

حل تحلیلی انتقال حرارت در یک مخروط ساخته شده از مواد مدرج تابعی

امین امامیان^۱، امین امیری دلویی^{۲*}، سجاد کریم نژاد^۱، حسن سجادی^۲

^۱ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
^۲ دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸-۰۲-۱۶
بازنگری: ۱۳۹۸-۰۷-۰۷
پذیرش: ۱۳۹۸-۰۸-۱۴
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۸-۲۲

کلمات کلیدی:

مواد مدرج تابعی
انتقال حرارت
حل دقیق
مخروط
روش جداسازی متغیرها

خلاصه: در این مطالعه، مساله انتقال حرارت هدایتی دوبعدی در یک مخروط توخالی ناقص ساخته شده از مواد مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته و یک حل تحلیلی دقیق ارائه شده است. در مطالعه حاضر، خواص مواد مطابق با یک تابع توانی تغییر می‌کند. شرایط مرزی حرارتی نیز به صورت غیرهمگن فرض شده است. از روش جدایی متغیرها برای تعیین دقیق توزیع دمای پایا در مخروط استفاده شده است. حل بدست آمده با استفاده از داده‌های عددی صحت‌سنجی شده است. برای اثبات توانایی حل حاضر، یک مثال کاربردی که در معرض شرایط مرزی ترکیبی قرار دارد، مورد مطالعه قرار گرفته است. اثرات پارامترهای موثر در توزیع دما برای هندسه حاضر مورد بررسی قرار گرفته است. نتیجه این مطالعه برای روشن شدن روند طراحی و بهینه‌سازی هندسه‌های نسبتاً پیچیده از مواد مدرج تابعی مفید خواهد بود. همچنین با توجه به تحلیلی بودن حل حاضر، نتایج حاصل از این مطالعه می‌تواند برای فهم بهتر مکانیزم‌های انتقال حرارت مواد مدرج تابعی مفید باشد. در مساله حاضر با افزایش مقدار m و K ، هدایت‌پذیری حرارتی به ترتیب به میزان حدود ۸ و ۲ درصد افزایش یافته که منجر به افزایش توزیع دمای مخروط خواهد شد.

۱- مقدمه

سایش و بارگذاری ترمومکانیکی واقع می‌شوند؛ بلکه برای تولید مواد الکترونیکی، مواد زیست سازگار و مقاوم حرارتی به کار گرفته می‌شود. مواد مدرج تابعی موادی هستند که در آن‌ها خواص ماده از یک طرف به طرف دیگر آن به صورت تدریجی تغییر می‌کند [۵ و ۶]. زمینه کاربردی این مواد وسیع و گسترده است. از مصارف مواد مدرج تابعی، پوشش‌های مقاوم به خوردگی و فرسایش که برای جابجایی سنگ‌های معدن ساینده و سنگین به کار می‌روند، مجراهای مبدل‌های حرارتی، ژنراتورهای ترموالکتریک (دما برقی)، اجزای ماشین‌های حرارتی، صفحات منتشرکننده حرارت و اتصالات عایق الکتریسیته فلزی-سرامیکی هستند. همچنین این مواد برای کاهش عدم مطابقت در اتصالات فلزی-سرامیکی به کار می‌روند.

حل تحلیلی مسائل انتقال گرما در یک محیط ناهمسانگرد^۳

امروزه مطالعه مواد مدرج تابعی^۱ دارای اهمیت بسیار بالایی است. بررسی مسائل مربوط به مواد مدرج تابعی اهمیت ویژه‌ای در مهندسی [۱ و ۲] و زیست فن‌آوری^۲ [۳ و ۴] دارد. شناخت بهتر این مواد و آشنایی با عوامل مؤثر بر رفتار حرارتی آن‌ها، موجب بهبود و افزایش بازده فرآیندهای صنعتی مرتبط می‌گردد. مفهوم مواد مدرج تابعی اولین بار به منظور کاهش تنش‌های حرارتی مطرح گردید. با استفاده از مواد مدرج تابعی، امکان دستیابی به مزایای فنی و اقتصادی قابل توجهی در پوشش‌های سطحی و اجزائی که ساختار آن‌ها در طول ضخامت تغییر می‌کند، وجود دارد. امروزه مفهوم مواد مدرج تابعی یک ایده بسیار نوین و جدید است که نه تنها برای موادی که تحت

1 Functionally Graded Materials
2 Biotechnology

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: a.amiri@ub.ac.ir

3 Anisotropic



مرزی خاص به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار داده‌اند. همچنین مراجع [۱۹-۲۲]، اطلاعات مفیدی در زمینه انتقال حرارت در مسائل گوناگون که مورد توجه محققان می‌باشد، را ارائه می‌دهند.

در زمینه انتقال حرارت در کره‌های کامپوزیتی نیز معدود کارهایی وجود دارد. دینگ و همکاران [۲۳] حل ترموالاستیک^۳ یک کره متقارن ساخته شده از مواد مدرج تابعی را تحت بار حرارتی متقارن ارائه داده‌اند. آن‌ها با استفاده از حل عددی، تنش‌های شعاعی و زاویه‌ای را به ازای پارامترهای مسئله نمایش داده‌اند. دلوئی و نوروزی [۲۴] انتقال حرارت ناپایای کره کامپوزیتی را با اعمال شرایط مرزی کلی بر روی هندسه مسئله، مورد بررسی قرار دادند. همچنین، مهزب و جباری [۲۵] تنش‌های دو بعدی یک کره توخالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی را بررسی کردند. از سوی دیگر، راه حل تحلیلی یک زمینه جذاب برای مطالعه و پژوهش است که نتیجه آن دقیق‌تر و قابل اطمینان است [۲۶ و ۲۷].

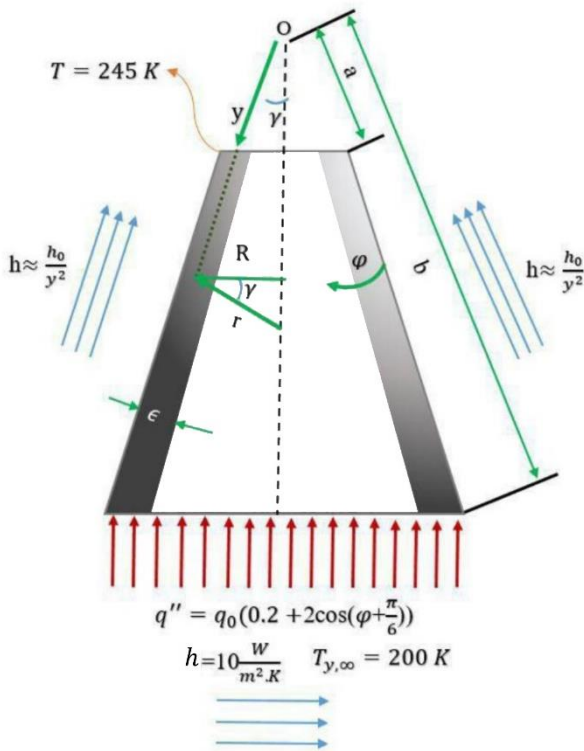
در این قسمت، نوبت به هندسه مقاله حاضر (مخروط) می‌رسد که به دلیل پیچیدگی هندسه مخروط (نسبت به هندسه صفحه، استوانه و کره)، کارهای بسیار کمی صورت گرفته است. ترابی و همکاران [۲۸] انقباض حرارتی یک پوسته مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی رو مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. در کار آن‌ها، خواص مواد به صورت تابع توانی فرض شده و پوسته مخروطی تحت بار ترکیبی حرارتی و الکتریکی قرار گرفته است. همچنین اکبری و همکاران [۲۹] انقباض حرارتی یک پوسته مخروطی ضخیم که در آن وابستگی دما به اجزای تشکیل در نظر گرفته شده است، را مورد مطالعه قرار دادند.

