Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 1) (2021) 133-136
DOI: 10.22060/mej.2019.16288.6320

Analytical Solution of Heat Transfer in a Cone Made of Functionally Graded Material

A. Emamian[1], A. Amiri Delouei[2*] , S. Karimnejad[1], H. Sajadi[2]

[1] Mechanical Engineering Department, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.
[2] Faculty of Engineering, University of Bojnord, Bojnord, Iran.

ABSTRACT: In the current study, the problem of two-dimensional steady-state heat conduction in a truncated hollow cone made of functionally graded materials is referred and an exact analytical solution is presented. In the present study, the properties of a material are modified in accordance with a power function. The thermal boundary conditions are also assumed to be non-homogeneous. The separation of variable method is implemented to acquire the exact steady-state temperature distribution. The obtained solution is adequately verified using numerical data. To further demonstrate the ability of the solution, an illustrative case that is exposed to a combination of boundary conditions is studied. In particular, the influences of effective parameters on the temperature distribution are investigated for the current geometry. The outcome of this study would be helpful to shed light on the process of designing and optimizing relatively complex geometries. Also, considering the analyticity of the present solution, the results of this study can be useful for a better understanding of the heat transfer mechanisms of functionally graded materials. In the present case, increasing the amount of m and κ, the thermal conductivity increased by about 8 and 2 percent respectively, which would increase the distribution of cone temperature.

Review History:

Received: 2019-05-06
Revised: 2019-09-28
Accepted: 2019-11-05
Available Online: 2019-11-13

Keywords:

Functionally graded materials
Heat transfer
Exact solution
Cone
Separation of variable method

1-INTRODUCTION

Functionally Graded Material (FGM) has grown in popularity due to their widespread applications in different fields. The foremost feature of such material is their high thermal-resistance [1]. Consequently, it is of great importance to study them in terms of thermal behavior to be able to hire them for practical usages. There are different methods that have been employed to study the temperature distribution (θ) of FGMs. Out many, analytical solutions have shown robust and solid outcomes regarding these problems. So far, rather simple geometries like spherical and cylindrical shells have been studied widely [2, 3], while more complicated ones like truncated cones have not been studied. Thus, in this study, the problem of two-dimensional (2D) heat conduction on a truncated conical shell which is made of FGM whose material properties vary in accordance with a power function is analytically investigated using Separation Of Variable (SOV) method. After validating the obtained exact solution, some parametric studies using a practical example are considered.

2-METHODOLOGY

In this section, the governing equations along with employed boundary conditions are noted. The geometry of the cone and imposed boundary conditions are illustrated in Fig. 1. It must be noted that the internal wall of the cone is considered to be insulated and there is convection current through its thickness. Due to the fact, that FGMs' features are required to vary in different directions, its density, for example, has to change according to a function. Mostly, a power-law function is hired to fulfill such an important matter. Heat conductivity (k) is defined through Eqs. (1)-(3) with k_1، k_2 and m being constant values. Moreover, since 2D heat transfer (y and φ) is considered to be orthotropic, there are only the values of k_y and k_{φ} [4].

$$k_y = k_1 y^{-m} \tag{1}$$

$$k_{\varphi} = k_2 \tag{2}$$

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2} \tag{3}$$

The steady-state equation of energy after some simplifications and using the assumed heat conductivity distribution along with the relation of $\theta(y,\varphi) = T(y,\varphi) - T_{r,\infty}$ can be written as in Eq. (4).

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y y \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + \frac{1}{y \sin^2 \gamma}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(k_{\varphi}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\right) - \frac{h_0}{\delta y}\theta = 0 \tag{4}$$

here h is the coefficient of convection.

The considered boundary conditions with regard to the stated notation in Fig. 1 are as follows:

$$\theta(a,\varphi) = 245\,\mathrm{K} \tag{5}$$

*Corresponding author's email: a.amiri@ub.ac.ir

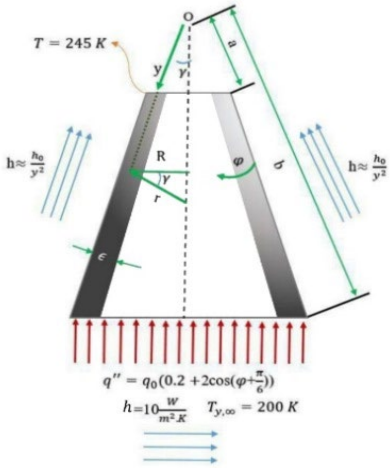


Fig. 1. Problem geometry and boundary conditions imposed on cones

$$h\theta(b,\varphi)+k\frac{\partial\theta(b,\varphi)}{\partial y}=q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty} \tag{6}$$

q_0 is heat flux. The exact analytical solution can be achieved as:

$$\kappa y^{-m}\left(y\frac{\partial^2\theta(y,\varphi)}{\partial y^2}+\frac{\partial\theta(y,\varphi)}{\partial y}(-m+1)\right)-\frac{h_0}{k_2\grave{o}y}\theta(y,\varphi)+\frac{1}{y\sin^2\gamma}\frac{\partial^2\theta(y,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0 \tag{7}$$

Finally, heat distribution is as:

$$\theta(y,\varphi)=y^{\frac{m}{2}}\left(A_0I_1\left(\eta_0y^{\frac{m}{2}}\right)+B_0K_1\left(\eta_0y^{\frac{m}{2}}\right)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}y^{\frac{m}{2}}\left(A_nI_1\left(\eta y^{\frac{m}{2}}\right)+B_nK_1\left(\eta y^{\frac{m}{2}}\right)\right)\cos(\lambda_n\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}y^{\frac{m}{2}}\left(C_nI_1\left(\eta y^{\frac{m}{2}}\right)+D_nK_1\left(\eta y^{\frac{m}{2}}\right)\right)\sin(\lambda_n\varphi) \tag{8}$$

The values of η, η_0 and eigenvalues can be determined as:

$$\eta=-\frac{2}{m}\sqrt{\frac{h_0\sin^2\gamma+\lambda_n{}^2k_2\grave{o}}{k_1\grave{o}\sin^2\gamma}},\eta_0=-\frac{2}{m}\sqrt{\frac{h_0}{k_1\grave{o}}},\quad \lambda_n=n\qquad n=0,1,2,\ldots \tag{9}$$

The constant coefficients are as follows:

$$A_0=-\frac{245\mathcal{B}_n-K_1\left(\eta_0a^{\frac{m}{2}}\right)\int_0^{2\pi}\left(q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty}\right)d\varphi}{\mathcal{A}_nK_1\left(\eta_0a^{\frac{m}{2}}\right)-\mathcal{B}_nI_1\left(\eta_0a^{\frac{m}{2}}\right)} \tag{10}$$

$$B_0=\frac{245\mathcal{A}_n-I_1\left(\eta_0a^{\frac{m}{2}}\right)\int_0^{2\pi}\left(q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty}\right)d\varphi}{\mathcal{A}_nK_1\left(\eta_0a^{\frac{m}{2}}\right)-\mathcal{B}_nI_1\left(\eta_0a^{\frac{m}{2}}\right)} \tag{11}$$

$$A_n=\frac{-\mathcal{Y}_n\frac{245}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\lambda_n\varphi)d\varphi-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty}\right)\cos(\lambda_n\varphi)d\varphi\left(a^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)\right)}{\mathcal{X}_na^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)-\mathcal{Y}_na^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)} \tag{12}$$

$$B_n=\frac{\mathcal{X}_n\frac{245}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\lambda_n\varphi)d\varphi-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty}\right)\cos(\lambda_n\varphi)d\varphi\left(a^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)\right)}{\mathcal{X}_na^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)-\mathcal{Y}_na^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)} \tag{13}$$

$$C_n=-\frac{\mathcal{Y}_n\frac{245}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\lambda_n\varphi)d\varphi-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty}\right)\cos(\lambda_n\varphi)d\varphi\left(a^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)\right)}{\mathcal{X}_na^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)-\mathcal{Y}_na^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)} \tag{14}$$

$$D_n=\frac{\mathcal{X}_n\frac{245}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\lambda_n\varphi)d\varphi-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty}\right)\cos(\lambda_n\varphi)d\varphi\left(a^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)\right)}{\mathcal{X}_na^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)-\mathcal{Y}_na^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)} \tag{15}$$

Also, $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{X}_n$, and $\mathcal{Y}_n$ are as

$$\mathcal{A}_n=hb^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta_0b^{\frac{m}{2}}\right)+k\frac{m\eta_0b^{m-1}}{2}I_0\left(\eta_0b^{\frac{m}{2}}\right),\quad \mathcal{B}_n=hb^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta_0b^{\frac{m}{2}}\right)+k\frac{m\eta_0b^{m-1}}{2}K_0\left(\eta_0b^{\frac{m}{2}}\right) \tag{16}$$

$$\mathcal{X}_n=hb^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta b^{\frac{m}{2}}\right)+k\frac{m\eta b^{m-1}}{2}I_0\left(\eta b^{\frac{m}{2}}\right),\quad \mathcal{Y}_n=hb^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta b^{\frac{m}{2}}\right)+k\frac{m\eta b^{m-1}}{2}K_0\left(\eta b^{\frac{m}{2}}\right) \tag{17}$$

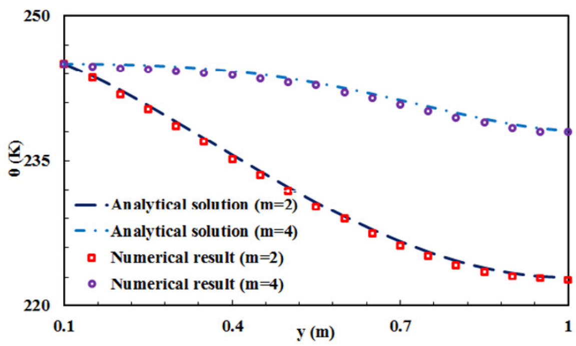


Fig. 2. Comparison of analytical solution and numerical results at q_0=1357 W/m^2, h_0=2 W/K and κ=1 for different values of m

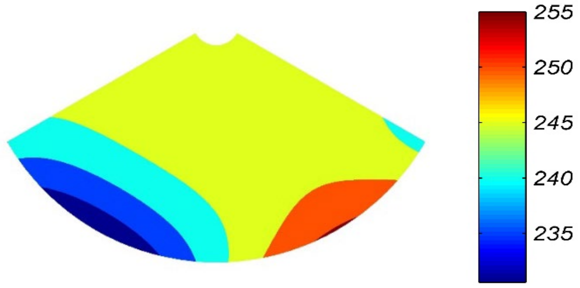


Fig. 3. Contours of temperature distribution in y and φ directions at q_0=1357 W/m^2, κ=1, h_0=2 W/K and m=1

3- RESULTS AND DISCUSSION

In this section, a practical test example is considered to do some parametric studies and further verify the obtained exact solution. The solution is verified against the result found via the Finite Element Method (FEM). As can be seen from Fig. 2, there is a good match between the results. Fig. 3 illustrates the distribution of temperature in both y and φ directions.

