



کاهش بهینه ارتعاشات سیستم شفت-دیسک-پره انعطاف‌پذیر با استفاده از مجموعه چاه‌های غیرخطی انرژی روی دیسک

جعفر آقاییاری^۱، پدram صفرپور^{۱*}، عباس رهی^۱، سعید باب^۲

^۱- دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران.

^۲- گروه تجهیزات دوار مکانیکی، پژوهشگاه نیرو، تهران، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۱۵

بازنگری: ۱۳۹۸/۰۴/۰۷

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۳۱

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۷/۲۴

کلمات کلیدی:

شفت-دیسک-پره انعطاف‌پذیر

چاه غیرخطی انرژی

تقارن چرخه‌ای

نمودار فرکانسی

پاسخ مدوله قوی

خلاصه: در این مقاله کاربرد چاه غیرخطی انرژی در کاهش غیرمستقیم ارتعاشات پره‌های سیستم شفت-دیسک-پره انعطاف‌پذیر نمونه توربین بخاری واقعی با نصب روی دیسک بررسی می‌شود. ۳۷ مجموعه هفت عددی پره متصل به هم در شراد به دور دیسک نصب شده‌اند. از تحلیل المان محدود مدل متقارن چرخه‌ای شفت-دیسک-پره برای استخراج مدهای طبیعی و نمودار فرکانسی استفاده می‌شود. مدل چرخه‌ای شامل یک مجموعه هفت‌پره‌ای و برشی از دیسک-شفت است. برای دومین مد فرکانسی ترکیبی که مد خمشی دوم شفت و سوم دیسک-پره است، مدل کاهش مرتبه ۲ درجه آزادی با قابلیت مدل‌سازی نرم‌شوندگی فرکانسی سیستم شناسایی می‌شود. چاه غیرخطی انرژی که شامل یک جرم کوچک، فنر الزاما غیرخطی و میرایی خطی است روی این مدل در محل جرم مودال دیسک-شفت نصب می‌شود. برای حل معادلات غیرخطی سیستم از حل عددی به روش رانگ-کوتا استفاده و پارامترهای ضریب سفتی و میرایی برای حداقل سازی دامنه ارتعاش پره بهینه می‌گردد. نتایج تحلیل، وقوع پاسخ مدوله قوی در بازه‌ای حول رزونانس و کاهش مطلوب دامنه ارتعاش پره را نشان می‌دهد. سیستم به سفتی غیرخطی حساس است و در ضریب سفتی بزرگ و با میرایی‌های کوچک، انشعابی زین اسبی در نزدیک رزونانس ایجاد و امکان پاسخ نوسانی ساده دامنه بزرگ وجود خواهد داشت.

۱- مقدمه

تقاضای صنعت برای بازدهی بالا و عملکرد بهتر تجهیزات دوار منجر به طراحی توربین‌ها نزدیک به شرایط بحرانی شده است و حاشیه پایداری‌های دینامیکی و آئرودینامیکی کوچکتر شده است. دامنه‌های بزرگ ارتعاش تجهیزات منجر به تماس و سایش قطعات ثابت و متحرک توربوماشین‌ها می‌شود از این رو در سال‌های اخیر توجه ویژه‌ای معطوف به ارتعاشات تجهیزات دوار همچون توربین‌ها شده است تا دامنه ارتعاشات اجزاء آن همچون دیسک‌ها، پره‌ها و شفت برای افزایش عمر و پیشگیری از خرابی کاهش یابد.

توربین‌ها معمولاً شامل چندین مرحله هستند و هر مرحله از یک ردیف ثابت و متحرک تشکیل شده است. ردیف متحرک معمولاً شامل یک دیسک دوار است که تعدادی پره در محیط پیرامون آن نصب شده‌اند. ردیف‌های متحرک معمولاً روی یک یا دو شفت نصب می‌شوند. به واسطه تقارن محوری مجموعه شفت-دیسک-پره، آنالیز استحکامی و ارتعاشی کل مجموعه، به آنالیز مجموعه کوچکتر با تعداد

درجه آزادی کمتر به صورت تنها یک قطاع^۱ منجر می‌شود [۱] و [۲] و میزان محاسبات به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد. علی‌رغم کاهش قابل توجه سایز سیستم، باز هم تعداد درجات آزادی یک قطاع برای تحلیل سیستم زیاد است و بنابراین مدل‌های کاهش مرتبه یافته مختلفی برای کاهش تعداد درجات آزادی یک قطاع نیز استفاده می‌شود. مدل‌های کاهش مرتبه یافته در مطالعات متعددی برای بررسی خواص ارتعاشی دیسک-پره‌ها بکار گرفته شده‌اند [۱، ۳ و ۵]. استفاده از مدل کاهش مرتبه یافته به این معنی است که سیستم پیچیده شفت-دیسک-پره انعطاف‌پذیر می‌تواند با مدل جرم و فنر با تعداد محدودی درجه آزادی مدل شود. نوع مدل کاهش مرتبه یافته و تعداد درجات آزادی (جرم‌های گسسته) آن با توجه به تعداد خانواده مد طبیعی مورد نظر برای مطالعه و تغییرات فرکانس این خانواده‌ها (بر حسب تعداد قطر ساکن) تعیین می‌شود. قطاع‌ها با یک یا چند فنر که کوپلینگ بین قطاع‌ها را تشکیل می‌دهند به هم متصل هستند



نماید. معمولاً فاصله فرکانسی زیادی بین فرکانس مدهای شفت با مدهای نوسانی روی پره و دیسک وجود دارد.

جنتا [۴] به بررسی حرکت هماهنگ پره‌ها و کوپل دینامیکی آن با حرکت جانبی، محوری و پیچشی دیسک و شفت پرداخته است و مشخص شده است که بجز چند دسته از مدهای اولیه مجموعه پره‌ها (مد قطری صفر و یک)، سایر حرکات مجموعه پره‌ها عملاً همدیگر را خنثی نموده و اینرسی موثری برای کوپل دینامیکی با حرکت دیسک و شفت نخواهند داشت. حرکت داخل صفحه همفاز پره‌ها با مد پیچشی دیسک و شفت کوپل می‌شود و با مدهای خمشی روتور (شفت و دیسک) کوپل نیست. حرکت هماهنگ پره‌ها در مد قطری اول با خمش محور و جابجائی عرضی دیسک کوپل می‌شود و با مدهای پیچشی کوپل نیست. سیستم دیسک-روتور انعطاف‌پذیر، سه نوع کوپل ارتعاشی از خود نشان می‌دهد که شامل مدهای بین پره‌ای، شفت-دیسک-پره و دیسک-پره است [۱۳]. تجزیه حرکت مجموعه پره‌ها به صورت ترکیبی از حرکت هماهنگ آن‌ها در مدهای مختلف قطری (و یا فازهای مختلف حرکتی پره‌ها نسبت به هم) که با تبدیلات مودال [۱۴] و کلمن [۱۵] صورت می‌گیرد کاهش قابل توجهی در تعداد معادلات و محاسبات داشته است [۴، ۱۴ و ۱۵].

برای بهبود عملکرد دینامیکی سیستم و کاهش دامنه ارتعاشات اجزاء، از تجهیزات افزایش‌دهنده میرایی فعال و غیرفعال استفاده می‌شوند که روش‌های غیرفعال به واسطه قیمت پایین‌تر و پیچیدگی کمتر، مورد توجه بیشتری هستند. متصل کردن پره‌ها به یکدیگر در نقاط میانی و نوک پره‌ها و استفاده از میراگرهای اصطکاکی بخصوص در زیر پره‌ها، که تداخلی با جریان ایجاد نکنند، روش‌های غیرفعال متداول کاهش دامنه ارتعاشات، به ویژه در گذر از سرعت‌های بحرانی است. تجهیزات اخیر میرایی قابل توجهی در سیستم ایجاد می‌کنند، اما پیچیدگی مدل‌سازی آن‌ها و تمایل صنعت به ساخت یکپارچه دیسک و پره، استفاده از آن‌ها را محدود می‌سازد. در رویکرد دیگر، از میراکننده‌های ارتعاشی که جاذب خطی و یا غیرخطی انرژی^۴ نامیده می‌شوند، در سیستم‌های دوار استفاده می‌شود. جاذب‌های خطی انرژی که معمولاً قابلیت تنظیم مرتبه نیز با توجه به مرتبه تحریک را دارند، در انواع مختلفی همچون پیزوالکتریک روی دیسک [۱۶] و پره [۱۷] و پاندول گریز از مرکز با نصب در مسیرهای طراحی شده روی

تا سیستم شفت-دیسک-پره کامل را تشکیل دهند. از این مدل‌های کاهش مرتبه یافته برای بررسی رفتار سیستم هنگام افزودن تجهیزات جانبی مانند جاذب خطی [۵ و ۶] و غیرخطی [۷ و ۸] به سیستم دیسک-پره استفاده شده است.

معمولاً نمودار کمپبل برای بررسی رزونانس سیستم‌های دوار استفاده می‌شود. در سیستم‌های متقارن محوری همچون دیسک-پره، نمودار کمپبل رزونانس‌های محتمل را ارائه می‌کند. رزونانس‌های قطعی را نمودار ارزیابی فرکانسی سینگ^۱ یا نمودار سیف [۹] مشخص می‌کند. در این نمودار، فرکانس‌های طبیعی و تحریک به صورت تابعی از تعداد قطر ساکن^۲ یا مد قطری نمایش داده می‌شوند. طبق نمودار سیف، برای رخداد رزونانس قطعی در سیستم، نه تنها فرکانس‌های طبیعی و تحریک لازم است برابر باشند، بلکه شکل تحریک و شکل مد سازه‌ای نیز لازم است بر هم منطبق باشند [۹-۱۱]. به عنوان نمونه اگر تحریکی با فرکانس f در هارمونیک دوم (یعنی وقتی پیرامون دایره کامل دیسک حرکت شود، نیروی تحریک به صورت نوسانی دو پیک مثبت و دو پیک منفی داشته باشد و این شکل مد تحریک است) وارد شود مد طبیعی که در مد قطری سوم است (سه قطر ساکن روی دیسک تشکیل شده است) و فرکانس مشابه f را دارد، نمی‌تواند تحریک کند و رزونانس ایجاد نمی‌شود. اما اگر مد طبیعی در مد قطری دوم، فرکانس طبیعی آن نیز f باشد، قطعاً تحریک خواهد شد. تحریک می‌تواند ناشی از عبور جریان سیال از پره‌های ساکن باشد که در این صورت فرکانس تحریک مضرب تعداد پره‌های ثابت و سرعت روتور است و به آن تحریک گذر پره^۳ نیز اطلاق می‌شود که در این صورت تعداد پره‌های ثابت، هارمونیک نیرو یا همان شکل تحریک را مشخص خواهند کرد. همچنین هارمونیک تفاضل تعداد پره‌های ثابت ردیف‌های جلوتر یا عقب‌تر نیز ممکن است تحریک ایجاد کند [۱۲]. در توربین‌های بخار عمدتاً مدهای قطر ساکن ۲ تا ۶ در بررسی احتمال رزونانس‌های ارتعاشی مهم می‌باشند [۱۱]. از منابع تحریک دیگر در سیستم‌های دوار می‌توان به نامیزانی جرمی روی روتور، خروج از مرکز شفت و خمیدگی شفت اشاره کرد که موجب ویرل شفت با سرعتی برابر سرعت دوران روتور می‌شود. نامیزانی زاویه‌ای و موازی در یاتاقان‌ها علاوه بر پاسخ $1X$ می‌تواند پاسخ $2X$ نیز در سیستم ایجاد

1 Sing's Advanced Frequency Evaluation (SAFE) diagram
2 Nodal Diameter (ND)
3 Vane Passing Frequency (VPF)

غیرخطی انرژی روی دیسک می‌تواند میرا شود [۱۴] و یا در سیستم پیچیده‌تر پره‌ها-دیسک-شفت-یاتاقان‌ها، چاه‌های غیرخطی نصب شده روی دیسک و یاتاقان‌ها به طور محلی در کاهش دامنه ارتعاشات شفت و پره‌ها موثر هستند [۲۷]. در این مطالعات عموماً دیسک صلب است. در ایرفویل هواپیما جذب انرژی ارتعاشی مد پیچ توسط چاه غیرخطی نصب شده در جهت لیفت بررسی تحلیلی [۲۹] و تجربی [۳۰] شده است و عملکرد مناسب آن در به تاخیر انداختن ناپایداری فلاتر هنگام نصب در آفست مثبت تأیید شده است. البته گوئو و همکاران [۳۱] نشان دادند که در بعضی سرعت‌های جریان سیال، چاه نصب شده روی ایرفویل عملکرد مناسب ندارد. در جذب انرژی ارتعاشی پره‌های دیسک-پره با نصب چاه غیرخطی انرژی روی دیسک، قدرت کوپلینگ بین دو مد نقش کلیدی در عملکرد چاه غیرخطی خواهد داشت. مطالعه قدرت کوپلینگ و ارتعاشات کوپل پره‌ها و دیسک نیازمند مطالعه نمودار سیف سیستم است [۸، ۱۶ و ۱۷].

تحریک وارد بر سیستم در اغلب تحقیقات در زمینه کاربرد چاه غیرخطی از نوع ضربه یا شوک است و بخاطر فقدان فرکانس طبیعی ذاتی برای چاه، انتقال انرژی ارتعاشی سیستم از طریق تعدادی کانال انرژی با فرکانس‌های مختلف بنام مدهای متعامد غیرخطی^۶ صورت می‌گیرد. چاه غیرخطی انرژی معمولاً عملکرد بهتری هنگام اعمال ضربه بزرگ از خود نشان می‌دهد [۳۲]، البته برای تحریک‌های خیلی بزرگ چاه غیرفعال می‌شود. در سیستم‌های تحت تحریک نوسانی جذب انرژی توسط چاه و ائتلاف آن برپایه رخداد نوسانات تخفیف‌یافته^۷ در پاسخ سیستم یا پاسخ مدوله قوی^۸ است. در واقع، پاسخ مدوله قوی یک پرش ممتد بین دامنه‌های پایین و بالا هنگام تحریک نوسانی است [۲۳ و ۲۵].