در تحقیق حاضر، انتقال حرارت یک مخروط ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شرایط مرزی خاص مورد بررسی قرار گرفته است. مسئله حاضر، انتقال حرارت هدایتی دائم دو بعدی بدون تولید انرژی داخلی در یک پوسته مخروطی به ضخامت کم می‌باشد. در این مقاله با استفاده از روش جدایی متغیرها مسئله به صورت تحلیلی حل شده است. پس از حل معادلات، شرایط مرزی بر روی معادلات به دست آمده اعمال شده و ضرایب ثابت مسئله به دست می‌آیند. به منظور درستی حل مسئله حاضر، نتایج حل تحلیلی با نتایج حل عددی مقایسه شده است. تغییرات توزیع دما برای مقادیر مختلف مسئله حاضر مورد بررسی قرار گرفته است. شایان ذکر است نوآوری اصلی

پیچیده است، زیرا معادله دیفرانسیل هدایت گرما شامل مشتقات متغیرهای مکانی است. اما در مقابل در مورد محیط‌های ایزوتروپ^۱، تحلیل به طور قابل توجهی ساده خواهد شد. تحقیقات انجام شده در زمینه انتقال حرارت با استفاده از دیدگاه‌های متفاوت تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی صورت گرفته است [۹-۷]. به طور خاص، مواد کامپوزیتی و مواد مدرج تابعی، بیشتر به صورت عددی صورت گرفته است [۱۰ و ۱۱] و سهم حل تحلیلی [۱۲ و ۱۳] در حل مسائلی از این دست کم است. در ادامه به تعدادی از حل‌های موجود اشاره شده است.

در رابطه با حل‌های عددی، آواجی [۱۴]، توزیع دما و توزیع تنش حرارتی در یک صفحه ساخته شده از مواد مدرج تابعی در حالت گذرا را به صورت عددی بررسی کرده است. توزیع دمای گذرا و تنش‌های حرارتی صفحه ساخته شده از مواد مدرج تابعی برای یک مدل آلومینا-نیکل مورد بررسی قرار گرفته است. ترابی و افشاری [۱۰] معادلات حاکم بر توزیع دما و تحلیل تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک دیسک دوار با ضخامت و خواص متغیر در راستای شعاعی استخراج کردند. آن‌ها خواص حرارتی ماده را به صورت تابع توانی در نظر گرفتند و تغییرات هدایت‌پذیری حرارتی در راستای شعاعی و وابستگی آن به سرعت زاویه‌ای دیسک را نیز در کار خود در نظر گرفتند. کیهانی و همکاران [۱۵] توزیع دمای یک استوانه دوبعدی را با استفاده از حل تحلیلی بدست آوردند. آن‌ها با استفاده از روش جدایی متغیرها^۲ مسئله انتقال حرارت را به صورت تحلیلی حل کرده و توزیع دمای استوانه را برای شار حرارتی مختلف نمایش دادند. لی و لای [۱۶] انتقال حرارت یک استوانه در حالت ناپایا را به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در کار خود، طول استوانه را نامحدود فرض کردند و توزیع دمای بی‌بعد شده استوانه را نسبت به شعاع استوانه نمایش دادند. حل تحلیلی انتقال حرارت دوبعدی در مختصات استوانه‌ای همسانگرد توسط بهادر و بار کوهن [۱۷] انجام شد. در حل آن‌ها، توزیع دمای استوانه به صورت توابع بسط داده و از آنجایی که استوانه به صورت توپر فرض شده است و دما در داخل استوانه به صورت محدود می‌باشد؛ ضریب تابع بسط نوع دوم برابر صفر بدست آمده است. حسینی و همکاران [۱۸]، مسئله انتقال حرارت یک‌بعدی در استوانه‌های مدرج تابعی را در شرایط

1 Isotropic
2 Separation of Variables



شکل ۱. هندسه مسئله و شرایط مرزی اعمال شده بر روی مخروط
Fig. 1. Problem geometry and boundary conditions imposed on cones

انرژی‌های وارد بر المان، معادله انرژی به صورت زیر خواهد بود:

$$-\frac{\partial(q_y dA_y)}{\partial y} dy - \frac{\partial(q_\phi dA_\phi)}{\partial \phi} d\phi - q_{conv} dA_r = \rho c_p \frac{dT}{dt} dV \quad (4)$$

که در آن ρ ، c_p و T ، به ترتیب، چگالی، گرمای ویژه و توزیع دمای مخروط می‌باشند.

انتقال حرارت جابجایی (q_{conv}) وارده بر المان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$q_{conv} = h(T - T_{r,\infty}) \quad (5)$$

که h ضریب انتقال حرارت جابجایی و $T_{r,\infty}$ دمای محیط هستند. در کاربرد علوم مهندسی، ضریب انتقال حرارت جابجایی ثابت نیست. ضریب انتقال حرارت h معمولاً به برخی از عوامل از جمله: هندسه، عدد رینولدز و در جریان‌های تراکم‌ناپذیر به عدد پرانتل بستگی دارد.

مقاله روی ارائه یک حل تحلیلی دقیق برای ساختار مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شرایط مرزی کلی است. با توجه به اطلاعات نویسندگان، تاکنون هیچ گونه حل تحلیلی برای انتقال حرارت مواد مدرج تابعی در هندسه مخروط ارائه نشده است.

۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی

در این قسمت به بیان معادله حاکم بر مسئله و شرایط مرزی اعمال شده بر مخروط پرداخته شده است. هندسه مخروط و شرایط مرزی اعمال شده بر هندسه مسئله در شکل ۱ نمایش داده شده است. با استفاده از یک المان از مخروط و موازنه انرژی‌های وارد بر المان، معادله انتقال حرارت مخروط به دست خواهد آمد. باید اشاره شود که دیواره داخلی پوسته مخروطی به صورت عایق در نظر گرفته شده است.

۱-۲- معادلات حاکم

مواد مدرج تابعی، موادی آزمایشگاهی هستند که با استفاده از روش‌های خاص مانند ریخته‌گری سانتریفیوژ ساخته می‌شوند. در این روش‌ها سعی می‌شود با توجه به تفاوت چگالی مواد تشکیل‌دهنده، یک توزیع چگالی متفاوت در جهت دلخواه ایجاد نمایند. در اکثر کارهای انجام شده این تغییر چگالی به صورت یک تابع توانی برازش می‌شود. شایان ذکر است که در اکثر کارها از توابع نمایی استفاده شده است. با توجه به مطالعات گذشته، ترکیب مواد مدرج تابعی ساخته شده از هرگونه مواد فلزی و سرامیکی را می‌توان به صورت توانی در نظر گرفت. هدایت‌پذیری حرارتی در جهت γ تابعی از γ بوده و به صورت توابع توانی زیر تعریف می‌شود:

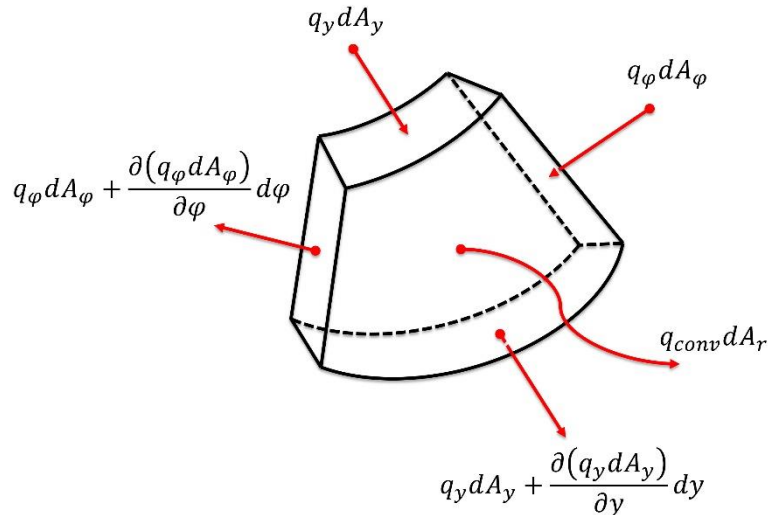
$$k_\gamma = k_1 \gamma^{-m} \quad (1)$$

$$k_\phi = k_2 \quad (2)$$

که در آن ضرایب k_1 ، k_2 و m همگی اعداد ثابت هستند و نسبت k_2 به k_1 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2} \quad (3)$$

در این مطالعه فرض شده است که مخروط در راستای ضخامت خود، دارای انتقال حرارت جابجایی (q_{conv}) است. بعد از ساده‌سازی



شکل ۲: موازنه انرژی‌های وارد بر المان مخروط
Fig. 2. Energy balance on the cone element

$$\theta(a, \varphi) = 245 \text{ K} \quad (8)$$

$$h\theta(b, \varphi) + k \frac{\partial \theta(b, \varphi)}{\partial y} = \quad (9)$$

$$q_0 \left(0.2 + 2 \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \right) + h\theta_{y, \infty}$$

که h و k به ترتیب، هدایت‌پذیری حرارتی و جابجایی و q_0 شار حرارتی هستند.