4- CONCLUSION

In the current paper, 2D temperature distribution in a truncated cone made of FGM is analytically studied. The separation of variable method is used for obtaining the exact solution. After the solution being validated against the numerical data, some parametric studies are done to shed light on the thermal behavior of FGM cones under asymmetric boundary conditions. It is found out that m and k are two important parameters in this matter and have strong effects on the shell's behavior. Increasing these two would enhance heat conductivity.

The presented solution can be used for other similar problems with small modifications. Further, it would help to have a better understanding of the rather complicated geometries.

REFERENCES

[1] V. Birman, T. Keil, S. Hosder, Functionally graded materials in engineering, in: Structural interfaces and attachments in biology, Springer, 2013, pp. 19-41.

[2] A.A. Delouei, A. Emamian, S. Karimnejad, H. Sajjadi, A. Tarokh, On 2D asymmetric heat conduction in functionally graded cylindrical segments: A general exact solution, International Journal of Heat and Mass Transfer, 143 (2019) 118515.

[3] A.A. Delouei, A. Emamian, S. Karimnejad, H. Sajjadi, A closed-form solution for axisymmetric conduction in a finite functionally graded cylinder, International Communications in Heat and Mass Transfer, 108 (2019) 104280.

[4] J.C. Halpin, Primer on Composite Materials Analysis, (Revised), Routledge, 2017.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

A. Emamian, A. Amiri Delouei, S. Karimnejad, H. Sajadi, Analytical solution of heat transfer in a cone made of functionally graded materials, Amirkabir J. Mech Eng., 53(Special Issue 1) (2021) 133-136.

DOI: 10.22060/mej.2019.16288.6320

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک، دوره ۵۳، شماره ویژه ۱، سال ۱۴۰۰، صفحات ۵۳۹ تا ۵۵۲
DOI: 10.22060/mej.2019.16288.6320

حل تحلیلی انتقال حرارت در یک مخروط ساخته شده از مواد مدرج تابعی

امین امامیان[۱]، امین امیری دلوئی *[۲]، سجاد کریم نژاد[۱]، حسن سجادی[۲]

[۱] دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
[۲] دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

خلاصه: در این مطالعه، مساله انتقال حرارت هدایتی دوبعدی در یک مخروط توخالی ناقص ساخته شده از مواد مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته و یک حل تحلیلی دقیق ارائه شده است. در مطالعه حاضر، خواص مواد مطابق با یک تابع توانی تغییر می‌کند. شرایط مرزی حرارتی نیز به‌صورت غیرهمگن فرض شده است. از روش جدایی متغیرها برای تعیین دقیق توزیع دمای پایا در مخروط استفاده شده است. حل بدست آمده با استفاده از داده‌های عددی صحت‌سنجی شده است. برای اثبات توانایی حل حاضر، یک مثال کاربردی که در معرض شرایط مرزی ترکیبی قرار دارد، مورد مطالعه قرار گرفته است. اثرات پارامترهای موثر در توزیع دما برای هندسه حاضر مورد بررسی قرار گرفته است. نتیجه این مطالعه برای روشن شدن روند طراحی و بهینه‌سازی هندسه‌های نسبتا پیچیده از مواد مدرج تابعی مفید خواهد بود. همچنین با توجه به تحلیلی بودن حل حاضر، نتایج حاصل از این مطالعه می‌تواند برای فهم بهتر مکانیزم‌های انتقال حرارت مواد مدرج تابعی مفید باشد. در مساله حاضر با افزایش مقدار m و κ، هدایت‌پذیری حرارتی به ترتیب به میزان حدود ۸ و ۲ درصد افزایش یافته که منجر به افزایش توزیع دمای مخروط خواهد شد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۶-۰۲-۱۳۹۸
بازنگری: ۰۷-۰۷-۱۳۹۸
پذیرش: ۱۴-۰۸-۱۳۹۸
ارائه آنلاین: ۲۲-۰۸-۱۳۹۸

کلمات کلیدی:
مواد مدرج تابعی
انتقال حرارت
حل دقیق
مخروط
روش جداسازی متغیرها

۱- مقدمه

امروزه مطالعه مواد مدرج تابعی[۱] دارای اهمیت بسیار بالایی است. بررسی مسائل مربوط به مواد مدرج تابعی اهمیت ویژه‌ای در مهندسی [۱ و ۲] و زیست فن‌آوری[۲] [۳ و ۴] دارد. شناخت بهتر این مواد و آشنایی با عوامل مؤثر بر رفتار حرارتی آن‌ها، موجب بهبود و افزایش بازده فرآیندهای صنعتی مرتبط می‌گردد. مفهوم مواد مدرج تابعی اولین بار به‌منظور کاهش تنش‌های حرارتی مطرح گردید. با استفاده از مواد مدرج تابعی، امکان دست‌یابی به مزایای فنی و اقتصادی قابل توجهی در پوشش‌های سطحی و اجزائی که ساختار آن‌ها در طول ضخامت تغییر می‌کند، وجود دارد. امروزه مفهوم مواد مدرج تابعی یک ایده بسیار نوین و جدید است که نه تنها برای موادی که تحت سایش و بارگذاری ترمومکانیکی واقع می‌شوند؛ بلکه برای تولید مواد الکترونیکی، مواد زیست سازگار و مقاوم حرارتی به‌کار گرفته می‌شود. مواد مدرج تابعی موادی هستند که در آن‌ها خواص ماده از یک طرف به طرف دیگر آن به‌صورت تدریجی تغییر می‌کند [۵ و ۶]. زمینه کاربردی این مواد وسیع و گسترده است. از مصارف مواد مدرج تابعی، پوشش‌های مقاوم به خوردگی و فرسایش که برای جابجایی سنگ‌های معدن ساینده و سنگین به‌کار می‌روند، مجراهای مبدل‌های حرارتی، ژنراتورهای ترموالکتریک (دما برقی)، اجزای ماشین‌های حرارتی، صفحات منتشرکننده حرارت و اتصالات عایق الکتریسیته فلزی-سرامیکی هستند. همچنین این مواد برای کاهش عدم مطابقت در اتصالات فلزی-سرامیکی به‌کار می‌روند.

حل تحلیلی مسائل انتقال گرما در یک محیط ناهمسانگرد[۳]

1 Functionally Graded Materials
2 Biotechnology
3 Anisotropic

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: a.amiri@ub.ac.ir

پیچیده است، زیرا معادله دیفرانسیل هدایت گرما شامل مشتقات متغیرهای مکانی است. اما در مقابل در مورد محیط‌های ایزوتروپ[1]، تحلیل به‌طور قابل توجهی ساده خواهد شد. تحقیقات انجام شده در زمینه انتقال حرارت با استفاده از دیدگاه‌های متفاوت تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی صورت گرفته است [۹-۷]. به‌طور خاص، مواد کامپوزیتی و مواد مدرج تابعی، بیشتر به‌صورت عددی صورت گرفته است [۱۰ و ۱۱] و سهم حل تحلیلی [۱۲ و ۱۳] در حل مسائلی از این دست کم است. در ادامه به تعدادی از حل‌های موجود اشاره شده است.

در رابطه با حل‌های عددی، آواجی [۱۴]، توزیع دما و توزیع تنش حرارتی در یک صفحه ساخته شده از مواد مدرج تابعی در حالت گذرا را به‌صورت عددی بررسی کرده است. توزیع دمای گذرا و تنش‌های حرارتی صفحه ساخته شده از مواد مدرج تابعی برای یک مدل آلومینا-نیکل مورد بررسی قرار گرفته است. ترابی و افشاری [۱۰] معادلات حاکم بر توزیع دما و تحلیل تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک دیسک دوار با ضخامت و خواص متغیر در راستای شعاعی استخراج کردند. آن‌ها خواص حرارتی ماده را به‌صورت تابع توانی در نظر گرفتند و تغییرات هدایت‌پذیری حرارتی در راستای شعاعی و وابستگی آن به سرعت زاویه‌ای دیسک را نیز در کار خود در نظر گرفتند. کیهانی و همکاران [۱۵] توزیع دمای یک استوانه دوبعدی را با استفاده از حل تحلیلی بدست آوردند. آن‌ها با استفاده از روش جدایی متغیرها[2] مسئله انتقال حرارت را به‌صورت تحلیلی حل کرده و توزیع دمای استوانه را برای شار حرارتی مختلف نمایش دادند. لی و لای [۱۶] انتقال حرارت یک استوانه در حالت ناپایا را به‌صورت تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در کار خود، طول استوانه را نامحدود فرض کردند و توزیع دمای بی‌بعد شده استوانه را نسبت به شعاع استوانه نمایش دادند. حل تحلیلی انتقال حرارت دوبعدی در مختصات استوانه‌ای همسانگرد توسط بهادر و بار کوهن [۱۷] انجام شد. در حل آن‌ها، توزیع دمای استوانه به‌صورت توابع بسل بوده و از آنجایی‌که استوانه به‌صورت توپر فرض شده است و دما در داخل استوانه به‌صورت محدود می‌باشد؛ ضریب تابع بسل نوع دوم برابر صفر بدست آمده است. حسینی و همکاران [۱۸]، مسئله انتقال حرارت یک‌بعدی در استوانه‌های مدرج تابعی را در شرایط مرزی خاص به‌صورت تحلیلی مورد بررسی قرار داده‌اند. همچنین مراجع [۲۲-۱۹]، اطلاعات مفیدی در زمینه انتقال حرارت در مسائل گوناگون که مورد توجه محققان می‌باشد، را ارائه می‌دهند.

