Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(2) (2021) 167-170
DOI: 10.22060/mej.2019.15028.6003

Application of Nonconforming Quadtree Grids in the Finite Element Method

M. J. Kazemzadeh-Parsi*

Department of Mechanical Engineering, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran

ABSTRACT: In the standard finite element method, the edges of the adjacent elements are aligned to each other, and the corner of an element does not locate on the edges of another one. If this constraint violates, the mesh is called non-conforming and the use of such meshes in the finite element method requires specific techniques. In the present paper, a new method is suggested for treating non-conforming meshes. Non-conforming meshes appear generally in adaptive mesh refinement processes especially in the quadtree mesh refinement algorithm. The quadtree is a data structure with an extremely fast recursive algorithm and is used to divide a two-dimensional domain into sub-regions or elements. In the present paper, a new approach is proposed to construct the shape functions of such elements. In this method, the shape functions are considered harmonic functions and the Laplace boundary value problem is defined and its solution is used as the shape functions of the non-conforming elements. To evaluate the applicability and accuracy of the proposed method, two numerical examples are solved and the results are presented. The results show that the proposed method can be used to effectively apply the non-conforming meshes in the finite element method.

Review History:

Received: Sep. 24, 2018
Revised: Feb. 06, 2019
Accepted: Mar. 11, 2019
Available Online: Nov. 02, 2019

Keywords:

Quadtree meshes
non-conforming meshes
Finite element method
Shape function

1- INTRODUCTION

Harmonic coordinates are one of the most appealing ideas to drive the approximation functions. The first use of harmonic functions for Two-Dimensional (2D) interpolation was published in Ref. [1]. The first use of harmonic approximation functions for the solution of boundary value problems was appeared in Ref. [2] in which it proofed that such approximation functions form a partition of unity and exactly reproduce a linear field. These functions also possess the Kronecker delta property. Harmonic functions satisfy the elliptic Laplace equation with positive boundary conditions. Therefore, the approximation functions are non-negative in the element interior. To the best knowledge of the authors, a few papers have been published based on the application of harmonic shape functions in the Finite Element Method (FEM). For example, refer to Refs. [2-6]. In the previous works, the shape functions were defined in the global coordinate system and seeking the numerical solution of the Laplace equation was unavoidable. For instance, the methods such as finite difference method [2], the method of fundamental solutions [4], the boundary element method [5], the complex variable boundary method [6] and the FEM is used [3] to approximate the harmonic shape functions

To avoid the numerical solution of the Laplace equation, the shape functions are derived here in the local coordinate system for a representative master element. Therefore, the harmonic shape functions can be obtained analytically using the Fourier series. In addition, a new procedure is proposed here for systematic computation of the shape functions. In this approach, a small set of harmonic functions are defined at first as the building blocks and then all of the shape functions of different elements with different node arrangements are derived using proper transformations of them.

To evaluate the performance and the potentials of the proposed method the Laplace equation is selected in the present manuscript as the model equation. Two benchmark examples are solved and the results are presented. In these examples, the patch test and convergence analysis are done. The results have shown that the proposed method treats non-conforming elements very naturally and efficiently. A lot of development is still to be done in the applications of harmonic shape functions and we believe it can begin an interesting field of research.

2- QUADRILATERAL ELEMENTS WITH MIDSIDE NODES

Consider a set of quadrilateral elements with midside nodes and linear variation of the shape functions on the element boundaries. In the most general case, the quadrilateral elements with midside nodes consist of 5 different element types which are shown schematically in Fig. 1. All of these elements are compatible with traditional linear Lagrange elements and a composite mesh with standard elements and elements with harmonic shape functions is possible.

*Corresponding author's email: kazemzadeh@iaushiraz.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

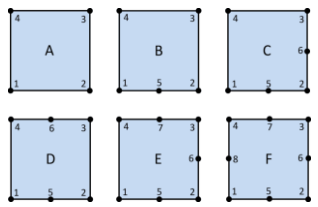


Fig. 1. Different elements with midside nodes

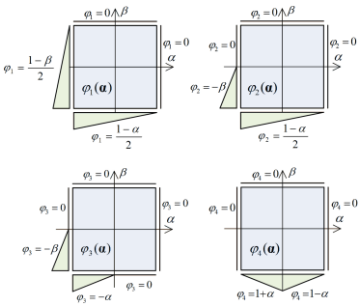


Fig. 2. Boundary conditions for obtaining RFs

3- ROOT FUNCTIONS

Different element types in Fig. 1 contain a total of 32 nodes and each node has its own shape function. All of these shape functions can be constructed using only 4 Root Functions (RFs) and proper coordinate transformations. To explain this more consider Fig. 2. In this Figure, the boundary conditions for obtaining the RFs on the boundaries of the square domain α, β [-1,1] in the Root Coordinate System (RCS) are given.

The value of the RFs on the entire boundary of the square domain is given in Fig. 2. In fact, we seek the value of the RFs at the internal points of the square domain. In the present work, the Laplace boundary value problem is used here to obtain RFs in the internal points. The method of separation of variables and series solution are used to obtain the analytic solution of the Laplace boundary value problem [7]. The general solution of this boundary value problem is as follows.

$$\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_1^n\ A_2^n\left(\alpha\right)\ A_3^n\left(\beta\right)+B_1^n\ B_2^n\left(\alpha\right)\ B_3^n\left(\beta\right)\right) \tag{1}$$

where the coefficients A_1^n to B_3^n are dependent on boundary conditions given in Fig. 2. The surface plots of the four root functions are shown in Fig. 3.

4- HARMONIC SHAPE FUNCTIONS

The shape functions of element types A to E can be obtained using the four RFs with proper coordinate transformations. The general formula for the shape functions is given here as follows.

$$N(\boldsymbol{\xi})=\varphi(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\xi}) \tag{2}$$

were N is the harmonic shape function defined in Local Coordinate System (LCS), φ is a root function in RCS and T is a transformation matrix that transforms the local coordinates $\boldsymbol{\xi}$ to the root coordinates $\boldsymbol{\alpha}$. For example, the surface plots of the shape functions of element type B are shown in Fig. 4.

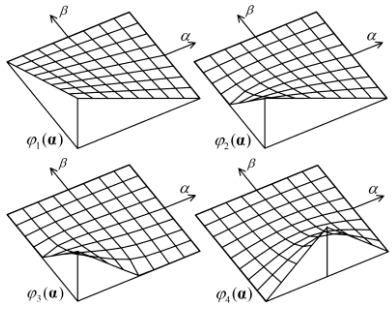


Fig. 3. Four root functions

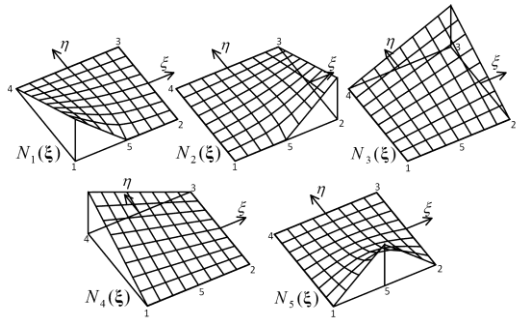


Fig. 4. The shape functions of element type B

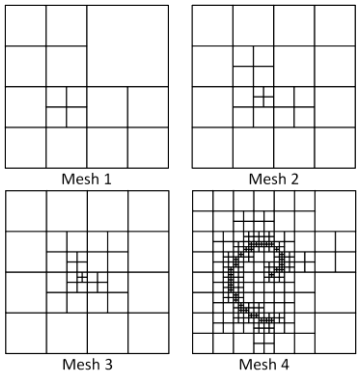


Fig. 5. The meshes of the first example

5- NUMERICAL EXAMPLES

As the first example, the patch test is conducted for the Laplace equation over a unit square using different meshes which are shown in Fig. 5. The exact solution is considered as $T=x+3y$ and the Dirichlet boundary condition is applied on all of the boundaries of the square domain. The Laplace equation was solved using the proposed method and the results showed that the proposed method would pass the patch test.

In the second example, a convergence test for the Laplace equation is done to evaluate the effect of mesh size on the quality of the results. To do this, assume the Laplace equation holds in a unit square domain and consider the exact solution as $u=e^x\sin(y)$. Dirichlet boundary condition is applied to the domain boundaries using this exact solution. The problem is solved using four different meshes as shown in Fig. 6. The relative L_2 error norm of the field variable for each mesh is presented in Fig. 7.

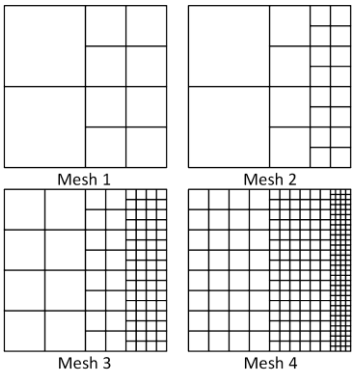


Fig. 6. The meshes of the second example

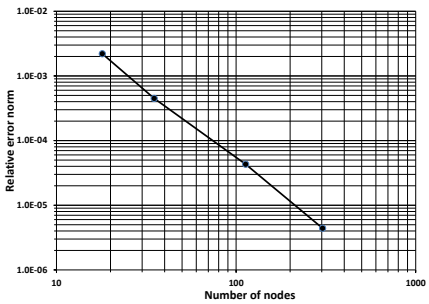


Fig. 7. Relative error norm in the second example

6- CONCLUSIONS

The harmonic functions were used in the present work to define the elements with midside nodes. The shape functions were defined in such a way that vary linearly between adjacent nodes on the element boundaries and therefore the elements could be attached to any standard linear elements. As a result, the hanging nodes were treated very naturally in the present method without any additional constraints. Two numerical examples were solved to evaluate the proposed method and the results are presented.

REFERENCES

[1] W.J. Gordon, J.A. Wixom, Pseudo harmonic interpolation on convex domains, SIAM Journal on Numerical Analysis, 11(5) (1974) 909-933.

[2] P. Joshi, M. Meyer, T. DeRose, B. Green, T. Sanocki, Harmonic Coordinates for Character Articulation, ACM Transactions on Graphics, 26(3) (2007) Article No. 71.