۳- حل تحلیلی

با ترکیب روابط (۱) و (۷) معادله دیفرانسیل جزئی زیر حاصل می‌شود:

$$\kappa y^{-m} \left(y \frac{\partial^2 \theta(y, \varphi)}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta(y, \varphi)}{\partial y} (-m+1) \right) - \quad (10)$$

$$\frac{h_0}{k_2 \epsilon y} \theta(y, \varphi) + \frac{1}{y \sin^2 \gamma} \frac{\partial^2 \theta(y, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

توزیع دمای مخروط را می‌توان با استفاده از روش جدایی متغیرها به صورت دو تابع زیر بیان کرد:

$$\theta(y, \varphi) = \mathcal{F}(y) \mathcal{G}(\varphi) \quad (11)$$

با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۱۰) داریم:

با توجه به کارهای قبلی انجام شده در این هندسه [۳۰]، ضریب انتقال حرارت تابعی از هندسه مسئله در نظر گرفته شده است. بنابراین، انتقال حرارت جابجایی در راستای ضخامت مخروط (q_{conv}) به صورت رابطه (۶) در نظر گرفته شده است:

$$q_{conv} = \frac{h_0}{y^2} (T - T_{r, \infty}) \quad (6)$$

شایان ذکر است، با توجه به این که انتقال حرارت دوبعدی برای مواد مدرج تابعی از نوع ارتوتروپیک در نظر گرفته می‌شود [۳۱] و [۳۲]، بنابراین تانسور هدایت‌پذیری در دستگاه مختصات برای این مواد یک ماتریس قطری است که تنها مقادیر k_y و k_ϕ در آن وجود دارد. معادلات و ماتریس‌های مربوطه در مرجع [۳۰] به طور کامل تشریح شده‌اند. نهایتاً، با استفاده از رابطه $\theta(y, \varphi) = T(y, \varphi) - T_{r, \infty}$ معادله انرژی در حالت پایا به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k_y y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \quad (7)$$

$$\frac{1}{y \sin^2 \gamma} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k_\phi \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) - \frac{h_0}{\partial y} \theta = 0$$

۲-۲- شرایط مرزی

برای تعیین توزیع دمای استوانه مدرج تابعی و به دست آوردن ضرایب ثابت حاصل از حل مسئله، شرایط مرزی حاکم بر مسئله را به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{F}(y) = \begin{cases} y^{\frac{m}{2}} \left(A_0 I_1 \left(\eta_0 y^{\frac{m}{2}} \right) + B_0 K_1 \left(\eta_0 y^{\frac{m}{2}} \right) \right) & n = 0 \\ y^{\frac{m}{2}} \left(c_n I_1 \left(\eta y^{\frac{m}{2}} \right) + d_n K_1 \left(\eta y^{\frac{m}{2}} \right) \right) & n \geq 1 \end{cases} \quad (\text{الف-۲۰})$$

که:

$$\eta = -\frac{2}{m} \sqrt{\frac{h_0 \sin^2 \gamma + \lambda_n^2 k_2 \epsilon}{k_1 \epsilon \sin^2 \gamma}}, \eta_0 = -\frac{2}{m} \sqrt{\frac{h_0}{k_1 \epsilon}} \quad (\text{ب-۲۰})$$

نهایتاً، توزیع دمای مسئله به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \theta(y, \varphi) = & y^{\frac{m}{2}} \left(A_0 I_1 \left(\eta_0 y^{\frac{m}{2}} \right) + B_0 K_1 \left(\eta_0 y^{\frac{m}{2}} \right) \right) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} y^{\frac{m}{2}} \left(A_n I_1 \left(\eta y^{\frac{m}{2}} \right) + B_n K_1 \left(\eta y^{\frac{m}{2}} \right) \right) \cos(\lambda_n \varphi) \quad (\text{۲۱}) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} y^{\frac{m}{2}} \left(C_n I_1 \left(\eta y^{\frac{m}{2}} \right) + D_n K_1 \left(\eta y^{\frac{m}{2}} \right) \right) \sin(\lambda_n \varphi) \end{aligned}$$

برای به دست آوردن ضرایب ثابت مساله، شرایط مرزی (معادله (۱۰)) بایستی بر روی توزیع دمای به دست آمده، اعمال شود:

$$\begin{aligned} & a^{\frac{m}{2}} \left(A_0 I_1 \left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}} \right) + B_0 K_1 \left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}} \right) \right) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n a^{\frac{m}{2}} I_1 \left(\eta a^{\frac{m}{2}} \right) + B_n a^{\frac{m}{2}} K_1 \left(\eta a^{\frac{m}{2}} \right) \right) \cos(\lambda_n \varphi) \quad (\text{الف-۲۲}) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n a^{\frac{m}{2}} I_1 \left(\eta a^{\frac{m}{2}} \right) + D_n a^{\frac{m}{2}} K_1 \left(\eta a^{\frac{m}{2}} \right) \right) \sin(\lambda_n \varphi) = 245 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_0 \mathcal{A}_n + B_0 \mathcal{B}_n + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathcal{X}_n + B_n \mathcal{Y}_n) \cos(\lambda_n \varphi) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \mathcal{X}_n + D_n \mathcal{Y}_n) \sin(\lambda_n \varphi) = \end{aligned} \quad (\text{ب-۲۲})$$

$$q_0 \left(0.2 + 2 \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \right) + h \theta_{y, \infty}$$

که در معادلات (۲۲)، \mathcal{X}_n و \mathcal{Y}_n ، به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\mathcal{A}_n = h b^{\frac{m}{2}} I_1 \left(\eta_0 b^{\frac{m}{2}} \right) + k \frac{m \eta_0 b^{m-1}}{2} I_0 \left(\eta_0 b^{\frac{m}{2}} \right) \quad (\text{الف-۲۳})$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \gamma \left(\kappa y^{-m} \left(y^2 \frac{\mathcal{F}''(y)}{\mathcal{F}(y)} + y(-m+1) \frac{\mathcal{F}'(y)}{\mathcal{F}(y)} \right) - \frac{h_0}{k_2 \epsilon} \right) = & \quad (۱۲) \\ -\frac{\mathcal{G}''(\varphi)}{\mathcal{G}(\varphi)} = \lambda^2 \end{aligned}$$

در معادله (۱۲)، λ مقدار ویژه معادله انتقال گرما است که با استفاده از شرایط مرزی در معادلات (۱۳) و (۱۴) تعیین می‌شود. در راستای φ ، شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}(2\pi) \quad (۱۳)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}(0)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathcal{G}(2\pi)}{\partial \varphi} \quad (۱۴)$$

پاسخ معادله (۱۲) در راستای φ ، به صورت زیر است:

$$\mathcal{G}(\varphi) = a_n \cos(\lambda_n \varphi) + b_n \sin(\lambda_n \varphi) \quad (۱۵)$$

با جایگزین کردن شرایط مرزی در معادله (۱۵)، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$a_n (\cos(2\pi\lambda_n) - 1) + b_n \sin(2\pi\lambda_n) = 0 \quad (\text{الف-۱۶})$$

$$a_n \sin(2\pi\lambda_n) - b_n (\cos(2\pi\lambda_n) - 1) = 0 \quad (\text{ب-۱۶})$$

شرط این که دستگاه فوق (معادلات (۱۶)) جواب غیر صفر داشته باشد، این است که دترمینان ضرایب آن صفر باشد:

$$(\cos(2\pi\lambda_n) - 1)^2 + \sin^2(2\pi\lambda_n) = 0 \quad (۱۷)$$

و از آنجا پس از حل و ساده‌سازی معادله (۱۷)، مقادیر ویژه به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\lambda_n = n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (۱۸)$$

اکنون، معادله (۱۲) در جهت y به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \sin^2 \gamma \left(\kappa y^{-m} \left(y^2 \mathcal{F}''(y) + y(-m+1) \mathcal{F}'(y) \right) - \right. \\ \left. \left(\frac{h_0}{k_2 \epsilon} + \frac{\lambda_n}{\sin^2 \gamma} \right) \mathcal{F}(y) \right) = 0 \end{aligned} \quad (۱۹)$$

جواب عمومی معادله (۱۹) به صورت زیر است:

$$C_n = \frac{\mathcal{Y}_n \frac{245}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\lambda_n \varphi) d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q_0 \left(2 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right)^+ \left(h\theta_{y,\infty} \right)}{\mathcal{X}_n a^{\frac{m}{2}} K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right) - \mathcal{Y}_n a^{\frac{m}{2}} I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)}$$

$$D_n = \frac{\mathcal{X}_n \frac{245}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\lambda_n \varphi) d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q_0 \left(2 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right)^+ \left(h\theta_{y,\infty} \right)}{\mathcal{X}_n a^{\frac{m}{2}} K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right) - \mathcal{Y}_n a^{\frac{m}{2}} I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)}$$

