچنین شفت وجود دارد و امکان جذب انرژی بالاتری در آن توسط چاه وجود دارد و بنابراین مد ۱۱ و مد نزدیک به آن یعنی ۱۲ برای بررسی نصب چاه غیرخطی انرژی انتخاب می شود. نمودار فرکانسی دو مد فوق به صورت مجزا در شکل ۶ ارائه شده است.

خانواده مد ۱۱ در مدهای قطری پایین، مد سوم خمش بیرون صفحه دیسک-پره است که در مد قطری اول با خمش دوم شفت تداخل انرژی دارد. مد ۱۲ نیز در مد قطری اول خود کمی تحت تاثیر مد ۱۱ در این مد قطری قرار گرفته و خمش سوم داخل صفحه دیسک-پره<sup>۲</sup> با خمش دوم شفت تداخل انرژی دارد.



شکل ۷. تحریک در سیستم دیسک-پره؛ مد قطری صفر یا ویرل سنکرون روتور (الف)، ویرل در مد قطری اول خانواده اول (ب) و مد قطری اول خانواده یازدهم (ج)؛ بزرگی هر فلش نمایانگر تغییر نیروی وارد از سیال به پره متحرک هنگام گذر از پرههای ثابت است

Fig. 7. Excitation in bladed disk system; (a) ND=0 or the synchronous whirl of the rotor, (b) whirl at the first ND of the first family, (c) whirl at the first ND of the 11<sup>th</sup> family.

<sup>1</sup> Out of plane disk-blade Bending (OB3)

<sup>2</sup> In plane disk-blade Bending (IB3)

نشان داد که تنها در بعضی خانواده مدها و در مدهای قطری خاصی، برهم کنش دیسک-پره با شفت بالاست و شفت اثر سازهای روی مدهای محدودی دارد و نتیجه آن تا اینجا خانواده ۳، ۱۱، ۱۲ و ۱۴ ام مدهای طبیعی در قطر ساکن اول است که مدهای اول الی سوم خمش شفت با مدهای خمشی بیرون صفحه و پیچشی دیسک-پره تداخل انرژی دارند.

در مورد دیدگاه دوم، ذکر این نکته لازم است که در حالت عادی بدون تغییر شکل شفت و دیسک (شکل ۷ (الف))، بار دینامیکی و ارتعاشی وارد بر پرهها، بار دینامیکی گذر پره است که فرکانس آن وارد بر پره متحرک هنگام گذر از روبروی پرههای ثابت و کانال بین این پره متحرک هنگام گذر از روبروی پرههای ثابت و کانال بین وارد بر پرههای نقاط مختلف، برآیند ممان خمشی وارد از آن، روی ارتفاع پره بسیار کوچک است و بررسی ویرل شفت در مقایسه با طول اول خمشی شفت (خانواده سوم)، نشان میدهد که ویرل سنکرون نمی تواند موجب ایجاد بار دینامیک در سیستم شود و بزرگی تغییرات نیروی گذر پره نیز همانند شکل ۷ (الف) در پرهها یکسان میماند. در ادبیات فن نیز عدم اعمال تحریک دینامیک و خستگیزا روی شفت منتاط منتار کوچک است و بررسی ویرل سنکرون شفت در مد هنگام ویرل سنکرون ثابت میماند دینامیک و خستگیزا روی شفت ماند. در

در مد قطری اول خانواده اول مدهای طبیعی سیستم (شکل ۵ ،مد ۱، ۱ =N) که مد ترکیبی خمش بیرون صفحه دیسک-پره است (نمای جانبی مقطع برش خورده در (شکل ۷(ب) نشان داده شده است)، خمش دیسک در قطر ساکن اول موجب تغییر فاصله بخش بالایی و پایینی پرههای متحرک از پرههای ثابت شده است که این خود موجب اعمال ممان خمشی در صفحه عرضی روی شفت و دیسک با فرکانسی برابر فرکانس گذر پره است. در قطر ساکن اول مد سوم خانواده مدهای طبیعی (شکل ۵، مد ۳، ۱ =N) که مد ترکیبی شفت با خانواده اول مدهای طبیعی است، ویرل شفت تغییری در فاصله هوایی پرهها ایجاد نمی کند و ممان خمشی نوسانی ناشی از گذر پره که روی دیسک و بالطبع روی شفت وارد می شود، با توجه به شکل مد، انرژی به مد خمش شفت وارد نمی کند.

در خانواده ۱۱ مدهای طبیعی که مد دوم خمشی شفت است، با

توجه به تغییر شکل زاویهای شفت در نقطه دیسک، در ویرل سنکرون شفت، این تغییر شکل زاویهای با سرعتی برابر سرعت دوران یا ویرل شفت به دور محور اصلی میچرخد و بنابراین باز هم، بار متغیر روی دیسک-پره وارد نمیشود. تنها به واسطه تغییر شکل ثابت ایجاد شده روی دیسک (شکل ۷(ج))، فاصله پرههای ثابت و متحرک دو طرف دیسک تا اندازهای تغییر خواهد نمود و نیروی گذر پره تغییر بیشتری تجربه خواهد کرد. به عبارت دیگر، خمش دوم شفت موجب ایجاد ممان خمشی اضافی گذر پره وارد بر دیسک و شفت است، که فرکانس آن همان گذر پره خواهد بود و تنها تفاوت آن با خانواده سوم مدهای طبیعی در دامنه ممان خواهد بود.

البته این دینامیک مربوط به محدودههای فرکانسی است که شفت در مد دوم خمشی قرار گرفته باشد. با توجه به سفتی بالای دیسک مورد نظر و تغییر شکلهای کوچک آن، بررسی نوسانات این ممان و میزان تاثیر آن چندان ساده نیست، ولی در نزدیکی مد طبیعی میتوان تاثیر آن را بزرگ در نظر گرفت. البته لازمه رزونانس در سیستم برابری با فرکانس طبیعی مد است که با توجه به استارت سیستم امکان گذر وجود دارد. بنابراین مساله تبدیل به بررسی رفتار سیستم هنگام اعمال تحریک نزدیک فرکانس طبیعی مد قطر ساکن اول خانواده ۱۱ خواهد بود. به عبارت دیگر ارتعاشات سیستم حول

# ۴- مدل کاهش مرتبه یافته

نمودار فرکانسی (شکل ۶) نشان میدهد که مد شماره ۱۱ در قطر ساکن اول، مجاور مدهای ۱۰ و ۱۲ قرار دارد. مد ۱۰، ارتعاش محلی پرهها است و تداخل و کوپلینگ ارتعاشی با مد مطالعه ندارد. مد ۱۲ نیز در فاصله فرکانسی بیش از ۱۰۰ هرتز قرار دارد و از این رو میتوان محدوده مطالعه را با دقت کافی، بدون کوپل با مدهای مجاور در نظر گرفت، هرچند که مدل قابلیت شناسایی همزمان دو مد ۱۱ و ۱۲ را دارد اما تمرکز این مطالعه روی مد کوپل ارتعاش سه جزء دوار است که در مد ۱۱ محبوس است. دادههای نمودار فرکانسی با تحلیل ارتعاشی مدل المان محدود با تعداد زیادی درجه آزادی در هر قطاع بدست آمدهاند. برای بررسی تحلیلی و عددی اثر میراگر اضافی نصب شونده روی سیستم، همانطور که در مقدمه نیز اشاره گردید نمیتوان از مدلی با تعداد درجات آزادی مدل المان محدود استفاده نمود. از