[3] J.E. Bishop, A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions, International Journal for Numerical Methods in Engineering; 97 (2014) 1-31.

[4] S. Martin, P. Kaufmann, M. Botsch, M. Wicke, M. Gross, Polyhedral Finite Elements Using Harmonic Basis Functions, SGP 08 Proceedings of the Symposium on Geometry Processing, Copenhagen, Denmark, (2008) 1521-1529.

[5] R.M. Rustamov, Boundary element formulation of harmonic coordinates. Technical report, Department of Mathematics, Purdue University, Nov. 2008.

[6] O. Weber, C. Gotsman, Controllable conformal maps for shape deformation and interpolation. ACM Transactions on Graphics, 29(4) (2010) Article 78.

[7] [7] N.H. Asmar, Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2005.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. J. Kazemzadeh-Parsi, Application of Nonconforming Quadtree Grids in the Finite Element Method, Amirkabir J. Mech Eng., 53(2) (2021) 167-170.

DOI: 10.22060/mej.2019.15028.6003

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ۲، سال ۱۴۰۰، صفحات ۶۷۳ تا ۶۸۶
DOI: 10.22060/mej.2019.15028.6003

به‌کارگیری شبکه‌های غیرانطباقی درخت چهارتایی در روش المان محدود

محمد جواد کاظم زاده پارسی*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز ، شیراز، ایران

خلاصه: در روش المان محدود استاندارد، وجوه المان‌های مجاور کاملاً بر یکدیگر منطبق بوده و گوشه یک المان بر وجه یک المان دیگر قرار ندارد. در صورتی‌که گره گوشه‌ای یک المان بر روی وجه المان همسایه واقع شود گفته می‌شود که شبکه غیرانطباقی است. استفاده از چنین شبکه‌هایی در روش المان محدود به تکنیک‌های ویژه‌ای نیاز دارد. در مقاله حاضر، یک روش جدید برای استفاده از شبکه‌های غیرانطباقی پیشنهاد شده است. درخت چهارتایی یک ساختمان داده درختی با یک الگوریتم بازگشتی بسیار سریع است و می‌توان از آن جهت شبکه‌بندی نواحی دوبعدی استفاده کرد. المان‌های تولید شده با این روش غیرانطباقی بوده و قابلیت استفاده در روش المان محدود استاندارد را ندارند. در مقاله حاضر ایده جدیدی جهت محاسبه توابع شکل چنین المان‌هایی پیشنهاد شده است. در این روش از حل یک مسئله مقدار مرزی برای استخراج توابع شکل استفاده شده است. شرایط مرزی در این مسئله به نحوی انتخاب شده است که تغییرات توابع شکل در بین هر دو گره مجاور خطی باشد. برای بررسی دقت و کارآیی روش پیشنهادی دو مثال عددی حل شده و نتایج ارائه گردیده است. نتایج نشان می‌دهد که با استفاده از روش پیشنهادی می‌توان از شبکه‌های غیرانطباقی به‌طور موثری در روش المان محدود استفاده کرد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۷/۰۷/۰۲
بازنگری: ۱۳۹۷/۱۱/۱۷
پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۲۰
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۸/۱۱

کلمات کلیدی:
شبکه درخت چهارتایی
شبکه غیرانطباقی
روش المان محدود
تابع شکل

۱- مقدمه

روش المان محدود در کنار کاربردهای فراوانی که در علوم و صنایع پیدا کرده دارای محدودیت‌هایی نیز می‌باشد. مهم‌ترین محدودیت این روش وابستگی آن به شبکه‌های محاسباتی است. تاکنون کوشش‌های بسیاری جهت کاهش وابستگی روش المان محدود به شبکه‌های محاسباتی انجام شده و روش‌های متعددی نیز برای این منظور ابداع شده است. یک دسته از این روش‌ها براساس حذف کامل شبکه المانی عمل کرده و تحت عنوان عمومی روش‌های بدون شبکه شناخته می‌شوند. دسته دیگر روش‌هایی هستند که براساس تخفیف شرایط مورد نیاز برای شبکه‌های المانی تدوین شده‌اند. در مقاله حاضر یک روش جدید برای کاربرد شبکه‌های درخت چهارتایی در روش المان محدود ارائه شده است. شبکه‌های ایجاد شده براساس درخت چهارتایی شرایط مورد نیاز روش المان محدود را به‌طور استاندارد ارضاء نمی‌کنند. بنابراین روش پیشنهادی در مقاله حاضر به دلیل کاهش شرایط مورد نیاز شبکه محاسباتی از نظر دسته‌بندی فوق در دسته دوم واقع می‌شود.

تدوین یک روش عددی براساس شبکه محاسباتی به خودی خود بیانگر محدودیت آن نیست. به عبارت دیگر، محدودیت زمانی به‌وجود می‌آید که شرایط سخت‌گیرانه‌ای برای یک شبکه محاسباتی تعریف شود. به عنوان نمونه یکی از شرایطی که شبکه‌های محاسباتی مورد استفاده در روش المان محدود باید آن را ارضاء کنند انطباق شبکه بر مرز دامنه است. شرط انطباق شبکه بر مرز موجب پیچیده شدن روش‌های تولید شبکه می‌گردد. این مشکل به‌خصوص در مسائل

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: kazemzadeh@iaushiraz.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

سه‌بعدی که دارای هندسه پیچیده‌ای باشند بسیار محدودکننده و هزینه‌بر خواهد بود. مشکل دیگر شبکه‌های منطبق بر مرز محدودیت حل مسائل دارای دامنه متغیر است. در این مسائل با پیشرفت حل، دامنه مسئله دچار تغییر شده و فرایند تولید شبکه لازم است برای دامنه جدید مجدداً تکرار شود. بنابراین تدوین روش‌هایی که امکان استفاده از شبکه‌های غیرمنطبق بر مرز را فراهم کند موجب برطرف شدن چنین محدودیت‌هایی می‌شود. به عنوان نمونه در روش المان محدود شبکه ثابت هموار شده از یک شبکه المانی ثابت برای حل مسائل دارای دامنه متغیر استفاده شده است. از این روش تاکنون برای حل مسائل معکوس هندسی [۱]، مسائل نشت سیال در محیط متخلخل [۲] و مسائل بهینه‌سازی شکل [۳] استفاده شده است.

یکی دیگر از راهکارهایی که جهت کاهش شرایط مورد نیاز شبکه محاسباتی وجود دارد استفاده از شبکه‌های غیرانطباقی[1] است که براساس درخت چهارتایی[2] تولید شده است. درخت چهارتایی یا درخت چهارگانه یا چاردرخت یک نوع ساختمان داده درختی است که در حوزه علوم کامپیوتر دارای کاربردهای خاص خود می‌باشد [۴]. بیان هندسی ساختمان داده درخت چهارتایی به این صورت است که یک فضای دوبعدی را می‌توان به‌طور بازگشتی به نواحی کوچکتر افراز کرد. افراز فضا توسط درخت چهارتایی به دلیل ساختار درختی ساختمان داده آن و حفظ اطلاعات نواحی همسایه بسیار سریع می‌باشد. شبکه ساخته شده توسط درخت چهارتایی یک شبکه غیرانطباقی بوده و به‌طور مستقیم در روش المان محدود قابل استفاده نیست. در این نوع شبکه‌ها، المان‌هایی که در کنار یکدیگر واقع می‌شوند ممکن است از نظر طول اضلاع با یکدیگر متفاوت بوده و موجب شوند یک گره از یک المان در میان ضلع یک المان همسایه قرار گیرد. چنین گره‌هایی اصطلاحاً گره آویزان[3] نامیده شده و وجود آن‌ها در روش المان محدود موجب ناپیوستگی متغیر میدان می‌گردد که همگرایی حل عددی را با مشکل روبرو می‌کند. بنابراین، کاربرد شبکه‌های دارای گره آویزان در روش المان محدود نیازمند تکنیک‌های ویژه‌ای است. ساده‌ترین روشی که در این مورود وجود دارد این است که المان‌هایی که دارای گره آویزان هستند به تعدادی مثلث تجزیه شوند و با انجام مثلث‌سازی، غیرانطباقی بودن شبکه برطرف شود [۵]. روش دیگر این است که با اعمال یک قید بین توابع شکل گره آویزان و گره‌های اطراف آن سعی می‌شود ناپیوستگی متغیر میدان برطرف گردد [۶]. دسته دیگر روش‌هایی هستند که در آن‌ها از توابع ویژه‌ای به عنوان توابع شکل استفاده شده و از این طریق برای گره‌های آویزان توابع شکلی استخراج می‌شود که پیوستگی متغیر میدان را حفظ کنند. به عنوان نمونه در مرجع [۷] از روش همسایه‌های طبیعی برای ساخت توابع شکل استفاده شده است. در مرجع [۸] از تکنیک هموارسازی گرادیان برای استخراج ماتریس‌های المان در شبکه‌های غیرانطباقی استفاده شده است. روش دیگری که در این زمینه استفاده شده است روش المان محدود توسعه‌یافته است که از آن برای استخراج توابع شکل خاص با در نظر گرفتن گره‌های آویزان استفاده شده است [۹].

در مقاله حاضر یک روش جدید جهت محاسبه توابع شکل المان‌هایی که دارای گره آویزان هستند ارائه شده است. در این روش با تعریف مفاهیم جدیدی تحت عنوان دستگاه مختصات ریشه و توابع ریشه، نشان داده می‌شود که می‌توان توابع شکل المان را با انجام تبدیل مختصات مناسب از توابع ریشه استخراج کرد. سپس با تعریف یک مسئله مقدار مرزی مناسب توابع ریشه به‌طور تحلیلی و با استفاده از حل سری محاسبه می‌شوند. به این ترتیب توابع شکل المان‌های دارای گره آویزان به‌صورت سری بی‌نهایت استخراج می‌گردند. برای بررسی کارآیی روش پیشنهادی معادله لاپلاس به عنوان یک معادله مدل انتخاب شده و توسط روش باقی‌مانده‌های وزن‌دار و تکنیک گالرکین و با استفاده از توابع شکل پیشنهادی گسسته‌سازی شده است. به‌عنوان مثال‌های عددی دو آزمون پچ[4] و آزمون همگرایی براساس شبکه‌های درخت چهارتایی انجام شده و نتایج ارائه گردیده است. نتایج آزمون پچ و آزمون همگرایی نشان می‌دهد که می‌توان از روش پیشنهادی برای کاربرد شبکه‌های غیرانطباقی در روش المان محدود استفاده کرد.