بررسی کاربرد چاه غیرخطی در کاهش ارتعاشات پره سیستم شفت-دیسک-پره انعطاف‌پذیر با مشخصات نمونه واقعی و با تعداد زیاد پره که تاکنون انجام نشده است، در این تحقیق مورد توجه است. تحلیل روی سیستم واقعی دیسک-پره شامل ۲۵۹ پره که در ۳۷ مجموعه ۷ پره‌ای قرار گرفته‌اند صورت خواهد گرفت. پره‌های هر مجموعه توسط شراد نوک به هم متصل هستند. مدل متقارن چرخه‌ای^۹ از سازه با استفاده از نرم‌افزار المان محدود تحلیل مودال

دیسک [۱۸] یا پره [۳] مطالعه شده‌اند که بطور موثری در کاهش ارتعاشات پره و یا پیچش روتور موثر هستند.

با ارائه مفهوم انتقال هدفمند انرژی^۱ یا پمپ انرژی [۱۹ و ۲۰]، مطالعات متعددی در زمینه استفاده از انواع جاذب‌های غیرخطی مانند پیژوالکتریک [۸]، غیرخطی دورانی [۲۱]، ضربه‌ای [۲۲] و چاه غیرخطی یکنواخت [۲۳] انجام شده است که سیستم اولیه عمده آن‌ها نوسانگر خطی است. این جاذب‌های غیرخطی با نام چاه غیرخطی انرژی^۲ شناخته می‌شوند. جاذب خطی انرژی^۳ می‌تواند در نقطه رزنانس، دامنه ارتعاش را به مقدار زیادی کاهش دهد، اما ضعف آن در ایجاد دو نقطه رزنانسی جدید در نزدیکی رزنانس اصلی است و این به معنای حساسیت بالای آن به تغییر پارامترهای سیستم در طول زمان است هر چند چاه غیرخطی انرژی در نقطه رزنانس ممکن است به اندازه جاذب خطی دامنه را کاهش ندهد [۲۳] اما فرکانس طبیعی ذاتی برای خود ندارد و دو پیک در اطراف رزنانس اصلی ایجاد نمی‌کند. جاذب خطی فقط می‌تواند روی یک مد کارا باشد و بنابراین لازم است برای نقطه رزنانسی مورد نظر تنظیم شود، در حالی که چاه غیرخطی می‌تواند برای چند رزنانس تنظیم شود و دامنه ارتعاشات همه آن‌ها را تا حد معقولی همزمان کاهش دهد [۲۴ و ۲۵].

در اغلب مطالعات مربوط به چاه غیر خطی انرژی، سیستم اصلی خطی است [۲۶] و در تعداد کمی از موارد سیستم اصلی غیرخطی است [۲۷] که بدلیل پیچیدگی ناشی از غیرخطی شدن مضاعف کل سیستم، تحلیل این سیستم‌ها معمولاً بصورت عددی انجام می‌گردد. در سیستم‌های دوار همچون هلیکوپتر، کاربرد چاه‌های غیرخطی انرژی برای کاهش ارتعاشات پره‌ها با نصب آن‌ها در کابین [۷] یا روی پره‌ها [۱۵] بررسی شده است. از تبدیل کلمن^۴ و روش میانگین‌گیری پیچیدگی^۵ برای کاهش درجات آزادی سیستم و حل معادلات غیرخطی استفاده شده است. چاه غیرخطی انرژی، هنگام نصب روی پره عملکرد موثرتری در میرا کردن ناپایداری ناشی از رزونانس زمین از خود نشان می‌دهد. با نصب و تنظیم مناسب چاه غیرخطی انرژی در روتورهای توخالی توربین-ژنراتور امکان کاهش دامنه ویرل شفت تحت اثر نامیزانی جرمی وجود دارد [۲۸]. ویرل روتور جفکات با افزودن چاه

- 1 Targeted Energy Transfer (TET)
- 2 Nonlinear Energy Sink (NES)
- 3 Linear Absorber or Tuned Mass Damper
- 4 Coleman
- 5 Complexification-Averaging Method

6 Nonlinear Normal Mode

7 Relaxation Oscillation

8 Strongly Modulated Response (SMR)

9 Cyclic Symmetric Model

ویژگی‌های ناشی از تقارن چرخه‌ای که مشخصه تمام دیسک-پره‌های میزان است برای مدل‌سازی سیستم این مطالعه استفاده خواهد شد. دیسک-پره، آرایه قطبی از قطعات است که هر قطعه شامل یک یا تعداد پره و قطعه‌ای از دیسک یا دیسک-شفت است. قطعه i ام دارای درجات آزادی U_i ، ماتریس اینرسی $[M]$ و ماتریس سفتی $[K]$ است. ابعاد این ماتریس‌ها $m \times m$ است که m تعداد درجات آزادی در هر قطعه است. ماتریس سفتی کوپلینگ با $[K_c]$ نشان داده می‌شود و فرض می‌شود نیروی تحریک f_i به قطعه وارد می‌شود. با صرف‌نظر از میرایی، معادله حرکت قطعه به شکل زیر است:

$$[M]\ddot{U}_i + [K]U_i + [K_c](U_i - U_{i-1}) + [K_c](U_i - U_{i+1}) = f_i, i=1 \dots N \quad (1)$$

یا

$$[M]\ddot{U}_i + ([K] + 2[K_c])U_i - [K_c]U_{i-1} - [K_c]U_{i+1} = f_i, i=1 \dots N \quad (2)$$

که N تعداد قطعات دیسک پره است. معادله کل سیستم با لحاظ تمام درجات آزادی به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} [M_1] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [M_N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \vdots \\ \ddot{U}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[K_c] & & & 0 & 0 & \\ 0 & -[K_c] & [K] + 2[K_c] & & -[K_c] & & \\ 0 & -[K_c] & & [K] + 2[K_c] & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} \quad (3)$$

و یا

$$[\tilde{M}]\ddot{U} + [\tilde{K}]U = f \quad (4)$$

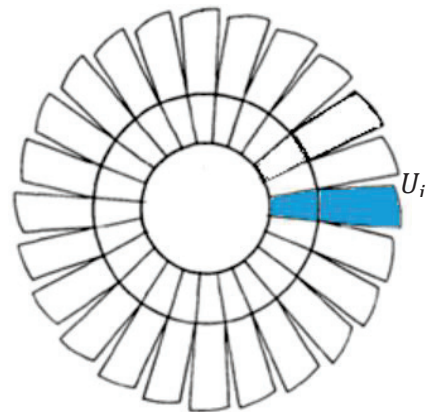
که در آن $[\tilde{M}]$ و $[\tilde{K}]$ ماتریس‌های جرم و سفتی کل سیستم است و رابطه (۴) نشان می‌دهد که ماتریس جرم به شکل بلوکه‌ای قطری است و هر دو ماتریس، ماتریس بلوکه‌ای گردشی هستند. یک

خواهد شد. مدل چرخه‌ای شامل یک قطعه است و هر قطعه شامل یک مجموعه پره متصل به هم و یک برش قطاعی از دیسک-شفت است. نمودار فرکانسی سیف سیستم با استفاده از نتایج آنالیز مودال ترسیم و مدهای مختلف نمودار فرکانسی و شکل مدهای سیستم مطالعه و بررسی می‌شود و ناحیه تداخل دینامیکی سه جزء مشخص شده و مدل کاهش مرتبه یافته دو درجه آزادی برای مدل‌سازی ارتعاشی ناحیه مورد نظر شناسایی می‌شود. برای کاهش دامنه ارتعاشات پره، چاه غیرخطی انرژی با جرم کوچک، فنر الزاماً غیرخطی و میراگر خطی، به شکم مد مورد نظر روی دیسک اضافه می‌شود. در ادامه، پارامترهای چاه غیرخطی طراحی و بهینه‌سازی می‌شود. برای بهینه‌سازی و استخراج پاسخ فرکانسی سیستم، معادلات دینامیکی غیرخطی سیستم به روش عددی رانگ-کوتا به ازاء تحریک ۱:۱ رزونانسی تحلیل خواهد شد. پاسخ فرکانسی سیستم بهینه‌شده، میزان عملکرد آن در فرکانس‌های مختلف، نواحی تشکیل پاسخ مدوله قوی و نوسانی و میزان حساسیت سیستم بهینه به پارامترهای چاه غیرخطی ارائه خواهد شد.

۲- مدل‌سازی و آنالیز مودال

۲-۱- مدل‌سازی سیستم‌های متقارن چرخه‌ای

سازه‌های متقارن چرخه‌ای یا پرئودیک از تکرار دوار یک قطعه در یک دایره کامل ایجاد می‌شوند (شکل ۱). در سازه‌های میزان-پرئودیک، تمام شرایط هندسی، توزیع جرمی و مکانیکی این اجزاء یکسان است و فقط حول یک محور دوران داده شده‌اند و متقارن محوری است.



شکل ۱- سازه پرئودیک
Fig. 1. A periodic Structure

که در آن $[M_D]$ و $[K_D]$ ماتریس‌های جرم و سفتی قطری هستند و e_i ستون i ام ماتریس فوریه است. معادله فوق نشان می‌دهد که با تبدیل مودال، معادلات سیستم دی‌کوپل شده‌اند. با توجه به رابطه $e_i^* e_i = \begin{cases} 1; i=k \\ 0; i \neq k \end{cases}$ ، چنانچه نیرو در مد قطری خاصی (مانند مد مودال k ام یا قطر ساکن $1 - k$ ام) وارد شود، تمام مولفه‌های نیروی تعمیم یافته (سمت راست معادله فوق) بجز مولفه مربوط به مد قطری مورد نظر صفر خواهد شد $\mathbf{u} = \{0, \dots, 0, u_k, 0, \dots, 0\}$ ، و این به این معنی است که تنها پاسخ غیر صفر سیستم، پاسخ مد k ام خواهد بود و حل سیستم رابطه (۸) به حل سیستم کوچکتری تبدیل خواهد شد. پاسخ قطاع مرجع ($i=1$) و سایر قطاع‌های سیستم در فضای فیزیکی از رابطه (۵) بدست می‌آید که به صورت زیر است:

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N\}^T = \{\mathbf{u}_k, e^{j\sigma_k} \mathbf{u}_k, e^{2j\sigma_k} \mathbf{u}_k, \dots, e^{j(N-1)\sigma_k} \mathbf{u}_k\}^T \quad (9)$$

رابطه (۹) نشان می‌دهد که وقتی شکل تحریک مشخصی (در مد قطری خاصی) به سیستم وارد شود، دامنه پاسخ تمام قطاع‌ها یکسان خواهد بود و فقط به اندازه زاویه فاز بین پره‌ای در مد قطری k ام (σ_k) بین پاسخ قطاع‌های مجاور اختلاف فاز وجود خواهد داشت. از اینرو بجای تحلیل پاسخ فرکانسی کل سیستم، فقط کافی است پاسخ یکی از قطاع‌ها به تحریک مشخص شود تا پاسخ سایر قطاع‌ها نیز از روی آن بدست آید. این خاصیت سیستم‌های متقارن چرخه‌ای است. فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد سیستم طی تبدیل مودال سیستم ثابت می‌ماند (4 و 18) و برای سیستم رابطه (۲) یا رابطه (۸)، محاسبه فرکانس‌های طبیعی یک قطاع بجای کل سیستم کافی است.