سوی دیگر، سیستمی با تعداد درجات آزادی فوق میتواند تعداد بسیار زیادی از مدهای ارتعاشی سیستم را شناسایی کند که با توجه به هدف این مطالعه که تحلیل رفتار سیستم در محدوده کوچکی از فرکانسهای سیستم است مدلسازی این تعداد مد مورد نیاز نیست. بازه فرکانسی مورد نظر این مطالعه، مد ارتعاشی است که در آن شفت انعطاف پذیر است و کوپلینگ قوی با دیسک-پره دارد و طبق بررسی بخش قبل مد شماره ۱۱ به ویژه در قطر ساکن اول این خاصیت را دارد بنابراین محدوده مطالعه همین مد فرکانسی خواهد بود و لازم است مدل کاهش مرتبه یافته بتواند خواص این مد را نشان دهد. از آنجا که سیستم تقارن چرخهای دارد و منحنیهای فرکانسی با دید سیستم، مد مورد مطالعه یک مد چرخهای است و شفت و دیسک و پره، دارای مد کوپل شده با فرکانس مشترک هستند و شناسایی یک مدل ساده برای این مد مشترک خطای زیادی نخواهد داشت.

مد ۱۱، خمش بیرون صفحه دیسک-پره است و کاهش فرکانس طبیعی با افزایش تعداد قطر ساکن در آن دیده میشود که نوعی نرمشوندگی فرکانسی است و در اغلب توربوماشینها این مساله دیده میشود [۱]. در مد ۱۲ نیز این نرمشوندگی فرکانسی تا حدودی وجود دارد و ناشی از کوپلینگ بین مد ارتعاش داخل صفحه پره و دیسک با خمش شفت است. با صرفنظر از نرمشوندگی اولیه فرکانسی برای مد ۱۲، با تقریب مناسبی میتوان خانواده ۱۲ مدهای طبیعی در فرکانسهای پایین را که ارتعاش مد دوم داخل صفحه پره است، در نظر گرفت که با مد ۱۱ در قطر ساکن ۲ و ۳ تداخل فرکانسی

دارد و پسزنی فرکانسی در این ناحیه صورت می گیرد. خانواده ۱۱ و ۱۲ مدهای طبیعی، بعد از این ناحیه، به ترتیب خمش داخل صفحه پره و خمش بیرون صفحه دیسک-پره خواهند بود. به واسطه تداخل فرکانسی دو مد در تعداد قطر ساکن پایین، مدل کاهش مرتبه یافته با حداقل ۲ درجه آزادی برای مدلسازی نیاز خواهد بود. شماتیک این مدل در شکل ۸ نشان داده شده است. هر قطاع شامل دو جرم است که یکی مربوط به جرم مودال پره و دیگری جرم مودال قطاع شفت-دیسک است. برای پوشش نرمشوندگی فرکانسی که در ابتدای مد ۱۱ وجود دارد از کوپلینگ پیچیدهتری بین قطاعها استفاده میشود. چنانچه در شکل نیز نشان داده شده است، جرم مودال شفت-دیسک در هر قطاع با دو قطاع قبل و دو قطاع بعد از خود کوپلینگ فنری دارد. این مدل قابلیت مدلسازی نرمشوندگی فرکانسی اولیه را به واسطه داشتن کوپلینگ پیچیدهتر با قطاعهای مجاور خود دارد [۱]. در این مدل،  $k_b$ ،  $k_{c2}$  و  $k_{c1}$ ،  $k_{ds}$ ،  $k_b$ ، در این مدل، مفتی پره، سفتی در این دیسک-شفت، سفتی کوپلینگ قطاع با قطاع مجاور و سفتی کوپلینگ قطاع با قطاع بعد از قطاع مجاور است.

ام در  $U_i = \left\{ U_{b,i}, U_{ds,i} \right\}$  مختصات درجات آزادی قطاع i ام در دستگاه مختصات فیزیکی است. همانند آنچه که پیش تر اشاره رفت، معادلات حرکت قطاع i ام مدل شکل  $\Lambda$  به شکل زیر می تواند نوشته شود:

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \ddot{U}_{i} + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} U_{i} + \begin{bmatrix} K_{c1} \end{bmatrix} (U_{i} - U_{i-1}) + \\ \begin{bmatrix} K_{c1} \end{bmatrix} (U_{i} - U_{i+1}) + \begin{bmatrix} K_{c2} \end{bmatrix} (U_{i} - U_{i-2}) + \\ \begin{bmatrix} K_{c2} \end{bmatrix} (U_{i} - U_{i+2}) = f_{i}, i = 1...N \end{bmatrix}$$
(1.1)



شکل ۸: شماتیک مدل کاهش مرتبه یافته ۲ درجه آزادی در هر قطاع با کوپلینگ دوبل با قطاعهای کناری؛ چاه غیرخطی انرژی (خطچین) به دیسک متصل شده است. Fig. 8. Schematic of the two-DOF ROM with double coupling with the neighbor sectors; NES has been shown by dotted lines

يا

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \ddot{U}_{i} + \left( \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} K_{c1} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} K_{c2} \end{bmatrix} \right) U_{i} - \begin{bmatrix} K_{c1} \end{bmatrix} U_{i-1} - \begin{bmatrix} K_{c1} \end{bmatrix} U_{i+1} - \begin{bmatrix} K_{c2} \end{bmatrix} U_{i-1} - \begin{bmatrix} K_{c2} \end{bmatrix} U_{i+1} = f_{i}, i = 1...N$$

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{b} & \cdot \\ \cdot & m_{ds} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{b} & -k_{b} \\ -k_{b} & k_{b} + k_{ds} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} K_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{c1} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} K_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{c2} \end{bmatrix}; f_{i} = \begin{cases} f_{b} \\ f_{ds} \end{cases}_{i}$$
(11)

که در آن N تعداد قطاعهای سیستم پریودیک شامل شفت-دیسک-پره است. چنانچه پیش تر نیز بیان شد اگر نیرو در مد قطری خاصی مانند مد مودال k ام (یا قطر ساکن 1 - k ام) وارد شود تنها پاسخ غیر صفر سیستم، پاسخ مد k ام خواهد بود و پاسخ سیستم در مختصات فیزیکی برابر پاسخ مودال مد قطری متناظر خواهد بود یعنی  $T = u_k = \{u_{k,b}, u_{k,ds}\}^T$  . همچنین قطاعها دارای دامنه حرکتی یکسان و با اختلاف فاز مشخصی خواهند بود. با استفاده از تبدیل مودال رابطه (۵) و یا رابطه (۹)، پاسخ قطاعهای مجاور  $U_{i+2} = u_k e^{2j\sigma_k}$ ,  $U_{i-1} = u_k e^{-j\sigma_k}$  .  $U_{i+1} = u_k e^{j\sigma_k}$ مجاور  $u_{i+2} = u_k e^{2j\sigma_k}$  .  $U_{i-1} = u_k e^{-j\sigma_k}$  است. بنابراین معادله حرکت قطاع ام (رابطه (۱۱)) به شکل زیر در می آید.