۲- شبکه درخت چهارتایی

۲- ۱- تولید درخت چهارتایی

درخت چهارتایی یا درخت چهارگانه یا چاردرخت یک نوع ساختمان داده درختی است که در آن هر شاخه از ساختمان داده دقیقاً دارای چهار فرزند است. این ساختمان داده دارای کاربردهای خاصی در حوزه علوم کامپیوتر می‌باشد. بیان هندسی درخت چهارتایی

1 Nonconforming
2 Quadtree
3 Hanging Node
4 Patch Test

به این صورت قابل توصیف است که یک فضای دوبعدی مربعی شکل را می‌توان به چهار ربع یا زیرفضای کوچکتر تقسیم کرد. سپس هر زیرفضا را نیز می‌توان به چهار ربع دیگر تقسیم کرد و این فرایند را به‌طور بازگشتی برای هر زیرفضا تا هر مرحله تقسیم دلخواه تکرار کرد. نتیجه این الگوریتم افراز فضای دوبعدی به تعدادی زیرناحیه است که تعداد مراحل تقسیم در هر نقطه از آن به دلخواه قابل انتخاب می‌باشد. افراز فضا توسط درخت چهارتایی به دلیل ساختار درختی ساختمان داده آن و حفظ اطلاعات نواحی همسایه در این ساختمان داده دارای یک الگوریتم بازگشتی بسیار سریع بوده و به کمک آن می‌توان شبکه‌بندی را با سرعت بسیار بالایی در مقایسه با روش‌های مرسوم تولید شبکه انجام داد.

در شکل ۱ نحوه تشکیل یک درخت چهارتایی نشان داده شده است. در شکل ۱-الف یک ناحیه مربعی اولیه که در یک مرحله تقسیم به چهار المان افراز شده نشان داده شده است. در شکل ۱-ب تقسیم‌های متوالی تا سه مرحله پیش رفته است. به‌عنوان نمونه در شکل ۱-ب گره‌ها نیز مشخص شده‌اند. همانطور که دیده می‌شود دو دسته گره در شکل ۱-ب قابل تشخیص است. دسته اول که با نقاط توپر نشان داده شده گره‌های عادی است. المان‌هایی که در مجاورت این گره‌ها قرار دارند می‌توانند یک تابع تقریب پیوسته را برای متغیر میدان ایجاد کنند. دسته دوم گره‌هایی هستند که با نقاط توخالی در شکل ۱-ب نشان داده شده‌اند. این گره‌ها به گره‌های آویزان مشهور هستند و با قرارگیری گره گوشه‌ای یک المان در میان ضلع یک المان دیگر ایجاد می‌شوند. بنابراین استفاده از توابع شکل استاندارد المان محدود قادر به تولید یک تابع تقریب پیوسته در مرز بین دو المان نخواهد بود و وجود گره‌های آویزان موجب ایجاد ناپیوستگی در تابع تقریب می‌شود. چنین شبکه‌هایی اصطلاحاً شبکه‌های غیرانطباقی خوانده شده و استفاده از آن‌ها نیاز به اقدامات ویژه‌ای دارد.

در شکل ۱-ج تقسیم‌های متوالی ادامه یافته تا در یک سری نقاط از پیش معین شده، اندازه المان‌ها به مقدار مورد نیاز کاهش یابد. همانطور که دیده می‌شود افزایش تعداد مراحل تقسیم در برخی نواحی موجب بروز دو پدیده شده است. یکی این که المان‌های ریز در مجاورت المان‌های درشت قرار گرفته‌اند و دیگر این که تعداد زیادی گره آویزان در شبکه ایجاد شده است. هر دو این پدیده‌ها موجب کاهش کیفیت شبکه و کاهش دقت حل می‌گردد. برای رفع

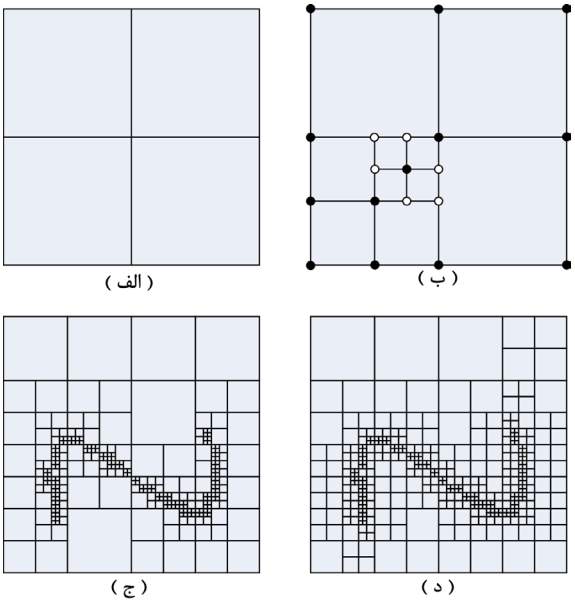


Fig. 1. The process of quadtree grid generation, a- one level division, b- three levels devisions, solid points indicate regular nodes and hollow points indicate hanging nodes, c- continuing divisions untile a pre specified element size, d- continuing divisions untile the maximum level difference between adjacent elements reaches one

شکل ۱: فرایند تولید شبکه درخت چهارتایی، الف- یک مرحله تقسیم، ب- سه مرحله تقسیم، نقاط توپر بیانگر گره‌های عادی و نقاط توخالی بیانگر گره‌های آویزان است، ج- ادامه تقسیم‌های متوالی تا رسیدن به اندازه دلخواه المان‌ها در یک سری نقاط از پیش مشخص شده، د- ادامه فرایند تقسیم به نحوی که اختلاف مرحله تقسیم بین المان‌های همسایه حداکثر برابر یک باشد

این مشکل کافی است مراحل تقسیم ادامه یابد به‌نحوی که اختلاف مرحله تقسیم بین دو المان مجاور بیش از یک نباشد. در این صورت از یک طرف تغییر ابعاد المان‌ها از درشت به ریز به‌طور تدریجی رخ داده و از طرف دیگر تعداد گره‌های آویزان به حداقل می‌رسد. انجام این فرایند منجر به تولید شبکه‌ای می‌شود که در شکل ۱-د نشان داده شده است. در مقاله حاضر فرمول‌بندی ویژه‌ای برای استفاده از شبکه‌هایی نظیر شکل ۱-د در روش المان محدود ارائه شده است.

۲- ۲- انواع المان‌ها در شبکه درخت چهارتایی

همانطور که بیان شد شبکه درخت چهارتایی یک شبکه غیرانطباقی است و ممکن است گره گوشه‌ای یک المان در میان ضلع یک المان همسایه قرارگیرد. به‌طور کلی می‌توان نشان داد در یک شبکه غیرانطباقی که اختلاف مرتبه تقسیم المان‌های مجاور هم حداکثر برابر یک باشد شش نوع مختلف المان با چیدمان متفاوت

گره‌ها ممکن است ظاهر شود. در شکل ۲ بخشی از یک شبکه درخت چهارتایی نشان داده شده و هر شش نوع المان مختلف در این شکل قابل تشخیص است. المان‌های مختلف در این شکل با حروف A تا F نامگذاری شده‌اند. در شکل ۳ هر شش نوع المان با توجه به چیدمان گره‌ها در آن‌ها قابل مشاهده است. همانطور که دیده می‌شود المان نوع A دارای چهار گره در چهار گوشه خود است. این نوع المان درواقع المان چهارگوش چهار گرهی استاندارد می‌باشد و توابع شکل آن با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ قابل استخراج است. المان‌های نوع B دارای چهار گره در چهار گوشه و یک گره در میان یکی از اضلاع می‌باشند. به همین ترتیب دیگر المان‌ها نیز علاوه بر گره‌های گوشه‌ای دارای گره‌هایی در میان برخی از اضلاع خود هستند.

در المان نوع A توابع شکل بر روی جوه المان به‌طور خطی تغییر می‌کنند. بنابراین در المان‌های نوع B تا F نیز لازم است توابع شکل به‌طور خطی بین هر دو گره مجاور تغییر کنند. به‌عنوان مثال در المان نوع B که شماره‌گذاری محلی گره‌های آن در شکل ۳ دیده می‌شود لازم است تابع شکل گره ۱ بر روی وجه ۵-۱ و وجه ۴-۱ به‌طور خطی تغییر کند و بر روی دیگر وجوه برابر صفر باشد. ساخت توابع شکل با چنین ویژگی‌هایی با روش‌های مرسوم و استفاده از توابع چندجمله‌ای امکان پذیر نیست و نیاز به تکنیک‌های ویژه‌ای دارد. در مقاله حاظر یک روش جدید برای این منظور ارائه شده که در بخش بعد تشریح شده است.