در زمینه انتقال حرارت در کره‌های کامپوزیتی نیز معدود کارهایی وجود دارد. دینگ و همکاران [۲۳] حل ترموالاستیک[3] یک کره متقارن ساخته شده از مواد مدرج تابعی را تحت بار حرارتی متقارن ارائه داده‌اند. آن‌ها با استفاده از حل عددی، تنش‌های شعاعی و زاویه‌ای را به ازای پارامترهای مسئله نمایش داده‌اند. دلوئی و نوروزی [۲۴] انتقال حرارت ناپایای کره کامپوزیتی را با اعمال شرایط مرزی کلی بر روی هندسه مسئله، مورد بررسی قرار دادند. همچنین، مهزاب و جباری [۲۵] تنش‌های دو بعدی یک کره توخالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی را بررسی کردند. از سوی دیگر، راه حل تحلیلی یک زمینه جذاب برای مطالعه و پژوهش است که نتیجه آن دقیق‌تر و قابل اطمینان است [۲۶ و ۲۷].

در این قسمت، نوبت به هندسه مقاله حاضر (مخروط) می‌رسد که به‌دلیل پیچیدگی هندسه مخروط (نسبت به هندسه صفحه، استوانه و کره)، کارهای بسیار کمی صورت گرفته است. ترابی و همکاران [۲۸] انقباض حرارتی یک پوسته مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی رو مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. در کار آن‌ها، خواص مواد به‌صورت تابع توانی فرض شده و پوسته مخروطی تحت بار ترکیبی حرارتی و الکتریکی قرار گرفته است. همچنین اکبری و همکاران [۲۹] انقباض حرارتی یک پوسته مخروطی ضخیم که در آن وابستگی دما به اجزای تشکیل در نظر گرفته شده است، را مورد مطالعه قرار دادند.

در تحقیق حاضر، انتقال حرارت یک مخروط ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شرایط مرزی خاص مورد بررسی قرار گرفته است. مسئله حاضر، انتقال حرارت هدایتی دائم دو بعدی بدون تولید انرژی داخلی در یک پوسته مخروطی به ضخامت کم می‌باشد. در این مقاله با استفاده از روش جدایی متغیرها مسئله به‌صورت تحلیلی حل شده است. پس از حل معادلات، شرایط مرزی بر روی معادلات به‌دست آمده اعمال شده و ضرایب ثابت مسئله به‌دست می‌آیند. به‌منظور درستی حل مسئله حاضر، نتایج حل تحلیلی با نتایج حل عددی مقایسه شده است. تغییرات توزیع دما برای مقادیر مختلف مسئله حاضر مورد بررسی قرار گرفته است. شایان ذکر است نوآوری اصلی

1 Isotropic
2 Separation of Variables
3 Thermo-Elastic

مقاله روی ارائه یک حل تحلیلی دقیق برای ساختار مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شرایط مرزی کلی است. با توجه به اطلاعات نویسندگان، تاکنون هیچ گونه حل تحلیلی برای انتقال حرارت مواد مدرج تابعی در هندسه مخروط ارائه نشده است.

۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی

در این قسمت به بیان معادله حاکم بر مسئله و شرایط مرزی اعمال شده بر مخروط پرداخته شده است. هندسه مخروط و شرایط مرزی اعمال شده بر هندسه مسئله در شکل ۱ نمایش داده شده است. با استفاده از یک المان از مخروط و موازنه انرژی‌های وارد بر المان، معادله انتقال حرارت مخروط به‌دست خواهد آمد. باید اشاره شود که دیواره داخلی پوسته مخروطی به‌صورت عایق در نظر گرفته شده است.

۲-۱- معادلات حاکم

مواد مدرج تابعی، موادی آزمایشگاهی هستند که با استفاده از روش‌های خاص مانند ریخته‌گری سانتریفیوژ ساخته می‌شوند. در این روش‌ها سعی می‌شود با توجه به تفاوت چگالی مواد تشکیل‌دهنده، یک توزیع چگالی متفاوت در جهت دلخواه ایجاد نمایند. در اکثر کارهای انجام شده این تغییر چگالی به‌صورت یک تابع توانی برازش می‌شود. شایان ذکر است که در اکثر کارها از توابع نمایی استفاده شده است. با توجه به مطالعات گذشته، ترکیب مواد مدرج تابعی ساخته شده از هرگونه مواد فلزی و سرامیکی را می‌توان به‌صورت توانی در نظر گرفت. هدایت‌پذیری حرارتی در جهت y تابعی از y بوده و به‌صورت توابع توانی زیر تعریف می‌شود:

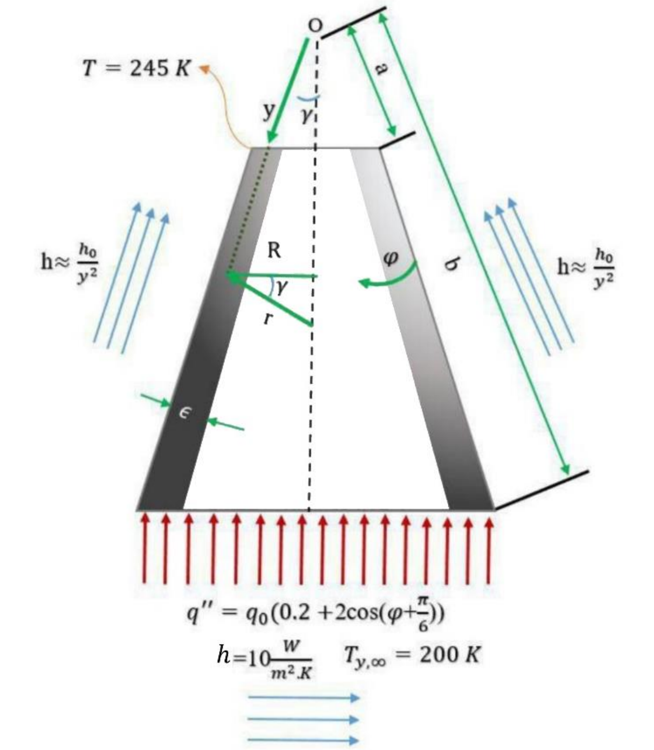
$$k_y = k_1 y^{-m} \qquad (۱)$$

$$k_{\varphi} = k_2 \qquad (۲)$$

که در آن ضرایب k_1، k_2 و m همگی اعداد ثابت هستند و نسبت k_1 به k_2 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2} \qquad (۳)$$

در این مطالعه فرض شده است که مخروط در راستای ضخامت خود، دارای انتقال حرارت جابجایی (q_{conv}) است. بعد از ساده‌سازی



شکل۱. هندسه مسئله و شرایط مرزی اعمال شده بر روی مخروط

Fig. 1. Problem geometry and boundary conditions imposed on cones

انرژی‌های وارد بر المان، معادله انرژی به‌صورت زیر خواهد بود:

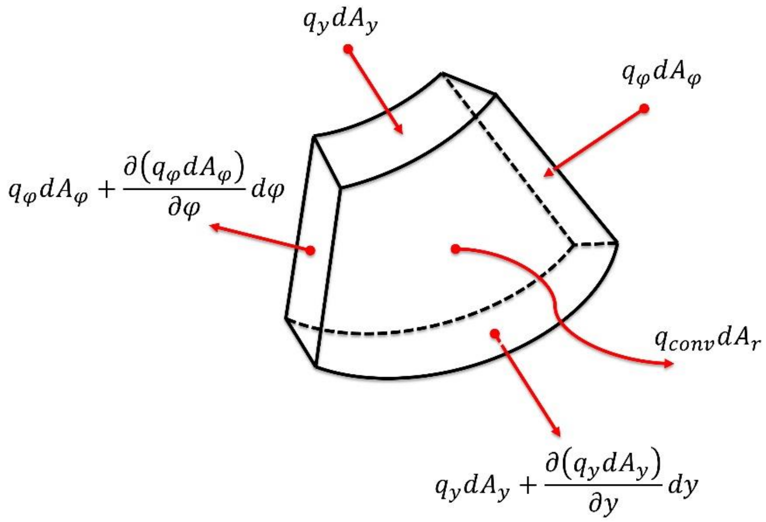
$$-\frac{\partial\left(q_y dA_y\right)}{\partial y}dy - \frac{\partial\left(q_\varphi dA_\varphi\right)}{\partial \varphi}d\varphi - q_{conv}dA_r = \rho c_p \frac{dT}{dt}dV \qquad (۴)$$

که در آن ρ، c_p و T، به ترتیب، چگالی، گرمای ویژه و توزیع دمای مخروط می‌باشند.

انتقال حرارت جابجایی (q_{conv}) وارده بر المان به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$q_{conv} = h\left(T - T_{r,\infty}\right) \qquad (۵)$$

که h ضریب انتقال حرارت جابجایی و $T_{r,\infty}$ دمای محیط هستند. در کاربرد علوم مهندسی، ضریب انتقال حرارت جابجایی ثابت نیست. ضریب انتقال حرارت h معمولاً به برخی از عوامل از جمله: هندسه، عدد رینولدز و در جریان‌های تراکم‌ناپذیر به عدد پرانتل بستگی دارد.