$$\begin{bmatrix} m_{b} & . \\ . & m_{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{k,b} \\ \ddot{u}_{k,ds} \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} k_{b} & -k_{b} \\ . & k_{b} + k_{ds} + \\ -k_{b} & 2k_{c1}(1 - \cos(\sigma_{k})) + \\ & 2k_{c2}(1 - \cos(2\sigma_{k})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k,b} \\ u_{k,ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{b} \\ f_{ds} \end{bmatrix}_{k}$$
(17)

ds که در آن $\frac{2\pi(k-1)}{N}$  زاویه فاز بین پرمای است و اندیس  $\sigma_k = \frac{2\pi(k-1)}{N}$  نمایانگر مد حرکتی مشترک دیسک-شفت است. با فرض ارتعاشات آزاد سیستم ( $f_i = \cdot$ )، فرکانسهای طبیعی سیستم از معادله مشخصه زیر بدست میآید.

$$m_{ds}\omega^{4} - \left(\frac{\frac{m_{ds}}{m_{b}}k_{b} + k_{b} + k_{ds} + 2k_{c1}(1 - \cos(\sigma_{k})) + 2k_{c2}(1 - \cos(2\sigma_{k}))}{\frac{k_{b}}{m_{b}}(k_{ds} + 2k_{c1}(1 - \cos(\sigma_{k})) + 2k_{c2}(1 - \cos(2\sigma_{k})))} = 0$$
(17)

ریشههای رابطه (۱۳)، فرکانسهای طبیعی سیستم کاهش مرتبه یافته دو درجه آزادی با کوپلینگ دوبل است که به واسطه عبارت کسینوسی  $(\sigma_{N+2-k}) = \cos(\sigma_k) = \cos(\sigma_{N+2-k})$  به صورت جفت موجهای رونده با اندازه یکسان ولی در جهت مخالف هم در سیستم شفت-دیسک-پره ظاهر می شوند. البته به ازاء اk = k = 2 و k = 1 (اگر N زوج باشد)، این موج منفرد خواهند بود و به صورت جفت ظاهر نخواهند شد. برای این دو مورد اخیر موجهای ایستا در سیستم شکل می گیرند.

لازم است ۴ پارامتر مدل کاهش مرتبه یافته برای مدلسازی رفتار ارتعاشی مدهای ۱۱ و ۱۲ که در شکل ۶ نشان داده شده است شناسایی گردند. برای این منظور از تطابق فرکانسهای طبیعی مدل کاهش مرتبه یافته در مدهای قطری مختلف (رابطه (۱۳)) با فرکانسهای طبیعی شناسایی شده با آنالیز مودال مدل المان محدود (شکل ۶) استفاده میشود. با توجه به تعداد محدود نقاط فرکانسی موجود و از میان انتخابهای مختلف مهندسی که از میان این دادهها ارتعاشی سیستم دارند شناسایی شده است و منحنی تغییرات فرکانس طبیعی این مدلها بر حسب تعداد قطر ساکن، در شکل ۶، با خطوط طبیعی این مدلها بر حسب تعداد قطر ساکن، در شکل ۶، با خطوط ۱۱ و مد قطری ۴ از خانواده ۱۲ آنالیز المان محدود)، خط نقطه (مد قطری صفر، ۱، ۲ و ۵ خانواده ۱۱) و نقطه (مد قطری ۱ و ۲ از خانواده

دو مدل نشان داده شده با خطوط خطچین و نقطه تقریب بهتری از ناحیه پسزنی فرکانس ارائه میدهند، ولی در مدلسازی قطرهای ساکن کم ضعیف هستند. مدل خط-نقطه در مدلسازی ناحیه پسزنی ضعیف است، اما بخوبی توانسته است مد ۱۱ در قطرهای ساکن کم را مدلسازی کند. هر سه مدل در مدلسازی مد ۱۱ در قطرهای ساکن بالا موفق هستند. از آنجا که هدف این بخش، مطالعه کوپل ارتعاشی شفت با دیسک-پره است و بیشتر به محدوده فرکانسی حول قطر ساکن ۱ مد ۱۱ میپردازد، مدلسازی دقیق این ناحیه توسط مدل کاهش مرتبه یافته در اولویت قرار میگیرد. از این رو مدل خط-نقطه مدل مناسبتری برای ادامه این مطالعه به نظر میرسد. پارامترهای بی بعد این مدل که نسبت به جرم و سفتی مودال پره در

 $\overline{m}$  $k_{cl_1}$  $k_{c2}$  $k_{ds_1}$  $f_b$  $=\frac{k_{ds}}{k_{ds}}$  $=\frac{k_{c2}}{k_{c2}}$  $= \frac{\omega_b}{\omega_b}$  $= \frac{m_{ds}}{m_{ds}}$ *k*<sub>*c1*</sub>  $m_b$  $m_{ds}$  $k_b$  $k_{ds}$ k<sub>c1</sub> N/m k<sub>c2</sub> N/m = N/m kg N/m kg  $k_{b}$  $k_{b}$ 2p $m_{h}$  $k_{b}$ 81/809 41/414 1576./00 - 872+/97 914/40 ٠/٨۶٩ 57/11 ۲/89×1+ 1/89+×1+9 ٣/۶۵۵×1+" - 9/ TTT×1+1

جدول ۱- پارامترهای مدل کاهش مرتبه یافته ۲ درجه آزادی با کوپلینگ دوبل Table 1. Parameters of the two-DOF ROM with the double coupling.

مد دوم داخل صفحه پره و جرم کل سیستم، در جدول ۱ ارائه شده است. جرم قطاع ۵۴/۰۸۲ کیلوگرم است و  $m_{ds}$  معرف مجموع جرم مودال شفت و دیسک است. بالا بودن سفتی کوپلینگ مدل کاهش مرتبه یافته به واسطه مدل سازی مد ۱۱ که مدی با فرکانس بالا است میباشد. نکته جالب منفی شدن سفتی کوپلینگ با قطاع غیرمجاور است که نرمشوندگی فرکانسی اولیه را در سیستم مدل سازی میکند.