۳- محاسبه توابع شکل

در روش المان محدود شبکه المانی در دستگاه مختصات عمومی تعریف شده و با انجام یک نگاشت مختصات هر المان در دستگاه مختصات عمومی به یک المان مرجع در دستگاه مختصات محلی نگاشت می‌شود. سپس برای هر گره یک تابع شکل مستقل در دستگاه مختصات محلی به‌طور مجزا تعریف و استخراج می‌گردد. در روش پیشنهادی در مقاله حاضر این مفهوم گسترش داده شده و نشان داده می‌شود که می‌توان توابع شکل مختلف را با تعریف تبدیل مختصات مناسب از تعداد محدودی تابع دیگر که در مقاله حاضر به آن‌ها توابع ریشه گفته می‌شود استخراج کرد. در ادامه ابتدا توابع ریشه و دستگاه مختصات ریشه تعریف شده و نحوه محاسبه چهار تابع ریشه ارائه می‌گردد. سپس جزئیات استخراج ۳۶ تابع شکل متفاوت مربوط

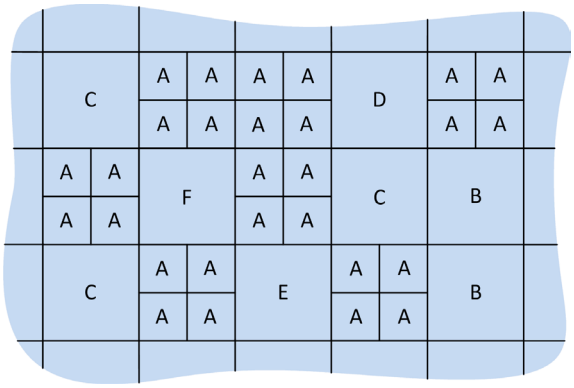


Fig. 2. A portion of a quadtree mesh in which six different element types are indicated by letters A to F

شکل ۲: بخشی از یک شبکه درخت چهارتایی که شش نوع المان مختلف در آن با حروف A تا F نام‌گذاری شده‌اند

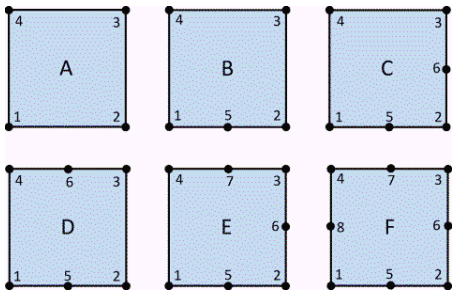


Fig. 3. Node arrangement and local node numbring six different element types that appear in quadtree meshes

شکل ۳: نحوه قرارگیری گره‌ها و شماره‌گذاری محلی آن‌ها در شش نوع المان مختلف که در شبکه درخت چهارتایی ظاهر می‌شوند

به کلیه گره‌های المان‌های نوع A تا F از چهار تابع ریشه تشریح می‌گردد.

۳- ۱- تعریف توابع ریشه و دستگاه مختصات ریشه

به‌طور استاندارد در روش المان محدود از توابع چندجمله‌ای برای استخراج توابع شکل المان در مختصات محلی استفاده می‌شود. در این روش برای هر گره یک تابع شکل مجزا استخراج شده و گره‌های مختلف دارای توابع شکل متفاوت و مستقلی نسبت به یکدیگر خواهند بود. به عنوان نمونه اگر $\xi=(\xi,\eta)$ بیانگر مختصات محلی المان باشد که مبدا دستگاه مختصات محلی در مرکز المان بوده و بازه تغییرات آن بین ۱- تا ۱+ باشد در این صورت توابع شکل یک المان چهارگوش چهارگرهی (المان نوع A) به‌صورت زیر قابل بیان هستند [۱۰].

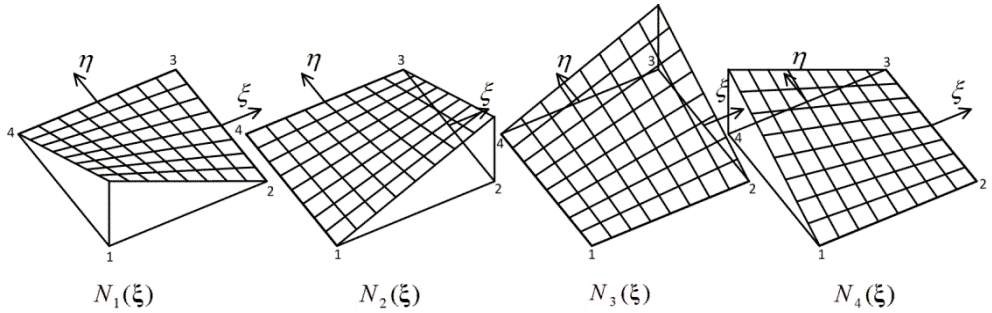


Fig. 4. Three dimensional representation of shape functions of four node quadrilateral element (element Type A) in local coordinate system (ξ,η)

شکل ۴: نمایش سه‌بعدی توابع شکل المان چهارگوش چهارگرهی (المان نوع A) در دستگاه مختصات محلی (ξ,η)

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= (\xi-1)(\eta-1)/4; \\ N_3(\xi) &= (\xi+1)(\eta+1)/4; \\ N_2(\xi) &= -(\xi+1)(\eta-1)/4 \\ N_4(\xi) &= -(\xi-1)(\eta+1)/4 \end{aligned} \tag{۱}$$

در شکل ۴ هر چهار تابع شکل بیان شده در رابطه (۱) در مختصات محلی ترسیم شده است. از این شکل می‌توان دریافت که هرچهار تابع شکل گرچه توابع متفاوت و مستقلی نسبت به یکدیگر هستند اما از نظر ساختار هندسی دقیقاً همانند یکدیگرند. در حقیقت، هر چهار تابع شکل ترسیم شده در شکل ۴ از چرخش یک ساختار هندسی یکسان حول مبدا مختصات محلی ایجاد شده‌اند. برای توضیح بیشتر به شکل ۵ توجه شود. در شکل ۵-ب دو مفهوم جدید دستگاه مختصات ریشه[1] و تابع ریشه[2] معرفی شده است. تابع ریشه تابعی است که در دستگاه مختصات ریشه تعریف می‌شود و با انجام یک تبدیل مختصات مناسب می‌توان توابع شکل را از آن استخراج کرد. اگر $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha,\beta)$ بیانگر دستگاه مختصات ریشه باشد تابع ریشه $\varphi_1(\boldsymbol{\alpha})$ که در شکل ۵-الف ترسیم شده است به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\varphi_1(\boldsymbol{\alpha}) = (\alpha-1)(\beta-1)/4 \tag{۲}$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) دیده می شود که اگر $\mathbf{I}$ بیانگر تبدیل همانی باشد با استفاده از تبدیل مختصات $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{I}\boldsymbol{\xi}$ تابع شکل گره ۱ (N_1) به‌صورت $N_1(\boldsymbol{\xi})=\varphi_1(\mathbf{I}\boldsymbol{\xi})$ قابل بیان است. حال اگر $\mathbf{R}_\theta$ بیانگر تانسور دوران پادساعت‌گرد حول مبدا مختصات باشد که در رابطه (۳) تعریف شده است می‌توان نشان داد که توابع شکل بیان شده در رابطه (۱) به‌صورت رابطه (۴) قابل بیان هستند. به‌عنوان

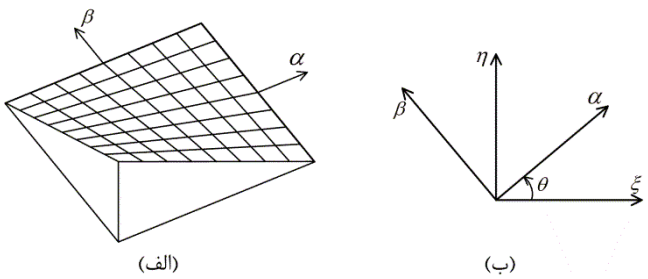


Fig. 5. a- Three dimentional representation of root function $\varphi_1(\boldsymbol{\alpha})$ **in root coordinate system, b-Coordinate transformation between local co-ordinate system** (ξ,η) **and root coordinate system** (α,β)

شکل ۵: الف- نمایش سه‌بعدی تابع ریشه $\varphi_1(\boldsymbol{\alpha})$ در دستگاه مختصات ریشه، ب- تبدیل مختصات بین دستگاه مختصات محلی (ξ,η) و دستگاه مختصات ریشه (α,β)

نمونه به ترسیم تابع شکل N_2 در شکل ۴ توجه شود. دیده می‌شود اگر تابع شکل N_2 به اندازه $3\pi/2$ رادیان حول مبداء دوران کند بر روی تابع ریشه که در شکل ۵-الف دیده می‌شود منطبق خواهد شد. بنابراین برای به‌دست آوردن مقدار تابع شکل N_2 در نقطه $\boldsymbol{\xi}$ ابتدا باید نقطه متناظر آن در دستگاه مختصات ریشه را از طریق تبدیل مختصات $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{R}_{3\pi/2}\boldsymbol{\xi}$ به‌دست آورد و سپس مقدار تابع ریشه را در این نقطه محاسبه کرد. بنابراین تابع شکل گره ۲ (N_2) به‌صورت $N_2(\boldsymbol{\xi})=\varphi_1(\mathbf{R}_{3\pi/2}\boldsymbol{\xi})$ قابل بیان است. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که هر چهار تابع شکل المان نوع A به‌صورت رابطه (۴) برحسب تابع ریشه $\varphi_1(\boldsymbol{\alpha})$ و انجام تبدیل مختصات بیان کرد.

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{۳}$$

1 Root Coordinate System
2 Root Function

$$N_1(\xi)=\varphi_1(\mathbf{I}\xi);\quad N_3(\xi)=\varphi_1(\mathbf{R}_{\pi}\xi);\quad N_2(\xi)=\varphi_1(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)\quad N_4(\xi)=\varphi_1(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi) \tag{۴}$$

همانطورکه بیان شد در مقاله حاضر دستگاه مختصات ریشه (α,β) به‌منظور تعریف تابع ریشه استفاده می‌شود. سپس با در اختیار داشتن توابع ریشه و انجام تبدیل مختصات مناسب می‌توان توابع شکل المان را استخراج کرد. به‌طور کلی ارتباط بین دستگاه مختصات محلی و دستگاه مختصات ریشه از طریق یک تانسور تبدیل فراهم می‌شود. در رابطه (۴) از دو تانسور تبدیل همانی و دوران برای استخراج توابع شکل المان نوع A استفاده شده است. در ادامه این مقاله ابتدا چهار تابع ریشه مورد نیاز معرفی شده و جزئیات محاسبه آن‌ها آورده شده است. پس از محاسبه توابع ریشه، نحوه انجام تبدیل مختصات برای هر یک از توابع شکل المان‌های نوع A تا F ارائه شده است.