۴- نتایج و بحث

همانگونه که بیان گردید، مواد مدرج تابعی، مواد آزمایشگاهی هستند که با توجه به مکان بکارگیری، طراحی و ساخته می‌شوند. هدف از کار حاضر ارائه یک حل تحلیلی برای اینگونه مسائل است تا بتوان بر اساس آن توزیع دما را تعیین کرده و در یک فرایند معکوس نحوه توزیع چگالی و ساخت مواد را تعیین نمود. در تحقیق حاضر، انتقال حرارت در یک مخروط ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شرایط مرزی مشخص مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط مرزی به صورت نامتقارن بر روی هندسه مساله اعمال شده است. در $y = a$ ، دمای مخروط برابر ۲۴۵ درجه کلون است و در $y = b$ ، شار حرارتی $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$ اعمال شده است که مقدار $q_0 \left(0.2 + 2 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right)$ (شار تشعشی خورشید که در نزدیکی سطح زمین به اجسام وارد می‌شود، به طور متوسط برابر ۱۳۵۷ وات بر مترمربع فرض شده است)، در نظر گرفته شده است. در ابتدا به منظور صحت‌سنجی حل تحلیلی انجام شده در مقاله حاضر، نتایج حاصله از حل تحلیلی با نتایج حل عددی مقایسه شده است و بعد از اطمینان از صحت حل تحلیلی، به ارائه نتایج پرداخته شده است. در این بخش، تاثیر مقادیر m ، q_0 ، κ

$$B_n = hb^{\frac{m}{2}} K_1\left(\eta_0 b^{\frac{m}{2}}\right) + k \frac{m \eta_0 b^{m-1}}{2} K_0\left(\eta_0 b^{\frac{m}{2}}\right) \quad (ب-۲۳)$$

$$\mathcal{X}_n = hb^{\frac{m}{2}} I_1\left(\eta b^{\frac{m}{2}}\right) + k \frac{m \eta b^{m-1}}{2} I_0\left(\eta b^{\frac{m}{2}}\right) \quad (ج-۲۳)$$

$$\mathcal{Y}_n = hb^{\frac{m}{2}} K_1\left(\eta b^{\frac{m}{2}}\right) + k \frac{m \eta b^{m-1}}{2} K_0\left(\eta b^{\frac{m}{2}}\right) \quad (د-۲۳)$$

نهایتاً، ضرایب ثابت A_0 ، B_0 ، A_n ، B_n ، C_n و D_n به صورت

زیر محاسبه می‌شود:

$$A_0 = \frac{245 B_n - K_1\left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}}\right) \int_0^{2\pi} q_0 \left(2 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right)^+ \left(h\theta_{y,\infty} \right) d\varphi}{A_n K_1\left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}}\right) - B_n I_1\left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}}\right)} \quad (الف-۲۴)$$

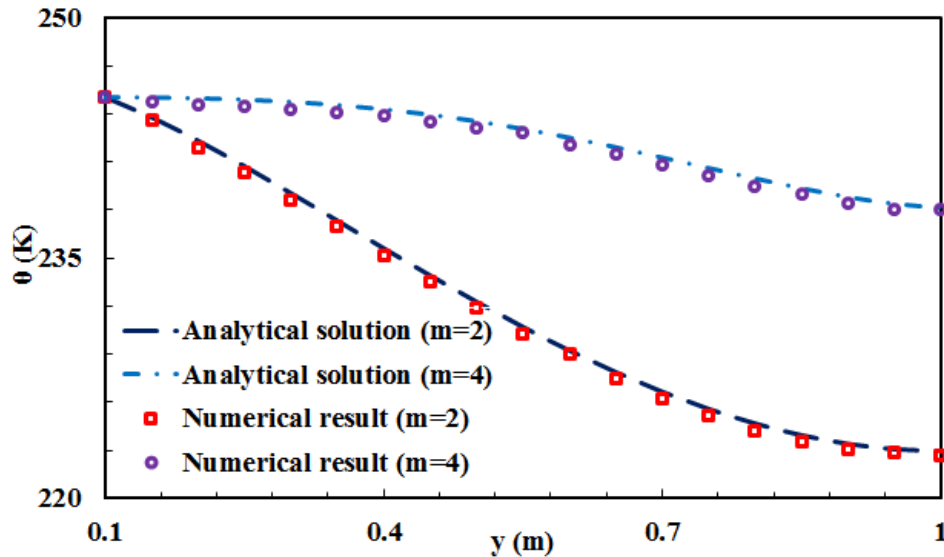
$$B_0 = \frac{245 A_n - I_1\left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}}\right) \int_0^{2\pi} q_0 \left(2 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right)^+ \left(h\theta_{y,\infty} \right) d\varphi}{A_n K_1\left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}}\right) - B_n I_1\left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}}\right)} \quad (ب-۲۴)$$

$$A_n = \frac{-\mathcal{Y}_n \frac{245}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\lambda_n \varphi) d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q_0 \left(2 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right)^+ \left(h\theta_{y,\infty} \right) \cos(\lambda_n \varphi) d\varphi \left(a^{\frac{m}{2}} K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right) \right)}{\mathcal{X}_n a^{\frac{m}{2}} K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right) - \mathcal{Y}_n a^{\frac{m}{2}} I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)} \quad (الف-۲۵)$$

$$B_n = \frac{\mathcal{X}_n \frac{245}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\lambda_n \varphi) d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q_0 \left(2 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right)^+ \left(h\theta_{y,\infty} \right) \cos(\lambda_n \varphi) d\varphi \left(a^{\frac{m}{2}} I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right) \right)}{\mathcal{X}_n a^{\frac{m}{2}} K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right) - \mathcal{Y}_n a^{\frac{m}{2}} I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)} \quad (ب-۲۵)$$

جدول ۱. استقلال از شبکه برای $m=2$ ، $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$ ، $h_0 = 2 \text{ W/K}$ و $\kappa = 1$
Table 1. Grid independency study

۱۰۰۸۰۰۰	۲۵۲۰۰۰	۶۳۰۰۰	۱۵۷۵۰	تعداد سلول
۲۲۳/۲	۲۲۲/۹	۲۱۸/۹	۲۱۲/۸	مقدار دما در پایه مخروط (K)
۰/۱۳	۰/۲۷	۲/۰۵	۴/۷۸	خطا (درصد)



شکل ۳. مقایسه حل تحلیلی و عددی در $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$ ، $h_0 = 2 \text{ W/K}$ و $\kappa = 1$ برای مقادیر مختلف

Fig. 3. Comparison of analytical solution and numerical results at $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$, $h_0 = 2 \text{ W/K}$ and $\kappa = 1$ for different values of m

از آنجایی که افزایش تعداد سلول‌های محاسباتی، تنها هزینه و زمان محاسباتی را افزایش می‌دهد و تاثیری بر کیفیت نتایج ندارد، بنابراین به دلیل کاهش زمان محاسباتی از تعداد سلول ۲۵۲۰۰۰ استفاده شده است. در جدول ۱ مقدار دما در پایه مخروط و درصد خطا به ازای چهار مش مذکور نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود اختلاف نتایج بین دو حالت ۲۵۲۰۰۰ و ۱۰۰۸۰۰۰ سلول تقریباً ناچیز و تغییرات بسیار جزئی و کمتر از ۱ درصد است. به منظور کاهش هزینه محاسباتی تعداد سلول ۲۵۲۰۰۰ انتخاب شده است.