# ۵- طراحی چاہ غیرخطی انرژی

در هر قطاع پریودیک که شامل یک ست هفت عددی از پرههای متصل به هم در ناحیه شراد است یک چاه غیرخطی انرژی تعبیه میشود. هر چاه غیرخطی انرژی دارای جرم کوچک، فنر الزاماً غیرخطی و یک میراگر خطی ویسکوز است، که روی دیسک برای انتقال غیرمستقیم انرژی ارتعاشی سیستم و به ویژه پره و اتلاف آن نصب میشود. بنابراین تعداد چاهها برابر ۳۷ عدد خواهد بود. مکرانی نشان داد که برای پوشش مد قطری هفتم روی دیسک-پره حداقل ۴ برابر تعداد قطر ساکن یعنی ۲۸ پیزوالکتریک خطی مورد نیاز خواهد بود. با توجه به این مطلب، امکان پوشش ارتعاشات تا قطر ساکن ۹ وجود خواهد داشت که البته در این بخش قطر ساکن اول بررسی میشود بنابراین پوشش کامل تمام حالتهای مختلف قرارگیری چاه و قطر ساکن پوشش داده میشود. شماتیک چاههای غیرخطی افزوده شده به سیستم در شکل ۸ نشان داده شده است.

برای استخراج معادلات دینامیکی سیستم، اگر مطابق شکل ۸ فرض شود که نیروی تحریک تنها به پره وارد میشود معادلات سیستم رابطه (۱۲) با در نظر گرفتن میرایی به شکل زیر در میآید:

$$m_{b}\ddot{u}_{k,b} + c_{b}\dot{u}_{b} + k_{b}u_{k,b} - k_{b}u_{k,ds} = f_{b}\cos\omega t m_{ds}\ddot{u}_{k,ds} + \binom{k_{b} + k_{ds} + 2k_{c1}(1 - \cos(\sigma_{k})) + 2k_{c2}(1 - \cos(2\sigma_{k}))}{2k_{c2}(1 - \cos(2\sigma_{k}))} u_{k,ds} - k_{b}u_{k,b} = 0$$
 (14)

که در آن  $c_b$  میرایی آئرودینامیک است. با افزودن چاه الزاما غیرخطی انرژی (بخش خطی صفر دارد) به دیسک به صورتی که

$$m_{b}\ddot{u}_{k,b} + c_{b}\dot{u}_{b} + k_{b}\left(u_{k,b} - u_{k,ds}\right) = f_{b}\cos\omega t$$

$$m_{ds}\ddot{u}_{k,ds} + \begin{pmatrix}k_{b} + k_{ds} + 2k_{c1}(1 - \cos(\sigma_{k})) + \\ 2k_{c2}(1 - \cos(2\sigma_{k}))\end{pmatrix} \\ -k_{b}u_{k,b} + \epsilon k_{N}\left(u_{k,ds} - u_{N}\right)^{3} + \epsilon c_{N}\left(\dot{u}_{k,ds} - \dot{u}_{N}\right) = 0$$

$$m_{N}\ddot{u}_{N} + \epsilon k_{N}\left(u_{N} - u_{k,ds}\right)^{3} + \epsilon c_{N}\left(\dot{u}_{N} - \dot{u}_{k,ds}\right) = 0$$
(12)

که در آن  $C_N$  میرایی ویسکوز و  $k_N$  سفتی غیرخطی چاه متصل به دیسک است. فنر چاه بخش خطی ندارد و غیرخطی مرتبه سه است. در این مدل سازی فرض شده است که به هر قطاع یک چاه غیرخطی انرژی افزوده شده است بنابراین تعداد چاه غیرخطی سیستم برابر تعداد قطاعهای سیستم است. انرژی ارتعاشی سیستم و به ویژه پره، از طریق دیسک به چاه منتقل و توسط میراگر چاه به صورت یکسویه تلف میشود. اندازه نیروی تحریک خارجی، نیروهای میرایی و همچنین نیروی سفتی غیرخطی چاه از مرتبه کوچک  $\mathfrak{s}$ مرتبه آن نسبت به جرم چاه نیز کوچک در نظر گرفته میشود و شد. برای در نظر گرفتن میرایی سازهای یا هیسترزیس در معادلات شد. برای در نظر گرفتن میرایی سازهای یا هیسترزیس در معادلات ترتیب با  $k_d (1+i\gamma_{ds})$  م به، جایگزین شوند که در آن

مقطع برش خورده سیستم در مد ۱۱ ام قطر ساکن اول در شکل ۹ نشان داده شده است. با توجه به شکل مد تشکیل شده روی دیسک، دو موقعیت A و B چنانچه در شکل نشان داده شده است دارای دامنه بزرگ هستند و هر دو میتوانند موقعیتی برای نصب چاه غیرخطی باشند. موقعیت A شکم مد ایجاد شده در مد دیسک-پره است و جابجائی آن طبق نتایج المان محدود ۱۰٪ بیش از نقطه B است. از طرف دیگر نقطه B محل قرارگیری پرهها روی دیسک و ریشه پره است بنابراین موقعیت A که در فاصله +/۰ متری از محور



شکل ۹: مقطع شفت-دیسک-پره در مد قطری اول مد ۱۱؛ دوایر موقعیت نصب چاه غیرخطی انرژی را نشان میدهند Fig. 9. Shaft-disk-blades system cross section view at the first ND of the 11th mode; circle shows the position of NES.

مرکزی شفت است به عنوان موقعیت نصب چاه غیرخطی انتخاب می شود. شعاع دیسک ۰/۶۹۷۵ متر است و چاه در فاصله حدود ۰/۳ متری از لبه دیسک قرار می گیرد. حدود ۳۷ چاه غیرخطی در دایرهای به شعاع موقعیت نقطه A بدور محور مرکزی شفت و روی دیسک نصب می شوند.

پارامترهای چاه شامل جرم، ضریب سفتی غیرخطی و ضریب میراگر خطی، لازم است تعیین شود. جرم چاه و نیروهای وارد بر سیستم معمولاً کوچک و از مرتبه  $\beta$  در نظر گرفته میشود. در این مطالعه ۲۰/۰۳ =  $\beta$  در نظر گرفته میشود. با این فرض، جرم چاه، از مرتبه  $\beta$  جرم سیستم اصلی یعنی برش دیسک-شفت است و برابر مرتبه  $\beta$  جرم سیستم اصلی یعنی برش دیسک-شفت است و برابر دیسک-پره که حدود  $m_N=\cdot\cdot\cdot\pi$  بدست میآید و در مقایسه با جرم دیسک-پره که حدود kg ۱۲/۸۷۳ است حدود ٪۱۲/۵ جرم سیستم است که مقدار بزرگی است و میتواند روی فرکانسهای طبیعی مقدار یعنی اثر گذار باشد. از این رو مقدار جرم در محدوده ٪۰۰ این مقدار یعنی و ۶/۸ این این میشود. جرم چاه برابر ۱/۵ ٪ جرم برش دیسک-شفت و ۶/۶ ٪ جرم قطاع دیسک-پره است. پارامترهای ضرائب سفتی و میرایی نیز طی فرآیند بهینه سازی چاه غیر خطی برای

# ۶- بهینهسازی چاه غیرخطی انرژی

رابطه (۱۵) معادلات دینامیکی سیستم انعطافپذیر مجهز به چاه

غیرخطی انرژی است. پارامترهای چاه غیرخطی در بخش قبل طراحی گردید و بهینهسازی ضریب سفتی غیرخطی و میرایی خطی چاه در این بخش انجام خواهد شد. هدف حداقل شدن دامنه ارتعاشات پره در محدوده نزدیک رزونانس مد قطری اول است. با توجه به غیرخطی بودن سیستم، لازم است تغییر رفتارهای ارتعاشی سیستم همچون ایجاد رزونانسهای جدید و یا چند پاسخه شدن سیستم نیز چک شود. سایر پارامترهای سیستم به شرح ادامه تعیین می شود.