۳- ۲- محاسبه توابع ریشه

در شکل ۳ شش نوع المان متفاوتی که ممکن است در یک شبکه درخت چهارتایی ظاهر شوند دیده می‌شود. با توجه به تعداد گره‌های هر المان، در مجموع تعداد ۳۶ تابع شکل مختلف در این المان‌ها قابل تعریف است. برای محاسبه هر ۳۶ تابع شکل المان‌های نوع A تا F می‌توان نشان داد که درمجموع تنها به ۴ تابع ریشه مختلف نیاز است. به‌عبارت دیگر با انجام تبدیل مختصات مناسب می‌توان هر ۳۶ تابع شکل متفاوت را از ۴ تابع ریشه استخراج کرد. توابع ریشه باید به نحوی تعریف شوند که در یک گره مقدار آن برابر یک و در دیگر گره‌ها برابر صفر باشد. علاوه بر آن لازم است در فاصله بین هر دو گره مجاور واقع شده روی یک ضلع نیز به‌طور خطی تغییر کنند. در شکل ۶ مقادیر هر چهار تابع ریشه روی اضلاع المان در دستگاه مختصات ریشه نشان داده شده است. از این میان، تابع ریشه $\varphi_1(\boldsymbol{\alpha})$ پیش از این در بخش ۳-۱ و در رابطه (۲) به‌صورت یک چندجمله‌ای لاگرانژ تعریف شد.

توابع ریشه $\varphi_2(\boldsymbol{\alpha})$ تا $\varphi_4(\boldsymbol{\alpha})$ که مقادیر آن‌ها روی مرز المان در شکل ۶ دیده می‌شود را نمی‌توان توسط توابع چندجمله‌ای ایجاد کرد. در تحقیق حاضر یک ایده جدید برای محاسبه توابع ریشه

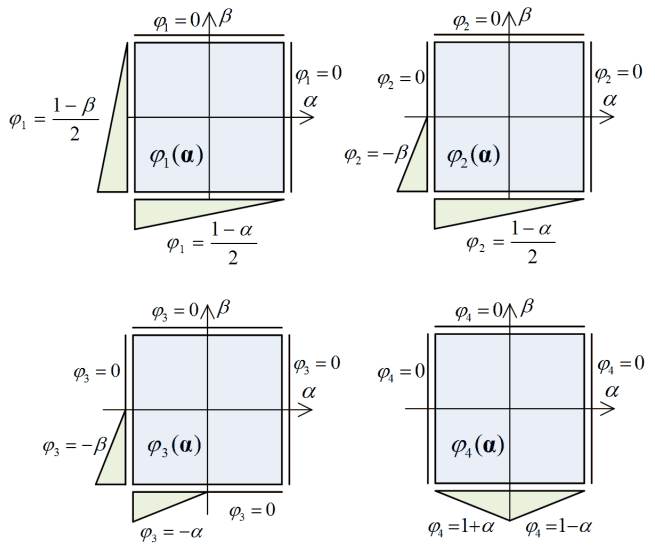


Fig. 6. The value of the root functions $\varphi_1(\boldsymbol{\alpha})$ to $\varphi_4(\boldsymbol{\alpha})$ on the element boundaries in the root coordinate system

شکل ۶: مقادیر توابع ریشه $\varphi_1(\boldsymbol{\alpha})$ تا $\varphi_4(\boldsymbol{\alpha})$ روی اضلاع المان در دستگاه مختصات ریشه

پیشنهاد شده است. همانطور که در شکل ۶ دیده می‌شود، مقادیر توابع ریشه روی کلیه وجوه المان کاملاً مشخص است درحالی‌که مقادیر این توابع در نقاط درونی المان مجهول می‌باشد. روشی که در مقاله حاضر برای تعیین توابع ریشه پیشنهاد شده این است که مقادیر معلوم توابع ریشه روی وجوه المان به‌صورت شرایط مرزی یک مسئله مقدار مرزی در نظر گرفته شده و حل مسئله مقدار مرزی به‌عنوان تابع ریشه انتخاب شود. در مقاله حاضر معادله لاپلاس روی یک ناحیه مربعی به‌عنوان مسئله مقدار مرزی انتخاب شده و مقادیر بیان شده در شکل ۶ به‌عنوان شرایط مرزی آن در نظر گرفته شده است. این‌گونه انتخاب توابع ریشه کلیه شرایط مورد نیاز توابع ریشه را براورده خواهد کرد. در اینجا لازم است اشاره شود که حل تحلیلی معادله لاپلاس با شرایط مرزی نشان داده شده در شکل ۶ با استفاده از روش جداسازی متغیرها و حل سری در منابع مختلف موجود است که به عنوان نمونه می‌توان به مرجع [۱۱] اشاره کرد.

فرم عمومی مسئله مقدار مرزی‌ای که توابع ریشه از حل آن به‌دست می‌آیند در رابطه (۵) آورده شده است. در شکل ۷ نیز دامنه فرم عمومی مسئله مقدار مرزی به همراه شرایط مرزی آن نشان داده شده است. اگر $\varphi(\alpha,\beta)$ بیانگر حل معادله لاپلاس باشد شرط مرزی دیریشله روی وجه پایین با $\varphi=f(\alpha)$ و روی وجه سمت چپ با

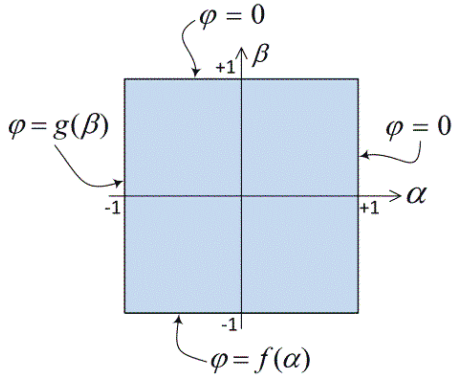


Fig. 7. General definition of the boundary conditions of the Laplace equation as used in derivation of the root functions

شکل ۷: تعریف عمومی شرایط مرزی معادله لاپلاس جهت استخراج توابع ریشه

$\varphi = g(\beta)$ نشان داده شده است. شرایط مرزی روی دو وجه دیگر (وجوه بالا و راست) برابر صفر می‌باشد. حل تحلیلی معادله لاپلاس روی یک مربع با ابعاد و شرایط مرزی نشان داده شده در رابطه (۵) و شکل ۷ با روش جداسازی متغیرها در منابع مختلف قابل دستیابی است. پاسخ این مسئله در اینجا در رابطه (۶) آورده شده است. در این رابطه ضرایب و پارامترهایی وجود دارد که در روابط (۷) تا (۱۲) تعریف شده‌اند. جزئیات حل این مسئله و استخراج روابط آن به‌عنوان نمونه در مرجع [۱۱] قابل دستیابی است.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0;\quad \begin{cases}\phi(+1,\beta)=\phi(\alpha,+1)=0\\ \phi(\alpha,-1)=f(\alpha)\\ \phi(-1,\beta)=g(\beta)\end{cases} \tag{۵}$$

$$\phi(\alpha,\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} A_{1n}A_{2n}(\alpha)A_{3n}(\beta)\ + \\ B_{1n}B_{2n}(\beta)B_{3n}(\alpha)\end{pmatrix} \tag{۶}$$

$$A_{1n}=\int_{-1}^{+1} f(\alpha)\sin\left(\frac{n\pi}{2}(\alpha+1)\right)d\alpha \tag{۷}$$

$$A_{2n}(\alpha)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}(\alpha+1)\right) \tag{۸}$$

$$A_{3n}(\beta)=\frac{e^{-\frac{n\pi}{2}(1+\beta)}-e^{-\frac{n\pi}{2}(3-\beta)}}{1-e^{-2n\pi}} \tag{۹}$$

$$B_{1n}=\int_{-1}^{+1} g(\beta)\sin\left(\frac{n\pi}{2}(\beta+1)\right)d\beta \tag{۱۰}$$

$$B_{2n}(\beta)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}(\beta+1)\right) \tag{۱۱}$$

$$B_{3n}(\alpha)=\frac{e^{-\frac{n\pi}{2}(1+\alpha)}-e^{-\frac{n\pi}{2}(3-\alpha)}}{1-e^{-2n\pi}} \tag{۱۲}$$

رابطه (۶) به‌صورت یک سری بی‌نهایت ارائه شده که در آن n اندیس جملات می‌باشد. ضرایب A_{1n} و B_{1n} مقادیر ثابتی هستند که باید برای هر یک از توابع ریشه متناسب با شرایط مرزی بیان شده در شکل ۶ محاسبه گردند. در اینجا برای نمونه به محاسبه این ضرایب برای تابع ریشه φ_2 اشاره می‌شود. با توجه به شکل ۶ شرایط مرزی دیریشله برای تابع ریشه φ_2 به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$f(\alpha)=\frac{1}{2}(1-\alpha) \tag{۱۳}$$

$$g(\beta)=\begin{cases}-\beta & -1\le\beta<0\\ 0 & 0\le\beta\le 1\end{cases} \tag{۱۴}$$

با جایگذاری روابط (۱۳) و (۱۴) به ترتیب در روابط (۷) و (۱۰) و انجام انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء، ضرایب A_{1n} و B_{1n} برای تابع ریشه φ_2 به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$A_{1n}=\frac{2}{n\pi} \tag{۱۵}$$

$$B_{1n}=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(n\pi-2\sin(\frac{n\pi}{2})\right) \tag{۱۶}$$

به‌طور مشابه می‌توان برای دیگر توابع ریشه نیز ضرایب مورد نیاز را با جایگذاری شرایط مرزی بیان شده در شکل ۶ در روابط (۷) و (۱۰) به‌دست آورد. در اینجا از پرداختن به جزئیات محاسبات ضرایب خودداری می‌شود. در جدول ۱ ضرایب A_{1n} و B_{1n} برای توابع ریشه φ_2 تا φ_4 آورده شده است. پس از محاسبه ضرایب مورد نیاز می‌توان توابع ریشه را از رابطه (۶) به‌صورت یک سری بی‌نهایت به‌دست آورد. از آن جهت که برای تشکیل روابط المان محدود به مقادیر عددی توابع شکل و البته مشتقات آن‌ها در تعدادی نقاط انتگرال‌گیری نیاز است می‌توان سری بیان شده در رابطه (۶) را به ازای تعداد محدودی