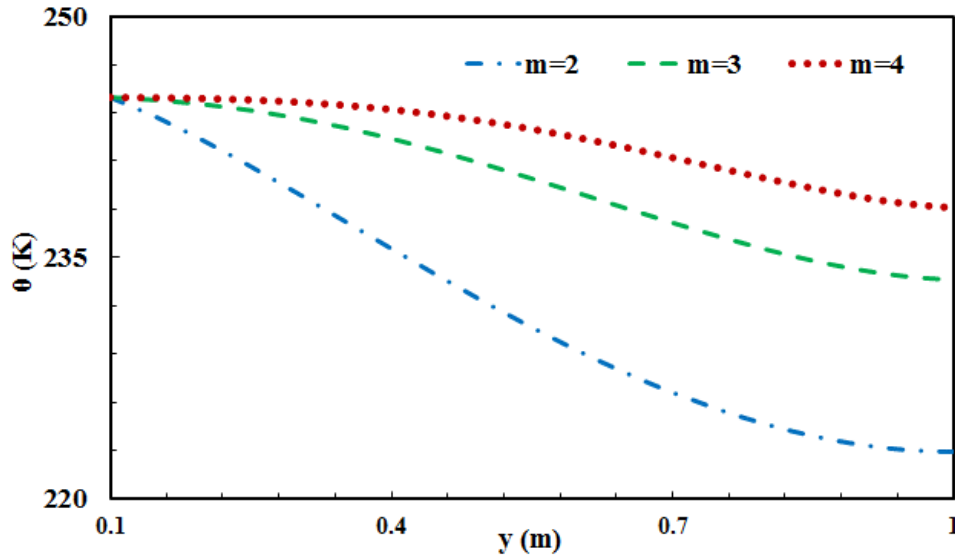
می‌توان نتایج حل تحلیلی مطالعه حاضر را با حل عددی از لحاظ کمی بررسی و صحت تحقیق حاضر را مورد بررسی قرار داد. برای قسمت حل عددی از روش اجزاء محدود^۱ استفاده شده است تا بتوان حل عددی را با حل تحلیلی بررسی نمود و صحت حل حاضر را بررسی کرد. در این قسمت برای مقایسه حل تحلیلی و عددی پارامترهای مسئله حاضر به صورت، $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$ ، $h_0 = 2 \text{ W/K}$ و $\kappa = 1$ در

، h_0 بر روی توزیع دمای مخروط بررسی شده است.

۴-۱- استقلال از شبکه و مقایسه حل تحلیلی و عددی

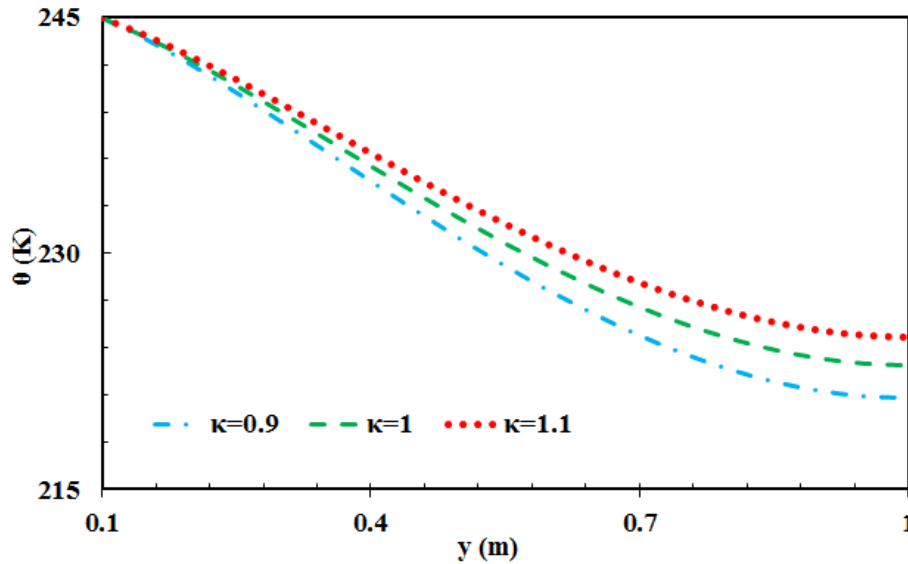
برای حل معادلات انتقال حرارت ابتدا هندسه مورد نظر شبکه‌بندی شده است تا حل عددی در این شبکه‌ها ایجاد شود. به منظور دسترسی به بهینه‌ترین اندازه و تعداد شبکه، استقلال از شبکه برای مدل‌های محاسباتی بررسی می‌گردد. هدف از استقلال از شبکه، نشان دادن مستقل بودن نتایج محاسبات به تعداد سلول به کار رفته و همچنین کاستن از هزینه محاسباتی بالا است. در جدول ۱ مشاهده می‌شود، به منظور بررسی استقلال از شبکه در محدوده محاسباتی، مقدار دما در پایه مخروط به ازای چهار نوع مش به تعداد سلول‌های ۱۵۷۵۰، ۶۳۰۰۰، ۲۵۲۰۰۰ و ۱۰۰۸۰۰۰ استفاده شده است که توزیع دما در دو حالت ۲۵۲۰۰۰ و ۱۰۰۸۰۰۰ سلول، تغییر چندانی ندارد. در این بخش، $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$ ، $h_0 = 2 \text{ W/K}$ ، $\kappa = 1$ و $m=2$ است.

1 Finite Element Method (FEM)



شکل ۴. توزیع دما در جهت y برای مقادیر مختلف در $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$ ، $h_0 = 2 \text{ W/K}$ و $\kappa = 1$

Fig. 4. Temperature distribution respect to y for different values of m and at $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$, $h_0 = 2 \text{ W/K}$ and $\kappa = 1$



شکل ۵. توزیع دما در جهت y برای مقادیر مختلف در $m = 2$ ، $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$ و $h_0 = 2 \text{ W/K}$

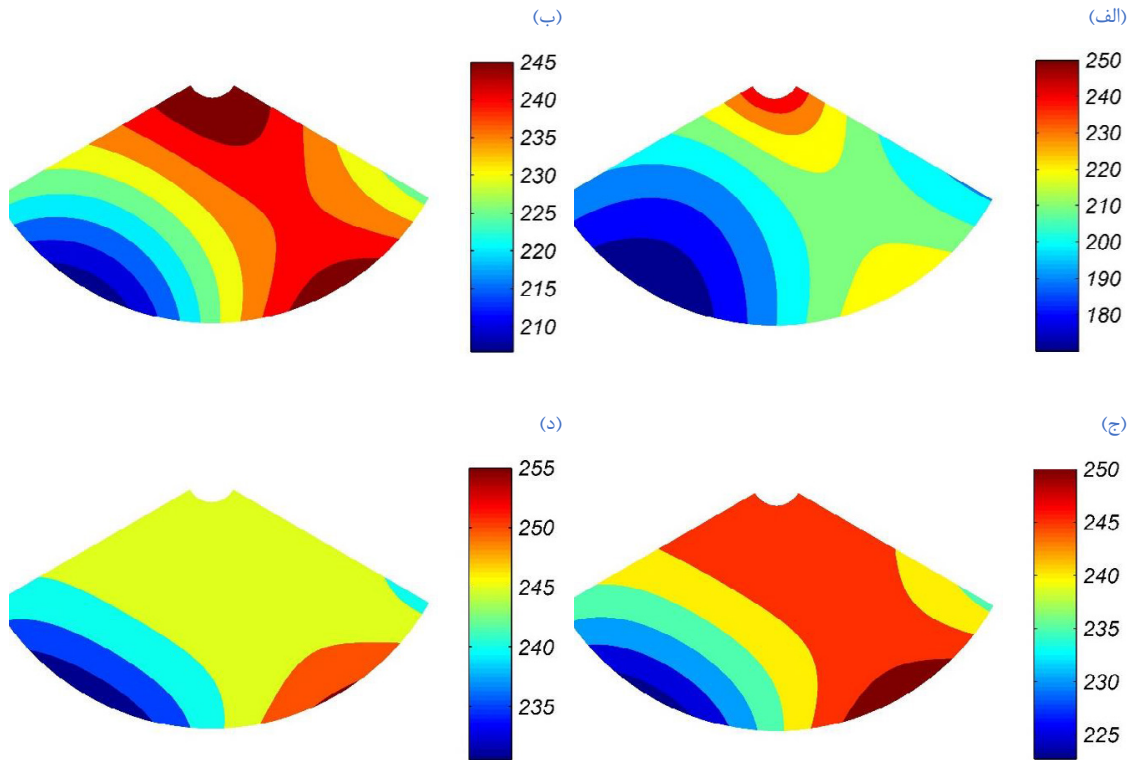
Fig. 5. Temperature distribution versus y for different values of κ and at $m = 2$, $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$ and $h_0 = 2 \text{ W/K}$

است. همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، تغییر در جنس مواد، توزیع دمای مخروط را تغییر می‌دهد. با توجه به روابط (۱) و (۲)، مقدار m و κ ، دو عامل تاثیرگذار بر روی جنس مواد می‌باشند. در شکل ۴ و شکل ۵ با افزایش مقدار m و κ ، توزیع دمای مخروط افزایش پیدا می‌کند. در شکل ۴، با افزایش مقدار m مقدار هدایت پذیری حرارتی در راستای y افزایش پیدا کرده و باعث می‌شود انتقال حرارت با سرعت بیشتری صورت گیرد و این امر باعث می‌شود اختلاف دمای بین دو نقطه در راستای y به یکدیگر نزدیک شود. به همین خاطر

نظر گرفته شده است و نمودارها برای مقادیر مختلف m رسم شده است. در شکل ۳ نتایج به دست آمده برای توزیع دما در حل تحلیلی با نتایج عددی مقاله حاضر برای $m = 2$ و $m = 4$ مقایسه شده است. همان‌طور که در شکل ۳ دیده می‌شود نتایج حل تحلیلی تطابق خوبی با نتایج عددی دارد.

