



## به کارگیری شبکه‌های غیرانطباقی درخت چهارتایی در روش المان محدود

محمد جواد کاظم زاده پارسی\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز، شیراز، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۰۷/۰۲

بازنگری: ۱۳۹۷/۱۱/۱۷

پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۲۰

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۸/۱۱

### کلمات کلیدی:

شبکه درخت چهارتایی

شبکه غیرانطباقی

روش المان محدود

تابع شکل

**خلاصه:** در روش المان محدود استاندارد، وجوه المان‌های مجاور کاملاً بر یکدیگر منطبق بوده و گوشه یک المان بر وجه یک المان دیگر قرار ندارد. در صورتی که گره گوشه‌ای یک المان بر روی وجه المان همسایه واقع شود گفته می‌شود که شبکه غیرانطباقی است. استفاده از چنین شبکه‌هایی در روش المان محدود به تکنیک‌های ویژه‌ای نیاز دارد. در مقاله حاضر، یک روش جدید برای استفاده از شبکه‌های غیرانطباقی پیشنهاد شده است. درخت چهارتایی یک ساختمان داده درختی با یک الگوریتم بازگشتی بسیار سریع است و می‌توان از آن جهت شبکه‌بندی نواحی دوبعدی استفاده کرد. المان‌های تولید شده با این روش غیرانطباقی بوده و قابلیت استفاده در روش المان محدود استاندارد را ندارند. در مقاله حاضر ایده جدیدی جهت محاسبه توابع شکل چنین المان‌هایی پیشنهاد شده است. در این روش از حل یک مسئله مقدار مرزی برای استخراج توابع شکل استفاده شده است. شرایط مرزی در این مسئله به نحوی انتخاب شده است که تغییرات توابع شکل در بین هر دو گره مجاور خطی باشد. برای بررسی دقت و کارایی روش پیشنهادی دو مثال عددی حل شده و نتایج ارائه گردیده است. نتایج نشان می‌دهد که با استفاده از روش پیشنهادی می‌توان از شبکه‌های غیرانطباقی به‌طور موثری در روش المان محدود استفاده کرد.

### ۱- مقدمه

المان محدود ارائه شده است. شبکه‌های ایجاد شده براساس درخت چهارتایی شرایط مورد نیاز روش المان محدود را به‌طور استاندارد ارضاء نمی‌کنند. بنابراین روش پیشنهادی در مقاله حاضر به دلیل کاهش شرایط مورد نیاز شبکه محاسباتی از نظر دسته‌بندی فوق در دسته دوم واقع می‌شود.

تدوین یک روش عددی براساس شبکه محاسباتی به خودی خود بیانگر محدودیت آن نیست. به عبارت دیگر، محدودیت زمانی به‌وجود می‌آید که شرایط سخت‌گیرانه‌ای برای یک شبکه محاسباتی تعریف شود. به عنوان نمونه یکی از شرایطی که شبکه‌های محاسباتی مورد استفاده در روش المان محدود باید آن را ارضاء کنند انطباق شبکه بر مرز دامنه است. شرط انطباق شبکه بر مرز موجب پیچیده شدن روش‌های تولید شبکه می‌گردد. این مشکل به‌خصوص در مسائل

روش المان محدود در کنار کاربردهای فراوانی که در علوم و صنایع پیدا کرده دارای محدودیت‌هایی نیز می‌باشد. مهم‌ترین محدودیت این روش وابستگی آن به شبکه‌های محاسباتی است. تاکنون کوشش‌های بسیاری جهت کاهش وابستگی روش المان محدود به شبکه‌های محاسباتی انجام شده و روش‌های متعددی نیز برای این منظور ابداع شده است. یک دسته از این روش‌ها براساس حذف کامل شبکه المانی عمل کرده و تحت عنوان عمومی روش‌های بدون شبکه شناخته می‌شوند. دسته دیگر روش‌هایی هستند که براساس تخفیف شرایط مورد نیاز برای شبکه‌های المانی تدوین شده‌اند. در مقاله حاضر یک روش جدید برای کاربرد شبکه‌های درخت چهارتایی در روش

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: kazemzadeh@iaushiraz.ac.ir



این است که با اعمال یک قید بین توابع شکل گره آویزان و گره‌های اطراف آن سعی می‌شود ناپیوستگی متغیر میدان برطرف گردد [۶]. دسته دیگر روش‌هایی هستند که در آن‌ها از توابع ویژه‌ای به عنوان توابع شکل استفاده شده و از این طریق برای گره‌های آویزان توابع شکلی استخراج می‌شود که پیوستگی متغیر میدان را حفظ کنند. به عنوان نمونه در مرجع [۷] از روش همسایه‌های طبیعی برای ساخت توابع شکل استفاده شده است. در مرجع [۸] از تکنیک هموارسازی گرادیان برای استخراج ماتریس‌های المان در شبکه‌های غیرانطباقی استفاده شده است. روش دیگری که در این زمینه استفاده شده است روش المان محدود توسعه‌یافته است که از آن برای استخراج توابع شکل خاص با در نظر گرفتن گره‌های آویزان استفاده شده است [۹]. در مقاله حاضر یک روش جدید جهت محاسبه توابع شکل المان‌هایی که دارای گره آویزان هستند ارائه شده است. در این روش با تعریف مفاهیم جدیدی تحت عنوان دستگاه مختصات ریشه و توابع ریشه، نشان داده می‌شود که می‌توان توابع شکل المان را با انجام تبدیل مختصات مناسب از توابع ریشه استخراج کرد. سپس با تعریف یک مسئله مقدار مرزی مناسب توابع ریشه به‌طور تحلیلی و با استفاده از حل سری محاسبه می‌شوند. به این ترتیب توابع شکل المان‌های دارای گره آویزان به‌صورت سری بی‌نهایت استخراج می‌گردند. برای بررسی کارایی روش پیشنهادی معادله لاپلاس به عنوان یک معادله مدل انتخاب شده و توسط روش باقی‌مانده‌های وزن‌دار و تکنیک گالرکین و با استفاده از توابع شکل پیشنهادی گسسته‌سازی شده است. به‌عنوان مثال‌های عددی دو آزمون پچ<sup>۱</sup> و آزمون همگرایی براساس شبکه‌های درخت چهارتایی انجام شده و نتایج ارائه گردیده است. نتایج آزمون پچ و آزمون همگرایی نشان می‌دهد که می‌توان از روش پیشنهادی برای کاربرد شبکه‌های غیرانطباقی در روش المان محدود استفاده کرد.

## ۲- شبکه درخت چهارتایی

### ۲-۱- تولید درخت چهارتایی

درخت چهارتایی یا درخت چهارگانه یا چاردرخت یک نوع ساختمان داده درختی است که در آن هر شاخه از ساختمان داده دقیقاً دارای چهار فرزند است. این ساختمان داده دارای کاربردهای خاصی در حوزه علوم کامپیوتر می‌باشد. بیان هندسی درخت چهارتایی

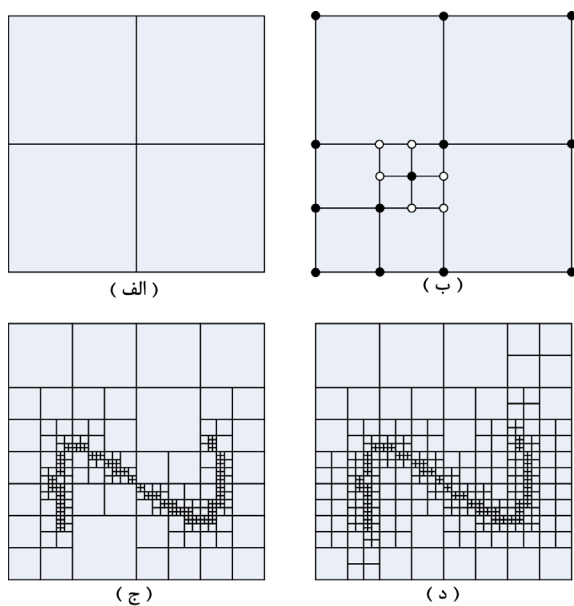
سه‌بعدی که دارای هندسه پیچیده‌ای باشند بسیار محدودکننده و هزینه‌بر خواهد بود. مشکل دیگر شبکه‌های منطبق بر مرز محدودیت حل مسائل دارای دامنه متغیر است. در این مسائل با پیشرفت حل، دامنه مسئله دچار تغییر شده و فرایند تولید شبکه لازم است برای دامنه جدید مجدداً تکرار شود. بنابراین تدوین روش‌هایی که امکان استفاده از شبکه‌های غیرمنطبق بر مرز را فراهم کند موجب برطرف شدن چنین محدودیت‌هایی می‌شود. به عنوان نمونه در روش المان محدود شبکه ثابت هموار شده از یک شبکه المانی ثابت برای حل مسائل دارای دامنه متغیر استفاده شده است. از این روش تاکنون برای حل مسائل معکوس هندسی [۱]، مسائل نشت سیال در محیط متخلخل [۲] و مسائل بهینه‌سازی شکل [۳] استفاده شده است.