شکل ۲: موازنه انرژی‌های وارد بر المان مخروط
Fig. 2. Energy balance on the cone element

با توجه به کارهای قبلی انجام شده در این هندسه [۳۰]، ضریب انتقال حرارت تابعی از هندسه مسئله در نظر گرفته شده است بنابراین، انتقال حرارت جابجایی در راستای ضخامت مخروط (q_{conv}) به‌صورت رابطه (۶) در نظر گرفته شده است:

$$q_{conv}=\frac{h_0}{y^2}\left(T-T_{r,\infty}\right) \qquad (۶)$$

شایان ذکر است، با توجه به این‌که انتقال حرارت دوبعدی برای مواد مدرج تابعی از نوع ارتوتروپیک در نظر گرفته می شود [۳۱ و ۳۲]، بنابراین تانسور هدایت‌پذیری در دستگاه مختصات برای این مواد یک ماتریس قطری است که تنها مقادیر k_y و k_φ در آن وجود دارد. معادلات و ماتریس‌های مربوطه در مرجع [۳۰] به‌طور کامل تشریح شده‌اند. نهایتاً، با استفاده از رابطه $\theta(y,\varphi)=T(y,\varphi)-T_{r,\infty}$ و ساده‌سازی، معادله انرژی در حالت پایا به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y y\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+\frac{1}{y\sin^2\gamma}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(k_\varphi\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)-\frac{h_0}{\eth y}\theta=0 \qquad (۷)$$

۲-۲- شرایط مرزی

برای تعیین توزیع دمای استوانه مدرج تابعی و به‌دست آوردن ضرایب ثابت حاصل از حل مسئله، شرایط مرزی حاکم بر مسئله را به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\theta(a,\varphi)=245\,\mathrm{K} \qquad (۸)$$

$$h\theta(b,\varphi)+k\frac{\partial\theta(b,\varphi)}{\partial y}=q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty} \qquad (۹)$$

که k و h به ترتیب، هدایت‌پذیری حرارتی و جابجایی و q_0 شار حرارتی هستند.

۳- حل تحلیلی

با ترکیب روابط (۱) و (۷) معادله دیفرانسیل جزئی زیر حاصل می‌شود:

$$\kappa y^{-m}\left(y\frac{\partial^2\theta(y,\varphi)}{\partial y^2}+\frac{\partial\theta(y,\varphi)}{\partial y}(-m+1)\right)-\frac{h_0}{k_2\epsilon y}\theta(y,\varphi)+\frac{1}{y\sin^2\gamma}\frac{\partial^2\theta(y,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (۱۰)$$

توزیع دمای مخروط را می‌توان با استفاده از روش جدایی متغیرها به‌صورت دو تابع زیر بیان کرد:

$$\theta(y,\varphi)=\mathcal{F}(y)\mathcal{G}(\varphi) \qquad (۱۱)$$

با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۱۰) داریم:

$$\sin^2\gamma\left(\kappa y^{-m}\left(y^2\frac{\mathcal{F}''(y)}{\mathcal{F}(y)}+y\,(-m+1)\frac{\mathcal{F}'(y)}{\mathcal{F}(y)}\right)-\frac{h_0}{k_2\epsilon}\right)= \quad (۱۲)$$

$$-\frac{\mathcal{G}''(\varphi)}{\mathcal{G}(\varphi)}=\lambda^2$$

در معادله (۱۲)، λ مقدار ویژه معادله انتقال گرما است که با استفاده از شرایط مرزی در معادلات (۱۳) و (۱۴) تعیین می‌شود. در راستای φ، شرایط مرزی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{G}(0)=\mathcal{G}(2\pi) \quad (۱۳)$$

$$\frac{\partial\mathcal{G}(0)}{\partial\varphi}=\frac{\partial\mathcal{G}(2\pi)}{\partial\varphi} \quad (۱۴)$$

پاسخ معادله (۱۲) در راستای φ، به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{G}(\varphi)=a_n\cos(\lambda_n\varphi)+b_n\sin(\lambda_n\varphi) \quad (۱۵)$$

با جایگزین کردن شرایط مرزی در معادله (۱۵)، معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$a_n\left(\cos(2\pi\lambda_n)-1\right)+b_n\sin(2\pi\lambda_n)=0 \quad (۱۶\text{-الف})$$

$$a_n\sin(2\pi\lambda_n)-b_n\left(\cos(2\pi\lambda_n)-1\right)=0 \quad (۱۶\text{-ب})$$

شرط این‌که دستگاه فوق (معادلات (۱۶)) جواب غیر صفر داشته باشد، این است که دترمینان ضرایب آن صفر باشد:

$$\left(\cos(2\pi\lambda_n)-1\right)^2+\sin^2(2\pi\lambda_n)=0 \quad (۱۷)$$

و از آنجا پس از حل و ساده‌سازی معادله (۱۷)، مقادیر ویژه به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\lambda_n=n \qquad n=0,1,2,\ldots \quad (۱۸)$$

اکنون، معادله (۱۲) در جهت y به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sin^2\gamma\left(\kappa y^{-m}\left(y^2\mathcal{F}''(y)+y\,(-m+1)\mathcal{F}'(y)\right)-\left(\frac{h_0}{k_2\epsilon}+\frac{\lambda_n}{\sin^2\gamma}\right)\mathcal{F}(y)\right)=0 \quad (۱۹)$$

جواب عمومی معادله (۱۹) به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{F}(y)=\begin{cases} y^{\frac{m}{2}}\left(A_0I_1\left(\eta_0y^{\frac{m}{2}}\right)+B_0K_1\left(\eta_0y^{\frac{m}{2}}\right)\right) & n=0\\ y^{\frac{m}{2}}\left(c_nI_1\left(\eta y^{\frac{m}{2}}\right)+d_nK_1\left(\eta y^{\frac{m}{2}}\right)\right) & n\geq 1\end{cases} \quad (۲۰\text{-الف})$$

که:

$$\eta=-\frac{2}{m}\sqrt{\frac{h_0\sin^2\gamma+\lambda_n{}^2k_2\epsilon}{k_1\epsilon\sin^2\gamma}},\eta_0=-\frac{2}{m}\sqrt{\frac{h_0}{k_1\epsilon}} \quad (۲۰\text{-ب})$$

نهایتاً، توزیع دمای مسئله به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\theta(y,\varphi)=y^{\frac{m}{2}}\left(A_0I_1\left(\eta_0y^{\frac{m}{2}}\right)+B_0K_1\left(\eta_0y^{\frac{m}{2}}\right)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}y^{\frac{m}{2}}\left(A_nI_1\left(\eta y^{\frac{m}{2}}\right)+B_nK_1\left(\eta y^{\frac{m}{2}}\right)\right)\cos(\lambda_n\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}y^{\frac{m}{2}}\left(C_nI_1\left(\eta y^{\frac{m}{2}}\right)+D_nK_1\left(\eta y^{\frac{m}{2}}\right)\right)\sin(\lambda_n\varphi) \quad (۲۱)$$

برای به‌دست آوردن ضرایب ثابت مساله، شرایط مرزی (معادله(۱۰)) بایستی بر روی توزیع دمای به‌دست آمده، اعمال شود:

$$a^{\frac{m}{2}}\left(A_0I_1\left(\eta_0a^{\frac{m}{2}}\right)+B_0K_1\left(\eta_0a^{\frac{m}{2}}\right)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_na^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)+B_na^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)\right)\cos(\lambda_n\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_na^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)+D_na^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)\right)\sin(\lambda_n\varphi)=245 \quad (۲۲\text{-الف})$$

$$A_0\mathcal{A}_n+B_0\mathcal{B}_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\mathcal{X}_n+B_n\mathcal{Y}_n\right)\cos(\lambda_n\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\mathcal{X}_n+D_n\mathcal{Y}_n\right)\sin(\lambda_n\varphi)=q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty} \quad (۲۲\text{-ب})$$

که در معادلات (۲۲)، $\mathcal{A}_n$، $\mathcal{B}_n$، $\mathcal{X}_n$ و $\mathcal{Y}_n$، به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\mathcal{A}_n=hb^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta_0b^{\frac{m}{2}}\right)+k\,\frac{m\eta_0b^{m-1}}{2}I_0\left(\eta_0b^{\frac{m}{2}}\right) \quad (۲۳\text{-الف})$$

$$\mathcal{B}_n = hb^{\frac{m}{2}} K_1\left(\eta_0 b^{\frac{m}{2}}\right) + k\,\frac{m\,\eta_0 b^{m-1}}{2} K_0\left(\eta_0 b^{\frac{m}{2}}\right) \qquad \text{(۲۳-ب)}$$

$$\mathcal{X}_n = hb^{\frac{m}{2}} I_1\left(\eta b^{\frac{m}{2}}\right) + k\,\frac{m\,\eta b^{m-1}}{2} I_0\left(\eta b^{\frac{m}{2}}\right) \qquad \text{(۲۳-ج)}$$

$$\mathcal{Y}_n = hb^{\frac{m}{2}} K_1\left(\eta b^{\frac{m}{2}}\right) + k\,\frac{m\,\eta b^{m-1}}{2} K_0\left(\eta b^{\frac{m}{2}}\right) \qquad \text{(۲۳-د)}$$

نهایتاً، ضرایب ثابت A_0، B_0، A_n، B_n، C_n و D_n به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A_0 = -\frac{245\mathcal{B}_n - K_1\left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}}\right)\int_0^{2\pi}\left(q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty}\right)d\varphi}{\mathcal{A}_n K_1\left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}}\right)-\mathcal{B}_n I_1\left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}}\right)} \qquad \text{(۲۴-الف)}$$

$$B_0 = \frac{245\mathcal{A}_n - I_1\left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}}\right)\int_0^{2\pi}\left(q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty}\right)d\varphi}{\mathcal{A}_n K_1\left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}}\right)-\mathcal{B}_n I_1\left(\eta_0 a^{\frac{m}{2}}\right)} \qquad \text{(۲۴-ب)}$$

$$A_n = \frac{-\mathcal{Y}_n\frac{245}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\lambda_n\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty}\right)\cos(\lambda_n\varphi)\,d\varphi\left(a^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)\right)}{\mathcal{X}_n a^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)-\mathcal{Y}_n a^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)} \qquad \text{(۲۵-الف)}$$

$$B_n = \frac{\mathcal{X}_n\frac{245}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\lambda_n\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty}\right)\cos(\lambda_n\varphi)\,d\varphi\left(a^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)\right)}{\mathcal{X}_n a^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)-\mathcal{Y}_n a^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)} \qquad \text{(۲۵-ب)}$$

$$C_n = -\frac{\mathcal{Y}_n\frac{245}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\lambda_n\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty}\right)\cos(\lambda_n\varphi)\,d\varphi\left(a^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)\right)}{\mathcal{X}_n a^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)-\mathcal{Y}_n a^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)} \qquad \text{(۲۵-ج)}$$