مقدار نسبت میرایی سازهای <sup>۱</sup> یا میرایی هیسترزیس برای سازه فولادی ۲۰۰۱–۲۰۰۰۱ است [۳۵ و ۳۶] و در این مطالعه مقدار ۲/۱ فولادی ۲۰۰۱ برای آن در نظر گرفته میشود. میرایی آئرودینامیک وارد بر پره تابع پیچیدهای از خواص و سرعت سیال، مد قطری دیسک-پره و پارامترهای دیگر سیستم است که تعیین دقیق آن مبحث جداگانهای است و در اغلب مطالعات، بجز مواردی که مشخص شود، مقدار میرایی ویسکوز معادل آن برابر ۲٪ در نظر گرفته میشود آ[] و در این بخش نیز همین مقدار برای آن در نظر گرفته خواهد شد. اندازه نیروی تحریک ( $f_b$ ) از طریق تخمین میانگین اختلاف فشار واقعی وارد بر پرههای متصل به هم محاسبه و برابر با ۲۶۰ N بدست میآید. مقادیر پارامترهای سیستم در جدول های ۱ و ۲ ارائه شدهاند.

چنانچه که در بخش ۳- اشاره گردید، ارتعاشات سیستم حول

جدول ۲. پارامترهای سیستم دیسک-پره-شفت و چاه غیرخطی انرژی
Table 2. Parameters of the shaft-disk-blade system and the NES.

پارامترهای سیستم			
توضيح	واحد	مقدار	پارامتر
فرکانس مد یازدهم مدهای طبیعی سیستم در مد مودال دوم (یا قطر ساکن اول)	Hz (rad/s)	۷۵۲/۴۵ (۴۷۲۷/۸)	ω <sub>2,11</sub>
نسبت ميرايي آئروديناميک پره	-	•/• )	$\zeta_b$
ضريب ميرايي آئروديناميك	N.s/m	٩٩/٨۶	C <sub>b</sub>
جرم چاہ	kg	۰/٨٠٠	$m_N$
نیروی تحریک خارجی وارد بر مجموعه پرههای متصل به هم	Ν	۳۶۰	$f_b$
قطر دیسک	mm	۱۳۹۵	2 <i>R</i>
میرایی سازهای پره و دیسک-شفت	-	•/•• ١	$\gamma_{ds}$ , $\gamma_{b}$

1 Loss factor

رزونانس ۱:۱ سیستم در مد قطری اول مد ۱۱ که مد ترکیبی شفت-دیسک-پره است بررسی میشود بنابراین فرکانس تحریک در محدوده فرکانسی  $\omega_{,\,\,\alpha} \approx \omega_{2,11} = 1 + \mathbf{o}\sigma$ ) قرار دارد.

برای اجتناب از پیچیدگی حل مساله دیفرانسیل معمولی عددی، میتوان به جای مدلسازی میرایی داخلی یا سازهای به صورت عدد مختلط، از معادل ویسکوز آن استفاده کرد که در این صورت  $\frac{\gamma}{2} = \zeta$ خواهد بود. در بهینهسازی سیستم، به ازاء مقادیر مختلف پارامترهای سیستم، این معادلات به روش عددی رانگ-کوتا<sup>(</sup> حل خواهند شد.

پارامترهای تنظیمی سیستم و چاه غیرخطی انرژی شامل ضریب سفتی غیرخطی و میرایی چاه است. برای بهینهسازی چاه غیرخطی، سفتی محدوده اولیه چاه برای رخداد پاسخ مدوله قوی انجام و ضریب سفتی، محدوده اولیه چاه برای رخداد پاسخ مدوله قوی انجام و ضریب سفتی، در بازه  $\frac{N}{m^3}$  ۲۰۰۰–۲۰۰۰ و میرایی در بازه  $\frac{N}{m^3}$  ۲۰۰۰–۲۰۰۰ تغییر داده میشود و به ازاء هر نقطه، پاسخ فرکانسی شامل دامنه ارتعاش پره در مقادیر مختلف پارامتر انحراف فرکانسی<sup>7</sup> حول نقطه رزونانس ( $m_{2,11}$ ) استخراج و ماکزیمم دامنه مشخص میشود. شکل رزونانس ( $m_{2,11}$ ) استخراج و ماکزیمم دامنه مشخص میشود. شکل مختلف ضریب سفتی غیرخطی و میرایی چاه را نشان میدهد. شکل از مقاد ریاد میشان میدهد. شکل مختلف ضریب سفتی غیرخطی و میرایی می دامنه ارتعاش پره به ازاء مقادیر مختلف و میرایی حول نقطه می می می می دامنه دامنه و میزان میدهد. می می می می دامنه و میزان می دهد. شکل مقادیر محدود  $\frac{N}{m^3}$  از انشان میدهد و مقدار بهینه برای سفتی را در اثر مقادیری می دامنه و میزان می دهد. می می دامنه می دامنه و میزان می دهد. می می دامنه و میزان می دهد. می می دامنه دامنه و میزان می دهد. می می دامنه و میزان می دهد. می دامنه می دامنه می دامنه و میزان می دهد. می دامنه و میزان می دهد و مقدار بهینه برای سفتی را در در در دامنه از می دو میزان می دهد. می دامنه و میزان می دهد و میزان می دهد. و میزان می ده دامنه و میزان می دهد. می دامنه و میزان می دهد و مقدار بهینه برای سفتی را در اثر می دهد و می دار می دامنه و میزان می دهد. می دامنه و میزان می دهد و مقدار بهینه برای سفتی دا در در از می دادنه دامنه می داد. و با میرایی بیش می در در تا می داد و با میرایی دامنه دامنه کاه می می داد و با میرایی دامنه دامنه دامنه می داد و با می داد و سخس



شکل ۱۰ نمایش سهبعدی ماکزیمم پاسخ فرکانسی پره حول نقطه رزونانس به ازاء مقادیر مختلف ضریب سفتی و میرایی چاه الزاماً غیرخطی Fig. 10. Maximum of the blade frequency response in terms of the NES stiffness and damping.