یکی دیگر از راهکارهایی که جهت کاهش شرایط مورد نیاز شبکه محاسباتی وجود دارد استفاده از شبکه‌های غیرانطباقی<sup>۱</sup> است که براساس درخت چهارتایی<sup>۲</sup> تولید شده است. درخت چهارتایی یا درخت چهارگانه یا چاردرخت یک نوع ساختمان داده درختی است که در حوزه علوم کامپیوتر دارای کاربردهای خاص خود می‌باشد [۴]. بیان هندسی ساختمان داده درخت چهارتایی به این صورت است که یک فضای دوبعدی را می‌توان به‌طور بازگشتی به نواحی کوچکتر افراز کرد. افراز فضا توسط درخت چهارتایی به دلیل ساختار درختی ساختمان داده آن و حفظ اطلاعات نواحی همسایه بسیار سریع می‌باشد. شبکه ساخته شده توسط درخت چهارتایی یک شبکه غیرانطباقی بوده و به‌طور مستقیم در روش المان محدود قابل استفاده نیست. در این نوع شبکه‌ها، المان‌هایی که در کنار یکدیگر واقع می‌شوند ممکن است از نظر طول اضلاع با یکدیگر متفاوت بوده و موجب شوند یک گره از یک المان در میان ضلع یک المان همسایه قرار گیرد. چنین گره‌هایی اصطلاحاً گره آویزان<sup>۳</sup> نامیده شده و وجود آن‌ها در روش المان محدود موجب ناپیوستگی متغیر میدان می‌گردد که همگرایی حل عددی را با مشکل روبرو می‌کند. بنابراین، کاربرد شبکه‌های دارای گره آویزان در روش المان محدود نیازمند تکنیک‌های ویژه‌ای است. ساده‌ترین روشی که در این مورد وجود دارد این است که المان‌هایی که دارای گره آویزان هستند به تعدادی مثلث تجزیه شوند و با انجام مثلث‌سازی، غیرانطباقی بودن شبکه برطرف شود [۵]. روش دیگر

1 Nonconforming

2 Quadtree

3 Hanging Node



**Fig. 1. The process of quadtree grid generation, a- one level division, b- three levels divisions, solid points indicate regular nodes and hollow points indicate hanging nodes, c- continuing divisions until a pre specified element size, d- continuing divisions until the maximum level difference between adjacent elements reaches one**

**شکل ۱:** فرایند تولید شبکه درخت چهارتایی، الف- یک مرحله تقسیم، ب- سه مرحله تقسیم، نقاط توپر بیانگر گره‌های عادی و نقاط توخالی بیانگر گره‌های آویزان است، ج- ادامه تقسیم‌های متوالی تا رسیدن به اندازه دلخواه المان‌ها در یک سری نقاط از پیش مشخص شده، د- ادامه فرایند تقسیم به نحوی که اختلاف مرحله تقسیم بین المان‌های همسایه حداکثر برابر یک باشد

این مشکل کافی است مراحل تقسیم ادامه یابد به نحوی که اختلاف مرحله تقسیم بین دو المان مجاور بیش از یک نباشد. در این صورت از یک طرف تغییر ابعاد المان‌ها از درشت به ریز به‌طور تدریجی رخ داده و از طرف دیگر تعداد گره‌های آویزان به حداقل می‌رسد. انجام این فرایند منجر به تولید شبکه‌ای می‌شود که در شکل ۱-د نشان داده شده است. در مقاله حاضر فرمول‌بندی ویژه‌ای برای استفاده از شبکه‌هایی نظیر شکل ۱-د در روش المان محدود ارائه شده است.

## ۲-۲- انواع المان‌ها در شبکه درخت چهارتایی

همانطور که بیان شد شبکه درخت چهارتایی یک شبکه غیرانطباقی است و ممکن است گره گوشه‌ای یک المان در میان ضلع یک المان همسایه قرارگیرد. به‌طور کلی می‌توان نشان داد در یک شبکه غیرانطباقی که اختلاف مرتبه تقسیم المان‌های مجاور هم حداکثر برابر یک باشد شش نوع مختلف المان با چیدمان متفاوت

به این صورت قابل توصیف است که یک فضای دوبعدی مربعی شکل را می‌توان به چهار ربع یا زیرفضای کوچکتر تقسیم کرد. سپس هر زیرفضا را نیز می‌توان به چهار ربع دیگر تقسیم کرد و این فرایند را به‌طور بازگشتی برای هر زیرفضا تا هر مرحله تقسیم دلخواه تکرار کرد. نتیجه این الگوریتم افزایش فضای دوبعدی به تعدادی زیرناحیه است که تعداد مراحل تقسیم در هر نقطه از آن به دلخواه قابل انتخاب می‌باشد. افزایش فضا توسط درخت چهارتایی به دلیل ساختار درختی ساختمان داده آن و حفظ اطلاعات نواحی همسایه در این ساختمان داده دارای یک الگوریتم بازگشتی بسیار سریع بوده و به کمک آن می‌توان شبکه‌بندی را با سرعت بسیار بالایی در مقایسه با روش‌های مرسوم تولید شبکه انجام داد.

در شکل ۱ نحوه تشکیل یک درخت چهارتایی نشان داده شده است. در شکل ۱-الف یک ناحیه مربعی اولیه که در یک مرحله تقسیم به چهار المان افزایش شده نشان داده شده است. در شکل ۱-ب تقسیم‌های متوالی تا سه مرحله پیش رفته است. به‌عنوان نمونه در شکل ۱-ب گره‌ها نیز مشخص شده‌اند. همانطور که دیده می‌شود دو دسته گره در شکل ۱-ب قابل تشخیص است. دسته اول که با نقاط توپر نشان داده شده گره‌های عادی است. المان‌هایی که در مجاورت این گره‌ها قرار دارند می‌توانند یک تابع تقریب پیوسته را برای متغیر میدان ایجاد کنند. دسته دوم گره‌هایی هستند که با نقاط توخالی در شکل ۱-ب نشان داده شده‌اند. این گره‌ها به گره‌های آویزان مشهور هستند و با قرارگیری گره گوشه‌ای یک المان در میان ضلع یک المان دیگر ایجاد می‌شوند. بنابراین استفاده از توابع شکل استاندارد المان محدود قادر به تولید یک تابع تقریب پیوسته در مرز بین دو المان نخواهد بود و وجود گره‌های آویزان موجب ایجاد ناپیوستگی در تابع تقریب می‌شود. چنین شبکه‌هایی اصطلاحاً شبکه‌های غیرانطباقی خوانده شده و استفاده از آن‌ها نیاز به اقدامات ویژه‌ای دارد.

در شکل ۱-ج تقسیم‌های متوالی ادامه یافته تا در یک سری نقاط از پیش معین شده، اندازه المان‌ها به مقدار مورد نیاز کاهش یابد. همانطور که دیده می‌شود افزایش تعداد مراحل تقسیم در برخی نواحی موجب بروز دو پدیده شده است. یکی این که المان‌های ریز در مجاورت المان‌های درشت قرار گرفته‌اند و دیگر این که تعداد زیادی گره آویزان در شبکه ایجاد شده است. هر دو این پدیده‌ها موجب کاهش کیفیت شبکه و کاهش دقت حل می‌گردد. برای رفع

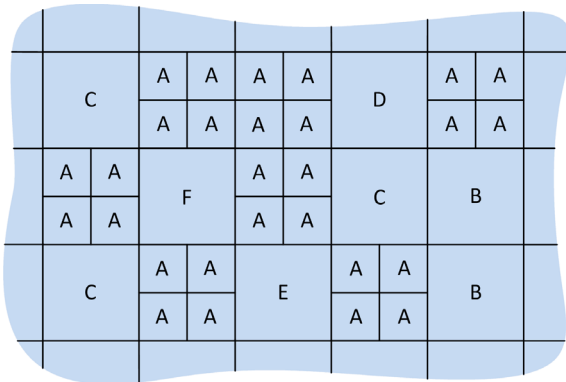


Fig. 2. A portion of a quadtree mesh in which six different element types are indicated by letters A to F

شکل ۲: بخشی از یک شبکه درخت چهارتایی که شش نوع المان مختلف در آن با حروف A تا F نامگذاری شده‌اند

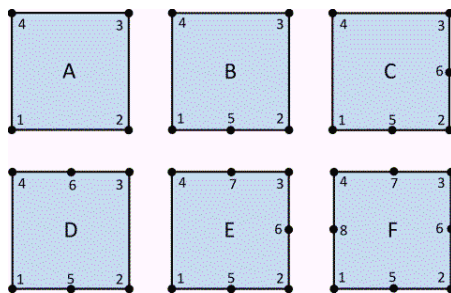


Fig. 3. Node arrangement and local node numbering six different element types that appear in quadtree meshes

شکل ۳: نحوه قرارگیری گره‌ها و شماره‌گذاری محلی آن‌ها در شش نوع المان مختلف که در شبکه درخت چهارتایی ظاهر می‌شوند

به کلیه گره‌های المان‌های نوع A تا F از چهار تابع ریشه تشریح می‌گردد.