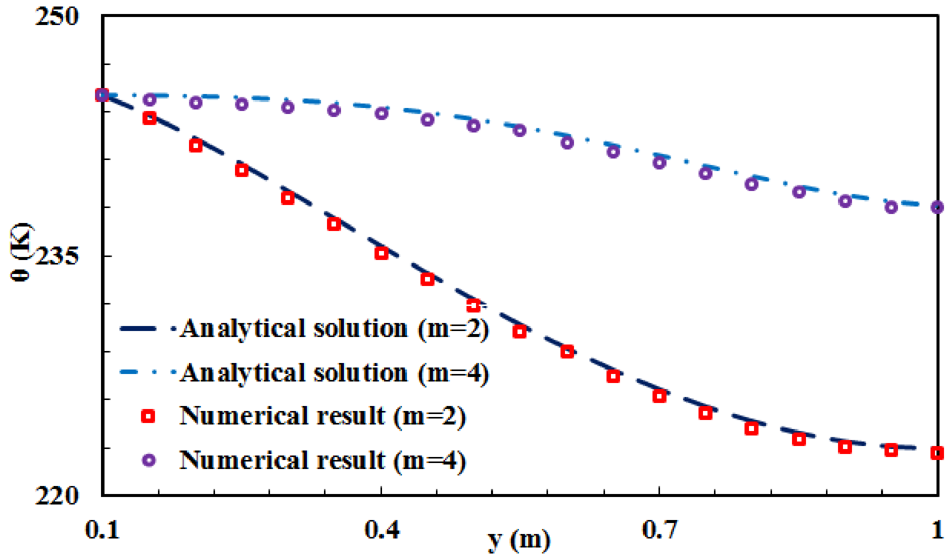
$$D_n = \frac{\mathcal{X}_n\frac{245}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\lambda_n\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(q_0\left(0.2+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right)+h\theta_{y,\infty}\right)\cos(\lambda_n\varphi)\,d\varphi\left(a^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)\right)}{\mathcal{X}_n a^{\frac{m}{2}}K_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)-\mathcal{Y}_n a^{\frac{m}{2}}I_1\left(\eta a^{\frac{m}{2}}\right)} \qquad \text{(۲۵-د)}$$

۴- نتایج و بحث

همانگونه که بیان گردید، مواد مدرج تابعی، مواد آزمایشگاهی هستند که با توجه به مکان بکارگیری، طراحی و ساخته می‌شوند. هدف از کار حاضر ارائه یک حل تحلیلی برای اینگونه مسائل است تا بتوان بر اساس آن توزیع دما را تعیین کرده و در یک فرایند معکوس نحوه توزیع چگالی و ساخت مواد را تعیین نمود. در تحقیق حاضر، انتقال حرارت در یک مخروط ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شرایط مرزی مشخص مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط مرزی به‌صورت نامتقارن بر روی هندسه مساله اعمال شده است. در $y=a$ ، دمای مخروط برابر ۲۴۵ درجه کلوین است و در $y=b$، شار حرارتی $q_0(۰/۲+۲\cos(\varphi+\frac{\pi}{۶}))$ اعمال شده است که مقدار $q_0 = ۱۳۵۷\,\mathrm{W/m^2}$ (شار تشعشعی خورشید که در نزدیکی سطح زمین به اجسام وارد می‌شود، به‌طور متوسط برابر ۱۳۵۷ وات بر مترمربع فرض شده است)، در نظر گرفته شده است. در ابتدا به منظور صحت‌سنجی حل تحلیلی انجام شده در مقاله حاضر، نتایج حاصله از حل تحلیلی با نتایج حل عددی مقایسه شده است و بعد از اطمینان از صحت حل تحلیلی، به ارائه نتایج پرداخته شده است. در این بخش، تاثیر مقادیر m، q_0، κ

جدول ۱. استقلال از شبکه برای m=2، $q_0 = ۱۳۵۷\,\mathrm{W/m^2}$، $h_0 = ۲\,\mathrm{W/K}$ و $\kappa = ۱$
Table 1. Grid independency study

تعداد سلول	۱۵۷۵۰	۶۳۰۰۰	۲۵۲۰۰۰	۱۰۰۸۰۰۰
مقدار دما در پایه مخروط (K)	۲۱۲/۸	۲۱۸/۹	۲۲۲/۹	۲۲۳/۲
خطا (درصد)	۴/۷۸	۲/۰۵	۰/۲۷	۰/۱۳



شکل ۳. مقایسه حل تحلیلی و عددی در $q_0 = ۱۳۵۷\,\mathrm{W/m^2}$، $h_0 = ۲\,\mathrm{W/K}$ و $\kappa = ۱$ برای مقادیر مختلف
Fig. 3. Comparison of analytical solution and numerical results at $q_0 = 1357\,\mathrm{W/m^2}$, $h_0 = 2\,\mathrm{W/K}$ and $\kappa = 1$ for different values of m

، h_0 بر روی توزیع دمای مخروط بررسی شده است.

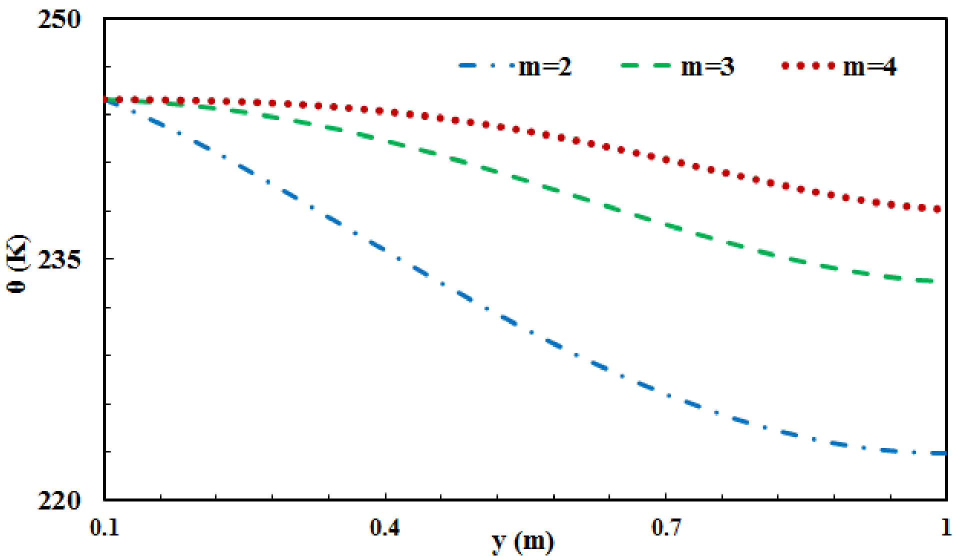
۱-۴- استقلال از شبکه و مقایسه حل تحلیلی و عددی

برای حل معادلات انتقال حرارت ابتدا هندسه مورد نظر شبکه‌بندی شده است تا حل عددی در این شبکه‌ها ایجاد شود. به‌منظور دسترسی به بهینه‌ترین اندازه و تعداد شبکه، استقلال از شبکه برای مدل‌های محاسباتی بررسی می‌گردد. هدف از استقلال از شبکه، نشان دادن مستقل بودن نتایج محاسبات به تعداد سلول به‌کار رفته و همچنین کاستن از هزینه محاسباتی بالا است. در جدول ۱ مشاهده می‌شود، به منظور بررسی استقلال از شبکه در محدوده محاسباتی، مقدار دما در پایه مخروط به ازای چهار نوع مش به تعداد سلول‌های ۱۵۷۵۰، ۶۳۰۰۰، ۲۵۲۰۰۰ و ۱۰۰۸۰۰۰ استفاده شده است که توزیع دما در دو حالت ۲۵۲۰۰۰ و ۱۰۰۸۰۰۰ سلول، تغییر چندانی ندارد. در این بخش، m=2، $q_0 = ۱۳۵۷\,\mathrm{W/m^2}$، $h_0 = ۲\,\mathrm{W/K}$ و $\kappa = ۱$ است.

از آنجایی‌که افزایش تعداد سلول‌های محاسباتی، تنها هزینه و زمان محاسباتی را افزایش می‌دهد و تاثیری بر کیفیت نتایج ندارد، بنابراین به دلیل کاهش زمان محاسباتی از تعداد سلول ۲۵۲۰۰۰ استفاده شده است. در جدول ۱ مقدار دما در پایه مخروط و درصد خطا به ازای چهار مش مذکور نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود اختلاف نتایج بین دو حالت ۲۵۲۰۰۰ و ۱۰۰۸۰۰۰ سلول تقریباً ناچیز و تغییرات بسیار جزئی و کمتر از ۱ درصد است. به منظور کاهش هزینه محاسباتی تعداد سلول ۲۵۲۰۰۰ انتخاب شده است.