جدول ۱: ضرایب A_{1n} و B_{1n} برای توابع ریشه φ_2 تا φ_4

Table 1. The cefficient A_{1n} and B_{1n} for the root functions φ_2 to φ_4

تابع ریشه	ضریب A_{1n}	ضریب B_{1n}
φ_2	$\frac{۲}{n\pi}$	$\frac{۲}{n^2\pi^2}\left(n\pi - ۲\sin(\frac{n\pi}{۲})\right)$
φ_3	$\frac{۲}{n^2\pi^2}\left(n\pi - ۲\sin(\frac{n\pi}{۲})\right)$	$\frac{۲}{n^2\pi^2}\left(n\pi - ۲\sin(\frac{n\pi}{۲})\right)$
φ_4	$\frac{۸}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{۲})$	۰

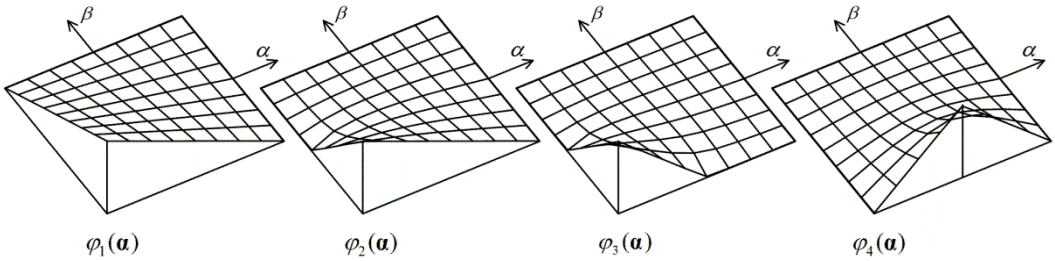


Fig. 8. Four root functions φ_1 to φ_4 in the root coordinate system

شکل ۸: چهار تابع ریشه φ_1 تا φ_4 در دستگاه مختصات ریشه

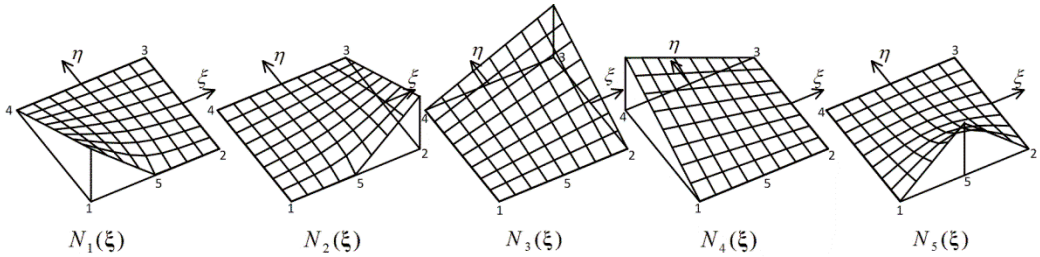


Fig. 9. Three dimentional representation of five shape functions of element type B

شکل ۹: ترسیم سه‌بعدی پنج تابع شکل المان نوع B

جمله محاسبه کرد. برای درک بهتر از ساختار هندسی توابع ریشه هر چهار تابع ریشه در شکل ۸ ترسیم شده است.

۳- ۳- محاسبه توابع شکل

همانطور که بیان شد می‌توان تعداد ۳۶ تابع شکل المان‌های نوع A تا F را تنها به کمک چهار تابع ریشه و تبدیل مختصات مناسب برای هر مورد به‌دست آورد. به نحوه انجام این کار در بخش ۳-۱ اشاره شد و توابع شکل المان نوع A در رابطه (۴) ارائه گردید. در اینجا به‌عنوان نمونه‌ای دیگر نحوه استخراج توابع شکل المان نوع B اشاره می‌شود. المان نوع B دارای پنج گره بوده (شکل ۳) و برای ایجاد پنج تابع شکل به سه تابع ریشه φ_1، φ_2 و φ_4 نیاز است. به عنوان مثال تابع شکل گره ۱ (N_1) المان نوع B به‌صورت انعکاس آیینه‌ای تابع ریشه φ_2 حول خطی به زاویه $\pi/۴$ رادیان قابل بیان است. این تابع شکل در شکل ۹ ترسیم شده است. تانسور انعکاس[1] حول خطی به زاویه θ در رابطه (۱۷) آمده است. بنابراین برای تابع شکل گره ۱ تبدیل مختصات $\alpha = \mathbf{M}_{\pi/4}\xi$ باید انجام شده و درنهایت تابع شکل به‌صورت $N_1(\xi)\alpha = \varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\xi)$ بیان می‌شود. به‌همین ترتیب دیگر توابع شکل این المان با استفاده از تانسور دوران و تانسور همانی قابل بیان هستند. در رابطه (۱۸) کلیه توابع شکل

1 Reflection

Table 2. All of the shape functions of element types A to F

جدول ۲: کلیه توابع شکل المان‌های نوع A تا F

المان	$N_1(\xi)$	$N_2(\xi)$	$N_3(\xi)$	$N_4(\xi)$	$N_5(\xi)$	$N_6(\xi)$	$N_7(\xi)$	$N_8(\xi)$
A	$\varphi_1(\mathbf{I}\xi)$	$\varphi_1(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_1(\mathbf{R}_{\pi}\xi)$	$\varphi_1(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$	–	–	–	–
B	$\varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\xi)$	$\varphi_2(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_1(\mathbf{R}_{\pi}\xi)$	$\varphi_1(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{I}\xi)$	–	–	–
C	$\varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\xi)$	$\varphi_3(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_2(\mathbf{R}_{\pi}\xi)$	$\varphi_1(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{I}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	–	–
D	$\varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\xi)$	$\varphi_2(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\mathbf{R}_{\pi}\xi)$	$\varphi_2(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{I}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_{\pi}\xi)$	–	–
E	$\varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\xi)$	$\varphi_3(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_3(\mathbf{R}_{\pi}\xi)$	$\varphi_2(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{I}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_{\pi}\xi)$	
F	$\varphi_3(\mathbf{I}\xi)$	$\varphi_3(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_3(\mathbf{R}_{\pi}\xi)$	$\varphi_3(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{I}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_{\pi}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$

این المان بیان شده و در شکل ۹ نیز ترسیم شده‌اند.

$$\mathbf{M}_{\theta}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

$$\begin{aligned}&N_1(\xi)=\varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\xi); \qquad N_2(\xi)=\varphi_2(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)\\ &N_3(\xi)=\varphi_1(\mathbf{R}_{\pi}\xi); \qquad N_4(\xi)=\varphi_1(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi);\\ &N_5(\xi)=\varphi_4(\mathbf{I}\xi)\end{aligned} \tag{۱۸}$$

تا اینجا توابع شکل المان‌های نوع A و B در روابط (۴) و (۱۸) ارائه گردید. به همین ترتیب می‌توان توابع شکل دیگر انواع المان‌ها را توسط چهار تابع ریشه φ_1 تا φ_4 و تانسورهای تبدیل همانی، دوران و انعکاس به‌دست آورد. در جدول ۲ کلیه توابع شکل مربوط هر شش نوع المان آورده شده است. موردی که در اینجا باید به آن اشاره شود این است که توابع شکل شرط افراز واحد[1] را ارضاء خواهند کرد. برای درک این موضوع کافی است توجه شود که تغییرات توابع شکل روی وجوه المان به‌صورت خطی است؛ بنابراین حاصل جمع توابع شکل روی تمام وجوه المان برابر یک خواهد بود. از طرف دیگر، از آن جهت که توابع شکل معادله لاپلاس را ارضاء می‌کنند بنابراین حاصل جمع آن‌ها نیز معادله لاپلاس را ارضاء خواهد کرد. بنابراین حل معادله لاپلاس روی یک ناحیه که شرایط مرزی آن روی تمام مرزها برابر یک است در داخل دامنه نیز برابر یک خواهد بود. بنابراین شرط افراز واحد در تمام نقاط المان برقرار می‌گردد.

1 Partition of Unity

٤- نگاشت مختصات عمومی و محلی

به‌طور استاندارد در روش المان محدود دو دستگاه مختصات عمومی و محلی معرفی می‌شود. دستگاه مختصات عمومی (x,y) دستگاهی است که دامنه مسئله، معادلات حاکم، شرایط مرزی و شبکه المانی در آن تعریف می‌شود. در کنار آن دستگاه مختصات محلی (ξ,η) دستگاهی است که توابع شکل در آن تعریف شده و تابع تقریب متغیر میدان ساخته می‌شود. این دو دستگاه توسط یک نگاشت مختصات به یکدیگر وابسته می‌شوند. در مقاله حاضر برای ایجاد این ارتباط از یک نگاشت زیرپارامتری[2] استفاده شده است. به عبارت دیگر از توابع شکل المان چهارگوش چهارگرهی که در رابطه (۱) آمده است برای نگاشت مختصات بین دستگاه عمومی و محلی در المان‌های نوع A تا F استفاده خواهد شد. البته بدیهی است این نگاشت در المان‌های نوع A با نگاشت هم‌پارامتری[3] یکسان است اما در المان‌های نوع B تا F این نگاشت از مرتبه‌ای پایین‌تر از تابع تقریب متغیر میدان برخوردار خواهد بود. بنابراین به آن یک نگاشت زیرپارامتری گفته می‌شود. بنابراین نگاشت مختصات بین دستگاه مختصات عمومی و محلی برای تمام المان‌های نوع A تا F به‌صورت زیر خواهد بود.

$$x=\sum_{i=1}^{4}\widetilde{N}_i(\xi)x_i; \qquad y=\sum_{i=1}^{4}\widetilde{N}_i(\xi)y_i \tag{۱۹}$$

در این رابطه $\widetilde{N}_i(\xi)$ توابع شکل المان چهارگوش چهارگرهی است که در رابطه (۱) آمده است و x_i و y_i بیانگر مختصات گره‌های شماره یک تا چهار هر المان هستند. توجه شود همانطور که در

2 Sub-Parametric Mapping
3 Iso-Parametric Mapping

شکل ۳ مشاهده می‌شود شماره‌گذاری محلی گره‌ها در هر شش نوع المان به‌نحوی است که گره‌های یک تا چهار هر المان در چهار گوشه آن واقع شده‌اند. درنهایت از نگاشت مختصات بیان شده در رابطه (۱۹) برای انتقال روابط از دستگاه مختصات عمومی به محلی و انجام انتگرال‌گیری عددی و تشکیل ماتریس‌های المان استفاده می‌شود. در اینجا از پرداختن به جزئیات روابط اجتناب می‌شود و استخراج روابط را می‌توان به عنوان نمونه در مرجع [۱۰] مشاهده کرد.