کمتر نیز دامنه به سرعت افزایش مییابد. با پرهیز از نواحی حساس به تغییرات میرایی، نقطه بهینه برای ضریب سفتی و میرایی چاه غیرخطی در شکل نشان داده شده است که به صورت زیر است:

$$k_{N} = 1.0 \times 10^{16} \frac{\text{N}}{\text{m}^{3}}$$

$$c_{N} = 8000 \frac{\text{N.s}}{\text{m}}$$
(19)

۷- تحلیل عملکرد سیستم مجهز به چاه غیرخطی بهینه

سیستم مجهز به چاه غیرخطی (رابطه (۱۵)) بهینهسازی شده، به روش عددی رانگ-کوتاه تحلیل و پاسخ فرکانسی سیستم شفت-دیسک-پره به ازاء مقادیر بهینه در شکل ۱۱ ارائه شده است. در شکل همچنین پاسخ سیستم بدون چاه غیرخطی نیز ارائه شده است. شکل به خوبی تاثیر چاه غیرخطی در کاهش ارتعاشات سیستم به ویژه حول رزونانس را نشان میدهد. در نقطه رزونانس، پیک دامنه ارتعاش از مقدار نسبی ۰/۰۰۰۸۶ (یا ۰/۶ میلیمتر) به مقدار نسبی ۰/۰۰۰۵۳ (یا ۰/۳۷ میلیمتر) کاهش یافته است. چاه، دامنه ارتعاشات پیک را تا ۳۸ درصد کاهش داده است. شکل ۱۱(الف) نشان می دهد که پاسخ سیستم مجهز به چاه در نواحی محدودی با انحراف فرکانسی مثبت، بیش از سیستم بدون چاه غیرخطی است که محدوده کوچکی است و در مقایسه با دامنههای بزرگ حول رزونانس پذیرفتنی است. یاسخ مدوله قوی در محدوده انحراف فرکانسی  $\sigma < 0/16 < \sigma < 0/16$ و با پهنای باند حدود ۴ هرتز حول رزونانس تشکیل می شود. در محدوده ۰/۱۲ <br/> <br/> -۰/۳۶ <br/> (حدود ۱۱ هرتز) پاسخ سیستم با چاه غیرخطی کوچکتر از سیستم بدون چاه غیرخطی است. در محدود و  $^{/47} \sim \sigma < ^{-1}$  پاسخ سیستم غیرخطی بزرگتر  $^{/47} \sim \sigma < ^{-1}$ از سیستم بدون چاه غیرخطی است و البته به مراتب کوچکتر از دامنه رزونانس است و در هر صورت چاه غیرخطی اجازه افزایش دامنه در مرتبه رزونانس را نمیدهد. بجز این ناحیه در بقیه نواحی فرکانسی، دامنه ارتعاش پره و سیستم غیرخطی یکسان است. شکل ۱۱ (ب) نیز پاسخ فرکانسی جابجائی نسبی چاہ را نشان میدھد کہ معمولاً معرف عملکرد چاه است و دامنه نسبتا بزرگ آن حول رزونانس موید فعال شدن پاسخ مدوله قوی و عملکرد قوی است. در چند محدوده دیگر (حول انحراف فركانسی ۰/۰۱ و ۰/۰۲ -) نیز چاه غیرخطی تحریک شده و دامنه آن افزایش می یابد اما بررسی پاسخ زمانی نقاط

<sup>1</sup> Runge-Kutta

<sup>2</sup> Frequency Detuning Parameter



شکل ۱۱. پاسخ فرکانسی پره (الف) و جابجائی نسبی چاه و دیسک-شفت (ب) به ازاء مقادیر بهینه انتخابی برای چاه غیرخطی انرژیی Fig. 11. (a) Blade frequency response with and without the optimized NES, (b) NES relative displacement.

داده خواهد شد. همچنین پیک سیستم با چاه غیرخطی، نزدیک پیک سیستم بدون چاه غیرخطی میشود و چاه غیرخطی عملکرد موثری نخواهد داشت. از این رو لازم است از انتخاب ضریب سفتی غیرخطی کمتر از  $\frac{N}{m^3}$  ۱۰<sup>10</sup> پرهیز شود. در ضریب سفتیهای بالا، پیک رزونانس تا مقدار زیادی حذف میشود اما همانطور که در شکل نیز نشان داده شده است پیک دیگری در انحراف فرکانسی منفی ایجاد

نشان داد که میزان آن برای رخداد پاسخ مدوله قوی کافی نیست و پاسخ نوسانی ساده در سیستم شکل گرفته است. در شکل ۱۲ میزان حساسیت پاسخ سیستم به تغییرات ضریب سفتی چاه غیرخطی نشان داده شده است. شکل نشان میدهد که در سفتیهای کم، پاسخ سیستم به سیستم بدون چاه نزدیک می شود و محدوده کوچک تری نزدیک رزونانس توسط پاسخ مدوله قوی پوشش



شکل ۱۲. حساسیت پاسخ فرکانسی پره به تغییرات ضریب سفتی غیرخطی چاه غیرخطی انرژی Fig. 12. Blade frequency response sensitivity to the nonlinear stiffness of NES.



شکل ۱۳. حساسیت پاسخ فرکانسی پره به تغییرات میرایی خطی چاه در سیستم مجهز به چاه غیرخطی انرژی Fig. 13. Blade frequency response sensitivity to the damping of NES.

> میشود که دامنه بزرگی دارد. در واقع در نواحی انحراف فرکانسی منفی یک جزیره در پاسخ فرکانسی ایجاد میشود که موجب چند پاسخه شدن سیستم میشود. به عبارت دیگر، انشعابی زین اسبی<sup>۱</sup> در سیستم رخ میدهد و موجب ایجاد دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار در سیستم خواهد شد و بستگی به شرایط اولیه، پاسخ پریودیک سیستم ممکن است پاسخ پایدار دامنه بزرگ یا دامنه کوچک شود. از این رو انتخاب ضریب سفتی غیرخطی بزرگ میتواند دامنه ارتعاش پره را در نقطه رزونانس تا بیش از ۲۰۶ کاهش دهد اما پیک دیگری نزدیک رزونانس و با دامنهای تقریبا برابر سیستم بدون چاه داشته باشد از این رو انتخاب ضریب سفتی غیرخطی در عملکرد سیستم باشد از این رو انتخاب ضریب سفتی غیرخطی در عملکرد سیستم

> حساسیت پاسخ فرکانسی پره به ضریب میرایی چاه غیرخطی در شکل ۱۳ نشان داده شده است. چنانچه شکل نیز نشان میدهد، با کاهش میرایی، محدوده پاسخ مدوله قوی در انحراف مثبت فرکانسی گسترش مییابد و علاوه بر افزایش دامنه پاسخ در نزدیکی نقطه رزونانس، محدودهای که پاسخ سیستم با چاه غیرخطی بزرگتر از سیستم بدون چاه است، گسترش مییابد. با کاهش بیشتر میرایی، انشعابی زین اسبی در انحراف فرکانسی منفی پاسخ فرکانسی ایجاد شده و دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار در سیستم ایجاد میشود و بسته به شرایط اولیه سیستم، امکان جذب پاسخ سیستم به یکی از دو پاسخ پایدار وجود دارد که دامنه بزرگ آن بیش از پاسخ مدوله قوی است. در عمل به واسطه ایجاد یک پیک دیگر در سیستم نزدیک نقطه رزونانس، عملکرد مطلوبی در این شرایط برای چاه دیده نمیشود. با

افزایش میرایی همانطور که در شکل ۱۰ نیز دیده میشود، حداکثر پاسخ سیستم حساسیت چندانی نشان نمیدهد، ولی محدوده رخداد پاسخ مدوله قوی کاهش مییابد و بیش از حد معینی از میرایی، دیگر پاسخ مدوله قوی در سیستم رخ نخواهد داد.