۳-۱- تعریف توابع ریشه و دستگاه مختصات ریشه

به‌طور استاندارد در روش المان محدود از توابع چندجمله‌ای برای استخراج توابع شکل المان در مختصات محلی استفاده می‌شود. در این روش برای هر گره یک تابع شکل مجزا استخراج شده و گره‌های مختلف دارای توابع شکل متفاوت و مستقلی نسبت به یکدیگر خواهند بود. به عنوان نمونه اگر  $\xi = (\xi, \eta)$  بیانگر مختصات محلی المان باشد که مبدا دستگاه مختصات محلی در مرکز المان بوده و بازه تغییرات آن بین -۱ تا +۱ باشد در این صورت توابع شکل یک المان چهارگوش چهارگره‌ای (المان نوع A) به‌صورت زیر قابل بیان هستند [۱۰].

گره‌ها ممکن است ظاهر شود. در شکل ۲ بخشی از یک شبکه درخت چهارتایی نشان داده شده و هر شش نوع المان مختلف در این شکل قابل تشخیص است. المان‌های مختلف در این شکل با حروف A تا F نامگذاری شده‌اند. در شکل ۳ هر شش نوع المان با توجه به چیدمان گره‌ها در آن‌ها قابل مشاهده است. همانطور که دیده می‌شود المان نوع A دارای چهار گره در چهار گوشه خود است. این نوع المان در واقع المان چهارگوش چهارگره‌ای استاندارد می‌باشد و توابع شکل آن با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ قابل استخراج است. المان‌های نوع B دارای چهار گره در چهار گوشه و یک گره در میان یکی از اضلاع می‌باشند. به همین ترتیب دیگر المان‌ها نیز علاوه بر گره‌های گوشه‌ای دارای گره‌هایی در میان برخی از اضلاع خود هستند.

در المان نوع A توابع شکل بر روی جوه المان به‌طور خطی تغییر می‌کنند. بنابراین در المان‌های نوع B تا F نیز لازم است توابع شکل به‌طور خطی بین هر دو گره مجاور تغییر کنند. به‌عنوان مثال در المان نوع B که شماره‌گذاری محلی گره‌های آن در شکل ۳ دیده می‌شود لازم است تابع شکل گره ۱ بر روی وجه ۱-۵ و وجه ۱-۴ به‌طور خطی تغییر کند و بر روی دیگر وجوه برابر صفر باشد. ساخت توابع شکل با چنین ویژگی‌هایی با روش‌های مرسوم و استفاده از توابع چندجمله‌ای امکان پذیر نیست و نیاز به تکنیک‌های ویژه‌ای دارد. در مقاله حاضر یک روش جدید برای این منظور ارائه شده که در بخش بعد تشریح شده است.

### ۳- محاسبه توابع شکل

در روش المان محدود شبکه المانی در دستگاه مختصات عمومی تعریف شده و با انجام یک نگاهت مختصات هر المان در دستگاه مختصات عمومی به یک المان مرجع در دستگاه مختصات محلی نگاهت می‌شود. سپس برای هر گره یک تابع شکل مستقل در دستگاه مختصات محلی به‌طور مجزا تعریف و استخراج می‌گردد. در روش پیشنهادی در مقاله حاضر این مفهوم گسترش داده شده و نشان داده می‌شود که می‌توان توابع شکل مختلف را با تعریف تبدیل مختصات مناسب از تعداد محدودی تابع دیگر که در مقاله حاضر به آن‌ها توابع ریشه گفته می‌شود استخراج کرد. در ادامه ابتدا توابع ریشه و دستگاه مختصات ریشه تعریف شده و نحوه محاسبه چهار تابع ریشه ارائه می‌گردد. سپس جزئیات استخراج ۳۶ تابع شکل متفاوت مربوط

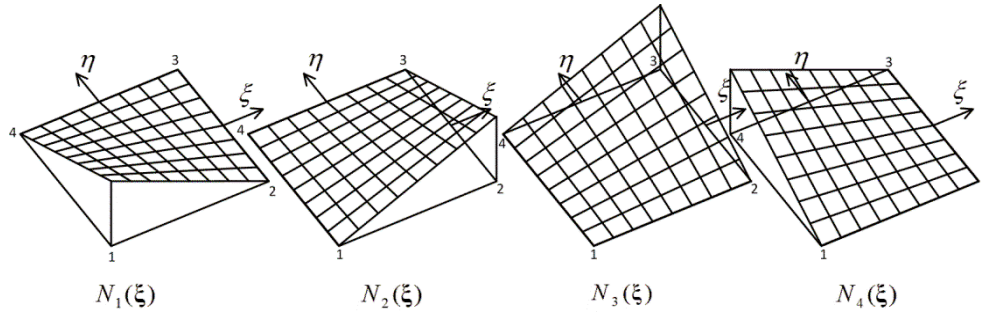


Fig. 4. Three dimensional representation of shape functions of four node quadrilateral element (element Type A) in local coordinate system  $(\xi, \eta)$

شکل ۴: نمایش سه‌بعدی توابع شکل المان چهارگوش چهارگره‌ای (المان نوع A) در دستگاه مختصات محلی  $(\xi, \eta)$

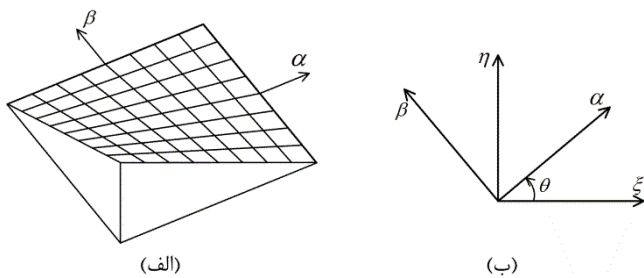


Fig. 5. a- Three dimensional representation of root function  $\varphi_1(\alpha)$  in root coordinate system, b-Coordinate transformation between local coordinate system  $(\xi, \eta)$  and root coordinate system  $(\alpha, \beta)$

شکل ۵: الف- نمایش سه‌بعدی تابع ریشه  $\varphi_1(\alpha)$  در دستگاه مختصات ریشه، ب- تبدیل مختصات بین دستگاه مختصات محلی  $(\xi, \eta)$  و دستگاه مختصات ریشه  $(\alpha, \beta)$

نمونه به ترسیم تابع شکل  $N_2$  در شکل ۴ توجه شود. دیده می‌شود اگر تابع شکل  $N_2$  به اندازه  $3\pi/2$  رادیان حول مبدأ دوران کند بر روی تابع ریشه که در شکل ۵-الف دیده می‌شود منطبق خواهد شد. بنابراین برای به دست آوردن مقدار تابع شکل  $N_2$  در نقطه  $\xi$  ابتدا باید نقطه متناظر آن در دستگاه مختصات ریشه را از طریق تبدیل مختصات  $\alpha = \mathbf{R}_{3\pi/2}\xi$  به دست آورد و سپس مقدار تابع ریشه را در این نقطه محاسبه کرد. بنابراین تابع شکل گره ۲ ( $N_2$ ) به صورت  $N_2(\xi) = \varphi_1(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$  قابل بیان است. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که هر چهار تابع شکل المان نوع A به صورت رابطه (۴) برحسب تابع ریشه  $\varphi_1(\alpha)$  و انجام تبدیل مختصات بیان کرد.