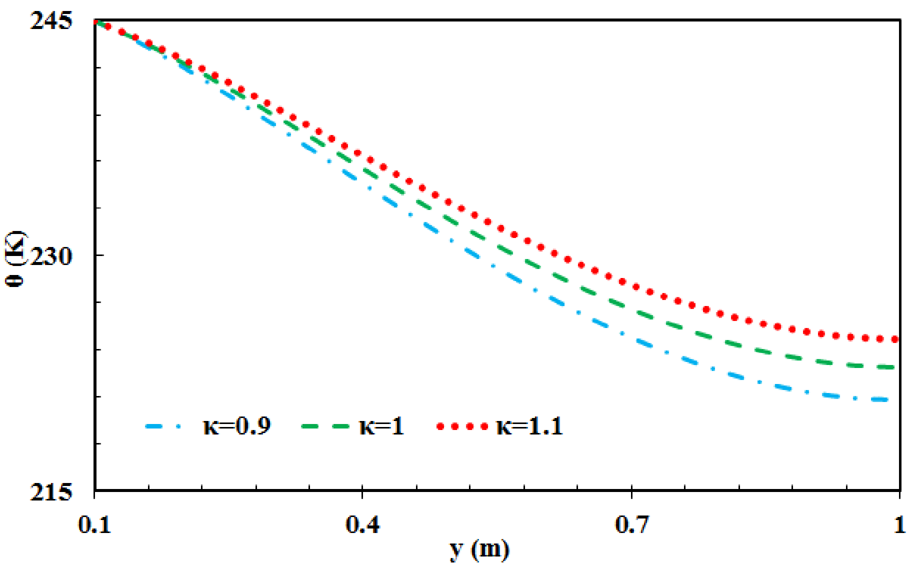
می‌توان نتایج حل تحلیلی مطالعه حاضر را با حل عددی از لحاظ کمی بررسی و صحت تحقیق حاضر را مورد بررسی قرار داد. برای قسمت حل عددی از روش اجزاء محدود[1] استفاده شده است تا بتوان حل عددی را با حل تحلیلی بررسی نمود و صحت حل حاضر را بررسی کرد. در این قسمت برای مقایسه حل تحلیلی و عددی پارامترهای مسئله حاضر به‌صورت، $q_0 = ۱۳۵۷\,\mathrm{W/m^2}$، $h_0 = ۲\,\mathrm{W/K}$ و $\kappa = ۱$ در

1 Finite Element Method (FEM)



شکل ۴ . توزیع دما در جهت y برای مقادیر مختلف در $q_0=۱۳۵۷\,\mathrm{W/m^2}$، $h_0=۲\,\mathrm{W/K}$ و $\kappa=۱$

Fig. 4. Temperature distribution respect to y for different values of m and at $q_0=1357\,\mathrm{W/m^2}$, $h_0=2\,\mathrm{W/K}$ and $\kappa=1$



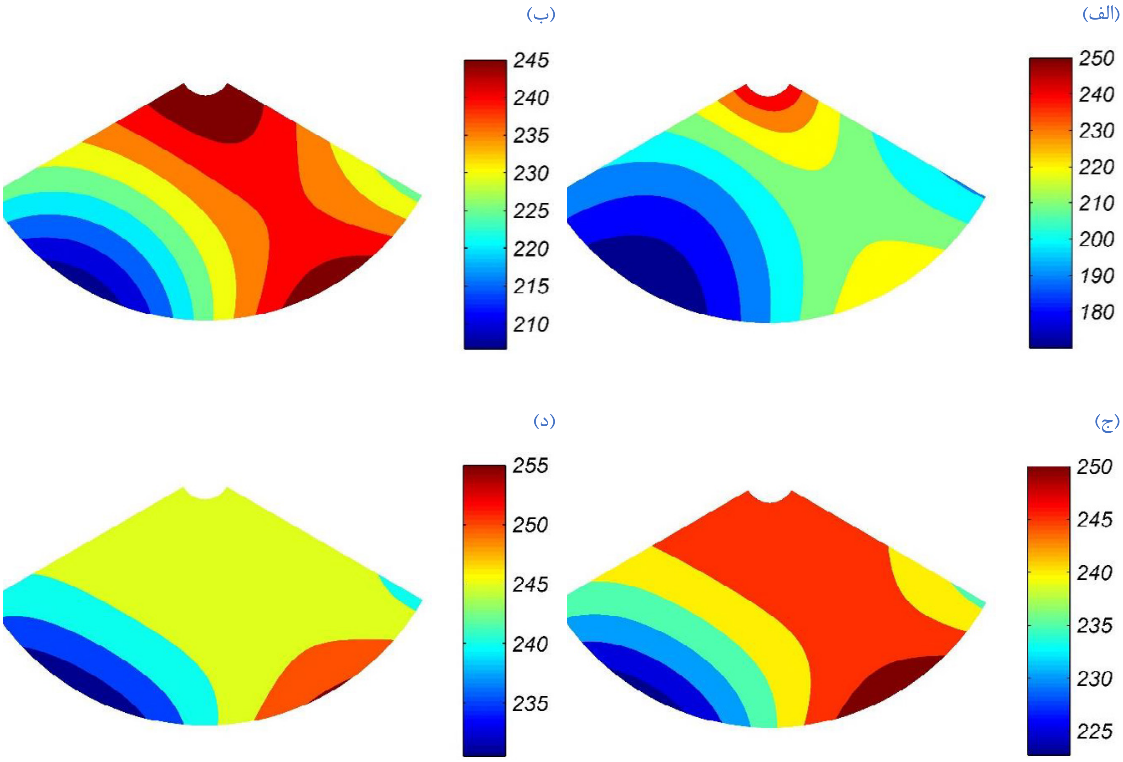
شکل ۵. توزیع دما در جهت y برای مقادیر مختلف در $q_0=۱۳۵۷\,\mathrm{W/m^2}$، $h_0=۲\,\mathrm{W/K}$ و $m=۲$

Fig. 5. Temperature distribution versus y for different values of κ and at $m=2$, $q_0=1357\,\mathrm{W/m^2}$ and $h_0=2\,\mathrm{W/K}$

نظر گرفته شده است و نمودارها برای مقادیر مختلف m رسم شده است. در شکل ۳ نتایج به‌دست آمده برای توزیع دما در حل تحلیلی با نتایج عددی مقاله حاضر برای $m=۲$ و $m=۴$ مقایسه شده است. همان‌طور که در شکل ۳ دیده می‌شود نتایج حل تحلیلی تطابق خوبی با نتایج عددی دارد.

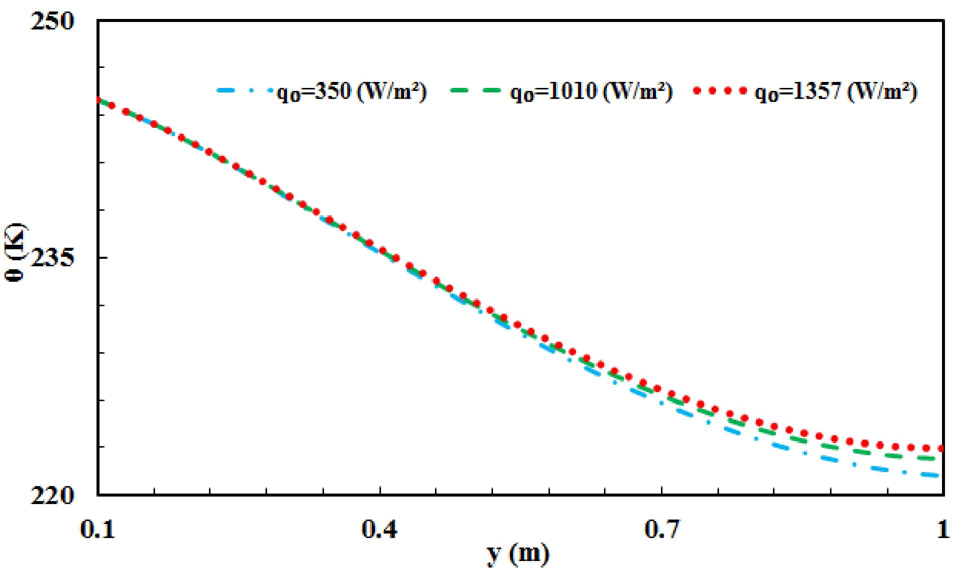
۲-۴- نتایج حل تحلیلی

در شکل ۴ تاثیر تغییر m بر توزیع دمای مخروط بررسی شده است. همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، تغییر در جنس مواد، توزیع دمای مخروط را تغییر می‌دهد. با توجه به روابط (۱) و (۲)، مقدار m و κ، دو عامل تاثیرگذار بر روی جنس مواد می‌باشند. در شکل ۴ و شکل ۵ با افزایش مقدار m و κ، توزیع دمای مخروط افزایش پیدا می‌کند. در شکل ۴، با افزایش مقدار m مقدار هدایت‌پذیری حرارتی در راستای y افزایش پیدا کرده و باعث می‌شود انتقال حرارت با سرعت بیشتری صورت گیرد و این امر باعث می‌شود اختلاف دمای بین دو نقطه در راستای y به یکدیگر نزدیک شود. به همین خاطر



شکل ۶. کانتور توزیع دما در جهت و در $q_0 = ۱۳۵۷ \, W/m^2$، $h_0 = ۲ \, W/K$ و $\kappa = ۱$ و (الف) $m = ۱$، (ب) $m = ۲$، (ج) $m = ۳$، (د) $m = ۴$

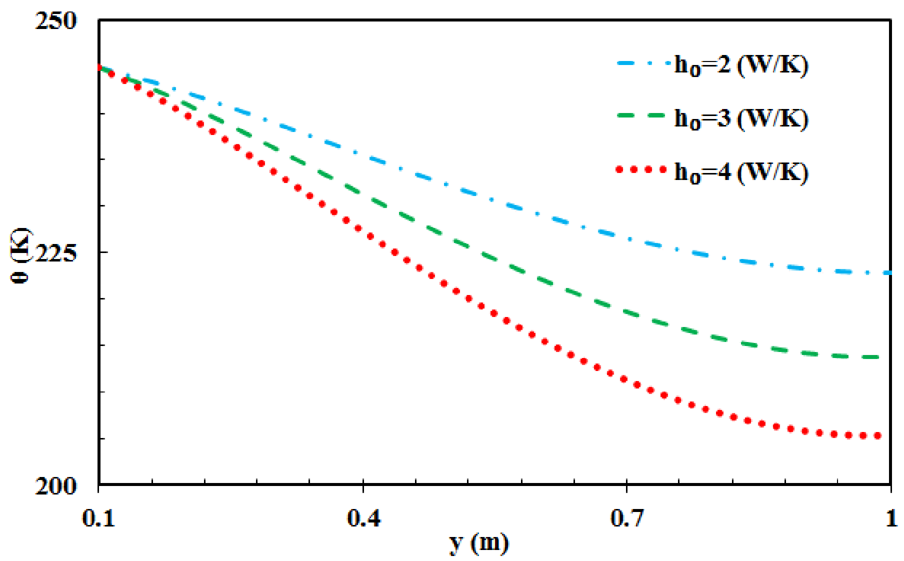
Fig. 6. Contours of temperature distribution in y and φ directions at $q_0 = 1357 \, W/m^2$, $\kappa = 1$, $h_0 = 2 \, W/K$ and (a) $m = 1$, (b) $m = 2$, (c) $m = 3$, and (d) $m = 4$