۵- معادله مدل و گسسته‌سازی

در مقاله حاضر برای بررسی کارآیی روش پیشنهادی یک معادله مدل انتخاب شده و مورد گسسته‌سازی و حل قرار گرفته است. در اینجا از معادله لاپلاس برای این منظور استفاده شده و گسسته‌سازی براساس روش باقی‌مانده‌های وزن‌دار و تکنیک گالرکین انجام شده است. در ادامه این بخش به گام‌های اساسی این روش به‌طور خلاصه اشاره شده و برای مشاهده جزئیات قضایا و استخراج روابط می‌توان به منابع روش المان محدود به‌عنوان مثال مرجع [۱۰] مراجعه کرد. به‌طور خلاصه اگر $u(x,y)$ بیانگر میدان متغیر مجهول در دامنه دوبعدی Ω باشد معادله لاپلاس به همراه شرایط مرزی دیریشله و نیومن به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{on} \quad \Omega \tag{۲۰}$$

$$u=\bar{u} \quad \text{on} \quad \Gamma_D \tag{۲۱}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\bar{q} \quad \text{on} \quad \Gamma_N \tag{۲۲}$$

در این روابط $\bar{u}$ بیانگر مقدار از پیش معین شده متغیر میدان روی مرز دیریشله Γ_D و $\bar{q}$ بیانگر مقدار از پیش معین شده مشتق جهتی متغیر میدان در راستای بردار عمود بر مرز $\mathbf{n}$ روی مرز نیومن Γ_N می‌باشد. مطابق روش باقی‌مانده‌های وزن‌دار اگر u^h بیانگر یک تقریب برای متغیر مجهول u بوده و w توابع وزن دلخواهی باشند که شکل همگن شرایط مرزی دیریشله را ارضاء کنند، فرم انتگرال وزن‌دار شده معادله دیفرانسیل فوق به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\int_{\Omega} w\left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^h}{\partial y^2}\right)d\Omega=0 \tag{۲۳}$$

با انجام انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء و توجه به این نکته که تابع وزن w شکل همگن شرایط مرزی دیریشله را ارضاء می‌کند، فرم ضعیف شده معادله دیفرانسیل به همراه شرایط مرزی نیومن به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد.

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u^h}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u^h}{\partial y}\right)d\Omega=\int_{\Gamma_N} w\bar{q}\,d\Gamma \tag{۲۴}$$

اگر N_i^e بیانگر تابع شکل متعلق به گره iام از المان eام بوده و مقدار گرهی متغیر مجهول در این گره برابر u_i^e باشد تابع تقریب متغیر میدان به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$u^h=\sum_{i=1}^{m^e} N_i^e u_i^e \tag{۲۵}$$

در این رابطه m^e بیانگر تعداد گره‌های المان eام است. تعداد گره‌های هر یک از انواع المان‌ها در شکل ۳ نشان داده شده که بین ۴ گره برای المان نوع A تا ۸ گره برای المان نوع F متغیر خواهد بود. اگر تابع تقریب در رابطه (۲۵) در فرم ضعیف بیان‌شده در رابطه (۲۴) جایگذاری شود و توابع وزن w مطابق دستورالعمل گالرکین از بین توابع شکل انتخاب شود، فرم گسسته شده معادله دیفرانسیل به دست خواهدآمد. در نهایت پس از مرتب‌سازی معادلات و انجام هم‌بندی (مونتاژ) آن‌ها، فرم گسسته معادله دیفرانسیل به همراه شرایط مرزی نیومن به‌صورت دستگاه معادلات جبری خطی زیر قابل بیان است.

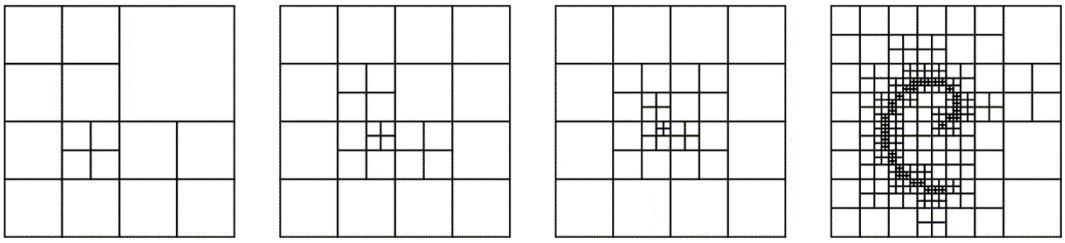
$$KU=R \tag{۲۶}$$

در رابطه فوق U بیانگر بردار مقادیر مجهول گرهی است. ماتریس K و بردار R به ترتیب بیانگر ماتریس ضرایب و بردار بارگذاری است که از هم‌بندی (مونتاژ) ماتریس ضرایب المان و بردار بارگذاری المان حاصل می‌شود. درایه‌های ماتریس ضرایب المان e و بردار بارگذاری آن به‌صورت زیر بیان می‌شود. برای مشاهده جزئیات استخراج این روابط به مرجع [۱۰] مراجعه شود.

$$K_j^e=\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_i^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\right)d\Omega \tag{۲۷}$$

$$R_i^e=\int_{\Gamma_N^e} N_i^e\bar{q}\,d\Gamma \tag{۲۸}$$

همانطور که در رابطه (۲۷) مشاهده می‌شود تشکیل ماتریس ضرایب



شبکه ۱ شبکه ۲ شبکه ۳ شبکه ۴

Fig. 10. The quadtree meshes which are used in the first example

شکل ۱۰: شبکه المانی درخت چهارتایی به‌کار رفته در مثال اول

المان نیازمند انجام انتگرال‌گیری دامنه‌ای روی المان‌ها می‌باشد. به‌طور مرسوم در روش المان محدود از فرمول انتگرال‌گیری گوس برای این منظور استفاده می‌شود. در اینجا نیز از همین روش برای محاسبه انتگرال‌های دامنه‌ای استفاده شده است. البته لازم است به این نکته توجه شود که همانطور که در شکل‌های ۶ و ۸ مشاهده می‌شود توابع ریشه φ_2 تا φ_4 دارای یک شکستگی روی مرز المان هستند که این شکستگی به توابع شکل نیز سرایت خواهد کرد. بنابراین هرچند توابع شکل المان‌های نوع B تا F توابع پیوسته‌ای خواهند بود اما مشتقات برخی از آن‌ها دیگر پیوسته نیستند. بنابراین در این نوع المان‌ها عبارت زیر انتگرال در رابطه (۲۷) دارای یک ناپیوستگی بر روی وجوه المان‌ها خواهد بود. وجود ناپیوستگی در عبارت زیر انتگرال موجب کاهش دقت انتگرال‌گیری عددی در این المان‌ها می‌شود.

در مقاله حاضر برای برطرف کردن مشکل مورد اشاره در بالا و جلوگیری از کاهش دقت انتگرال‌گیری دامنه‌ای در المان‌های نوع B تا F، آن‌ها را دقیقاً از نقاط ناپیوستگی به نواحی کوچکتری تجزیه کرده و انتگرال‌گیری روی این نواحی کوچکتر (سلول‌های انتگرال‌گیری) انجام می‌شود. تجزیه المان‌ها به سلول‌های انتگرال‌گیری موجب می‌شود که نقاط ناپیوستگی در مرز بین دو سلول واقع شده و عبارت زیر انتگرال در هر سلول انتگرال‌گیری پیوسته باقی بماند. البته واضح است که انتگرال‌گیری در المان‌های نوع A به روش مرسوم انجام شده و به ایجاد سلول‌های انتگرال‌گیری نیازی نخواهد بود. مورد دیگری که در انجام انتگرال‌گیری عددی با روش گوس باید به آن توجه کرد این است که توابع شکل در المان‌های نوع B تا F غیر چندجمله‌ای بوده و برای دستیابی به دقت مناسب در انتگرال‌گیری عددی باید از تعداد کافی نقاط گوس استفاده کرد.

۶- مثال‌های عددی

در این بخش برای بررسی کارآیی روش پیشنهادی دو مثال عددی حل شده و نتایج حاصل با حل تحلیلی مقایسه شده است. برای محاسبه خطای حل عددی و ارزیابی دقت روش پیشنهادی از نرم L_2 خطای نسبی استفاده شده است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|e\| = \frac{\int_\Omega (u^h - u^a)^2 \, d\Omega}{\int_\Omega (u^a)^2 \, d\Omega} \qquad (۲۹)$$

در این رابطه u^a و u^h به ترتیب بیانگر حل تحلیلی و حل عددی مسئله می‌باشد.