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= (\xi - 1)(\eta - 1) / 4; \\ N_3(\xi) &= (\xi + 1)(\eta + 1) / 4; \\ N_2(\xi) &= -(\xi + 1)(\eta - 1) / 4 \\ N_4(\xi) &= -(\xi - 1)(\eta + 1) / 4 \end{aligned} \quad (1)$$

در شکل ۴ هر چهار تابع شکل بیان شده در رابطه (۱) در مختصات محلی ترسیم شده است. از این شکل می‌توان دریافت که هر چهار تابع شکل گرچه توابع متفاوت و مستقلی نسبت به یکدیگر هستند اما از نظر ساختار هندسی دقیقاً همانند یکدیگرند. در حقیقت، هر چهار تابع شکل ترسیم شده در شکل ۴ از چرخش یک ساختار هندسی یکسان حول مبدا مختصات محلی ایجاد شده‌اند. برای توضیح بیشتر به شکل ۵ توجه شود. در شکل ۵-ب دو مفهوم جدید دستگاه مختصات ریشه<sup>۱</sup> و تابع ریشه<sup>۲</sup> معرفی شده است. تابع ریشه تابعی است که در دستگاه مختصات ریشه تعریف می‌شود و با انجام یک تبدیل مختصات مناسب می‌توان توابع شکل را از آن استخراج کرد. اگر  $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$  بیانگر دستگاه مختصات ریشه باشد تابع ریشه  $\varphi_1(\mathbf{a})$  که در شکل ۵-الف ترسیم شده است به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\varphi_1(\mathbf{a}) = (\alpha - 1)(\beta - 1) / 4 \quad (2)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) دیده می‌شود که اگر  $\mathbf{I}$  بیانگر تبدیل همانی باشد با استفاده از تبدیل مختصات  $\mathbf{a} = \mathbf{I}\xi$  تابع شکل گره ۱ ( $N_1$ ) به صورت  $N_1(\xi) = \varphi_1(\mathbf{I}\xi)$  قابل بیان است. حال اگر  $\mathbf{R}_\theta$  بیانگر تانسور دوران پادساعت‌گرد حول مبدا مختصات باشد که در رابطه (۳) تعریف شده است می‌توان نشان داد که توابع شکل بیان شده در رابطه (۱) به صورت رابطه (۴) قابل بیان هستند. به‌عنوان

1 Root Coordinate System  
2 Root Function



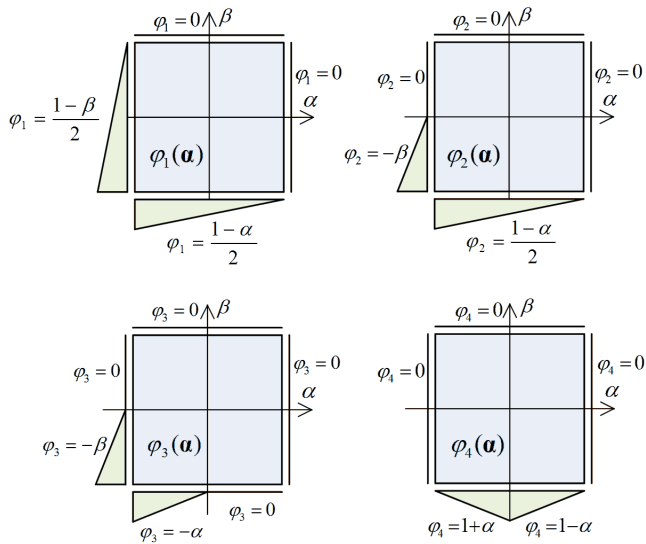


Fig. 6. The value of the root functions  $\varphi_1(\mathbf{a})$  to  $\varphi_4(\mathbf{a})$  on the element boundaries in the root coordinate system

شکل ۶: مقادیر توابع ریشه  $\varphi_1(\mathbf{a})$  تا  $\varphi_4(\mathbf{a})$  روی اضلاع المان در دستگاه مختصات ریشه

پیشنهاد شده است. همانطور که در شکل ۶ دیده می‌شود، مقادیر توابع ریشه روی کلیه وجوه المان کاملاً مشخص است درحالی‌که مقادیر این توابع در نقاط درونی المان مجهول می‌باشد. روشی که در مقاله حاضر برای تعیین توابع ریشه پیشنهاد شده این است که مقادیر معلوم توابع ریشه روی وجوه المان به صورت شرایط مرزی یک مسئله مقدار مرزی در نظر گرفته شده و حل مسئله مقدار مرزی به عنوان تابع ریشه انتخاب شود. در مقاله حاضر معادله لاپلاس روی یک ناحیه مربعی به عنوان مسئله مقدار مرزی انتخاب شده و مقادیر بیان شده در شکل ۶ به عنوان شرایط مرزی آن در نظر گرفته شده است. این گونه انتخاب توابع ریشه کلیه شرایط مورد نیاز توابع ریشه را برآورده خواهد کرد. در اینجا لازم است اشاره شود که حل تحلیلی معادله لاپلاس با شرایط مرزی نشان داده شده در شکل ۶ با استفاده از روش جداسازی متغیرها و حل سری در منابع مختلف موجود است که به عنوان نمونه می‌توان به مرجع [۱۱] اشاره کرد.

فرم عمومی مسئله مقدار مرزی‌ای که توابع ریشه از حل آن به دست می‌آیند در رابطه (۵) آورده شده است. در شکل ۷ نیز دامنه فرم عمومی مسئله مقدار مرزی به همراه شرایط مرزی آن نشان داده شده است. اگر  $\varphi(\alpha, \beta)$  بیانگر حل معادله لاپلاس باشد شرط مرزی دیریشله روی وجه پایین با  $\varphi = f(\alpha)$  و روی وجه سمت چپ با

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \varphi_1(\mathbf{I}\xi); \\ N_3(\xi) &= \varphi_1(\mathbf{R}_\pi \xi); \\ N_2(\xi) &= \varphi_1(\mathbf{R}_{3\pi/2} \xi); \\ N_4(\xi) &= \varphi_1(\mathbf{R}_{\pi/2} \xi) \end{aligned} \quad (۴)$$

همانطور که بیان شد در مقاله حاضر دستگاه مختصات ریشه  $(\alpha, \beta)$  به منظور تعریف تابع ریشه استفاده می‌شود. سپس با در اختیار داشتن توابع ریشه و انجام تبدیل مختصات مناسب می‌توان توابع شکل المان را استخراج کرد. به طور کلی ارتباط بین دستگاه مختصات محلی و دستگاه مختصات ریشه از طریق یک تانسور تبدیل فراهم می‌شود. در رابطه (۴) از دو تانسور تبدیل همانی و دوران برای استخراج توابع شکل المان نوع A استفاده شده است. در ادامه این مقاله ابتدا چهار تابع ریشه مورد نیاز معرفی شده و جزئیات محاسبه آن‌ها آورده شده است. پس از محاسبه توابع ریشه، نحوه انجام تبدیل مختصات برای هر یک از توابع شکل المان‌های نوع A تا F ارائه شده است.

### ۳-۲- محاسبه توابع ریشه

در شکل ۳ شش نوع المان متفاوتی که ممکن است در یک شبکه درخت چهارتایی ظاهر شوند دیده می‌شود. با توجه به تعداد گره‌های هر المان، در مجموع تعداد ۳۶ تابع شکل مختلف در این المان‌ها قابل تعریف است. برای محاسبه هر ۳۶ تابع شکل المان‌های نوع A تا F می‌توان نشان داد که در مجموع تنها به ۴ تابع ریشه مختلف نیاز است. به عبارت دیگر با انجام تبدیل مختصات مناسب می‌توان هر ۳۶ تابع شکل متفاوت را از ۴ تابع ریشه استخراج کرد. توابع ریشه باید به نحوی تعریف شوند که در یک گره مقدار آن برابر یک و در دیگر گره‌ها برابر صفر باشد. علاوه بر آن لازم است در فاصله بین هر دو گره مجاور واقع شده روی یک ضلع نیز به طور خطی تغییر کنند. در شکل ۶ مقادیر هر چهار تابع ریشه روی اضلاع المان در دستگاه مختصات ریشه نشان داده شده است. از این میان، تابع ریشه  $\varphi_1(\mathbf{a})$  پیش از این در بخش ۳-۱ و در رابطه (۲) به صورت یک چندجمله‌ای لاگرانژ تعریف شد.