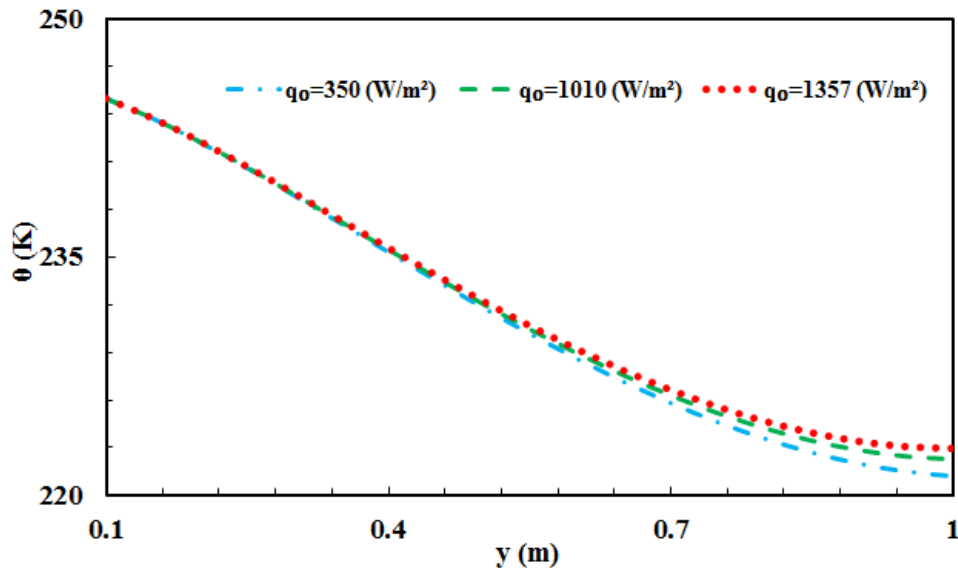
۴-۲- نتایج حل تحلیلی

در شکل ۴ تاثیر تغییر m بر توزیع دمای مخروط بررسی شده



شکل ۶. کانتور توزیع دما در جهت y و φ در $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$ ، $\kappa = 1$ و $h_0 = 2 \text{ W/K}$ و (الف) $m = 1$ ، (ب) $m = 2$ ، (ج) $m = 3$ ، (د) $m = 4$

Fig. 6. Contours of temperature distribution in y and φ directions at $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$, $\kappa = 1$, $h_0 = 2 \text{ W/K}$ and (a) $m = 1$, (b) $m = 2$, (c) $m = 3$, and (d) $m = 4$

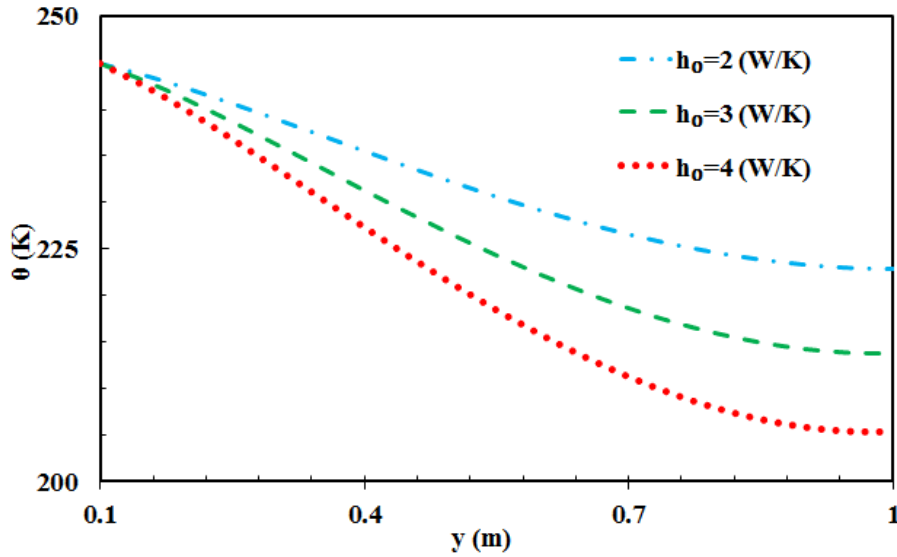


شکل ۷. توزیع دما در جهت y برای مقادیر مختلف در $m = 2$ و $h_0 = 2 \text{ W/K}$ ، $\kappa = 1$

Fig. 7. Temperature distribution versus y for different values of q_0 at $m = 2$, $\kappa = 1$ and $h_0 = 2 \text{ W/K}$.

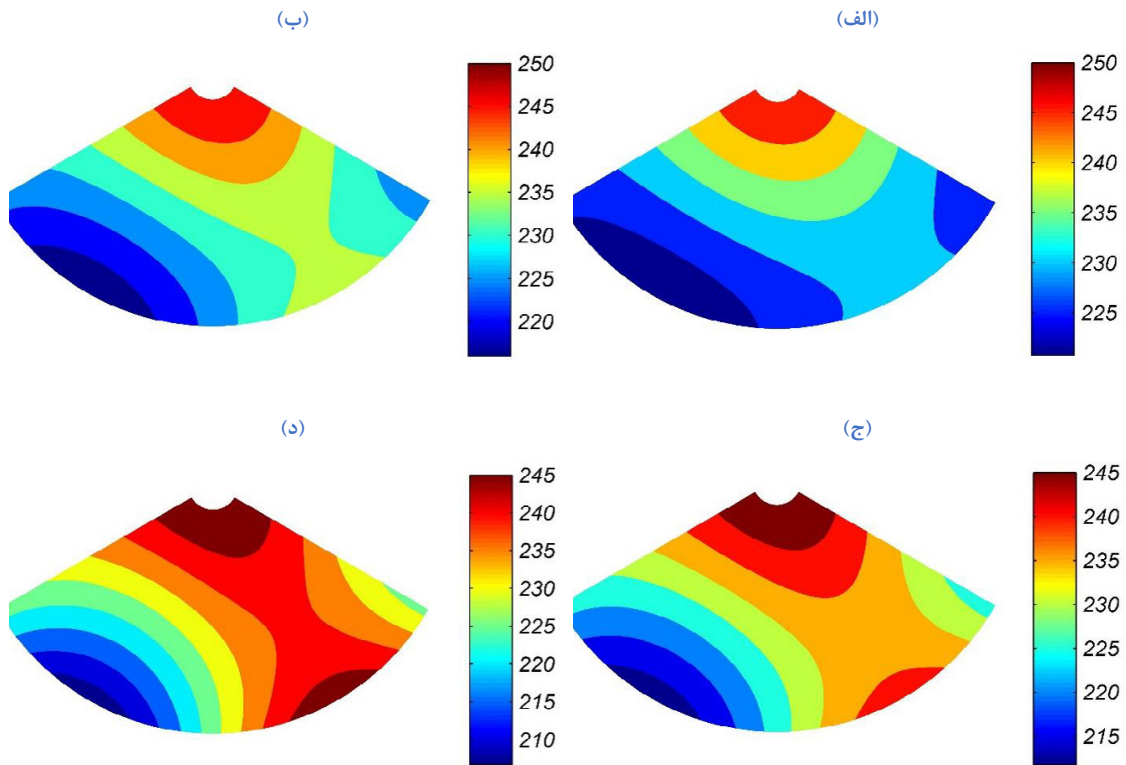
افزایش مقدار κ ، هدایت‌پذیری حرارتی افزایش پیدا کرده و سرعت انتقال حرارت افزایش پیدا می‌کند و مطابق شکل ۴ باعث افزایش دما

با افزایش مقدار m مقدار دما در پایه مخروط افزایش پیدا کرده و به دما در قسمت قاعده بالای مخروط نزدیک می‌شود. در شکل ۵ نیز با