۲-۲- آنالیز مودال سیستم شفت-دیسک-پره نمونه

اثر انعطاف‌پذیری شفت در عملکرد سیستم دیسک-پره و چاه غیر خطی انرژی در این بخش مطالعه می‌شود. دیسک-پره مورد مطالعه نمونه، دارای ۲۵۹ پره در ۳۷ مجموعه ۷ پره‌ای است. پره‌های هر مجموعه توسط شراد نوک پره به هم متصل هستند. این دیسک-پره، ردیف ۱۱ یک توربین بخار ۱۲ مرحله‌ای ۳۰ مگاواتی است. مدل‌سازی سیستم واقعی برای بررسی اثر شفت، نیازمند مدل‌سازی ۱۱ ردیف دیگر است که خود می‌تواند موضوع مطالعه مفصل دیگری در آینده باشد. برای مطالعه اثر انعطاف‌پذیری شفت، سیستم دیسک-پره در

ماتریس گردشی^۱ است اگر هر ردیف آن با یک ستون انتقال آرایه‌های ردیف قبلی به سمت راست ساخته شده باشد. اگر هر آرایه خود یک ماتریس باشد، به آن ماتریس بلوکه‌ای گردشی گفته می‌شود. برای حل معادلات دینامیکی سیستم متقارن چرخه‌ای تبدیلی از مختصات فیزیکی به مختصات مودال صورت می‌گیرد که به شکل زیر است:

$$\mathbf{U} = ([E] \otimes [I]) \mathbf{u} \quad (5)$$

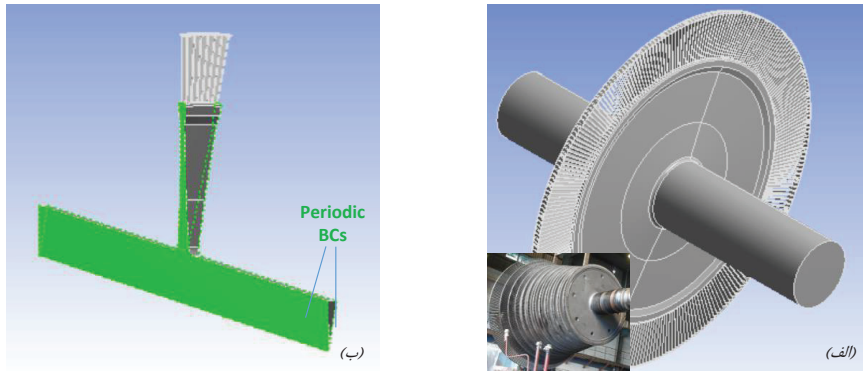
که در آن $[E]$ و $[I]$ به ترتیب، ماتریس فوریه و همانی هستند و \otimes ضرب کرونیگر است. ستون‌های ماتریس فوریه، بردارهای ویژه ماتریس گردشی سیستم است و می‌تواند آن را قطری نماید و به صورت زیر می‌باشد:

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{I\sigma_2} & e^{I\sigma_3} & \dots & e^{I\sigma_{N-1}} & -1 \\ 1 & e^{I2\sigma_2} & e^{I2\sigma_3} & \dots & e^{I2\sigma_{N-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{I(N-1)\sigma_2} & e^{I(N-1)\sigma_3} & \dots & e^{I2\sigma_{N-1}} & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

که در آن $\sigma_k = 2\pi(k-1)/N$ ، زاویه فاز بین پره‌ای در مد مودال k ام یا اختلاف فاز بین دامنه حرکت پره‌های مجاور هم در قطر ساکن $1 - k$ ام است. با استفاده از تبدیل مودال $\mathbf{U} = ([E] \otimes [I]) \mathbf{u}$ ، بررسی دینامیک سیستم در مختصات مودال به جای مختصات فیزیکی صورت خواهد گرفت. با جایگذاری تبدیل رابطه (۵) در معادلات حرکت کل سیستم (رابطه (۴)) و ضرب معادلات در ترانهاده ماتریس فوریه و همچنین بسط نیروی تحریک با استفاده از بردارهای ویژه متعامد ماتریس فوریه، در نهایت معادله زیر نتیجه خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} [M_{D1}] & 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots & [M_{DN}] \\ [K_{D1}] & 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots & [K_{DN}] \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} [M_{D1}] & 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots & [M_{DN}] \\ [K_{D1}] & 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots & [K_{DN}] \end{bmatrix} \mathbf{u} = ([E]^T \otimes [I]) \sum_1^N (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}) \quad (7)$$

$$[\tilde{M}_D] \ddot{\mathbf{u}} + [\tilde{K}_D] \mathbf{u} = \sum_1^N ([E]^T \otimes [I]) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}) = \sum_1^N ([E]^T \mathbf{e}_i) \otimes ([I] \mathbf{f}) \quad (8)$$



شکل ۲. (الف) مدل کامل شفت-دیسک-پره ردیف متحرک توربین بخار نمونه، (ب) یک قطاع از شفت-دیسک-پره (شامل یک مجموعه پره متصل به هم و یک قطاع از دیسک و شفت) با شرایط مرزی پریودیک

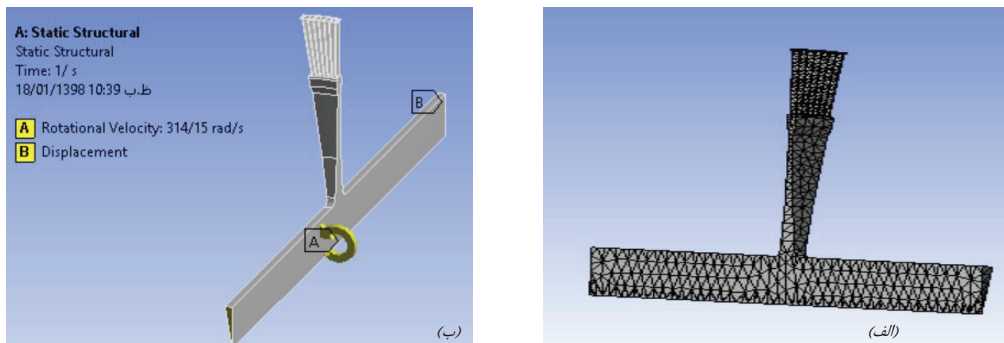
Fig. 2. (a) A complete model of the shaft-disk-blade system, (b) a sector of shaft-disk-blade (includes a packet of connected blades and a slice of disk-shaft) with the periodic boundary condition.

برای تحلیل مودال انجام گیرد. شرایط مرزی پریودیک در شکل ۳(ب) نشان داده و اعمال شده است. علاوه بر قید پریودیک بودن مدل، درجات آزادی حرکتی گره‌های مدل المان محدود در دو انتهای شفت نیز مقید شده است. بار حجمی به صورت سرعت دورانی ۳۰۰۰ rpm حول محور شفت به مدل اعمال شده است. آنالیز سازه‌ای انجام شده و به عنوان آنالیز تنش اولیه در آنالیز مودال مورد استفاده قرار می‌گیرد. آنالیز مودال برای شناسایی ۴۰ مد اول سیستم در نرم افزار انسیس انجام می‌گیرد.

نرم‌افزار انسیس با استفاده از تقارن چرخه‌ای، مدل قطاع را تحلیل نموده و فرکانس‌های طبیعی خمشی و پیچشی را بر حسب اندیس هارمونیک ارائه می‌کند و اختلاف فاز بین دامنه ارتعاش قطاع‌ها که تابعی از اندیس هارمونیک است، بدست آمده و مدل کامل تغییر شکل یافته در هر مد را ترسیم می‌نماید. نتایج آنالیز که به صورت شناسایی فرکانس‌های طبیعی مدهای مختلف سیستم در اندیس‌های هارمونیک مختلف است در نرم‌افزار متلب بررسی گردید و با حصول اطمینان از همگرایی نتایج المان محدود، نمودار فرکانسی زیر ۲۰۰۰ هرتز سیستم کوپل، در شکل ۴ نشان داده شده است. خط تحریک

میان شفتی به طول ۲ متر و قطر ۳۵۰ میلی‌متر فرض می‌شود. قطر شفت برابر قطر شفت واقعی است. مدل سیستم در شکل ۲(الف) نشان داده شده است. این مدل از جنس فولاد با چگالی ۷۸۵۰ کیلوگرم بر مترمکعب است و جرم مجموعه ۲۰۰۱ کیلوگرم است. برای بررسی دینامیک سیستم و ترسیم نمودار فرکانسی، از مدل پریودیک سیستم استفاده خواهد شد. مدل پریودیک سیستم شامل یک ست ۷ پره‌ای با شراک مشترک و برشی از دیسک و شفت است و در شکل ۲(ب) نشان داده شده است. مجموعه کل سیستم شامل ۳۷ قطاع نشان داده شده است. این قطاع، کوچکترین مدل پریودیک قابل استخراج برای سیستم است. قطاع‌ها از طریق دیسک و شفت به هم متصل هستند و شراک‌ها به هم متصل نیستند. این مدل پریودیک برای تحلیل سازه‌ای و مودال مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

مدل پریودیک با لحاظ شرایط پریودیک در نرم‌افزار المان محدود انسیس [۳۳] با استفاده از المان‌های حجمی سازه‌ای مش‌بندی شده و مدل المان محدود در شکل ۳(الف) نشان داده شده است. این مدل دارای ۶۰۵۷ المان حجمی سازه‌ای و ۱۲۲۵۲ گره است. این مدل با اعمال شرایط مرزی، برای تحلیل سازه‌ای استفاده گردید تا پیش‌تنش



شکل ۳. (الف) مدل المان محدود قطاع شفت-دیسک-پره با ۶۰۵۷ المان حجمی سازه‌ای، (ب) شرایط مرزی مدل پریودیک

Fig. 3. (a) Finite element model of the sector included of 6057 structural elements, (b) Boundary condition of the periodic model.

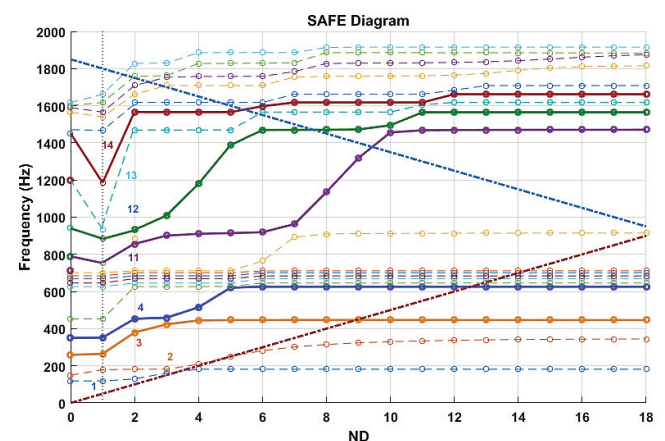
ترکیبی شفت با دیسک و پره هستند یعنی شفت در مد شرکت دارد. البته در مدهای قطری بیش از ۱ (تعداد قطر ساکن ۲ و بیشتر)، پره و دیسک اینرسی موثری روی شفت ندارند [۴] و کوپلینگ بین حرکت دیسک و پره با خمش عرضی و یا پیچشی شفت وجود ندارد. ستون $ND=2$ شکل ۵ نیز نشان می‌دهد در هیچ یک از این مدها شفت موثر نمی‌باشد. بنابراین تنها مدهای با قطر ساکن صفر و یک ($ND=0$ و $ND=1$) امکان تداخل حرکتی شفت با دیسک و پره خواهند داشت.

طبق شکل مدهای نشان داده شده در شکل ۵، خانواده اول و دوم مدهای طبیعی سیستم، مد محلی بین دیسک و پره هستند و شفت حرکت و انرژی موثری ندارد. خانواده مد سوم در هارمونیک صفر کوپل پیچش شفت با پیچش دیسک-پره است و هارمونیک یک نیز کوپل خمش عرضی شفت با حرکت داخل صفحه دیسک-پره است. به عبارت دیگر در هر دو این دو مد، دیسک حرکت عمود بر صفحه دیسک همانند خمش خارج صفحه دیسک ندارد. کوپل حرکت عرضی خمشی شفت با چاه‌های صفحه‌ای نصب شده روی دیسک، به طوریکه امکان حرکت صفحه‌ای داشته باشند توسط باب و همکاران [۱۴] بررسی شده است. جهت‌گیری این مطالعه روی چاه‌های غیرخطی نصب شده روی دیسک با قابلیت حرکت عمود بر صفحه دیسک (متاثر از تحریک گذر سیال) است و از این رو چاه نمی‌تواند انرژی از مد سوم کسب کند چرا که دیسک جابجایی عمود بر صفحه ندارد.

هارمونیک صفر و اول مد ۴ نیز پیچش شفت-دیسک و خمش دیسک-پره است و در هارمونیک صفر چاه تحریک نمی‌شود و در هارمونیک اول، شفت در مد شرکت ندارد. از مدهای فرکانس بالا نیز تنها در دو هارمونیک اول مدهای ۱۱ و ۱۴، شفت به طور موثری در حرکت سیستم مشارکت دارد. مد ۱۴ نیز حرکت دیسک-پره در صفحه دیسک است و حرکت عمودی ندارد و چاه تحریک نمی‌شود. هارمونیک اول مد ۱۱، اولین مد (از لحاظ فرکانسی) است که مد ترکیبی بیرون صفحه شفت-دیسک-پره است و انرژی قابل توجهی در هر سه جزء وجود دارد و از سوی دیگر حرکت شفت و دیسک به نحوی است که دیسک نوسان قابل توجهی در جهت عمود بر دیسک دارد و انرژی موثری از طریق دیسک می‌تواند به چاه منتقل شود.