شکل ۷. توزیع دما در جهت y برای مقادیر مختلف در $\kappa = ۱$، $h_0 = ۲ \, W/K$ و $m = ۲$

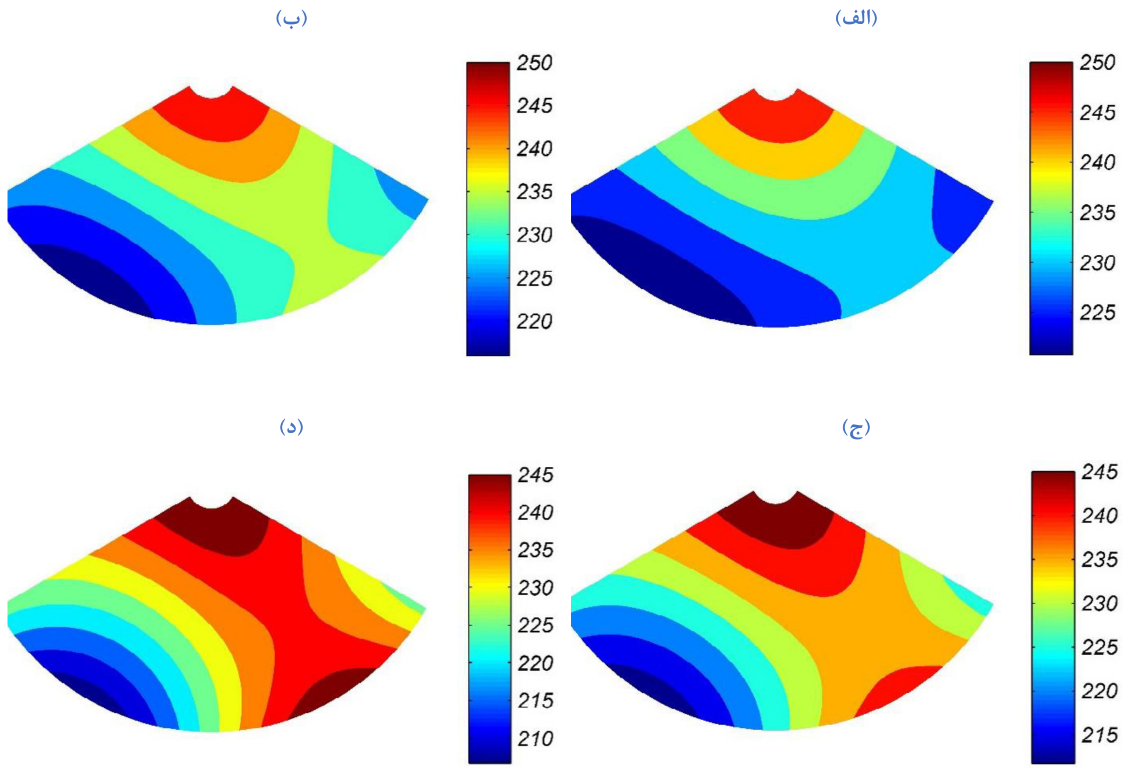
Fig. 7. Temperature distribution versus y for different values of q_0 at $m = 2$, $\kappa = 1$ and $h_0 = 2 \, W/K$.

با افزایش مقدار m مقدار دما در پایه مخروط افزایش پیدا کرده و به دما در قسمت قاعده بالای مخروط نزدیک می‌شود. در شکل ۵ نیز با افزایش مقدار κ، هدایت‌پذیری حرارتی افزایش پیدا کرده و سرعت انتقال حرارت افزایش پیدا می‌کند و مطابق شکل ۴ باعث افزایش دما



شکل ۸ .توزیع دما در جهت y برای مقادیر مختلف در $q_0 = ۱۳۵۷ \, W/m^2$، $\kappa = ۱$ و $m = ۲$

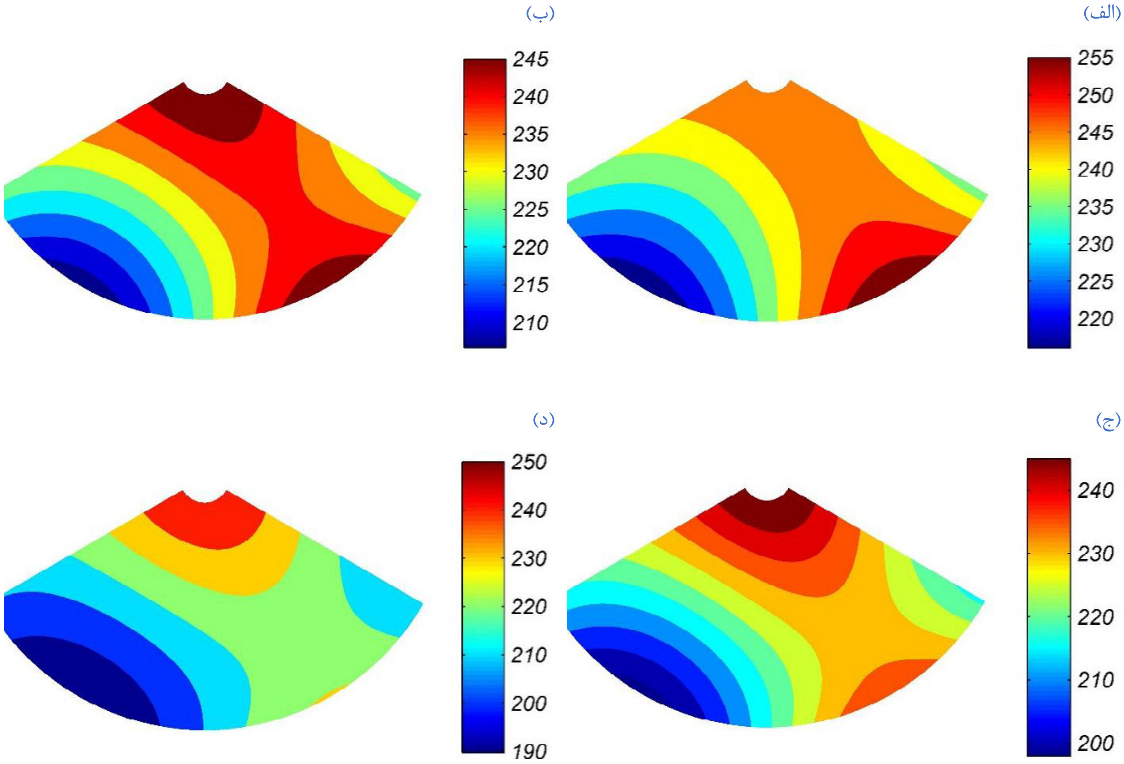
Fig. 8. Temperature distribution versus y for different values of h_0 at $m = 2$, $\kappa = 1$ and $q_0 = 1357 \, W/m^2$



شکل ۹.کانتور توزیع دما در جهت و در $\kappa = ۱$، $h_0 = ۲ \, W/K$ و و (الف) $q_0 = ۳۵۰ \, W/m^2$، (ب) $q_0 = ۷۰۰ \, W/m^2$، (ج) $q_0 = ۱۰۱۰ \, W/m^2$،
$q_0 = ۱۳۵۷ \, W/m^2$

Fig. 9. Contours of temperature distribution in y and φ directions at $m = 2$, $\kappa = 1$, $h_0 = 2 \, W/K$ and (a) $q_0 = 350 \, W/m^2$, (b) $q_0 = 700 \, W/m^2$, (c) $q_0 = 1010 \, W/m^2$, and (d) $q_0 = 1357 \, W/m^2$

می‌شود. با افزایش مقدار m و κ، هدایت‌پذیری حرارتی، به ترتیب به میزان حدودا ۸ و ۲ درصد افزایش یافته است. شکل ۶ نیز کانتورهای



شکل۱۰. کانتور توزیع دما در جهت و در $q_0 = ۱۳۵۷ \, \mathrm{W/m^2}$، $\kappa = ۱$ **و** $m = ۲$ **و (الف)** $h_0 = ۱ \, \mathrm{W/K}$، **(ب)** $h_0 = ۲ \, \mathrm{W/K}$، **(ج)** $h_0 = ۳ \, \mathrm{W/K}$، **(د)** $h_0 = ۴ \, \mathrm{W/K}$

Fig. 10. Contours of temperature distribution in y and φ directions at $m = 2$, $q_0 = 1357 \, \mathrm{W/m^2}$, $\kappa = 1$ and (a) $h_0 = 1 \, \mathrm{W/K}$, (b) $h_0 = 2 \, \mathrm{W/K}$, (c) $h_0 = 3 \, \mathrm{W/K}$, and (d) $h_0 = 4 \, \mathrm{W/K}$

توزیع دمای مخروط در جهت‌های y و φ را برای مقادیر مختلف m نشان می‌دهد.

همچنین دو پارامتر تاثیرگذار بر توزیع دمای مخروط، یعنی مقدار $q_.$ (شار حراتی اعمال شده بر پایه مخروط) و مقدار $h_.$ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همانطور که در شکل‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌شود با تغییر مقدار $q_.$ و $h_.$، توزیع دمای مخروط تغییر می‌کند. در شکل ۷ با افزایش مقدار $q_.$ توزیع دمای مخروط افزایش می‌یابد؛ در واقع افزایش شار حرارتی در پایه مخروط موجب افزایش دمای مخروط در این ناحیه می‌شود. بالعکس، در شکل ۸ با افزایش مقدار $h_.$، توزیع دمای مخروط کاهش می‌یابد که افزایش مقدار $h_.$، میزان خنک‌کاری مخروط را افزایش داده و به همین خاطر باعث کاهش توزیع دمای مخروط می‌شود. این میزان از خنک‌کاری با افزایش مقدار $h_.$، حدودا ۹ درصد می‌باشد. با مقایسه شکل‌های ۷ و ۸، می‌توان نتیجه گرفت که تغییرات مقدار $h_.$، تاثیری بیشتری را نسبت به تغییرات مقدار $q_.$، بر روی توزیع دمای مخروط دارد. شکل‌های ۹ و ۱۰ به ترتیب تأثیر تغییرات مقدار $q_.$ و $h_.$ بر روی کانتور توزیع دمای استوانه در جهت r و φ را نشان می‌دهند.