توابع ریشه  $\varphi_2(\mathbf{a})$  تا  $\varphi_4(\mathbf{a})$  که مقادیر آن‌ها روی مرز المان در شکل ۶ دیده می‌شود را نمی‌توان توسط توابع چندجمله‌ای ایجاد کرد. در تحقیق حاضر یک ایده جدید برای محاسبه توابع ریشه

$$B_{1n} = \int_{-1}^{+1} g(\beta) \sin\left(\frac{n\pi}{2}(\beta+1)\right) d\beta \quad (10)$$

$$B_{2n}(\beta) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}(\beta+1)\right) \quad (11)$$

$$B_{3n}(\alpha) = \frac{e^{\frac{n\pi}{2}(1+\alpha)} - e^{\frac{n\pi}{2}(3-\alpha)}}{1 - e^{-2n\pi}} \quad (12)$$

رابطه (۶) به صورت یک سری بی‌نهایت ارائه شده که در آن  $n$  اندیس جملات می‌باشد. ضرایب  $A_{1n}$  و  $B_{1n}$  مقادیر ثابتی هستند که باید برای هر یک از توابع ریشه متناسب با شرایط مرزی بیان شده در شکل ۶ محاسبه گردند. در اینجا برای نمونه به محاسبه این ضرایب برای تابع ریشه  $\varphi_2$  اشاره می‌شود. با توجه به شکل ۶ شرایط مرزی دیریشله برای تابع ریشه  $\varphi_2$  به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}(1-\alpha) \quad (13)$$

$$g(\beta) = \begin{cases} -\beta & -1 \leq \beta < 0 \\ 0 & 0 \leq \beta \leq 1 \end{cases} \quad (14)$$

با جایگذاری روابط (۱۳) و (۱۴) به ترتیب در روابط (۷) و (۱۰) و انجام انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، ضرایب  $A_{1n}$  و  $B_{1n}$  برای تابع ریشه  $\varphi_2$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$A_{1n} = \frac{2}{n\pi} \quad (15)$$

$$B_{1n} = \frac{2}{n^2\pi^2} \left( n\pi - 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \quad (16)$$

به‌طور مشابه می‌توان برای دیگر توابع ریشه نیز ضرایب مورد نیاز را با جایگذاری شرایط مرزی بیان شده در شکل ۶ در روابط (۷) و (۱۰) به‌دست آورد. در اینجا از پرداختن به جزئیات محاسبات ضرایب خودداری می‌شود. در جدول ۱ ضرایب  $A_{1n}$  و  $B_{1n}$  برای توابع ریشه  $\varphi_2$  تا  $\varphi_4$  آورده شده است. پس از محاسبه ضرایب مورد نیاز می‌توان توابع ریشه را از رابطه (۶) به صورت یک سری بی‌نهایت به‌دست آورد. از آن جهت که برای تشکیل روابط المان محدود به مقادیر عددی توابع شکل و البته مشتقات آن‌ها در تعدادی نقاط انتگرال‌گیری نیاز است می‌توان سری بیان شده در رابطه (۶) را به ازای تعداد محدودی

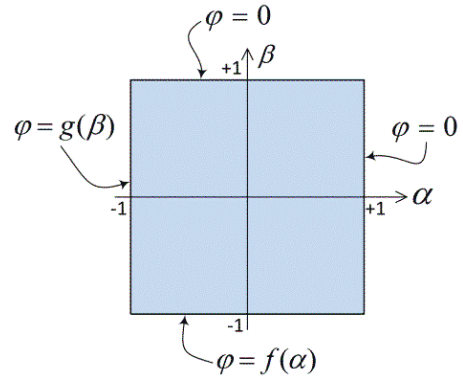


Fig. 7. General definition of the boundary conditions of the Laplace equation as used in derivation of the root functions

شکل ۷: تعریف عمومی شرایط مرزی معادله لاپلاس جهت استخراج توابع ریشه

$\varphi = g(\beta)$  نشان داده شده است. شرایط مرزی روی دو وجه دیگر (وجوه بالا و راست) برابر صفر می‌باشد. حل تحلیلی معادله لاپلاس روی یک مربع با ابعاد و شرایط مرزی نشان داده شده در رابطه (۵) و شکل ۷ با روش جداسازی متغیرها در منابع مختلف قابل دستیابی است. پاسخ این مسئله در اینجا در رابطه (۶) آورده شده است. در این رابطه ضرایب و پارامترهایی وجود دارد که در روابط (۷) تا (۱۲) تعریف شده‌اند. جزئیات حل این مسئله و استخراج روابط آن به‌عنوان نمونه در مرجع [۱۱] قابل دستیابی است.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0; \quad (5)$$

$$\begin{cases} \phi(+1, \beta) = \phi(\alpha, +1) = 0 \\ \phi(\alpha, -1) = f(\alpha) \\ \phi(-1, \beta) = g(\beta) \end{cases}$$

$$\phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_{1n} A_{2n}(\alpha) A_{3n}(\beta)}{B_{1n} B_{2n}(\beta) B_{3n}(\alpha)} + \right) \quad (6)$$

$$A_{1n} = \int_{-1}^{+1} f(\alpha) \sin\left(\frac{n\pi}{2}(\alpha+1)\right) d\alpha \quad (7)$$

$$A_{2n}(\alpha) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}(\alpha+1)\right) \quad (8)$$

$$A_{3n}(\beta) = \frac{e^{\frac{n\pi}{2}(1+\beta)} - e^{\frac{n\pi}{2}(3-\beta)}}{1 - e^{-2n\pi}} \quad (9)$$

جدول ۱: ضرایب  $A_{1n}$  و  $B_{1n}$  برای توابع ریشه  $\varphi_2$  تا  $\varphi_4$

ضریب $B_{1n}$	ضریب $A_{1n}$	تابع ریشه
$\frac{2}{n^2 \pi^2} \left( n\pi - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$	$\frac{2}{n\pi}$	$\varphi_2$
$\frac{2}{n^2 \pi^2} \left( n\pi - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$	$\frac{2}{n^2 \pi^2} \left( n\pi - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$	$\varphi_3$
.	$\frac{\Lambda}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	$\varphi_4$

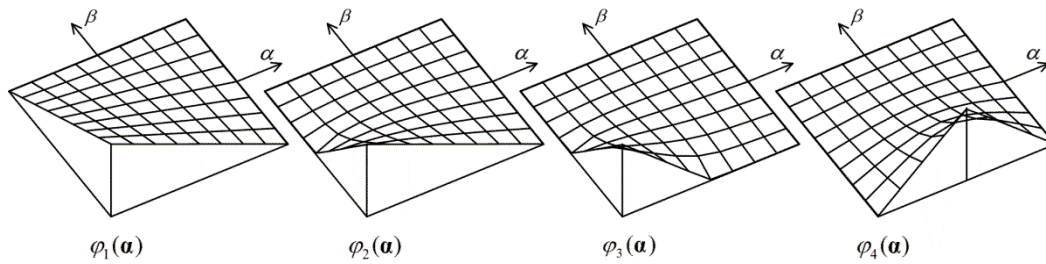


Fig. 8. Four root functions  $\varphi_1$  to  $\varphi_4$  in the root coordinate system

شکل ۸: چهار تابع ریشه  $\varphi_1$  تا  $\varphi_4$  در دستگاه مختصات ریشه

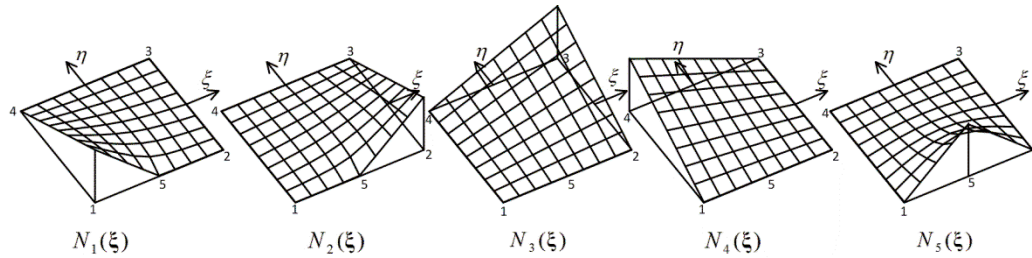


Fig. 9. Three dimensional representation of five shape functions of element type B

شکل ۹: ترسیم سه بعدی پنج تابع شکل المان نوع B

تابع شکل به سه تابع ریشه  $\varphi_1$ ،  $\varphi_2$  و  $\varphi_4$  نیاز است. به عنوان مثال تابع شکل گره ۱ ( $N_1$ ) المان نوع B به صورت انعکاس آینه‌ای تابع ریشه  $\varphi_2$  حول خطی به زاویه  $\pi/4$  رادیان قابل بیان است. این تابع شکل در شکل ۹ ترسیم شده است. تانسور انعکاس<sup>۱</sup> حول خطی به زاویه  $\theta$  در رابطه (۱۷) آمده است. بنابراین برای تابع شکل گره ۱ تبدیل مختصات  $\alpha = \mathbf{M}_{\pi/4} \xi$  باید انجام شده و در نهایت تابع شکل به صورت  $N_1(\xi)\alpha = \varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4} \xi)$  بیان می‌شود. به همین ترتیب دیگر توابع شکل این المان با استفاده از تانسور دوران و تانسور همانی قابل بیان هستند. در رابطه (۱۸) کلیه توابع شکل

جمله محاسبه کرد. برای درک بهتر از ساختار هندسی توابع ریشه هر چهار تابع ریشه در شکل ۸ ترسیم شده است.