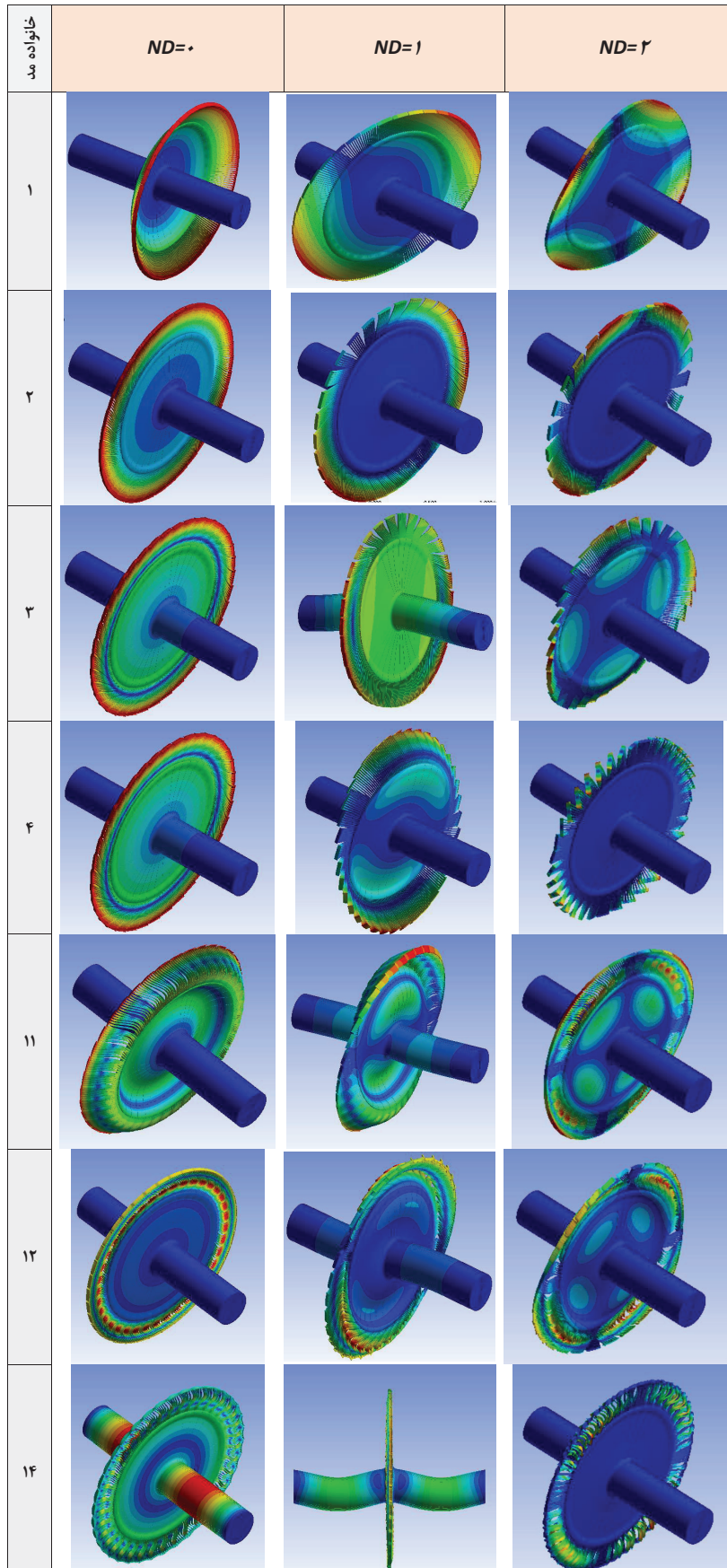
بررسی شکل مدهای سیستم انعطاف‌پذیر (شکل ۵) نشان می‌دهد در مد ۱۱ سیستم که مد خمش عرضی دوم شفت ۲ و مد خمش سوم

۵۰ هرتز نیز در شکل ترسیم شده است. مدها به چند دسته تقسیم می‌شوند. دسته‌ای از مدها مربوط به پره هستند که عمدتاً بخش‌های با خطوط افقی منحنی‌های نمودار فرکانسی آن را نشان می‌دهند. در این مدها، حرکت غالب با پره است و انرژی کرنشی در پره نهفته است و دیسک و شفت انرژی کرنشی چندانی ندارند و عملاً در مد شرکت ندارند. هارمونیک‌های اولیه مد دوم و همچنین مد قطری سوم تا هجدهم مد اول از نوع پره-غالب هستند. دسته بزرگی از مدهای محلی بین مد ۴ تا ۱۰ و بالای ۱۴ نیز مدهای ارتعاش محلی پره‌ها هستند و از نوع پره غالب می‌باشند. دسته دیگر مدها، دیسک-غالب هستند و انرژی کرنشی قابل توجهی در دیسک نیز وجود دارد. مدهای قطری اولیه مد اول و همچنین مدهای قطری ۳ و بالاتر خانواده دوم مدهای طبیعی از نوع دیسک-غالب هستند. مدهای دیسک غالب و پره غالب معمولاً در مد قطری خاصی تداخل انرژی بالایی با هم دارند که به این ناحیه، ناحیه پس‌زنی فرکانسی^۱ گفته می‌شود. خانواده اول و دوم مدهای طبیعی در قطر ساکن سوم تداخل فرکانسی را تجربه می‌کنند. از سوی دیگر در این دو مد چنانچه در شکل ۵ (ردیف‌های ۱ و ۲) نیز نشان داده شده است تغییر شکل در شفت وجود ندارد و انرژی کرنشی کوچکی در شفت وجود دارد و این مدها عملاً بین دیسک و پره هستند. مدهای دیگری که در شکل ۴ با خطوط خط‌چین نمایش داده شده‌اند نیز شفت در مد شرکت ندارد یعنی مربوط به دیسک یا پره و یا دیسک-پره است. خطوط توپر شکل نشان‌دهنده مدهای

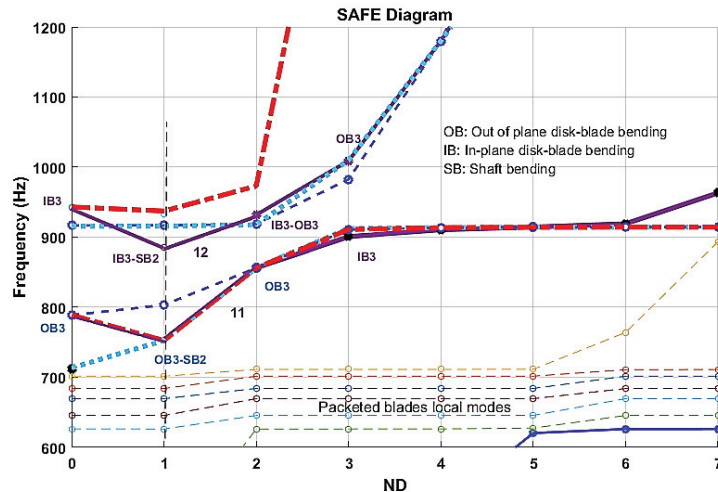


شکل ۴. نمودار فرکانسی سیستم شفت-دیسک-پره انعطاف‌پذیر ردیف متحرک یازدهم توربین بخار نمونه؛ مدهای ترکیب سه جزء (خطوط توپر) و مدهای محلی دیسک-پره و پره (خط‌چین).

Fig. 4. Frequency diagram of the flexible shaft-disk-blades system of the 11th stage of the steam turbine; combined modes of the three components (solid lines) and disk-blade and blade local modes (dashed lines).



شکل ۵. شکل مدهای مختلف سیستم انعطاف‌پذیر شفت-دیسک-پره در قطرهای ساکن پایین
 Fig. 5. Various mode shapes of the flexible shaft-disk-blade system at low NDs.



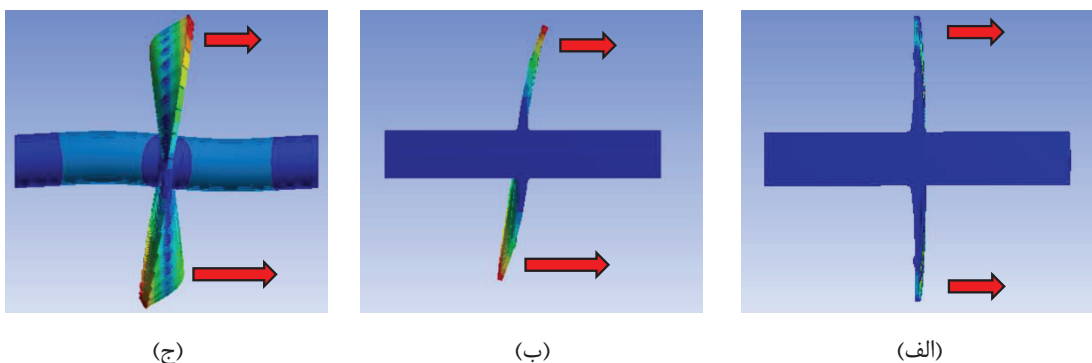
شکل ۶. نمودار فرکانسی سیستم پره-دیسک-شفت انعطاف‌پذیر در نزدیکی خانواده‌های یازدهم و دوازدهم مدهای طبیعی سیستم (خطوط توپر)؛ نمودار فرکانسی مدل‌های کاهش مرتبه یافته (خط‌نقطه، خط‌چین، نقطه ...)

Fig. 6. Frequency diagram of the flexible shaft-disk-blade system close to the 11th and 12th families of natural modes (solid lines); frequency diagram of the reduced order models (ROM) (-., -., ...)

۳- تحریک در سیستم شفت-دیسک-پره انعطاف‌پذیر

در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری شفت از دو دیدگاه می‌تواند مورد توجه باشد. یک دیدگاه، اعمال اثر انعطاف‌پذیری شفت روی دینامیک سیستم است و موجب تغییر فرکانس‌های طبیعی و شکل مد سیستم می‌شود و رزونانس‌هایی ممکن است به سیستم افزوده شود. دیدگاه دیگر اثرات جانبی و تحریکات ناشی از انعطاف‌پذیری شفت را در نظر می‌گیرد. یعنی با انعطاف‌پذیری شفت و به ویژه ویرل شفت، نیروها و تحریکات جدیدی ممکن است روی پره‌ها وارد شود و یا بزرگی نیروهای قبلی تغییر نماید. در بخش قبل بررسی مفصلی در مورد دیدگاه اول با استفاده از نمودار فرکانسی سیستم صورت گرفت و

بیرون صفحه دیسک-پره است، کوپلینگ قابل توجهی بین حرکت پره با دیسک و همچنین شفت وجود دارد و امکان جذب انرژی بالاتری در آن توسط چاه وجود دارد و بنابراین مد ۱۱ و مد نزدیک به آن یعنی ۱۲ برای بررسی نصب چاه غیرخطی انرژی انتخاب می‌شود. نمودار فرکانسی دو مد فوق به صورت مجزا در شکل ۶ ارائه شده است. خانواده مد ۱۱ در مدهای قطری پایین، مد سوم خمش بیرون صفحه دیسک-پره است که در مد قطری اول با خمش دوم شفت تداخل انرژی دارد. مد ۱۲ نیز در مد قطری اول خود کمی تحت تاثیر مد ۱۱ در این مد قطری قرار گرفته و خمش سوم داخل صفحه دیسک-پره^۲ با خمش دوم شفت تداخل انرژی دارد.



شکل ۷. تحریک در سیستم دیسک-پره؛ مد قطری صفر یا ویرل سنکرون روتور (الف)، ویرل در مد قطری اول خانواده اول (ب) و مد قطری اول خانواده یازدهم (ج)؛ بزرگی هر فلش نمایانگر تغییر نیروی وارد از سیال به پره متحرک هنگام گذر از پره‌های ثابت است

Fig. 7. Excitation in bladed disk system; (a) $ND=0$ or the synchronous whirl of the rotor, (b) whirl at the first ND of the first family, (c) whirl at the first ND of the 11th family.

- 1 Out of plane disk-blade Bending (OB3)
- 2 In plane disk-blade Bending (IB3)

توجه به تغییر شکل زاویه‌ای شفت در نقطه دیسک، در ویرل سنکرون شفت، این تغییر شکل زاویه‌ای با سرعتی برابر سرعت دوران یا ویرل شفت به دور محور اصلی می‌چرخد و بنابراین باز هم، بار متغیر روی دیسک-پره وارد نمی‌شود. تنها به واسطه تغییر شکل ثابت ایجاد شده روی دیسک (شکل ۷ ج)، فاصله پره‌های ثابت و متحرک دو طرف دیسک تا اندازه‌ای تغییر خواهد نمود و نیروی گذر پره تغییر بیشتری تجربه خواهد کرد. به عبارت دیگر، خمش دوم شفت موجب ایجاد ممان خمشی اضافی گذر پره وارد بر دیسک و شفت است، که فرکانس آن همان گذر پره خواهد بود و تنها تفاوت آن با خانواده سوم مدهای طبیعی در دامنه ممان خواهد بود.

البته این دینامیک مربوط به محدوده‌های فرکانسی است که شفت در مد دوم خمشی قرار گرفته باشد. با توجه به سفتی بالای دیسک مورد نظر و تغییر شکل‌های کوچک آن، بررسی نوسانات این ممان و میزان تاثیر آن چندان ساده نیست، ولی در نزدیکی مد طبیعی می‌توان تاثیر آن را بزرگ در نظر گرفت. البته لازمه رزونانس در سیستم برابری با فرکانس طبیعی مد است که با توجه به استارت سیستم امکان گذر وجود دارد. بنابراین مساله تبدیل به بررسی رفتار سیستم هنگام اعمال تحریک نزدیک فرکانس طبیعی مد قطر ساکن اول خانواده ۱۱ خواهد بود. به عبارت دیگر ارتعاشات سیستم حول رزونانس ۱:۱ سیستم در مد قطری اول مد ۱۱ صورت خواهد گرفت.

۴- مدل کاهش مرتبه یافته

نمودار فرکانسی (شکل ۶) نشان می‌دهد که مد شماره ۱۱ در قطر ساکن اول، مجاور مدهای ۱۰ و ۱۲ قرار دارد. مد ۱۰، ارتعاش محلی پره‌ها است و تداخل و کوپلینگ ارتعاشی با مد مطالعه ندارد. مد ۱۲ نیز در فاصله فرکانسی بیش از ۱۰۰ هرتز قرار دارد و از این رو می‌توان محدوده مطالعه را با دقت کافی، بدون کوپل با مدهای مجاور در نظر گرفت، هرچند که مدل قابلیت شناسایی همزمان دو مد ۱۱ و ۱۲ را دارد اما تمرکز این مطالعه روی مد کوپل ارتعاش سه جزء دوار است که در مد ۱۱ محبوس است. داده‌های نمودار فرکانسی با تحلیل ارتعاشی مدل المان محدود با تعداد زیادی درجه آزادی در هر قطاع بدست آمده‌اند. برای بررسی تحلیلی و عددی اثر میراگر اضافی نصب شونده روی سیستم، همانطور که در مقدمه نیز اشاره گردید نمی‌توان از مدلی با تعداد درجات آزادی مدل المان محدود استفاده نمود. از

نشان داد که تنها در بعضی خانواده مدها و در مدهای قطری خاصی، برهم‌کنش دیسک-پره با شفت بالاست و شفت اثر سازه‌ای روی مدهای محدودی دارد و نتیجه آن تا اینجا خانواده ۳، ۱۱، ۱۲ و ۱۴ ام مدهای طبیعی در قطر ساکن اول است که مدهای اول الی سوم خمش شفت با مدهای خمشی بیرون صفحه و پیچشی دیسک-پره تداخل انرژی دارند.