پاسخ زمانی ارتعاشات پره و جابجائی نسبی چاه در سیستم مجهز به چاه غیرخطی با مقادیر بهینه، در انحراف فرکانسی ۰/۰۷ نسبت به نقطه رزونانس که در بازه رخداد پاسخ مدوله قوی در سیستم است،



شکل ۱۴. پاسخ زمانی پره (الف) و چاه (ب) در انحراف فرکانسی  $\sigma = \cdot / \cdot \gamma$ فرکانس  $\omega = \epsilon \gamma \gamma \gamma 7 \text{ rad/s}$ Fig. 14. (a) Blade and (b) NES time responses at  $\sigma = 0.07$  or  $\omega = 4737.2 \text{ rad/s}.$ 

<sup>1</sup> Saddle-Node

در شکل ۱۴ نشان داده شده است. شکل ۱۴(الف) پاسخ زمانی پره را نشان میدهد. شکل ۱۴(ب) پاسخ زمانی جابجائی نسبی چاه نسبت به دیسک را نشان میدهد. رخداد پاسخ مدوله قوی کاملاً مشخص است. پرش از دامنه پایین به بالا، منیفولد آهسته دامنه حرکت سیستم و پرش از دامنه بالا به پایین در پاسخ فرکانسی چاه به وضوح دیده میشود. این پرشهای دامنه حرکتی چاه با توجه به میرایی متصل بین چاه و دیسک، انتقال پریودیک هدفمند انرژی را نشان میدهد.

## ۸- نتیجهگیری

در این مقاله کارکرد چاه غیرخطی انرژی در کاهش ارتعاشات پره در سیستم شفت-دیسک-پره انعطاف پذیر بررسی گردید. پایه بررسی و طراحی چاه، نمودار فرکانسی روتور دوار است که از نتایج آنالیز مودال مدل متقارن چرخهای سیستم واقعی استخراج گردید. سیستم واقعی ۳۷ مجموعه ۷ پرهای از یک توربین بخاری ۳۰ مگاواتی صنعتی است. در محدوده تداخل دینامیکی موثر سه جزء شفت، دیسک و پرهها با یکدیگر که مد ترکیبی هر سه است مدل کاهش مرتبه یافته توارن چرخهای موجب کاهش معادلات کل سیستم به یک قطاع گردید. برای کاهش ارتعاشات پره در مد قطری اول مد ۱۱، ۳۷ چاه غیرخطی انرژی روی دیسک تعبیه و طراحی گردید و ضریب سفتی غیرخطی و ضریب میرایی خطی نیز برای داشتن عملکرد مناسب

مد قطری صفر و یک تنها مدهای قطری هستند که امکان کوپل دینامیکی شفت با دیسک و پره وجود دارد. در خانواده سوم مدهای طبیعی در مد قطری اول سه جزء کوپل دینامیکی دارند که البته موجب تحریک چاه نمیشود. یعنی چاه غیر خطی در اولین مد ترکیبی که در آن حرکت پرهها نیز داخل صفحه دیسک است، عملکردی ندارد. در خانواده ۱۱ مدهای طبیعی که دومین مد ترکیبی سه جزء است و شفت در مد دوم خمشی عرضی است، چاه غیرخطی از ترکیب حرکت دیسک و شفت انرژی می گیرد و تحریک میشود و مملکرد موثری در کاهش دامنه دارد. تحلیل عددی عملکرد سیستم مجهز به چاه غیرخطی بهینه در این مد نشان داد که چاه غیرخطی با رخداد پاسخ مدوله قوی، دامنه رزونانس را تا ۳۸ درصد کاهش

بالاتری نسبت به ضریب میرایی دارد. سفتی کمتر از  $\frac{N}{m^3}$  ۱۰<sup>10</sup> و بیش از  $\frac{N}{m^3}$  ۱۰<sup>10</sup> عملکرد نامطلوب در سیستم ایجاد می کند. میراییهای کم و سفتیهای بزرگ موجب گسترش ناحیه جزیره نزدیک رزونانس شده و انشعاب زین اسبی در پاسخ فرکانسی ایجاد می کند که امکان پاسخ پریودیک دامنه بزرگ در انحراف فرکانسیهای منفی وجود خواهد داشت.

## فهرست علائم

$C_b$	N.S/M ،( $2\pi_{Sb}$ )، میرایی ائرودینامیک پره (
$C_N$	ضریب میرایی چاه، N.s/m
[E]	ماتريس تبديل فوريه
{ <i>e</i> <sub><i>i</i></sub> }	ستون <i>أ</i> ام ماتریس فوریه
$f_b$	نیروی خارجی (آئرودینامیک) وارد بر پره، N
[K]	ماتریس سفتی قطاع
$[K_c]$	ماتریس سفتی کوپلینگ
$\left[\widetilde{K}\right], \left[\widetilde{K}_{D}\right]$	ماتریسهای سفتی سیستم
$k_b$	سفتی پره، N/m
k <sub>c</sub>	سفتی کوپلینگ بین قطاعها، N/m
$k_{ds}$	سفتی دیسک–شفت، N/m
$k_N$	ضریب سفتی غیرخطی چاہ، N/m <sup>3</sup>
[M]	ماتریس جرم قطاع
$\left[\widetilde{M}\right]$ , $\left[\widetilde{M}_{D}\right]$	ماتریسهای جرم سیستم
$m_b$	جرم پره، kg
$m_{ds}$	جرم مودال دیسک-شفت، kg
$m_N$	جرم چاه، kg
$\overline{m}$	نسبت جرم مودال دیسک به جرم مودال پره
Ν	تعداد قطاعها
R	شعاع دیسک، m
$U_i$	موقعیت درجات آزادی قطاع <i>i</i> ام در مختصات فیزیکی یا ساکن،
$u_N$	جابجائی چاہ غیرخطی در مختصات فیزیکی، m
$u_{k,b}$	جایجائی پره در k امین مد مودال دیسک-پره، m
$u_{k,ds}$	جایجائی دیسک در k امین مد مودال دیسک-پره، m
$Z(\omega)$	سفتی دینامیکی سیستم
$\epsilon$	نسبت جرمی چاہ
$\gamma_b, \gamma_{ds}$	میرایی سازهای پره و دیسک-شفت
$\kappa_d, \kappa_c$	نسبت سفتی دیسک و کوپلینگ به سفتی پره
$\omega_b$	فرکانس طبیعی خمشی پره، rad/s
$\omega_{k,n}$	فرکانس n امین خانواده مدهای طبیعی در k امین
	مد مودال یا ۱-k امین مد قطری، rad/s
σ	پارامتر انحراف فرکانسی
$\sigma_{\nu}$	زاویه فاز بین پرهای در <i>k</i> امین مد مودال سیستم

m

(2011) 1127-1135.