### ۳-۳- محاسبه توابع شکل

همانطور که بیان شد می‌توان تعداد ۳۶ تابع شکل المان‌های نوع A تا F را تنها به کمک چهار تابع ریشه و تبدیل مختصات مناسب برای هر مورد به دست آورد. به نحوه انجام این کار در بخش ۳-۱ اشاره شد و توابع شکل المان نوع A در رابطه (۴) ارائه گردید. در اینجا به عنوان نمونه‌ای دیگر نحوه استخراج توابع شکل المان نوع B اشاره می‌شود. المان نوع B دارای پنج گره بوده (شکل ۳) و برای ایجاد پنج

1 Reflection



Table 2. All of the shape functions of element types A to F

جدول ۲: کلیه توابع شکل المان‌های نوع A تا F

المان	$N_1(\xi)$	$N_2(\xi)$	$N_3(\xi)$	$N_4(\xi)$	$N_5(\xi)$	$N_6(\xi)$	$N_7(\xi)$	$N_8(\xi)$
A	$\varphi_1(\mathbf{I}\xi)$	$\varphi_1(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_1(\mathbf{R}_\pi\xi)$	$\varphi_1(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$	-	-	-	-
B	$\varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\xi)$	$\varphi_2(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_1(\mathbf{R}_\pi\xi)$	$\varphi_1(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{I}\xi)$	-	-	-
C	$\varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\xi)$	$\varphi_3(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_2(\mathbf{R}_\pi\xi)$	$\varphi_1(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{I}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	-	-
D	$\varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\xi)$	$\varphi_2(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\mathbf{R}_\pi\xi)$	$\varphi_2(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{I}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_\pi\xi)$	-	-
E	$\varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\xi)$	$\varphi_3(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_3(\mathbf{R}_\pi\xi)$	$\varphi_2(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{I}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_\pi\xi)$	-
F	$\varphi_3(\mathbf{I}\xi)$	$\varphi_3(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_3(\mathbf{R}_\pi\xi)$	$\varphi_3(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{I}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_{3\pi/2}\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_\pi\xi)$	$\varphi_4(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi)$

این المان بیان شده و در شکل ۹ نیز ترسیم شده‌اند.

### ۴- نگاشت مختصات عمومی و محلی

به‌طور استاندارد در روش المان محدود دو دستگاه مختصات عمومی و محلی معرفی می‌شود. دستگاه مختصات عمومی  $(x, y)$  دستگاهی است که دامنه مسئله، معادلات حاکم، شرایط مرزی و شبکه المانی در آن تعریف می‌شود. در کنار آن دستگاه مختصات محلی  $(\xi, \eta)$  دستگاهی است که توابع شکل در آن تعریف شده و تابع تقریب متغیر میدان ساخته می‌شود. این دو دستگاه توسط یک نگاشت مختصات به یکدیگر وابسته می‌شوند. در مقاله حاضر برای ایجاد این ارتباط از یک نگاشت زیرپارامتری<sup>۲</sup> استفاده شده است. به عبارت دیگر از توابع شکل المان چهارگوش چهارگره‌ای که در رابطه (۱) آمده است برای نگاشت مختصات بین دستگاه عمومی و محلی در المان‌های نوع A تا F استفاده خواهد شد. البته بدیهی است این نگاشت در المان‌های نوع A با نگاشت هم‌پارامتری<sup>۳</sup> یکسان است اما در المان‌های نوع B تا F این نگاشت از مرتبه‌ای پایین‌تر از تابع تقریب متغیر میدان برخوردار خواهد بود. بنابراین به آن یک نگاشت زیرپارامتری گفته می‌شود. بنابراین نگاشت مختصات بین دستگاه مختصات عمومی و محلی برای تمام المان‌های نوع A تا F به‌صورت زیر خواهد بود.

$$x = \sum_{i=1}^4 \tilde{N}_i(\xi) x_i; \quad y = \sum_{i=1}^4 \tilde{N}_i(\xi) y_i \quad (19)$$

در این رابطه  $\tilde{N}_i(\xi)$  توابع شکل المان چهارگوش چهارگره‌ای است که در رابطه (۱) آمده است و  $x_i$  و  $y_i$  بیانگر مختصات گره‌های شماره یک تا چهار هر المان هستند. توجه شود همانطور که در

$$\mathbf{M}_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \varphi_2(\mathbf{M}_{\pi/4}\xi); & N_2(\xi) &= \varphi_2(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi) \\ N_3(\xi) &= \varphi_1(\mathbf{R}_\pi\xi); & N_4(\xi) &= \varphi_1(\mathbf{R}_{\pi/2}\xi); \end{aligned} \quad (18)$$

$$N_5(\xi) = \varphi_4(\mathbf{I}\xi)$$

تا اینجا توابع شکل المان‌های نوع A و B در روابط (۴) و (۱۸) ارائه گردید. به همین ترتیب می‌توان توابع شکل دیگر انواع المان‌ها را توسط چهار تابع ریشه  $\varphi_1$  تا  $\varphi_4$  و تانسورهای تبدیل همانی، دوران و انعکاس به‌دست آورد. در جدول ۲ کلیه توابع شکل مربوط هر شش نوع المان آورده شده است. موردی که در اینجا باید به آن اشاره شود این است که توابع شکل شرط افزاز واحد<sup>۱</sup> را ارضاء خواهند کرد. برای درک این موضوع کافی است توجه شود که تغییرات توابع شکل روی وجوه المان به‌صورت خطی است؛ بنابراین حاصل جمع توابع شکل روی تمام وجوه المان برابر یک خواهد بود. از طرف دیگر، از آن جهت که توابع شکل معادله لاپلاس را ارضاء می‌کنند بنابراین حاصل جمع آن‌ها نیز معادله لاپلاس را ارضاء خواهد کرد. بنابراین حل معادله لاپلاس روی یک ناحیه که شرایط مرزی آن روی تمام مرزها برابر یک است در داخل دامنه نیز برابر یک خواهد بود. بنابراین شرط افزاز واحد در تمام نقاط المان برقرار می‌گردد.

2 Sub-Parametric Mapping

3 Iso-Parametric Mapping

1 Partition of Unity

$w$  شکل همگن شرایط مرزی دیریشله را ارضاء می‌کند، فرم ضعیف شده معادله دیفرانسیل به همراه شرایط مرزی نیومن به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u^h}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_N} w \bar{q} d\Gamma \quad (24)$$

اگر  $N_i^e$  بیانگر تابع شکل متعلق به گره  $i$ ام از المان  $e$ ام بوده و مقدار گرهی متغیر مجهول در این گره برابر  $u_i^e$  باشد تابع تقریب متغیر میدان به صورت زیر بیان می‌شود.

$$u^h = \sum_{i=1}^{m^e} N_i^e u_i^e \quad (25)$$

در این رابطه  $m^e$  بیانگر تعداد گره‌های المان  $e$ ام است. تعداد گره‌های هر یک از انواع المان‌ها در شکل ۳ نشان داده شده که بین ۴ گره برای المان نوع A تا ۸ گره برای المان نوع F متغیر خواهد بود. اگر تابع تقریب در رابطه (۲۵) در فرم ضعیف بیان شده در رابطه (۲۴) جایگذاری شود و توابع وزن  $w$  مطابق دستورالعمل گالرکین از بین توابع شکل انتخاب شود، فرم گسسته شده معادله دیفرانسیل به دست خواهد آمد. در نهایت پس از مرتب‌سازی معادلات و انجام هم‌بندی (مونتاژ) آن‌ها، فرم گسسته معادله دیفرانسیل به همراه شرایط مرزی نیومن به صورت دستگاه معادلات جبری خطی زیر قابل بیان است.

$$KU = R \quad (26)$$

در رابطه فوق  $U$  بیانگر بردار مقادیر مجهول گرهی است. ماتریس  $K$  و بردار  $R$  به ترتیب بیانگر ماتریس ضرایب و بردار بارگذاری است که از هم‌بندی (مونتاژ) ماتریس ضرایب المان و بردار بارگذاری المان حاصل می‌شود. درایه‌های ماتریس ضرایب المان  $e$  و بردار بارگذاری آن به صورت زیر بیان می‌شود. برای مشاهده جزئیات استخراج این روابط به مرجع [۱۰] مراجعه شود.

$$K_j^e = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) d\Omega \quad (27)$$

$$R_i^e = \int_{\Gamma_N^e} N_i^e \bar{q} d\Gamma \quad (28)$$

همانطور که در رابطه (۲۷) مشاهده می‌شود تشکیل ماتریس ضرایب

شکل ۳ مشاهده می‌شود شماره‌گذاری محلی گره‌ها در هر شش نوع المان به نحوی است که گره‌های یک تا چهار هر المان در چهار گوشه آن واقع شده‌اند. در نهایت از نگاشت مختصات بیان شده در رابطه (۱۹) برای انتقال روابط از دستگاه مختصات عمومی به محلی و انجام انتگرال‌گیری عددی و تشکیل ماتریس‌های المان استفاده می‌شود. در اینجا از پرداختن به جزئیات روابط اجتناب می‌شود و استخراج روابط را می‌توان به عنوان نمونه در مرجع [۱۰] مشاهده کرد.