در مورد دیدگاه دوم، ذکر این نکته لازم است که در حالت عادی بدون تغییر شکل شفت و دیسک (شکل ۷ الف)، بار دینامیکی و ارتعاشی وارد بر پره‌ها، بار دینامیکی گذر پره است که فرکانس آن برابر فرکانس گذر پره است و اندازه آن با تغییر اندازه فشار سیال وارد بر پره متحرک هنگام گذر از روبروی پره‌های ثابت و کانال بین این پره متناسب است. در این حالت، به دلیل تقارن موجود در بار وارد بر پره‌های نقاط مختلف، برآیند ممان خمشی وارد از آن، روی دیسک یا شفت صفر خواهد بود. دامنه ویرل شفت در مقایسه با طول ارتفاع پره بسیار کوچک است و بررسی ویرل سنکرون شفت در مد اول خمشی شفت (خانواده سوم)، نشان می‌دهد که ویرل سنکرون نمی‌تواند موجب ایجاد بار دینامیک در سیستم شود و بزرگی تغییرات نیروی گذر پره نیز همانند شکل ۷ الف) در پره‌ها یکسان می‌ماند. در ادبیات فن نیز عدم اعمال تحریک دینامیک و خستگی‌زا روی شفت هنگام ویرل سنکرون ثابت شده است و تنش و جابجایی نسبی نقاط روی شفت ثابت می‌ماند [۳۴].

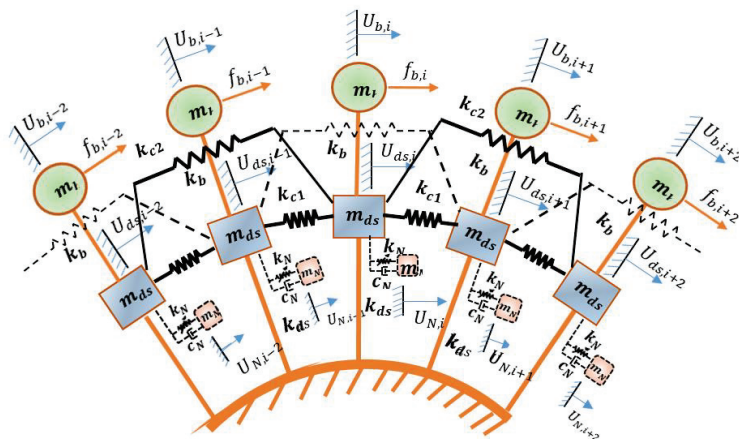
در مد قطری اول خانواده اول مدهای طبیعی سیستم (شکل ۵ مد ۱، ۱) که مد ترکیبی خمش بیرون صفحه دیسک-پره است (نمای جانبی مقطع برش خورده در شکل ۷ ب) نشان داده شده است، خمش دیسک در قطر ساکن اول موجب تغییر فاصله بخش بالایی و پایینی پره‌های متحرک از پره‌های ثابت شده است که این خود موجب اعمال ممان خمشی در صفحه عرضی روی شفت و دیسک با فرکانسی برابر فرکانس گذر پره است. در قطر ساکن اول مد سوم خانواده مدهای طبیعی (شکل ۵، مد ۳، ۱) که مد ترکیبی شفت با خانواده اول مدهای طبیعی است، ویرل شفت تغییری در فاصله هوایی پره‌ها ایجاد نمی‌کند و ممان خمشی نوسانی ناشی از گذر پره که روی دیسک و بالطبع روی شفت وارد می‌شود، با توجه به شکل مد، انرژی به مد خمش شفت وارد نمی‌کند.

در خانواده ۱۱ مدهای طبیعی که مد دوم خمشی شفت است، با

دارد و پس‌زنی فرکانسی در این ناحیه صورت می‌گیرد. خانواده ۱۱ و ۱۲ مدهای طبیعی، بعد از این ناحیه، به ترتیب خمش داخل صفحه پره و خمش بیرون صفحه دیسک-پره خواهند بود. به واسطه تداخل فرکانسی دو مد در تعداد قطر ساکن پایین، مدل کاهش مرتبه یافته با حداقل ۲ درجه آزادی برای مدل‌سازی نیاز خواهد بود. شماتیک این مدل در شکل ۸ نشان داده شده است. هر قطاع شامل دو جرم است که یکی مربوط به جرم مودال پره و دیگری جرم مودال قطاع شفت-دیسک است. برای پوشش نرم‌شوندگی فرکانسی که در ابتدای مد ۱۱ وجود دارد از کوپلینگ پیچیده‌تری بین قطاع‌ها استفاده می‌شود. چنانچه در شکل نیز نشان داده شده است، جرم مودال شفت-دیسک در هر قطاع با دو قطاع قبل و دو قطاع بعد از خود کوپلینگ فنی دارد. این مدل قابلیت مدل‌سازی نرم‌شوندگی فرکانسی اولیه را به واسطه داشتن کوپلینگ پیچیده‌تر با قطاع‌های مجاور خود دارد [۱]. در این مدل، k_b ، k_{ds} ، k_{c1} و k_{c2} به ترتیب سفتی پره، سفتی دیسک-شفت، سفتی کوپلینگ قطاع با قطاع مجاور و سفتی کوپلینگ قطاع با قطاع بعد از قطاع مجاور است.

$U_i = \{U_{b,i}, U_{ds,i}\}$ مختصات درجات آزادی قطاع i ام در دستگاه مختصات فیزیکی است. همانند آنچه که پیش‌تر اشاره رفت، معادلات حرکت قطاع i ام مدل شکل ۸ به شکل زیر می‌تواند نوشته شود:

$$[M]\ddot{U}_i + [K]U_i + [K_{c1}](U_i - U_{i-1}) + [K_{c1}](U_i - U_{i+1}) + [K_{c2}](U_i - U_{i-2}) + [K_{c2}](U_i - U_{i+2}) = f_i, i = 1 \dots N \quad (10)$$



شکل ۸: شماتیک مدل کاهش مرتبه یافته ۲ درجه آزادی در هر قطاع با کوپلینگ دابل با قطاع‌های کناری؛ چاه غیرخطی انرژی (خط‌چین) به دیسک متصل شده است. Fig. 8. Schematic of the two-DOF ROM with double coupling with the neighbor sectors; NES has been shown by dotted lines

ریشه‌های رابطه (۱۳)، فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش مرتبه یافته دو درجه آزادی با کوپلینگ دویل است که به واسطه عبارت کسینوسی $\cos(\sigma_k) = \cos(\sigma_{N+2-k})$ ، به صورت جفت موج‌های رونده با اندازه یکسان ولی در جهت مخالف هم در سیستم شفت-دیسک-پره ظاهر می‌شوند. البته به ازاء $k=1$ و $k = \frac{N+2}{2}$ (اگر N زوج باشد)، این موج منفرد خواهند بود و به صورت جفت ظاهر نخواهند شد. برای این دو مورد اخیر موج‌های ایستا در سیستم شکل می‌گیرند.

لازم است ۴ پارامتر مدل کاهش مرتبه یافته برای مدل‌سازی رفتار ارتعاشی مدهای ۱۱ و ۱۲ که در شکل ۶ نشان داده شده است شناسایی گردند. برای این منظور از تطابق فرکانس‌های طبیعی مدل کاهش مرتبه یافته در مدهای قطری مختلف (رابطه (۱۳)) با فرکانس‌های طبیعی شناسایی شده با آنالیز مودال مدل المان محدود (شکل ۶) استفاده می‌شود. با توجه به تعداد محدود نقاط فرکانسی موجود و از میان انتخاب‌های مختلف مهندسی که از میان این داده‌ها می‌تواند صورت گیرد، سه مدل نهایی که انطباق مناسبی با رفتار ارتعاشی سیستم دارند شناسایی شده است و منحنی تغییرات فرکانس طبیعی این مدل‌ها بر حسب تعداد قطر ساکن، در شکل ۶، با خطوط خط‌چین (با تطابق نقاط فرکانسی مد قطری صفر، ۲ و ۵ از خانواده ۱۱ و مد قطری ۴ از خانواده ۱۲ آنالیز المان محدود)، خط نقطه (مد قطری صفر، ۱، ۲ و ۵ خانواده ۱۱) و نقطه (مد قطری ۱ و ۲ از خانواده ۱۱ و مد قطری ۳ و ۴ از خانواده ۱۲) نشان داده شده است.

دو مدل نشان داده شده با خطوط خط‌چین و نقطه تقریب بهتری از ناحیه پس‌زنی فرکانس ارائه می‌دهند، ولی در مدل‌سازی قطرهای ساکن کم ضعیف هستند. مدل خط-نقطه در مدل‌سازی ناحیه پس‌زنی ضعیف است، اما بخوبی توانسته است مد ۱۱ در قطرهای ساکن کم را مدل‌سازی کند. هر سه مدل در مدل‌سازی مد ۱۱ در قطرهای ساکن بالا موفق هستند. از آنجا که هدف این بخش، مطالعه کوپل ارتعاشی شفت با دیسک-پره است و بیشتر به محدوده فرکانسی حول قطر ساکن ۱ مد ۱۱ می‌پردازد، مدل‌سازی دقیق این ناحیه توسط مدل کاهش مرتبه یافته در اولویت قرار می‌گیرد. از این رو مدل خط-نقطه مدل مناسب‌تری برای ادامه این مطالعه به نظر می‌رسد. پارامترهای بی‌بعد این مدل که نسبت به جرم و سفتی مودال پره در مد دوم ارتعاش داخل صفحه پره بی‌بعد شده‌اند. با لحاظ فرکانس

$$\begin{aligned} & [M] \ddot{U}_i + ([K] + 2[K_{c1}] + 2[K_{c2}]) U_i - \\ & [K_{c1}] U_{i-1} - [K_{c1}] U_{i+1} - [K_{c2}] U_{i-1} - \\ & [K_{c2}] U_{i+1} = f_i, i=1 \dots N \end{aligned} \quad (11)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_b & \cdot \\ \cdot & m_{ds} \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b + k_{ds} \end{bmatrix};$$

$$[K_{c1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{c1} \end{bmatrix}; [K_{c2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{c2} \end{bmatrix}; f_i = \begin{Bmatrix} f_b \\ f_{ds} \end{Bmatrix}_i$$

که در آن N تعداد قطاع‌های سیستم پیرویدیک شامل شفت-دیسک-پره است. چنانچه پیش‌تر نیز بیان شد اگر نیرو در مد قطری خاصی مانند مد مودال k ام (یا قطر ساکن $k-1$ ام) وارد شود تنها پاسخ غیر صفر سیستم، پاسخ مد k ام خواهد بود و پاسخ سیستم در مختصات فیزیکی برابر پاسخ مودال مد قطری متناظر خواهد بود یعنی $U_i = \{U_{b,i}, U_{ds,i}\}^T = u_k = \{u_{k,b}, u_{k,ds}\}^T$ دارای دامنه حرکتی یکسان و با اختلاف فاز مشخصی خواهند بود. با استفاده از تبدیل مودال رابطه (۵) و یا رابطه (۹)، پاسخ قطاع‌های مجاور $U_{i+2} = u_k e^{2j\sigma_k}$ ، $U_{i-1} = u_k e^{-j\sigma_k}$ ، $U_{i+1} = u_k e^{j\sigma_k}$ و $U_{i-2} = u_k e^{-2j\sigma_k}$ است. بنابراین معادله حرکت قطاع i ام (رابطه (۱۱)) به شکل زیر در می‌آید.

$$\begin{bmatrix} m_b & \cdot \\ \cdot & m_{ds} \\ k_b & -k_b \\ -k_b & k_b + k_{ds} + \\ & 2k_{c1}(1 - \cos(\sigma_k)) + \\ & 2k_{c2}(1 - \cos(2\sigma_k)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{k,b} \\ \ddot{u}_{k,ds} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_{k,b} \\ u_{k,ds} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_b \\ f_{ds} \end{Bmatrix}_k \quad (12)$$

که در آن $\sigma_k = \frac{2\pi(k-1)}{N}$ زاویه فاز بین پره‌ای است و اندیس ds نمایانگر مد حرکتی مشترک دیسک-شفت است. با فرض ارتعاشات آزاد سیستم ($f_i = 0$)، فرکانس‌های طبیعی سیستم از معادله مشخصه زیر بدست می‌آید.

$$m_{ds} \omega^4 - \left(\frac{m_{ds}}{m_b} k_b + k_b + k_{ds} + \right) \omega^2 + \left(2k_{c1}(1 - \cos(\sigma_k)) + 2k_{c2}(1 - \cos(2\sigma_k)) \right) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{k_b}{m_b} (k_{ds} + 2k_{c1}(1 - \cos(\sigma_k)) + 2k_{c2}(1 - \cos(2\sigma_k))) = 0$$

جدول ۱- پارامترهای مدل کاهش مرتبه یافته ۲ درجه آزادی با کوپلینگ دوبل
Table 1. Parameters of the two-DOF ROM with the double coupling.