۶- ۱- مثال اول

به عنوان اولین مثال عددی، آزمون پچ[1] مورد بررسی قرار گرفته است. به‌طور کلی در آزمون پچ بررسی می‌شود که آیا یک روش عددی امکان بازتولید یک میدان خطی برای متغیر مجهول را به‌طور دقیق دارد یا خیر. درواقع آزمون پچ یک شرط لازم برای همگرایی روش المان محدود می‌باشد. در اینجا برای انجام این آزمون یک ناحیه مربعی $\mathbf{\Omega} = [۰,۱]^۲$ در نظر گرفته شده است. یک حل تحلیلی برای معادله لاپلاس روی این ناحیه را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت.

$$u = x + y; \qquad x, y \in [0,1] \qquad (۳۰)$$

برای انجام آزمون پچ شرایط مرزی دیریشله مطابق حل تحلیلی در رابطه (۳۰) برروی هر چهار ضلع دامنه مسئله در نظر گرفته شده است. جهت حل این مسئله از چهار شبکه المانی درخت چهارتایی

1 Patch Test

Table 3. Results of the patch test in the first example

جدول ۳: نتایج آزمون پچ در مثال اول

	تعداد گره‌ها	تعداد المان‌ها	نرم خطای نسبی $\|e\|$
شبکه 1	27	16	$۵/۳۹\times۱۰^{-۱۷}$
شبکه 2	43	28	$۹/۸۱\times۱۰^{-۱۸}$
شبکه 3	59	40	$۸/۹۸\times۱۰^{-۱۸}$
شبکه 4	428	331	$۷/۹۱\times۱۰^{-۱۸}$

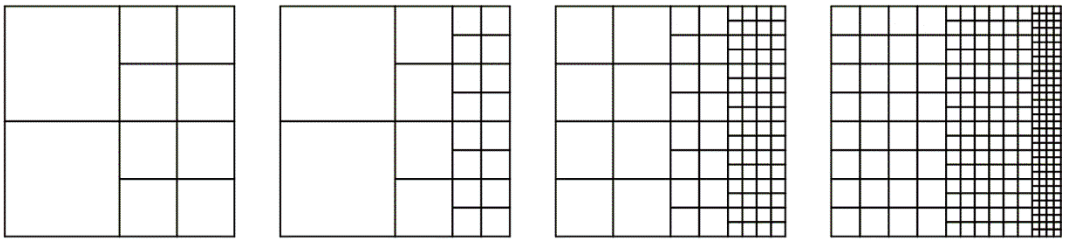


Fig. 11. The quadtree meshes which are used in the second example

شکل ۱۱: شبکه المانی درخت چهارتایی به‌کار رفته در مثال دوم

Table 4. The results of the convergence test in the second example

جدول ۴: نتایج آزمون همگرایی در مثال دوم

	تعداد گره‌ها	تعداد المان‌ها	نرم خطای نسبی $\|e\|$
شبکه 1	18	10	$۲/۲۰\times۱۰^{-۳}$
شبکه 2	35	22	$۴/۴۹\times۱۰^{-۴}$
شبکه 3	113	88	$۴/۳۰\times۱۰^{-۵}$
شبکه 4	303	256	$۴/۴۰\times۱۰^{-۶}$

نشان داده شده در شکل ۱۰ استفاده شده است. پس از حل مسئله با روش پیشنهادی نرم خطای نسبی برای هر شبکه با استفاده از رابطه (۲۹) محاسبه شده و در جدول ۳ آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر نرم خطای نسبی برای هر شبکه به اندازه کافی کوچک بوده و آزمون پچ تایید می‌گردد.

۶- ۲- مثال دوم

با انجام آزمون پچ در مثال اول شرط لازم برای همگرایی روش پیشنهادی تایید گردید. در دومین مثال عددی به بررسی نرخ همگرایی این روش در حل معادله لاپلاس روی ناحیه مربعی $\Omega=[۰,\pi]^2$ پرداخته شده است. یک حل تحلیلی معادله لاپلاس روی این ناحیه به‌صورت زیر قابل بیان می‌باشد.

$$u=e^x\sin(y);\quad x,y\in[0,\pi] \tag{۳۱}$$

شرایط مرزی این مسئله به‌صورت شرایط مرزی دیریشله روی تمام وجوه دامنه با استفاده از حل تحلیلی در رابطه (۳۱) اعمال شده است. برای بررسی اثر درشتی شبکه المانی چهار شبکه درخت چهارتایی مختلف ایجاده شده که در شکل ۱۱ قابل مشاهده می‌باشند. تعداد گره‌ها و تعداد المان‌های هر شبکه در جدول ۴ آمده است. پس از حل مسئله با روش پیشنهادی و به‌دست آمدن مقادیر گرهی، از رابطه (۲۹) برای محاسبه نرم خطای نسبی استفاده شده و در جدول ۴ برای هر شبکه ارائه شده است. در شکل ۱۲ نیز مقادیر نرم خطای نسبی برحسب تعداد گره‌ها ترسیم شده است. همانطور که دیده می‌شود با ریز شدن اندازه المان‌ها نرم خطای نسبی کاهش یافته و حل عددی به پاسخ تحلیلی معادله دیفرانسیل همگرا می‌شود.

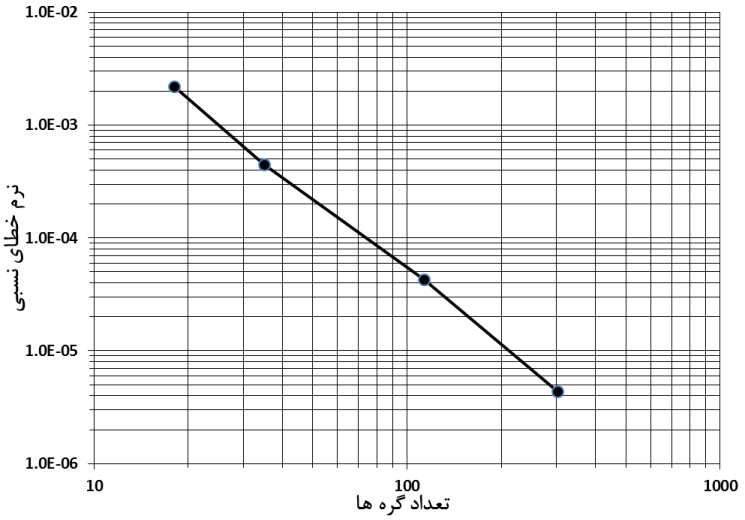


Fig. 12. Relative error norm versus number of nodes in the second example

شکل ۱۲: نرم خطا نسبی برحسب تعداد گره‌ها در مثال دوم

۷- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر یک روش جدید برای محاسبه توابع شکل المان‌های غیرانطباقی که توسط الگوریتم درخت چهارتایی تولید شده‌اند پیشنهاد شده است. در این روش ابتدا با تعریف دستگاه مختصات ریشه، توابعی تحت عنوان توابع ریشه تعریف شد و نشان داده شد که می‌توان تعداد ۳۶ تابع شکل متفاوت مربوط به شش نوع المان مختلف که در شبکه درخت چهارتایی ظاهر می‌شوند را تنها با استفاده از چهار تابع ریشه به‌دست آورد. به‌عبارت دیگر کلیه توابع شکل شش نوع المان که از نظر چیدمان گره‌ها با یکدیگر تفاوت دارند با انجام تبدیل مختصات مناسب از چهار تابع ریشه استخراج شد. جهت تولید توابع ریشه یک مسئله مقدار مرزی تعریف شد و از حل آن روی یک ناحیه مربعی با شرایط مرزی مناسب استفاده گردید. حل این مسئله مقدار مرزی توسط روش جداسازی متغیرها و حل سری در دسترس بوده و بنابراین توابع شکل در نهایت به‌صورت یک حل سری بیان شدند. پس از استخراج توابع شکل، گسسته‌سازی با استفاده از روش باقی‌مانده‌های وزن‌دار و تکنیک گالرکین انجام شد. برای بررسی کارآیی روش پیشنهادی از معادله لاپلاس به عنوان یک معادله مدل استفاده شد و روش پیشنهادی برای حل دو مثال عددی به‌کار برده شد. شبکه‌های مورد نیاز در هر دو مثال عددی براساس درخت چهارتایی تولید گردید. در مثال اول به آزمون پچ پرداخته شد و نشان داده شد که روش پیشنهادی آزمون پچ را دقیقاً ارضاء می‌کند. در دومین مثال عددی نرخ همگرایی روش پیشنهادی با حل معادله مدل برای چند شبکه با درشتی متفاوت بررسی شد. نتایج نشان داد که روش پیشنهادی برای استخراج توابع شکل در المان‌های غیرانطباقی کارکرد مناسبی داشته و می‌توان از آن به‌طور موثری استفاده کرد.

مراجع

[1] M.J. Kazemzadeh-Parsi and F. Daneshmand, Solution of geometric inverse heat conduction problems by smoothed fixed grid finite element method, Finite Elements in Analysis and Design, 611-599 (2009) 45.

[2] M.J. Kazemzadeh-Parsi and F. Daneshmand, Three dimensional smoothed fixed grid finite element method for the solution of unconfined seepage problems, Finite Elements in Analysis and Design, 35-24 (2013) 64.

[3] M.J. Kazemzadeh-Parsi, Optimal shape design for heat conduction using smoothed fixed grid finite element method and modified firefly algorithm, Iranian Journal of Science and Technology, 39(M387-367 (2015) (2.

[4] H. Samet, Application of Spatial Data Structure, Addison-Wesley, NewYork, 1990.

[5] N. Provatas, N. Goldenfeld, J. Dantzig, Adaptive mesh refinement computation of solidification microstructures using dynamic data structures, Journal of Computational

Physics 290-265 (1999) (1)148.

[6] P.D. Stolfo, A. Schroder, N. Zander, S. Kollmannsberger, An easytreatmentofhangingnodesin hp-finiteelements, Finite Elements in Analysis and Design, -101 (2016) 121 117.

[7] A. Tabarraei, N. Sukumar, Adaptive computations on conforming quadtree meshes, Finite Elements in Analysis and Design, 702-686 (2005) 41.

[8] S. Natarajan, E.T. Ooi, C. Song, Finite element computations over quadtree meshes: strain smoothing and semi-analytical formulation, International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics, (3)7 133-124 (2015).

[9] T.P. Fries, A. Byfut, A. Alizada, K.W. Cheng, A. Schroder, Hanging nodes and XFEM, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 430-404 (2011) 86.

[10] M.J. Kazemzadeh-Parsi and F. Daneshmand, Finite element method: A practical course, Islamic Azad University Press, Shiraz Branch, Shiraz, 2011, (In Persian).

[11] N.H. Asmar, Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2005.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

M. J. Kazemzadeh-Parsi, Application of Nonconforming Quadtree Grids in the Finite Element Method, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(2) (2021) 673-686.

DOI: 10.22060/mej.2019.15028.6003