- [11] P. Polach, Evaluation of the suitability of the bladed disk design regarding the danger of the resonant vibration excitation. Engineering Mechanics, 18 (3–4) (2011) 181–191.
- [12] A. P. I. Std, 612 Special Purpose Steam Turbines for Petroleum. Chemical and Gas Industry Services, (n.d.).
- [13] Y.-J. Chiu, X.-Y. Li, Y.-C. Chen, S.-R. Jian, C.-H. Yang, & I.-H. Lin, Three methods for studying coupled vibration in a multi flexible disk rotor system. Journal of Mechanical Science and Technology, 31 (11) (2017) 5219–5229.
- [14] S. Bab, S. E. Khadem, & M. Shahgholi, Lateral vibration attenuation of a rotor under mass eccentricity force using non-linear energy sink. International Journal of Non-Linear Mechanics, 67 (2014) 251–266.
- [15] B. Bergeot, S. Bellizzi, & B. Cochelin, Passive suppression of helicopter ground resonance using nonlinear energy sinks attached on the helicopter blades. Journal of Sound and Vibration, 392 (2017) 41–55.
- [16] B. Mokrani & A. Preumont, A numerical and experimental investigation on passive piezoelectric shunt damping of mistuned blisks. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, (2017) 1045389X17721023.
- [17] S. M. Schwarzendahl, J. Szwedowicz, M. Neubauer,
   L. Panning, & J. Wallaschek, On blade damping technology using passive piezoelectric dampers.
   ASME Turbo Expo 2012: Turbine Technical Conference and Exposition, (2012) 1205–1215.
- [18] A. S. Alsuwaiyan & S. W. Shaw, Performance and dynamic stability of general-path centrifugal pendulum vibration absorbers. Journal of Sound and Vibration, 252 (5) (2002) 791–815.
- [19] O. V. Gendelman, Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators. Nonlinear Dyn., Springer, 2001, pp. 237–253.
- [20] O. Gendelman, L. I. Manevitch, A. F. Vakakis,& R. M'closkey, Energy pumping in nonlinear

[1] G. Óttarsson, Dynamic modeling and vibration analysis of mistuned bladed disks. (1994).

مراجع

- [2] D. J. Mead, Wave propagation and natural modes in periodic systems: I. Mono-coupled systems. Journal of Sound and Vibration, 40 (1) (1975) 1–18.
- [3] B. J. Olson, S. W. Shaw, & C. Pierre, Order-tuned vibration absorbers for a rotating flexible structure with cyclic symmetry. Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference—DETC2005, 1 (2005) 2475–2484.
- [4] G. Genta, Dynamics of rotating systems, Springer Science & Business Media, 2007.
- [5] B. Zhou, F. Thouverez, & D. Lenoir, Vibration reduction of mistuned bladed disks by passive piezoelectric shunt damping techniques. AIAA journal, (2014).
- [6] S. Gozen, B. J. Olson, S. W. Shaw, & C. Pierre, Resonance suppression in multi-degree-of-freedom rotating flexible structures using order-tuned absorbers. Journal of Vibration and Acoustics, 134 (6) (2012) 61016.
- [7] B. Bergeot, S. Bellizzi, & B. Cochelin, Analysis of steady-state response regimes of a helicopter ground resonance model including a non-linear energy sink attachment. International Journal of Non-Linear Mechanics, 78 (2016) 72–89.
- [8] B. Zhou, F. Thouverez, & D. Lenoir, Essentially nonlinear piezoelectric shunt circuits applied to mistuned bladed disks. Journal of Sound and Vibration, 333 (9) (2014) 2520–2542.
- [9] M. Singh, SAFE Diagram-A Dresser-Rand Evaluation Tool For Packeted Bladed Disc Assembly. Technology Report Dresser-Rand Company, TP025, (1984).
- [10] V. Kharyton, C. Gibert, L. Blanc, & F. Thouverez, Elements of Dynamic Characterization of a Bladed Disk by Using the Tip-Timing Method Under Vacuum Conditions. ASME 2011 Turbo Expo: Turbine Technical Conference and Exposition,

blisk-journal bearing system employing smooth nonlinear energy sinks. Mechanical Systems and Signal Processing, 84 (2017) 128–157.

- [28] C. Guo, M. A. AL-Shudeifat, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland, & J. Yan, Vibration reduction in unbalanced hollow rotor systems with nonlinear energy sinks. Nonlinear Dynamics, 79 (1) (2015) 527–538.
- [29] Y. S. Lee, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland, & G. Kerschen, Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 1: theory. AIAA journal, 45 (3) (2007) 693.
- [30] Y. S. Lee, G. Kerschen, D. M. McFarland, W. J. Hill, C. Nichkawde, T. W. Strganac, L. A. Bergman, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland, & G. Kerschen, Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 2: experiments. AIAA journal, 45 (10) (2007) 2391.
- [31] H. Guo, Y. Chen, & T. Yang, Limit cycle oscillation suppression of 2-DOF airfoil using nonlinear energy sink. Applied Mathematics and Mechanics, 34 (10) (2013) 1277–1290.
- [32] M. A. AL-Shudeifat, Highly efficient nonlinear energy sink. Nonlinear Dynamics, 76 (4) (2014) 1905–1920.
- [33] ANSYS Inc. Release 15.0, ANSYS Mechanical APDL Element Reference. (2013).
- [34] A. Muszynska, Rotordynamics, CRC press, 2005.
- [35] E. I. Rivin, Handbook on stiffness & damping in mechanical design, ASME Press New York, 2010.
- [36] M. P. Norton & D. G. Karczub, Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers, Cambridge university press, 2003.

mechanical oscillators: Part I—Dynamics of the underlying Hamiltonian systems. Journal of Applied Mechanics, 68 (1) (2001) 34–41.

- [21] O. V Gendelman, G. Sigalov, L. I. Manevitch, M. Mane, A. F. Vakakis, & L. A. Bergman, Dynamics of an eccentric rotational nonlinear energy sink. Journal of applied mechanics, 79 (1) (2012) 11012.
- [22] Y. S. Lee, F. Nucera, A. F. Vakakis, D. M. McFarland, & L. A. Bergman, Periodic orbits, damped transitions and targeted energy transfers in oscillators with vibro-impact attachments. Physica D: Nonlinear Phenomena, 238 (18) (2009) 1868– 1896.
- [23] S. Bab, S. E. Khadem, M. K. Mahdiabadi, & M. Shahgholi, Vibration mitigation of a rotating beam under external periodic force using a nonlinear energy sink (NES). Journal of Vibration and Control, 23 (6) (2017) 1001–1025.
- [24] E. Gourdon, N. A. Alexander, C. A. Taylor, C.-H. Lamarque, & S. Pernot, Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling: Theoretical and experimental results. Journal of sound and vibration, 300 (3) (2007) 522–551.
- [25] A. F. Vakakis, O. V Gendelman, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen, & Y. S. Lee, Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems, Springer Science & Business Media, 2008.
- [26] Z. Lu, Z. Wang, Y. Zhou, & X. Lu, Nonlinear dissipative devices in structural vibration control: A review. Journal of Sound and Vibration, 423 (2018) 18–49.
- [27] S. Bab, S. E. Khadem, M. Shahgholi, & A. Abbasi, Vibration attenuation of a continuous rotor-