شکل ۸. توزیع دما در جهت y برای مقادیر مختلف در $m=2$ و $\kappa=1$ ، $q_0=1357 \text{ W/m}^2$

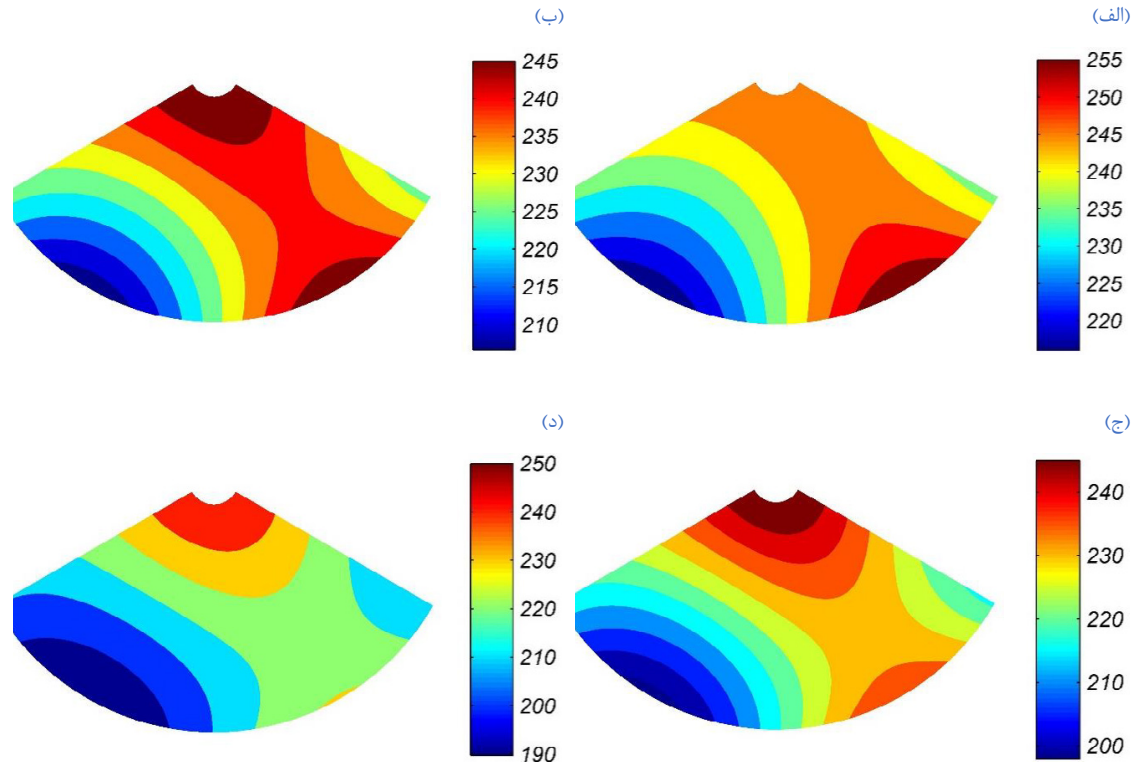
Fig. 8. Temperature distribution versus y for different values of h_0 at $m=2$, $\kappa=1$ and $q_0=1357 \text{ W/m}^2$



شکل ۹. کانتور توزیع دما در جهت y و φ در $h_0=2 \text{ W/K}$ و $\kappa=1$ و $q_0=1357 \text{ W/m}^2$ و (الف) $q_0=350 \text{ W/m}^2$ و (ب) $q_0=700 \text{ W/m}^2$ و (ج) $q_0=1010 \text{ W/m}^2$ و (د) $q_0=1357 \text{ W/m}^2$

Fig. 9. Contours of temperature distribution in y and φ directions at $m=2$, $\kappa=1$, $h_0=2 \text{ W/K}$ and (a) $q_0=350 \text{ W/m}^2$, (b) $q_0=700 \text{ W/m}^2$, (c) $q_0=1010 \text{ W/m}^2$, and (d) $q_0=1357 \text{ W/m}^2$

می‌شود. با افزایش مقدار m و κ ، هدایت‌پذیری حرارتی، به ترتیب به میزان حدوداً ۸ و ۲ درصد افزایش یافته است. شکل ۶ نیز کانتورهای



شکل ۱۰. کانتور توزیع دما در جهت y و φ در $m = 2$ و $\kappa = 1$ ، $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$ و (الف) $h_0 = 1 \text{ W/K}$ ، (ب) $h_0 = 2 \text{ W/K}$ ، (ج) $h_0 = 3 \text{ W/K}$ ، (د) $h_0 = 4 \text{ W/K}$

Fig. 10. Contours of temperature distribution in y and φ directions at $m = 2$, $q_0 = 1357 \text{ W/m}^2$, $\kappa = 1$ and (a) $h_0 = 1 \text{ W/K}$, (b) $h_0 = 2 \text{ W/K}$, (c) $h_0 = 3 \text{ W/K}$, and (d) $h_0 = 4 \text{ W/K}$

تغییرات مقدار q و h ، بر روی کانتور توزیع دمای استوانه در جهت φ و r را نشان می‌دهند.

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، انتقال حرارت یک مخروط ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شرایط مرزی مشخص به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله با استفاده از روش جدایی متغیرها یک حل دقیق برای هندسه پیچیده مساله ارائه شده است. نوآوری مسئله حاضر، حل تحلیلی برای توزیع دمای دائم دوبعدی، مخروط ساخته شده از مواد مدرج تابعی می‌باشد. در مطالعه حاضر، توزیع دمای مخروط نسبت به پارامترهای تأثیرگذار مورد بررسی قرار گرفته است. با بررسی این پارامترها روی توزیع دمای مخروط مشخص گردید که:

-تغییر در جنس مواد، توزیع دمای مخروط را تغییر می‌دهد. با توجه به روابط (۱) و (۲)، مقدار m و κ ، دو عامل تأثیر گذار بر روی

توزیع دمای مخروط در جهت‌های y و φ را برای مقادیر مختلف m نشان می‌دهد.

همچنین دو پارامتر تأثیرگذار بر توزیع دمای مخروط، یعنی مقدار q (شار حرارتی اعمال شده بر پایه مخروط) و مقدار h مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همانطور که در شکل‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌شود با تغییر مقدار q و h ، توزیع دمای مخروط تغییر می‌کند. در شکل ۷ با افزایش مقدار q ، توزیع دمای مخروط افزایش می‌یابد؛ در واقع افزایش شار حرارتی در پایه مخروط موجب افزایش دمای مخروط در این ناحیه می‌شود. بالعکس، در شکل ۸ با افزایش مقدار h ، توزیع دمای مخروط کاهش می‌یابد که افزایش مقدار h ، میزان خنک‌کاری مخروط را افزایش داده و به همین خاطر باعث کاهش توزیع دمای مخروط می‌شود. این میزان از خنک‌کاری با افزایش مقدار h ، حدوداً ۹ درصد می‌باشد. با مقایسه شکل‌های ۷ و ۸، می‌توان نتیجه گرفت که تغییرات مقدار h ، تأثیری بیشتری را نسبت به تغییرات مقدار q ، بر روی توزیع دمای مخروط دارد. شکل‌های ۹ و ۱۰ به ترتیب تأثیر

هدایت پذیری حرارتی ($\text{kgms}^{-2}\text{K}^{-1}$)	k
مقادیر ویژه برای مرتبه n	λ_n
نسبت ضرایب هدایت حرارتی در راستای φ و γ	κ
جهت زاویه‌ای مخروط در دستگاه مختصات مخروط	φ

مراجع

- [1] B. Yildirim, S. Dag, F. Erdogan, Three dimensional fracture analysis of FGM coatings under thermomechanical loading, International journal of Fracture, 132(4) (2005) 371-397.
- [2] V. Birman, T. Keil, S. Hosder, Functionally graded materials in engineering, in: Structural interfaces and attachments in biology, Springer, 2013, pp. 19-41.
- [3] F. Watari, A. Yokoyama, M. Omori, T. Hirai, H. Kondo, M. Uo, T. Kawasaki, Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for biomedical application, Composites Science and Technology, 64(6) (2004) 893-908.
- [4] W. Pompe, H. Worch, M. Epple, W. Friess, M. Gelinsky, P. Greil, U. Hempel, D. Scharnweber, K. Schulte, Functionally graded materials for biomedical applications, Materials Science and Engineering: A, 362(1-2) (2003) 40-60.
- [5] Y. Miyamoto, W. Kaysser, B. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford, Functionally graded materials: design, processing and applications, Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] R.M. Mahamood, E.T. Akinlabi, Types of functionally graded materials and their areas of application, Functionally graded materials, Springer2017, pp. 9-21
- [7] S. Karimnejad, A.A. Delouei, M. Nazari, M. Shahmardan, M. Rashidi, S. Wongwises, Immersed boundary—thermal lattice Boltzmann method for the moving simulation of non-isothermal elliptical particles, Journal of Thermal Analysis and Calorimetry 138(6) (2019) 4003-4017
- [8] W. Ge, C. Zhao, B. Wang, Thermal radiation and conduction in functionally graded thermal barrier coatings. Part II: Experimental thermal conductivities and

جنس مواد می‌باشند. با افزایش مقدار m و κ ، هدایت‌پذیری حرارتی افزایش و به تبع آن سرعت انتقال حرارت افزایش و در نهایت توزیع دمای مخروط افزایش پیدا می‌کند.