## ۵- معادله مدل و گسسته‌سازی

در مقاله حاضر برای بررسی کارایی روش پیشنهادی یک معادله مدل انتخاب شده و مورد گسسته‌سازی و حل قرار گرفته است. در اینجا از معادله لاپلاس برای این منظور استفاده شده و گسسته‌سازی براساس روش باقی‌مانده‌های وزن‌دار و تکنیک گالرکین انجام شده است. در ادامه این بخش به گام‌های اساسی این روش به طور خلاصه اشاره شده و برای مشاهده جزئیات قضایا و استخراج روابط می‌توان به منابع روش المان محدود به عنوان مثال مرجع [۱۰] مراجعه کرد. به طور خلاصه اگر  $u(x, y)$  بیانگر میدان متغیر مجهول در دامنه دوبعدی  $\Omega$  باشد معادله لاپلاس به همراه شرایط مرزی دیریشله و نیومن به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (20)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_D \quad (21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_N \quad (22)$$

در این روابط  $\bar{u}$  بیانگر مقدار از پیش معین شده متغیر میدان روی مرز دیریشله  $\Gamma_D$  و  $\bar{q}$  بیانگر مقدار از پیش معین شده مشتق جهتی متغیر میدان در راستای بردار عمود بر مرز  $\mathbf{n}$  روی مرز نیومن  $\Gamma_N$  می‌باشد. مطابق روش باقی‌مانده‌های وزن‌دار اگر  $u^h$  بیانگر یک تقریب برای متغیر مجهول  $u$  بوده و  $w$  توابع وزن دلخواهی باشند که شکل همگن شرایط مرزی دیریشله را ارضاء کنند، فرم انتگرال وزن‌دار شده معادله دیفرانسیل فوق به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\int_{\Omega} w \left( \frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^h}{\partial y^2} \right) d\Omega = 0 \quad (23)$$

با انجام انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء و توجه به این نکته که تابع وزن

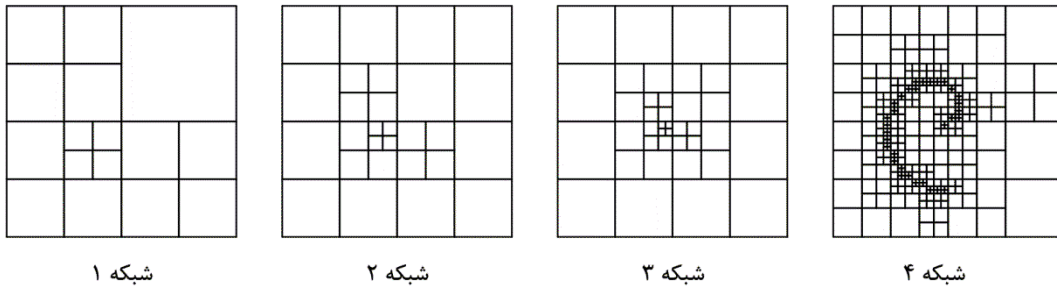


Fig. 10. The quadtree meshes which are used in the first example

شکل ۱۰: شبکه المانی درخت چهارتایی به کار رفته در مثال اول

### ۶- مثال‌های عددی

در این بخش برای بررسی کارایی روش پیشنهادی دو مثال عددی حل شده و نتایج حاصل با حل تحلیلی مقایسه شده است. برای محاسبه خطای حل عددی و ارزیابی دقت روش پیشنهادی از نرم  $L_2$  خطای نسبی استفاده شده است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|e\| = \frac{\int_{\Omega} (u^h - u^a)^2 d\Omega}{\int_{\Omega} (u^a)^2 d\Omega} \quad (29)$$

در این رابطه  $u^h$  و  $u^a$  به ترتیب بیانگر حل تحلیلی و حل عددی مسئله می‌باشد.

#### ۶-۱- مثال اول

به عنوان اولین مثال عددی، آزمون پچ مورد بررسی قرار گرفته است. به طور کلی در آزمون پچ بررسی می‌شود که آیا یک روش عددی امکان بازتولید یک میدان خطی برای متغیر مجهول را به طور دقیق دارد یا خیر. در واقع آزمون پچ یک شرط لازم برای همگرایی روش المان محدود می‌باشد. در اینجا برای انجام این آزمون یک ناحیه مربعی  $\Omega = [0,1]^2$  در نظر گرفته شده است. یک حل تحلیلی برای معادله لاپلاس روی این ناحیه را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$u = x + y; \quad x, y \in [0,1] \quad (30)$$

برای انجام آزمون پچ شرایط مرزی دیریشله مطابق حل تحلیلی در رابطه (۳۰) بر روی هر چهار ضلع دامنه مسئله در نظر گرفته شده است. جهت حل این مسئله از چهار شبکه المانی درخت چهارتایی

المان نیازمند انجام انتگرال گیری دامنه‌ای روی المان‌ها می‌باشد. به طور مرسوم در روش المان محدود از فرمول انتگرال گیری گوس برای این منظور استفاده می‌شود. در اینجا نیز از همین روش برای محاسبه انتگرال‌های دامنه‌ای استفاده شده است. البته لازم است به این نکته توجه شود که همانطور که در شکل‌های ۶ و ۸ مشاهده می‌شود توابع ریشه  $\phi_2$  تا  $\phi_4$  دارای یک شکستگی روی مرز المان هستند که این شکستگی به توابع شکل نیز سرایت خواهد کرد. بنابراین هر چند توابع شکل المان‌های نوع B تا F توابع پیوسته‌ای خواهند بود اما مشتقات برخی از آن‌ها دیگر پیوسته نیستند. بنابراین در این نوع المان‌ها عبارت زیر انتگرال در رابطه (۲۷) دارای یک ناپیوستگی بر روی وجوه المان‌ها خواهد بود. وجود ناپیوستگی در عبارت زیر انتگرال موجب کاهش دقت انتگرال گیری عددی در این المان‌ها می‌شود.

در مقاله حاضر برای برطرف کردن مشکل مورد اشاره در بالا و جلوگیری از کاهش دقت انتگرال گیری دامنه‌ای در المان‌های نوع B تا F، آن‌ها را دقیقاً از نقاط ناپیوستگی به نواحی کوچکتری تجزیه کرده و انتگرال گیری روی این نواحی کوچکتر (سلول‌های انتگرال گیری) انجام می‌شود. تجزیه المان‌ها به سلول‌های انتگرال گیری موجب می‌شود که نقاط ناپیوستگی در مرز بین دو سلول واقع شده و عبارت زیر انتگرال در هر سلول انتگرال گیری پیوسته باقی بماند. البته واضح است که انتگرال گیری در المان‌های نوع A به روش مرسوم انجام شده و به ایجاد سلول‌های انتگرال گیری نیازی نخواهد بود. مورد دیگری که در انجام انتگرال گیری عددی با روش گوس باید به آن توجه کرد این است که توابع شکل در المان‌های نوع B تا F غیر چندجمله‌ای بوده و برای دستیابی به دقت مناسب در انتگرال گیری عددی باید از تعداد کافی نقاط گوس استفاده کرد.

Table 3. Results of the patch test in the first example

جدول ۳: نتایج آزمون پچ در مثال اول

نرم خطای نسبی $\ e\ $	تعداد المان‌ها	تعداد گره‌ها	
$5/39 \times 10^{-17}$	16	27	شبکه 1
$9/81 \times 10^{-18}$	28	43	شبکه 2
$8/98 \times 10^{-18}$	40	59	شبکه 3
$7/91 \times 10^{-18}$	331	428	شبکه 4