\bar{m} = $\frac{m_{ds}}{m_b}$	$\frac{k_{ds}}{k_b}$	$\frac{k_{c1}}{k_b}$	$\frac{k_{c2}}{k_b}$	$\frac{f_b}{2p}$	m_b kg	m_{ds} kg	k_b N/m	k_{ds} N/m	k_{c1} N/m	k_{c2} N/m
۶۱/۲۵۹	۴۸/۴۷۴	۱۲۷۴/۰۰۵	-۳۲۵/۰۹۲	۹۱۴/۴۵	۰/۸۶۹	۵۲/۲۱۳	۲/۸۶۹×۱۰ ^۷	۱/۳۹×۱۰ ^۹	۳/۶۵۵×۱۰ ^{۱۱}	-۹/۳۲۳×۱۰ ^{۱۰}

در شکل ۸ نشان داده شده است، معادلات حرکت قطاع به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
 m_b \ddot{u}_{k,b} + c_b \dot{u}_b + k_b (u_{k,b} - u_{k,ds}) &= f_b \cos \omega t \\
 m_{ds} \ddot{u}_{k,ds} + \left(k_b + k_{ds} + 2k_{c1} (1 - \cos(\sigma_k)) + \right. & \\
 \left. 2k_{c2} (1 - \cos(2\sigma_k)) \right) u_{k,ds} & \quad (15) \\
 -k_b u_{k,b} + \epsilon k_N (u_{k,ds} - u_N)^3 + \epsilon c_N (\dot{u}_{k,ds} - \dot{u}_N) &= 0 \\
 m_N \ddot{u}_N + \epsilon k_N (u_N - u_{k,ds})^3 + \epsilon c_N (\dot{u}_N - \dot{u}_{k,ds}) &= 0
 \end{aligned}$$

که در آن میرایی ویسکوز و k_N سفتی غیرخطی چاه متصل به دیسک است. فنر چاه بخش خطی ندارد و غیرخطی مرتبه سه است. در این مدل سازی فرض شده است که به هر قطاع یک چاه غیرخطی انرژی افزوده شده است بنابراین تعداد چاه غیرخطی سیستم برابر تعداد قطاع های سیستم است. انرژی ارتعاشی سیستم و به ویژه پره، از طریق دیسک به چاه منتقل و توسط میراگر چاه به صورت یکسویه تلف می شود. اندازه نیروی تحریک خارجی، نیروهای میرایی و همچنین نیروی سفتی غیرخطی چاه از مرتبه کوچک ϵ در نظر گرفته می شود. جرم چاه نیز کوچک در نظر گرفته می شود و مرتبه آن نسبت به جرم دیسک-شفت در ادامه توضیح داده خواهد شد. برای در نظر گرفتن میرایی سازه ای یا هیستریزس در معادلات دینامیکی سیستم، کافی است سفتی دیسک-شفت و سفتی پره به ترتیب با $k_d (1 + i\gamma_{ds})$ و $k_b (1 + i\gamma_b)$ جایگزین شوند که در آن γ_b و γ_{ds} ضریب میرایی سازه ای دیسک-شفت و پره است.

مقطع برش خورده سیستم در مد ۱۱ ام قطر ساکن اول در شکل ۹ نشان داده شده است. با توجه به شکل مد تشکیل شده روی دیسک، دو موقعیت A و B چنانچه در شکل نشان داده شده است دارای دامنه بزرگ هستند و هر دو می توانند موقعیتی برای نصب چاه غیرخطی باشند. موقعیت A شکم مد ایجاد شده در مد دیسک-پره است و جابجائی آن طبق نتایج المان محدود ۱۰٪ بیش از نقطه B است. از طرف دیگر نقطه B محل قرارگیری پره ها روی دیسک و ریشه پره است بنابراین موقعیت A که در فاصله ۰/۴ متری از محور

مد دوم داخل صفحه پره و جرم کل سیستم، در جدول ۱ ارائه شده است. جرم قطاع ۵۴/۰۸۲ کیلوگرم است و m_{ds} معرف مجموع جرم مودال شفت و دیسک است. بالا بودن سفتی کوپلینگ مدل کاهش مرتبه یافته به واسطه مدل سازی مد ۱۱ که مدی با فرکانس بالا است می باشد. نکته جالب منفی شدن سفتی کوپلینگ با قطاع غیرمجاور است که نرم شوندگی فرکانسی اولیه را در سیستم مدل سازی می کند.

۵- طراحی چاه غیرخطی انرژی

در هر قطاع پرئودیک که شامل یک ست هفت عددی از پره های متصل به هم در ناحیه شراد است یک چاه غیرخطی انرژی تعبیه می شود. هر چاه غیرخطی انرژی دارای جرم کوچک، فنر الزاماً غیرخطی و یک میراگر خطی ویسکوز است، که روی دیسک برای انتقال غیرمستقیم انرژی ارتعاشی سیستم و به ویژه پره و اتلاف آن نصب می شود. بنابراین تعداد چاه ها برابر ۳۷ عدد خواهد بود. مکرانی نشان داد که برای پوشش مد قطری هفتم روی دیسک-پره حداقل ۴ برابر تعداد قطر ساکن یعنی ۲۸ پیژوالکتریک خطی مورد نیاز خواهد بود. با توجه به این مطلب، امکان پوشش ارتعاشات تا قطر ساکن ۹ وجود خواهد داشت که البته در این بخش قطر ساکن اول بررسی می شود بنابراین پوشش کامل تمام حالت های مختلف قرارگیری چاه و قطر ساکن پوشش داده می شود. شماتیک چاه های غیرخطی افزوده شده به سیستم در شکل ۸ نشان داده شده است.

برای استخراج معادلات دینامیکی سیستم، اگر مطابق شکل ۸ فرض شود که نیروی تحریک تنها به پره وارد می شود معادلات سیستم رابطه (۱۲) با در نظر گرفتن میرایی به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned}
 m_b \ddot{u}_{k,b} + c_b \dot{u}_b + k_b u_{k,b} - k_b u_{k,ds} &= f_b \cos \omega t \\
 m_{ds} \ddot{u}_{k,ds} + \left(k_b + k_{ds} + 2k_{c1} (1 - \cos(\sigma_k)) + \right. & \\
 \left. 2k_{c2} (1 - \cos(2\sigma_k)) \right) u_{k,ds} - k_b u_{k,b} &= 0 \quad (14)
 \end{aligned}$$

که در آن c_b میرایی آئرو دینامیک است. با افزودن چاه الزاماً غیرخطی انرژی (بخش خطی صفر دارد) به دیسک به صورتی که



شکل ۹: مقطع شفت-دیسک-پره در مد قطری اول مد ۱۱؛ دایره موقعیت نصب چاه غیرخطی انرژی را نشان می‌دهند

Fig. 9. Shaft-disk-blades system cross section view at the first ND of the 11th mode; circle shows the position of NES.

غیرخطی انرژی است. پارامترهای چاه غیرخطی در بخش قبل طراحی گردید و بهینه‌سازی ضریب سفتی غیرخطی و میرایی خطی چاه در این بخش انجام خواهد شد. هدف حداقل شدن دامنه ارتعاشات پره در محدوده نزدیک رزونانس مد قطری اول است. با توجه به غیرخطی بودن سیستم، لازم است تغییر رفتارهای ارتعاشی سیستم همچون ایجاد رزونانس‌های جدید و یا چند پاسخ‌دهی شدن سیستم نیز چک شود. سایر پارامترهای سیستم به شرح ادامه تعیین می‌شود.

مقدار نسبت میرایی سازه‌های^۱ یا میرایی هیستریزیس برای سازه فولادی ۰/۰۰۱-۰/۰۰۱ است [۳۵ و ۳۶] و در این مطالعه مقدار ۰/۱-۱/۰ یا ۰/۰۰۱ برای آن در نظر گرفته می‌شود. میرایی آئرودینامیک وارد بر پره تابع پیچیده‌ای از خواص و سرعت سیال، مد قطری دیسک-پره و پارامترهای دیگر سیستم است که تعیین دقیق آن مبحث جداگانه‌ای است و در اغلب مطالعات، بجز مواردی که مشخص شود، مقدار میرایی ویسکوز معادل آن برابر ۱٪ در نظر گرفته می‌شود [۱] و در این بخش نیز همین مقدار برای آن در نظر گرفته خواهد شد. اندازه نیروی تحریک (f_b) از طریق تخمین میانگین اختلاف فشار واقعی وارد بر پره‌های متصل به هم محاسبه و برابر با ۳۶۰ N بدست می‌آید. مقادیر پارامترهای سیستم در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده‌اند.

چنانچه که در بخش ۳- اشاره گردید، ارتعاشات سیستم حول

مرکزی شفت است به عنوان موقعیت نصب چاه غیرخطی انتخاب می‌شود. شعاع دیسک ۰/۶۹۷۵ متر است و چاه در فاصله حدود ۰/۳ متری از لبه دیسک قرار می‌گیرد. حدود ۳۷ چاه غیرخطی در دایره‌ای به شعاع موقعیت نقطه A بدور محور مرکزی شفت و روی دیسک نصب می‌شوند.

پارامترهای چاه شامل جرم، ضریب سفتی غیرخطی و ضریب میراگر خطی، لازم است تعیین شود. جرم چاه و نیروهای وارد بر سیستم معمولاً کوچک و از مرتبه ϵ در نظر گرفته می‌شود. در این مطالعه $\epsilon = 0.3\%$ در نظر گرفته می‌شود. با این فرض، جرم چاه، از مرتبه ϵ جرم سیستم اصلی یعنی برش دیسک-شفت است و برابر $m_N = 0.3 \times 53/213 = 1/596$ kg بدست می‌آید و در مقایسه با جرم دیسک-پره که حدود ۱۲/۸۷۳ kg است حدود ۱۲/۵٪ جرم سیستم است که مقدار بزرگی است و می‌تواند روی فرکانس‌های طبیعی سیستم اثر گذار باشد. از این رو مقدار جرم در محدوده ۵۰٪ این مقدار یعنی $m_N = 0.8$ kg انتخاب می‌شود. جرم چاه برابر ۱/۵٪ جرم برش دیسک-شفت و ۶/۲٪ جرم قطاع دیسک-پره است. پارامترهای ضرائب سفتی و میرایی نیز طی فرآیند بهینه‌سازی چاه غیرخطی برای داشتن عملکرد بهینه تعیین خواهد شد.

۶- بهینه‌سازی چاه غیرخطی انرژی

رابطه (۱۵) معادلات دینامیکی سیستم انعطاف‌پذیر مجهز به چاه

جدول ۲. پارامترهای سیستم دیسک-پره-شفت و چاه غیرخطی انرژی

Table 2. Parameters of the shaft-disk-blade system and the NES.

پارامترهای سیستم			
پارامتر	مقدار	واحد	توضیح
$\omega_{2,11}$	۷۵۲/۴۵ (۴۷۲۷/۸)	Hz (rad/s)	فرکانس مد یازدهم مدهای طبیعی سیستم در مد مودال دوم (با قطر ساکن اول)
ζ_b	۰/۰۱	-	نسبت میرایی آئرودینامیک پره
c_b	۹۹/۸۶	N.s/m	ضریب میرایی آئرودینامیک
m_N	۰/۸۰۰	kg	جرم چاه
f_b	۳۶۰	N	نیروی تحریک خارجی وارد بر مجموعه پره‌های متصل به هم
$2R$	۱۳۹۵	mm	قطر دیسک
γ_{ds}, γ_b	۰/۰۰۱	-	میرایی سازه‌های پره و دیسک-شفت

کمر نیز دامنه به سرعت افزایش می‌یابد. با پرهیز از نواحی حساس به تغییرات میرایی، نقطه بهینه برای ضریب سفتی و میرایی چاه غیرخطی در شکل نشان داده شده است که به صورت زیر است:

$$k_N = 1.0 \times 10^{16} \frac{N}{m^3} \quad (16)$$

$$c_N = 8000 \frac{N.s}{m}$$

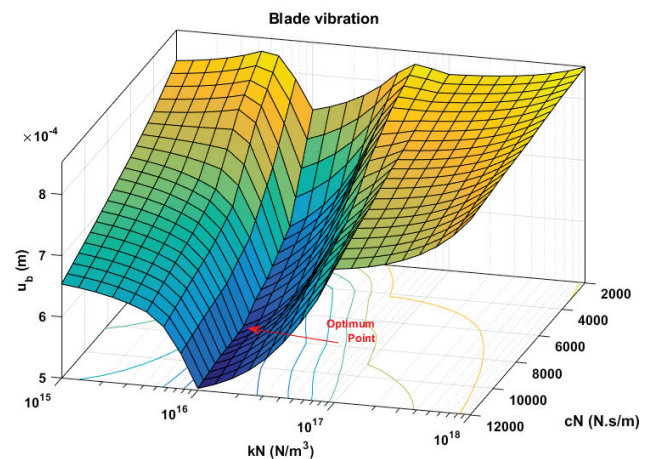
۷- تحلیل عملکرد سیستم مجهز به چاه غیرخطی بهینه

سیستم مجهز به چاه غیرخطی (رابطه (۱۵)) بهینه‌سازی شده، به روش عددی رانگ-کوتاه تحلیل و پاسخ فرکانسی سیستم شفت-دیسک-پره به ازاء مقادیر بهینه در شکل ۱۱ ارائه شده است. در شکل همچنین پاسخ سیستم بدون چاه غیرخطی نیز ارائه شده است. شکل به خوبی تاثیر چاه غیرخطی در کاهش ارتعاشات سیستم به ویژه حول رزونانس را نشان می‌دهد. در نقطه رزونانس، پیک دامنه ارتعاش از مقدار نسبی ۰/۰۰۰۸۶ (یا ۰/۶ میلی‌متر) به مقدار نسبی ۰/۰۰۰۵۳ (یا ۰/۳۷ میلی‌متر) کاهش یافته است. چاه، دامنه ارتعاشات پیک را تا ۳۸ درصد کاهش داده است. شکل ۱۱(الف) نشان می‌دهد که پاسخ سیستم مجهز به چاه در نواحی محدودی با انحراف فرکانسی مثبت، بیش از سیستم بدون چاه غیرخطی است که محدوده کوچکی است و در مقایسه با دامنه‌های بزرگ حول رزونانس پذیرفتنی است. پاسخ مدوله قوی در محدوده انحراف فرکانسی $0.15 < \sigma < 0.15$ و با پهنای باند حدود ۴ هرتز حول رزونانس تشکیل می‌شود. در محدوده $0.12 < \sigma < 0.36$ (حدود ۱۱ هرتز) پاسخ سیستم با چاه غیرخطی کوچکتر از سیستم بدون چاه غیرخطی است. در محدوده $0.47 < \sigma < 0.33$ و $0.12 < \sigma < 0.12$ پاسخ سیستم غیرخطی بزرگتر از سیستم بدون چاه غیرخطی است و البته به مراتب کوچکتر از دامنه رزونانس است و در هر صورت چاه غیرخطی اجازه افزایش دامنه در مرتبه رزونانس را نمی‌دهد. بجز این ناحیه در بقیه نواحی فرکانسی، دامنه ارتعاش پره و سیستم غیرخطی یکسان است. شکل ۱۱(ب) نیز پاسخ فرکانسی جابجائی نسبی چاه را نشان می‌دهد که معمولاً معرف عملکرد چاه است و دامنه نسبتاً بزرگ آن حول رزونانس موید فعال شدن پاسخ مدوله قوی و عملکرد قوی است. در چند محدوده دیگر (حول انحراف فرکانسی ۰/۰۱ و ۰/۰۲ و ۰/۰۱-) نیز چاه غیرخطی تحریک شده و دامنه آن افزایش می‌یابد اما بررسی پاسخ زمانی نقاط

رزونانس ۱:۱ سیستم در مد قطری اول مد ۱۱ که مد ترکیبی شفت-دیسک-پره است بررسی می‌شود بنابراین فرکانس تحریک در محدوده فرکانسی $\omega_{2,11} \approx \omega$ ، $\omega / \omega_{2,11} = 1 + \delta\sigma$ قرار دارد.