-یکی از عوامل تاثیرگذار بر روی انتقال حرارت مخروط، شار حرارتی q است. با افزایش مقدار q ، توزیع دمای مخروط افزایش می‌یابد. در واقع افزایش شار حرارتی در پایه مخروط موجب افزایش دمای مخروط در این ناحیه می‌شود.

-با افزایش مقدار h ، توزیع دمای مخروط کاهش می‌یابد. افزایش مقدار h ، میزان خنک‌کاری مخروط را افزایش داده و به همین خاطر باعث کاهش توزیع دمای مخروط می‌شود.

حل ارائه شده قابل تعمیم بوده و نتایج حاصل از آن می‌تواند در مرحله پیش‌ساخت لمینیت‌های مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی کمک کند. همچنین نتایج ناشی از این حل تحلیلی می‌تواند برای صحت‌سنجی مطالعات عددی پیچیده‌تر مفید باشد. علاوه بر این حل دقیق ارائه شده می‌تواند به فهم بهتر مکانیزم‌های انتقال حرارت در مواد مدرج تابعی با هندسه خاص مخروط کمک نماید.

فهرست علائم

a	فاصله نوک مخروط تا قاعده بالا (m)
b	فاصله نوک مخروط تا پایه مخروط (m)
A_n, B_n, C_n, D_n	ضرایب ثابت مرتبه n
c_p	ظرفیت گرمایی ویژه ($\text{m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1}$)
\mathcal{F}	تابع وابسته از γ
\mathcal{G}	تابع وابسته از φ
h	ضریب هدایت جابجایی ($\text{kgm}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1}$)
k_γ, k_φ	هدایت پذیری حرارتی در راستای γ و φ ($\text{kgms}^{-2}\text{K}^{-1}$)
m	ضریب ثابت مواد
q	شار حرارتی (kgs^{-2})
γ	جهت فاصله نوک تا پایه مخروط در دستگاه مختصات مخروط
T	توزیع دما (K)
h	ضریب هدایت جابجایی ($\text{kgs}^{-2}\text{K}^{-1}$)

علائم یونانی

- NEMS, and Electronic Systems collocated with the ASME 2005 Heat Transfer Summer Conference, American Society of Mechanical Engineers, 2005, pp. 245-252.
- [18] S.M. Hosseini, M. Akhlaghi, M. Shakeri, Transient heat conduction in functionally graded thick hollow cylinders by analytical method, *Heat and Mass Transfer*, 43(7) (2007) 669-675.
- [19] M. Kayhani, M. Norouzi, A.A. Delouei, A general analytical solution for heat conduction in cylindrical multilayer composite laminates, *International Journal of Thermal Sciences*, 52 (2012) 73-82.
- [20] A.A. Delouei, M. Kayhani, M. Norouzi, Exact analytical solution of unsteady axi-symmetric conductive heat transfer in cylindrical orthotropic composite laminates, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(15-16) (2012) 4427-4436.
- [21] M. Norouzi, H. Rahmani, A.K. Birjandi, A.A. Joneidi, A general exact analytical solution for anisotropic non-axisymmetric heat conduction in composite cylindrical shells, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 93 (2016) 41-56.
- [22] H. Wang, C. Liu, Analytical solution of two-dimensional transient heat conduction in fiber-reinforced cylindrical composites, *International Journal of Thermal Sciences*, 69 (2013) 43-52.
- [23] H. Ding, H. Wang, W. Chen, Dynamic responses of a functionally graded piezoelectric hollow sphere for spherically symmetric problems, *International journal of mechanical sciences*, 45(6-7) (2003) 1029-1051.
- [24] A.A. Delouei, M. Norouzi, Exact analytical solution for unsteady heat conduction in fiber-reinforced spherical composites under the general boundary conditions, *Journal of Heat Transfer*, 137(10) (2015) 101701.
- [25] A.H. Mohazzab, M. Jabbari, Two-dimensional stresses in a hollow FG Sphere with heat source, in: *Advanced Materials Research*, Trans Tech Publ, 2011, pp. 700-705.
- [26] M. Norouzi, A. Emamian, M. Davoodi, An analytical and experimental study on dynamics of a circulating Boger drop translating through Newtonian fluids at inertia regime, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 267 heat transfer modeling, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 134 (2019) 166-174.
- [9] S. Karimnejad, A.A. Delouei, M. Nazari, M. Shahmardan, A. Mohamad, Sedimentation of elliptical particles using Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method: A complementary repulsive force model, *Journal of Molecular Liquids*, 262 (2018) 180-193.
- [10] K. Torabi, H. Afshari, Thermo-Mechanical Stress Analysis in a Rotating Radially Graded FG-Disc with Non-Uniform Thickness, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering* 50(1) (2018) 33-46
- [11] C. Nie, B. Yu, Inversing heat flux boundary conditions based on precise integration FEM without iteration and estimation of thermal stress in FGMs, *International Journal of Thermal Sciences*, 140 (2019) 201-224.
- [12] A.A. Delouei, A. Emamian, S. Karimnejad, H. Sajjadi, A. Tarokh, On 2D asymmetric heat conduction in functionally graded cylindrical segments: A general exact solution, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 143 (2019) 118515.
- [13] A.A. Delouei, A. Emamian, S. Karimnejad, H. Sajjadi, A closed-form solution for axisymmetric conduction in a finite functionally graded cylinder, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 108 (2019) 104280.
- [14] H. Awaji, Temperature and stress distributions in a plate of functionally graded materials, in: *Fourth international congress on thermal stresses*, 2001, pp. 8-11.
- [15] M. Kayhani, M. Shariati, M. Nourozi, M.K. Demneh, Exact solution of conductive heat transfer in cylindrical composite laminate, *Heat and mass transfer*, 46(1) (2009) 83.
- [16] M. Li, A.C. Lai, Analytical solution to heat conduction in finite hollow composite cylinders with a general boundary condition, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 60 (2013) 549-556.
- [17] R. Bahadur, A. Bar-Cohen, Orthotropic thermal conductivity effect on cylindrical pin fin heat transfer, in: *ASME 2005 Pacific Rim Technical Conference and Exhibition on Integration and Packaging of MEMS,*

- of temperature-dependent FGM conical shells with arbitrary edge supports, *Acta Mechanica*, 226(3) (2015) 897-915.
- [30] M. Norouzi, H. Rahmani, On exact solutions for anisotropic heat conduction in composite conical shells, *International Journal of Thermal Sciences*, 94 (2015) 110-125.
- [31] U. Grigull, H. Sandner, *Heat conduction*, (1984) .
- [32] J. Ashton, J.C. Halpin, P.H. Petit, *Primer on composite materials: analysis*, Technomic Publishing Company 1969.
- (2019) 1-13.
- [27] M. Davoodi, S. Lerouge, M. Norouzi, R. Poole, Secondary flows due to finite aspect ratio in inertialess viscoelastic Taylor–Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 857 (2018) 823-850.
- [28] J. Torabi, Y. Kiani, M. Eslami, Linear thermal buckling analysis of truncated hybrid FGM conical shells, *Composites Part B: Engineering*, 50 (2013) 265-272.
- [29] M. Akbari, Y. Kiani, M. Eslami, Thermal buckling

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Emamian, A. Amiri Delouei, S. Karimnejad, H. Sajadi, *Analytical solution of heat transfer in a cone made of functionally graded materials*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 53(Special Issue 1) (2021) 539-552.

DOI: 10.22060/mej.2019.16288.6320