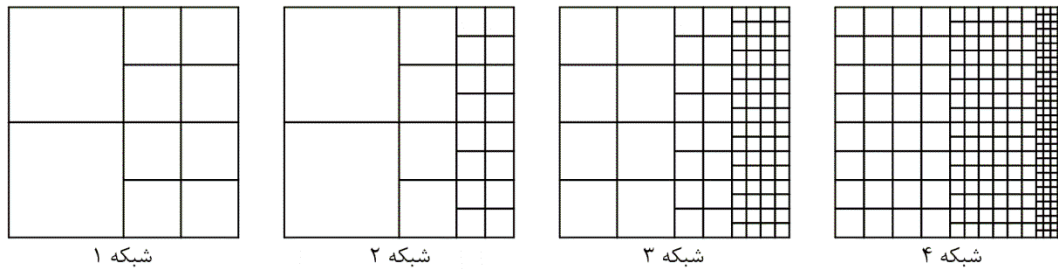


Fig. 11. The quadtree meshes which are used in the second example

شکل ۱۱: شبکه المانی درخت چهارتایی به کار رفته در مثال دوم

Table 4. The results of the convergence test in the second example

جدول ۴: نتایج آزمون همگرایی در مثال دوم

نرم خطای نسبی $\ e\ $	تعداد المان‌ها	تعداد گره‌ها	
$2/2 \times 10^{-3}$	10	18	شبکه 1
$4/49 \times 10^{-4}$	22	35	شبکه 2
$4/3 \times 10^{-5}$	88	113	شبکه 3
$4/4 \times 10^{-6}$	256	303	شبکه 4

$$u = e^x \sin(y); \quad x, y \in [0, \pi] \quad (31)$$

شرایط مرزی این مسئله به صورت شرایط مرزی دیریشله روی تمام وجوه دامنه با استفاده از حل تحلیلی در رابطه (۳۱) اعمال شده است. برای بررسی اثر درشتی شبکه المانی چهار شبکه درخت چهارتایی مختلف ایجاد شده که در شکل ۱۱ قابل مشاهده می‌باشند. تعداد گره‌ها و تعداد المان‌های هر شبکه در جدول ۴ آمده است. پس از حل مسئله با روش پیشنهادی و به دست آمدن مقادیر گرهی، از رابطه (۲۹) برای محاسبه نرم خطای نسبی استفاده شده و در جدول ۴ برای هر شبکه ارائه شده است. در شکل ۱۲ نیز مقادیر نرم خطای نسبی برحسب تعداد گره‌ها ترسیم شده است. همانطور که دیده می‌شود با ریز شدن اندازه المان‌ها نرم خطای نسبی کاهش یافته و حل عددی به پاسخ تحلیلی معادله دیفرانسیل همگرا می‌شود.

نشان داده شده در شکل ۱۰ استفاده شده است. پس از حل مسئله با روش پیشنهادی نرم خطای نسبی برای هر شبکه با استفاده از رابطه (۲۹) محاسبه شده و در جدول ۳ آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر نرم خطای نسبی برای هر شبکه به اندازه کافی کوچک بوده و آزمون پچ تایید می‌گردد.

#### ۶-۲- مثال دوم

با انجام آزمون پچ در مثال اول شرط لازم برای همگرایی روش پیشنهادی تایید گردید. در دومین مثال عددی به بررسی نرخ همگرایی این روش در حل معادله لاپلاس روی ناحیه مربعی  $\Omega = [0, \pi]^2$  پرداخته شده است. یک حل تحلیلی معادله لاپلاس روی این ناحیه به صورت زیر قابل بیان می‌باشد.

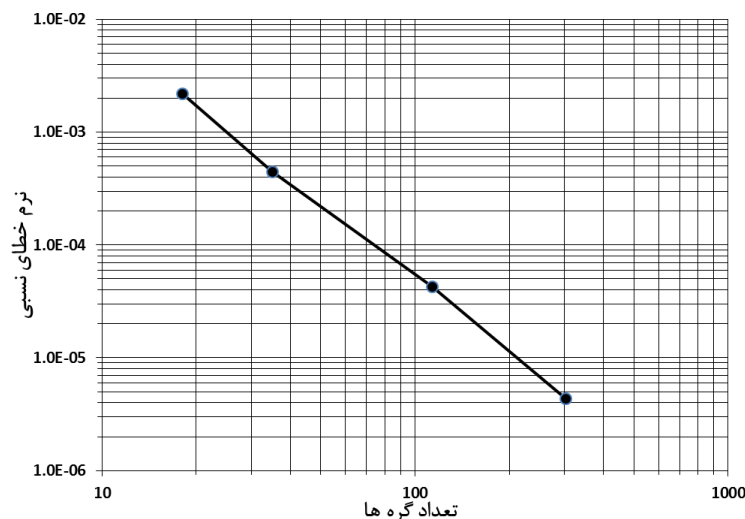


Fig. 12. Relative error norm versus number of nodes in the second example

شکل ۱۲: نرم خطای نسبی برحسب تعداد گره‌ها در مثال دوم

می‌کند. در دومین مثال عددی نرخ همگرایی روش پیشنهادی با حل معادله مدل برای چند شبکه با درستی متفاوت بررسی شد. نتایج نشان داد که روش پیشنهادی برای استخراج توابع شکل در المان‌های غیرانطباقی کارکرد مناسبی داشته و می‌توان از آن به‌طور موثری استفاده کرد.

#### مراجع

- [1] M.J. Kazemzadeh-Parsi and F. Daneshmand, Solution of geometric inverse heat conduction problems by smoothed fixed grid finite element method, *Finite Elements in Analysis and Design*, 611-599 (2009) 45.
- [2] M.J. Kazemzadeh-Parsi and F. Daneshmand, Three dimensional smoothed fixed grid finite element method for the solution of unconfined seepage problems, *Finite Elements in Analysis and Design*, 35-24 (2013) 64.
- [3] M.J. Kazemzadeh-Parsi, Optimal shape design for heat conduction using smoothed fixed grid finite element method and modified firefly algorithm, *Iranian Journal of Science and Technology*, 39(M387-367 (2015) (2).
- [4] H. Samet, *Application of Spatial Data Structure*, Addison-Wesley, NewYork, 1990.
- [5] N. Provatas, N. Goldenfeld, J. Dantzig, Adaptive mesh refinement computation of solidification microstructures using dynamic data structures, *Journal of Computational*

#### ۷- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر یک روش جدید برای محاسبه توابع شکل المان‌های غیرانطباقی که توسط الگوریتم درخت چهارتایی تولید شده‌اند پیشنهاد شده است. در این روش ابتدا با تعریف دستگاه مختصات ریشه، توابعی تحت عنوان توابع ریشه تعریف شد و نشان داده شد که می‌توان تعداد ۳۶ تابع شکل متفاوت مربوط به شش نوع المان مختلف که در شبکه درخت چهارتایی ظاهر می‌شوند را تنها با استفاده از چهار تابع ریشه به‌دست آورد. به‌عبارت دیگر کلیه توابع شکل شش نوع المان که از نظر چیدمان گره‌ها با یکدیگر تفاوت دارند با انجام تبدیل مختصات مناسب از چهار تابع ریشه استخراج شد. جهت تولید توابع ریشه یک مسئله مقدار مرزی تعریف شد و از حل آن روی یک ناحیه مربعی با شرایط مرزی مناسب استفاده گردید. حل این مسئله مقدار مرزی توسط روش جداسازی متغیرها و حل سری در دسترس بوده و بنابراین توابع شکل در نهایت به‌صورت یک حل سری بیان شدند. پس از استخراج توابع شکل، گسسته‌سازی با استفاده از روش باقی‌مانده‌های وزن‌دار و تکنیک گالرکین انجام شد. برای بررسی کارایی روش پیشنهادی از معادله لاپلاس به عنوان یک معادله مدل استفاده شد و روش پیشنهادی برای حل دو مثال عددی به‌کار برده شد. شبکه‌های مورد نیاز در هر دو مثال عددی براساس درخت چهارتایی تولید گردید. در مثال اول به آزمون پچ پرداخته شد و نشان داده شد که روش پیشنهادی آزمون پچ را دقیقاً ارضاء



- in Engineering Sciences and Applied Mathematics, (3)7 133-124 (2015).
- [9] T.P. Fries, A. Byfut, A. Alizada, K.W. Cheng, A. Schroder, Hanging nodes and XFEM, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 430-404 (2011) 86.
- [10] M.J. Kazemzadeh-Parsi and F. Daneshmand, Finite element method: A practical course, Islamic Azad University Press, Shiraz Branch, Shiraz, 2011, (In Persian).
- [11] N.H. Asmar, Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2005.
- Physics 290-265 (1999) (1)148.
- [6] P.D. Stolfo, A. Schroder, N. Zander, S. Kollmannsberger, An easytreatmentofhangingnodesin hp-finiteelements, Finite Elements in Analysis and Design, -101 (2016) 121 117.
- [7] A. Tabarraei, N. Sukumar, Adaptive computations on conforming quadtree meshes, Finite Elements in Analysis and Design, 702-686 (2005) 41.
- [8] S. Natarajan, E.T. Ooi, C. Song, Finite element computations over quadtree meshes: strain smoothing and semi-analytical formulation, International Journal of Advances

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

*M. J. Kazemzadeh-Parsi, Application of Nonconforming Quadtree Grids in the Finite Element Method, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(2) (2021) 673-686.*

DOI: [10.22060/mej.2019.15028.6003](https://doi.org/10.22060/mej.2019.15028.6003)