برای اجتناب از پیچیدگی حل مساله دیفرانسیل معمولی عددی، می‌توان به جای مدل‌سازی میرایی داخلی یا سازه‌ای به صورت عدد مختلط، از معادل ویسکوز آن استفاده کرد که در این صورت $\xi = \frac{\gamma}{2}$ خواهد بود. در بهینه‌سازی سیستم، به ازاء مقادیر مختلف پارامترهای سیستم، این معادلات به روش عددی رانگ-کوتاه^۱ حل خواهند شد.

پارامترهای تنظیمی سیستم و چاه غیرخطی انرژی شامل ضریب سفتی غیرخطی و میرایی چاه است. برای بهینه‌سازی چاه غیرخطی، محدوده اولیه چاه برای رخداد پاسخ مدوله قوی انجام و ضریب سفتی، در بازه $10^{15} - 10^{18} \frac{N}{m^3}$ و میرایی در بازه $2000 - 12000 \frac{N.s}{m}$ تغییر داده می‌شود و به ازاء هر نقطه، پاسخ فرکانسی شامل دامنه ارتعاش پره در مقادیر مختلف پارامتر انحراف فرکانسی^۲ حول نقطه رزونانس ($\omega_{2,11}$) استخراج و ماکزیمم دامنه مشخص می‌شود. شکل ۱۰ نمودار سه‌بعدی تغییرات حداکثر دامنه ارتعاش پره به ازاء مقادیر مختلف ضریب سفتی غیرخطی و میرایی چاه را نشان می‌دهد. شکل به وضوح تاثیر بالای سفتی در تغییر مرتبه کاهش دامنه و میزان اثر چاه غیرخطی را نشان می‌دهد و مقدار بهینه برای سفتی را در مقادیری حدود $10^{16} \frac{N}{m^3}$ پیش‌بینی می‌کند. با مقدار میرایی بیش از $8000 \frac{N.s}{m}$ نرخ تغییرات دامنه کاهش می‌یابد و با میرایی‌های

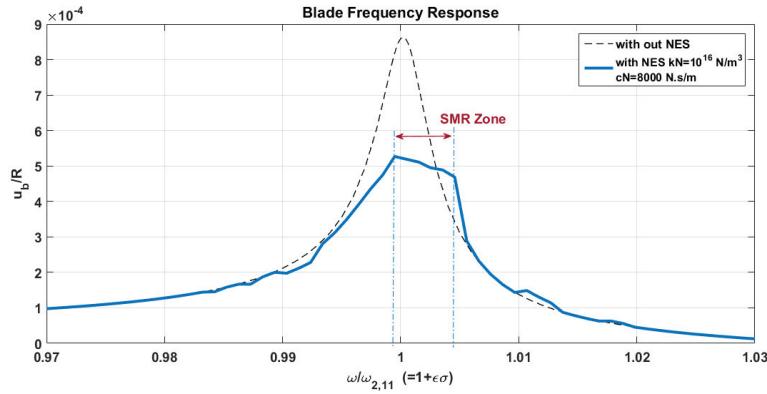


شکل ۱۰. نمایش سه‌بعدی ماکزیمم پاسخ فرکانسی پره حول نقطه رزونانس به ازاء مقادیر مختلف ضریب سفتی و میرایی چاه الزاماً غیرخطی

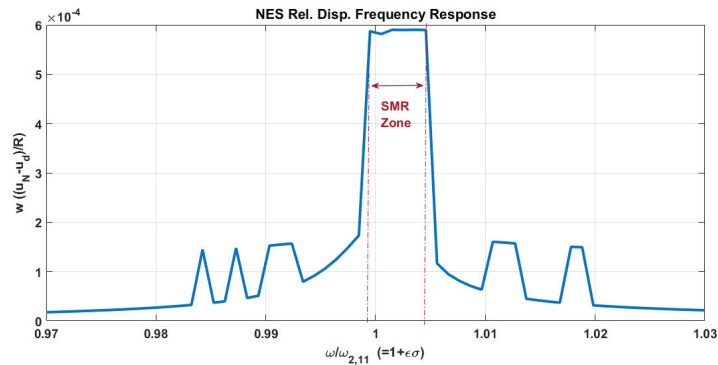
Fig. 10. Maximum of the blade frequency response in terms of the NES stiffness and damping.

1 Runge-Kutta

2 Frequency Detuning Parameter



(الف)



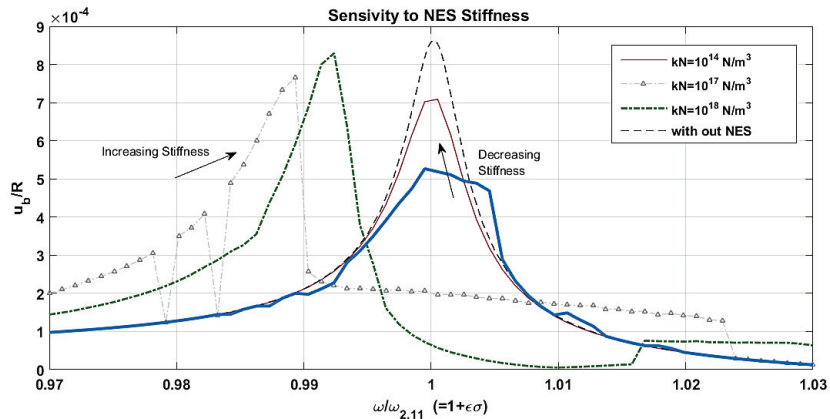
(ب)

شکل ۱۱. پاسخ فرکانسی پره (الف) و جابجائی نسبی چاه و دیسک-شفت (ب) به ازاء مقادیر بهینه انتخابی برای چاه غیرخطی انرژی
 Fig. 11. (a) Blade frequency response with and without the optimized NES, (b) NES relative displacement.

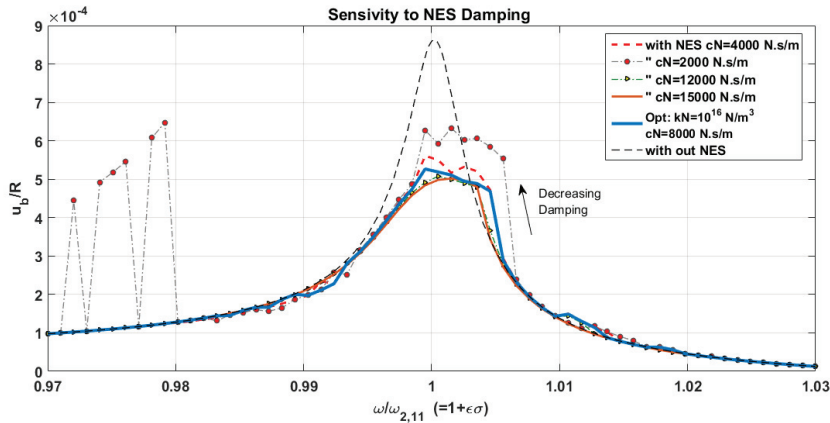
داده خواهد شد. همچنین پیک سیستم با چاه غیرخطی، نزدیک پیک سیستم بدون چاه غیرخطی می‌شود و چاه غیرخطی عملکرد موثری نخواهد داشت. از این رو لازم است از انتخاب ضریب سفتی غیرخطی کمتر از $10^{15} \frac{N}{m^3}$ پرهیز شود. در ضریب سفتی‌های بالا، پیک رزونانس تا مقدار زیادی حذف می‌شود اما همانطور که در شکل نیز نشان داده شده است پیک دیگری در انحراف فرکانسی منفی ایجاد

نشان داد که میزان آن برای رخداد پاسخ مدوله قوی نیست و پاسخ نوسانی ساده در سیستم شکل گرفته است.

در شکل ۱۲ میزان حساسیت پاسخ سیستم به تغییرات ضریب سفتی چاه غیرخطی نشان داده شده است. شکل نشان می‌دهد که در سفتی‌های کم، پاسخ سیستم به سیستم بدون چاه نزدیک می‌شود و محدوده کوچک‌تری رزونانس توسط پاسخ مدوله قوی پوشش



شکل ۱۲. حساسیت پاسخ فرکانسی پره به تغییرات ضریب سفتی غیرخطی چاه غیرخطی انرژی
 Fig. 12. Blade frequency response sensitivity to the nonlinear stiffness of NES.



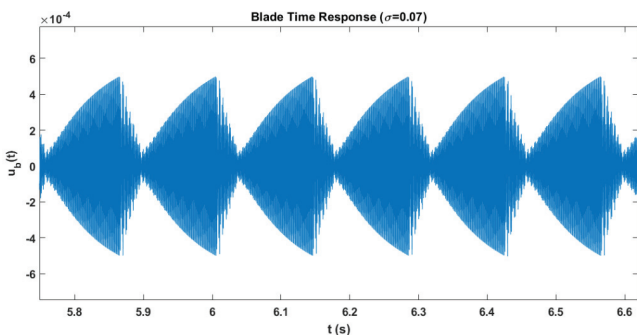
شکل ۱۳. حساسیت پاسخ فرکانسی پره به تغییرات میرایی خطی چاه در سیستم مجهز به چاه غیرخطی انرژی
Fig. 13. Blade frequency response sensitivity to the damping of NES.

افزایش میرایی همانطور که در شکل ۱۰ نیز دیده می‌شود، حداکثر پاسخ سیستم حساسیت چندانی نشان نمی‌دهد، ولی محدوده رخداد پاسخ مدوله قوی کاهش می‌یابد و بیش از حد معینی از میرایی، دیگر پاسخ مدوله قوی در سیستم رخ نخواهد داد.

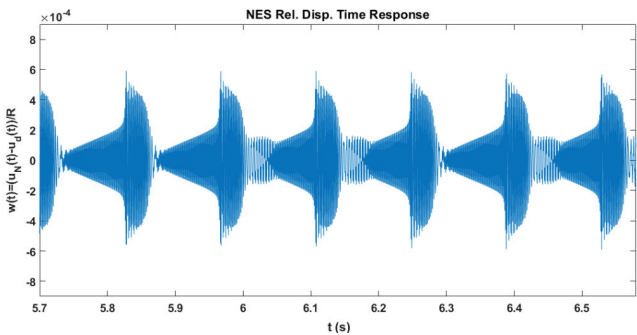
پاسخ زمانی ارتعاشات پره و جابجایی نسبی چاه در سیستم مجهز به چاه غیرخطی با مقادیر بهینه، در انحراف فرکانسی ۰/۰۷ نسبت به نقطه رزونانس که در بازه رخداد پاسخ مدوله قوی در سیستم است،

می‌شود که دامنه بزرگی دارد. در واقع در نواحی انحراف فرکانسی منفی یک جزیره در پاسخ فرکانسی ایجاد می‌شود که موجب چند پاسخ شدن سیستم می‌شود. به عبارت دیگر، انشعابی زین اسبی^۱ در سیستم رخ می‌دهد و موجب ایجاد دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار در سیستم خواهد شد و بستگی به شرایط اولیه، پاسخ پریودیک سیستم ممکن است پاسخ پایدار دامنه بزرگ یا دامنه کوچک شود. از این رو انتخاب ضریب سفتی غیرخطی بزرگ می‌تواند دامنه ارتعاش پره را در نقطه رزونانس تا بیش از ۹۰٪ کاهش دهد اما پیک دیگری نزدیک رزونانس و با دامنه‌ای تقریباً برابر سیستم بدون چاه داشته باشد از این رو انتخاب ضریب سفتی غیرخطی در عملکرد سیستم بسیار موثر است.

حساسیت پاسخ فرکانسی پره به ضریب میرایی چاه غیرخطی در شکل ۱۳ نشان داده شده است. چنانچه شکل نیز نشان می‌دهد، با کاهش میرایی، محدوده پاسخ مدوله قوی در انحراف مثبت فرکانسی گسترش می‌یابد و علاوه بر افزایش دامنه پاسخ در نزدیکی نقطه رزونانس، محدوده‌ای که پاسخ سیستم با چاه غیرخطی بزرگتر از سیستم بدون چاه است، گسترش می‌یابد. با کاهش بیشتر میرایی، انشعابی زین اسبی در انحراف فرکانسی منفی پاسخ فرکانسی ایجاد شده و دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار در سیستم ایجاد می‌شود و بسته به شرایط اولیه سیستم، امکان جذب پاسخ سیستم به یکی از دو پاسخ پایدار وجود دارد که دامنه بزرگ آن بیش از پاسخ مدوله قوی است. در عمل به واسطه ایجاد یک پیک دیگر در سیستم نزدیک نقطه رزونانس، عملکرد مطلوبی در این شرایط برای چاه دیده نمی‌شود. با



(الف)



(ب)

شکل ۱۴. پاسخ زمانی پره (الف) و چاه (ب) در انحراف فرکانسی $\sigma = 0.07$ یا فرکانس $\omega = 4737.2$ rad/s

Fig. 14. (a) Blade and (b) NES time responses at $\sigma=0.07$ or $\omega=4737.2$ rad/s.

1 Saddle-Node

بالاتری نسبت به ضریب میرایی دارد. سفتی کمتر از $10^{15} \frac{N}{m^3}$ و بیش از $10^{17} \frac{N}{m^3}$ عملکرد نامطلوب در سیستم ایجاد می‌کند. میرایی‌های کم و سفتی‌های بزرگ موجب گسترش ناحیه جزیره نزدیک رزونانس شده و انشعاب زین اسبی در پاسخ فرکانسی ایجاد می‌کند که امکان پاسخ پربودیک دامنه بزرگ در انحراف فرکانسی‌های منفی وجود خواهد داشت.

فهرست علائم

میرایی آئرودینامیک پره $(2\pi\zeta_b)$	c_b
ضریب میرایی چاه	c_N
ماتریس تبدیل فوریه	$[E]$
ستون i ام ماتریس فوریه	$\{e_i\}$
نیروی خارجی (آئرودینامیک) وارد بر پره، N	f_b
ماتریس سفتی قطاع	$[K]$
ماتریس سفتی کوپلینگ	$[K_c]$
ماتریس‌های سفتی سیستم	$[\bar{K}], [\bar{K}_D]$
سفتی پره، N/m	k_b
سفتی کوپلینگ بین قطاع‌ها، N/m	k_c
سفتی دیسک-شفت، N/m	k_{ds}
ضریب سفتی غیرخطی چاه، N/m^3	k_N
ماتریس جرم قطاع	$[M]$
ماتریس‌های جرم سیستم	$[\bar{M}], [\bar{M}_D]$
جرم پره، kg	m_b
جرم موادل دیسک-شفت، kg	m_{ds}
جرم چاه، kg	m_N
نسبت جرم موادل دیسک به جرم موادل پره	\bar{m}
تعداد قطاع‌ها	N
شعاع دیسک، m	R
موقعیت درجات آزادی قطاع i ام در مختصات فیزیکی یا ساکن، m	U_i
جابجائی چاه غیرخطی در مختصات فیزیکی، m	u_N
جابجائی پره در k امین مد موادل دیسک-پره، m	$u_{k,b}$
جابجائی دیسک در k امین مد موادل دیسک-پره، m	$u_{k,ds}$
سفتی دینامیکی سیستم	$Z(\omega)$
نسبت جرمی چاه	ϵ
میرایی سازه‌ای پره و دیسک-شفت	γ_b, γ_{ds}
نسبت سفتی دیسک و کوپلینگ به سفتی پره	K_d, K_c
فرکانس طبیعی چاه، rad/s	ω_b
فرکانس n امین خانواده مدهای طبیعی در k امین مد موادل یا $k-1$ امین مد قطری، rad/s	$\omega_{k,n}$
پارامتر انحراف فرکانسی	σ
زاویه فاز بین پره‌ای در k امین مد موادل سیستم	σ_k

در شکل ۱۴ نشان داده شده است. شکل ۱۴(الف) پاسخ زمانی پره را نشان می‌دهد. شکل ۱۴(ب) پاسخ زمانی جابجائی نسبی چاه نسبت به دیسک را نشان می‌دهد. رخداد پاسخ مدوله قوی کاملاً مشخص است. پرش از دامنه پایین به بالا، منی‌فولد آهسته دامنه حرکت سیستم و پرش از دامنه بالا به پایین در پاسخ فرکانسی چاه به وضوح دیده می‌شود. این پرش‌های دامنه حرکتی چاه با توجه به میرایی متصل بین چاه و دیسک، انتقال پربودیک هدفمند انرژی را نشان می‌دهد.

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله کارکرد چاه غیرخطی انرژی در کاهش ارتعاشات پره در سیستم شفت-دیسک-پره انعطاف‌پذیر بررسی گردید. پایه بررسی و طراحی چاه، نمودار فرکانسی روتور دوار است که از نتایج آنالیز موادل مدل متقارن چرخه‌ای سیستم واقعی استخراج گردید. سیستم واقعی ۳۷ مجموعه ۷ پره‌ای از یک توربین بخاری ۳۰ مگاواتی صنعتی است. در محدوده تداخل دینامیکی موثر سه جزء شفت، دیسک و پره‌ها با یکدیگر که مد ترکیبی هر سه است مدل کاهش مرتبه یافته دو درجه آزادی معادل مد ۱۱ و ۱۲ استخراج گردید که خاصیت تقارن چرخه‌ای موجب کاهش معادلات کل سیستم به یک قطاع گردید. برای کاهش ارتعاشات پره در مد قطری اول مد ۱۱، ۳۷ چاه غیرخطی انرژی روی دیسک تعبیه و طراحی گردید و ضریب سفتی غیرخطی و ضریب میرایی خطی نیز برای داشتن عملکرد مناسب سیستم، بهینه‌سازی گردید و نتایج نهایی زیر حال گردید:

مد قطری صفر و یک تنها مدهای قطری هستند که امکان کوپل دینامیکی شفت با دیسک و پره وجود دارد. در خانواده سوم مدهای طبیعی در مد قطری اول سه جزء کوپل دینامیکی دارند که البته موجب تحریک چاه نمی‌شود. یعنی چاه غیر خطی در اولین مد ترکیبی که در آن حرکت پره‌ها نیز داخل صفحه دیسک است، عملکردی ندارد. در خانواده ۱۱ مدهای طبیعی که دومین مد ترکیبی سه جزء است و شفت در مد دوم خمشی عرضی است، چاه غیرخطی از ترکیب حرکت دیسک و شفت انرژی می‌گیرد و تحریک می‌شود و عملکرد موثری در کاهش دامنه دارد. تحلیل عددی عملکرد سیستم مجهز به چاه غیرخطی بهینه در این مد نشان داد که چاه غیرخطی با رخداد پاسخ مدوله قوی، دامنه رزونانس را تا ۳۸ درصد کاهش می‌دهد و عملکرد آن نسبت به ضریب سفتی غیرخطی چاه حساسیت

- (2011) 1127–1135.
- [11] P. Polach, Evaluation of the suitability of the bladed disk design regarding the danger of the resonant vibration excitation. *Engineering Mechanics*, 18 (3–4) (2011) 181–191.
- [12] A. P. I. Std, 612 Special Purpose Steam Turbines for Petroleum. Chemical and Gas Industry Services, (n.d.).
- [13] Y.-J. Chiu, X.-Y. Li, Y.-C. Chen, S.-R. Jian, C.-H. Yang, & I.-H. Lin, Three methods for studying coupled vibration in a multi flexible disk rotor system. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 31 (11) (2017) 5219–5229.
- [14] S. Bab, S. E. Khadem, & M. Shahgholi, Lateral vibration attenuation of a rotor under mass eccentricity force using non-linear energy sink. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 67 (2014) 251–266.
- [15] B. Bergeot, S. Bellizzi, & B. Cochelin, Passive suppression of helicopter ground resonance using nonlinear energy sinks attached on the helicopter blades. *Journal of Sound and Vibration*, 392 (2017) 41–55.
- [16] B. Mokrani & A. Preumont, A numerical and experimental investigation on passive piezoelectric shunt damping of mistuned blisks. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, (2017) 1045389X17721023.
- [17] S. M. Schwarzendahl, J. Szwedowicz, M. Neubauer, L. Panning, & J. Wallaschek, On blade damping technology using passive piezoelectric dampers. *ASME Turbo Expo 2012: Turbine Technical Conference and Exposition*, (2012) 1205–1215.
- [18] A. S. Alsuwaiyan & S. W. Shaw, Performance and dynamic stability of general-path centrifugal pendulum vibration absorbers. *Journal of Sound and Vibration*, 252 (5) (2002) 791–815.
- [19] O. V. Gendelman, Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators. *Nonlinear Dyn.*, Springer, 2001, pp. 237–253.
- [20] O. Gendelman, L. I. Manevitch, A. F. Vakakis, & R. M'closkey, Energy pumping in nonlinear
- [1] G. Óttarsson, Dynamic modeling and vibration analysis of mistuned bladed disks. (1994).
- [2] D. J. Mead, Wave propagation and natural modes in periodic systems: I. Mono-coupled systems. *Journal of Sound and Vibration*, 40 (1) (1975) 1–18.
- [3] B. J. Olson, S. W. Shaw, & C. Pierre, Order-tuned vibration absorbers for a rotating flexible structure with cyclic symmetry. *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference—DETC2005*, 1 (2005) 2475–2484.
- [4] G. Genta, *Dynamics of rotating systems*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [5] B. Zhou, F. Thouverez, & D. Lenoir, Vibration reduction of mistuned bladed disks by passive piezoelectric shunt damping techniques. *AIAA journal*, (2014).
- [6] S. Gozen, B. J. Olson, S. W. Shaw, & C. Pierre, Resonance suppression in multi-degree-of-freedom rotating flexible structures using order-tuned absorbers. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134 (6) (2012) 61016.
- [7] B. Bergeot, S. Bellizzi, & B. Cochelin, Analysis of steady-state response regimes of a helicopter ground resonance model including a non-linear energy sink attachment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 78 (2016) 72–89.
- [8] B. Zhou, F. Thouverez, & D. Lenoir, Essentially nonlinear piezoelectric shunt circuits applied to mistuned bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*, 333 (9) (2014) 2520–2542.
- [9] M. Singh, SAFE Diagram-A Dresser-Rand Evaluation Tool For Packeted Bladed Disc Assembly. *Technology Report Dresser-Rand Company*, TP025, (1984).
- [10] V. Kharyton, C. Gibert, L. Blanc, & F. Thouverez, Elements of Dynamic Characterization of a Bladed Disk by Using the Tip-Timing Method Under Vacuum Conditions. *ASME 2011 Turbo Expo: Turbine Technical Conference and Exposition*,

- blisk-journal bearing system employing smooth nonlinear energy sinks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 84 (2017) 128–157.
- [28] C. Guo, M. A. AL-Shudeifat, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland, & J. Yan, Vibration reduction in unbalanced hollow rotor systems with nonlinear energy sinks. *Nonlinear Dynamics*, 79 (1) (2015) 527–538.
- [29] Y. S. Lee, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland, & G. Kerschen, Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 1: theory. *AIAA journal*, 45 (3) (2007) 693.
- [30] Y. S. Lee, G. Kerschen, D. M. McFarland, W. J. Hill, C. Nichkawde, T. W. Strganac, L. A. Bergman, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland, & G. Kerschen, Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 2: experiments. *AIAA journal*, 45 (10) (2007) 2391.
- [31] H. Guo, Y. Chen, & T. Yang, Limit cycle oscillation suppression of 2-DOF airfoil using nonlinear energy sink. *Applied Mathematics and Mechanics*, 34 (10) (2013) 1277–1290.
- [32] M. A. AL-Shudeifat, Highly efficient nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynamics*, 76 (4) (2014) 1905–1920.
- [33] ANSYS Inc. Release 15.0, ANSYS Mechanical APDL Element Reference. (2013).
- [34] A. Muszynska, *Rotordynamics*, CRC press, 2005.
- [35] E. I. Rivin, *Handbook on stiffness & damping in mechanical design*, ASME Press New York, 2010.
- [36] M. P. Norton & D. G. Karczub, *Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers*, Cambridge university press, 2003.
- mechanical oscillators: Part I—Dynamics of the underlying Hamiltonian systems. *Journal of Applied Mechanics*, 68 (1) (2001) 34–41.
- [21] O. V Gendelman, G. Sigalov, L. I. Manevitch, M. Mane, A. F. Vakakis, & L. A. Bergman, Dynamics of an eccentric rotational nonlinear energy sink. *Journal of applied mechanics*, 79 (1) (2012) 11012.
- [22] Y. S. Lee, F. Nucera, A. F. Vakakis, D. M. McFarland, & L. A. Bergman, Periodic orbits, damped transitions and targeted energy transfers in oscillators with vibro-impact attachments. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 238 (18) (2009) 1868–1896.
- [23] S. Bab, S. E. Khadem, M. K. Mahdiabadi, & M. Shahgholi, Vibration mitigation of a rotating beam under external periodic force using a nonlinear energy sink (NES). *Journal of Vibration and Control*, 23 (6) (2017) 1001–1025.
- [24] E. Gourdon, N. A. Alexander, C. A. Taylor, C.-H. Lamarque, & S. Pernot, Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling: Theoretical and experimental results. *Journal of sound and vibration*, 300 (3) (2007) 522–551.
- [25] A. F. Vakakis, O. V Gendelman, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen, & Y. S. Lee, *Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems*, Springer Science & Business Media, 2008.
- [26] Z. Lu, Z. Wang, Y. Zhou, & X. Lu, Nonlinear dissipative devices in structural vibration control: A review. *Journal of Sound and Vibration*, 423 (2018) 18–49.
- [27] S. Bab, S. E. Khadem, M. Shahgholi, & A. Abbasi, Vibration attenuation of a continuous rotor-