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، انتقال حرارت یک مخروط ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شرایط مرزی مشخص به‌صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله با استفاده از روش جدایی متغیرها یک حل دقیق برای هندسه پیچیده مساله ارائه شده است. نوآوری مسئله حاضر، حل تحلیلی برای توزیع دمای دائم دوبعدی، مخروط ساخته شده از مواد مدرج تابعی می‌باشد. در مطالعه حاضر، توزیع دمای مخروط نسبت به پارامترهای تأثیرگذار مورد بررسی قرار گرفته است. با بررسی این پارامترها روی توزیع دمای مخروط مشخص گردید که:

-تغییر در جنس مواد، توزیع دمای مخروط را تغییر می‌دهد. با توجه به روابط (۱) و (۲)، مقدار m و κ، دو عامل تاثیر گذار بر روی

جنس مواد می‌باشند. با افزایش مقدار m و κ، هدایت‌پذیری حرارتی افزایش و به تبع آن سرعت انتقال حرارت افزایش و در نهایت توزیع دمای مخروط افزایش پیدا می‌کند.

-یکی از عوامل تاثیرگذار بر روی انتقال حرارت مخروط، شار حرارتی q_0 است. با افزایش مقدار q_0، توزیع دمای مخروط افزایش می‌یابد. در واقع افزایش شار حرارتی در پایه مخروط موجب افزایش دمای مخروط در این ناحیه می‌شود.

-با افزایش مقدار h_0، توزیع دمای مخروط کاهش می‌یابد. افزایش مقدار h_0، میزان خنک‌کاری مخروط را افزایش داده و به همین خاطر باعث کاهش توزیع دمای مخروط می‌شود.

حل ارائه شده قابل تعمیم بوده و نتایج حاصل از آن می‌تواند در مرحله پیش‌ساخت لمینیت‌های مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی کمک کند. همچنین نتایج ناشی از این حل تحلیلی می‌تواند برای صحت‌سنجی مطالعات عددی پیچیده‌تر مفید باشد. علاوه بر این حل دقیق ارائه شده می‌تواند به فهم بهتر مکانیزم‌های انتقال حرارت در مواد مدرج تابعی با هندسه خاص مخروط کمک نماید.

فهرست علایم

a	فاصله نوک مخروط تا قاعده بالا (m)
b	فاصله نوک مخروط تا پایه مخروط (m)
A_n, B_n, C_n, D_n	ضرایب ثابت مرتبه n
c_p	ظرفیت گرمایی ویژه $(\mathrm{m^{2}s^{-2}K^{-1}})$
$\mathcal{F}$	تابع وابسته از y
$\mathcal{G}$	تابع وابسته از φ
h_0	ضریب هدایت جابجایی $(\mathrm{kgm^{2}s^{-3}K^{-1}})$
k_y, k_φ	هدایت پذیری حرارتی در راستای y و φ $(\mathrm{kgms^{-3}K^{-1}})$
m	ضریب ثابت مواد
q_0	شار حرارتی $(\mathrm{kgs^{-3}})$
y	جهت فاصله نوک تا پایه مخروط در دستگاه مختصات مخروط
T	توزیع دما (K)

علایم یونانی

h	ضریب هدایت جابجایی $(\mathrm{kgs^{-3}K^{-1}})$
k	هدایت پذیری حرارتی $(\mathrm{kgms^{-3}K^{-1}})$
λ_n	مقادیر ویژه برای مرتبه n
κ	نسبت ضرایب هدایت حرارتی در راستای y و φ
φ	جهت زاویه‌ای مخروط در دستگاه مختصات مخروط

مراجع

[1] B. Yildirim, S. Dag, F. Erdogan, Three dimensional fracture analysis of FGM coatings under thermomechanical loading, International journal of Fracture, 132(4) (2005) 371-397.

[2] V. Birman, T. Keil, S. Hosder, Functionally graded materials in engineering, in: Structural interfaces and attachments in biology, Springer, 2013, pp. 19-41.

[3] F. Watari, A. Yokoyama, M. Omori, T. Hirai, H. Kondo, M. Uo, T. Kawasaki, Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application, Composites Science and Technology, 64(6) (2004) 893-908.

[4] W. Pompe, H. Worch, M. Epple, W. Friess, M. Gelinsky, P. Greil, U. Hempel, D. Scharnweber, K. Schulte, Functionally graded materials for biomedical applications, Materials Science and Engineering: A, 362(1-2) (2003) 40-60.

[5] Y. Miyamoto, W. Kaysser, B. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford, Functionally graded materials: design, processing and applications, Springer Science & Business Media, 2013.

[6] R.M. Mahamood, E.T. Akinlabi, Types of functionally graded materials and their areas of application, Functionally graded materials, Springer2017, pp. 9-21

[7] S. Karimnejad, A.A. Delouei, M. Nazari, M. Shahmardan, M. Rashidi, S. Wongwises, Immersed boundary—thermal lattice Boltzmann method for the moving simulation of non-isothermal elliptical particles, Journal of Thermal Analysis and Calorimetry 138(6) (2019) 4003-4017

[8] W. Ge, C. Zhao, B. Wang, Thermal radiation and conduction in functionally graded thermal barrier coatings. Part II: Experimental thermal conductivities and

heat transfer modeling, International Journal of Heat and Mass Transfer, 134 (2019) 166-174.

[9] S. Karimnejad, A.A. Delouei, M. Nazari, M. Shahmardan, A. Mohamad, Sedimentation of elliptical particles using Immersed Boundary–Lattice Boltzmann Method: A complementary repulsive force model, Journal of Molecular Liquids, 262 (2018) 180-193.

[10] K. Torabi, H. Afshari, Thermo-Mechanical Stress Analysis in a Rotating Radially Graded FG-Disc with Non-Uniform Thickness, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering 50(1) (2018) 33-46

[11] C. Nie, B. Yu, Inversing heat flux boundary conditions based on precise integration FEM without iteration and estimation of thermal stress in FGMs, International Journal of Thermal Sciences, 140 (2019) 201-224.

[12] A.A. Delouei, A. Emamian, S. Karimnejad, H. Sajjadi, A. Tarokh, On 2D asymmetric heat conduction in functionally graded cylindrical segments: A general exact solution, International Journal of Heat and Mass Transfer, 143 (2019) 118515.

[13] A.A. Delouei, A. Emamian, S. Karimnejad, H. Sajjadi, A closed-form solution for axisymmetric conduction in a finite functionally graded cylinder, International Communications in Heat and Mass Transfer, 108 (2019) 104280.

[14] H. Awaji, Temperature and stress distributions in a plate of functionally graded materials, in: Fourth international congress on thermal stresses, 2001, pp. 8-11.

[15] M. Kayhani, M. Shariati, M. Nourozi, M.K. Demneh, Exact solution of conductive heat transfer in cylindrical composite laminate, Heat and mass transfer, 46(1) (2009) 83.

[16] M. Li, A.C. Lai, Analytical solution to heat conduction in finite hollow composite cylinders with a general boundary condition, International Journal of Heat and Mass Transfer, 60 (2013) 549-556.

[17] R. Bahadur, A. Bar-Cohen, Orthotropic thermal conductivity effect on cylindrical pin fin heat transfer, in: ASME 2005 Pacific Rim Technical Conference and Exhibition on Integration and Packaging of MEMS, NEMS, and Electronic Systems collocated with the ASME 2005 Heat Transfer Summer Conference, American Society of Mechanical Engineers, 2005, pp. 245-252.

[18] S.M. Hosseini, M. Akhlaghi, M. Shakeri, Transient heat conduction in functionally graded thick hollow cylinders by analytical method, Heat and Mass Transfer, 43(7) (2007) 669-675.

[19] M. Kayhani, M. Norouzi, A.A. Delouei, A general analytical solution for heat conduction in cylindrical multilayer composite laminates, International Journal of Thermal Sciences, 52 (2012) 73-82.

[20] A.A. Delouei, M. Kayhani, M. Norouzi, Exact analytical solution of unsteady axi-symmetric conductive heat transfer in cylindrical orthotropic composite laminates, International Journal of Heat and Mass Transfer, 55(15-16) (2012) 4427-4436.

[21] M. Norouzi, H. Rahmani, A.K. Birjandi, A.A. Joneidi, A general exact analytical solution for anisotropic non-axisymmetric heat conduction in composite cylindrical shells, International Journal of Heat and Mass Transfer, 93 (2016) 41-56.

[22] H. Wang, C. Liu, Analytical solution of two-dimensional transient heat conduction in fiber-reinforced cylindrical composites, International Journal of Thermal Sciences, 69 (2013) 43-52.

[23] H. Ding, H. Wang, W. Chen, Dynamic responses of a functionally graded pyroelectric hollow sphere for spherically symmetric problems, International journal of mechanical sciences, 45(6-7) (2003) 1029-1051.

[24] A.A. Delouei, M. Norouzi, Exact analytical solution for unsteady heat conduction in fiber-reinforced spherical composites under the general boundary conditions, Journal of Heat Transfer, 137(10) (2015) 101701.

[25] A.H. Mohazzab, M. Jabbari, Two-dimensional stresses in a hollow FG Sphere with heat source, in: Advanced Materials Research, Trans Tech Publ, 2011, pp. 700-705.

[26] M. Norouzi, A. Emamian, M. Davoodi, An analytical and experimental study on dynamics of a circulating Boger drop translating through Newtonian fluids at inertia regime, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 267

(2019) 1-13.

[27] M. Davoodi, S. Lerouge, M. Norouzi, R. Poole, Secondary flows due to finite aspect ratio in inertialess viscoelastic Taylor–Couette flow, Journal of Fluid Mechanics, 857 (2018) 823-850.

[28] J. Torabi, Y. Kiani, M. Eslami, Linear thermal buckling analysis of truncated hybrid FGM conical shells, Composites Part B: Engineering, 50 (2013) 265-272.

[29] M. Akbari, Y. Kiani, M. Eslami, Thermal buckling of temperature-dependent FGM conical shells with arbitrary edge supports, Acta Mechanica, 226(3) (2015) 897-915.

[30] M. Norouzi, H. Rahmani, On exact solutions for anisotropic heat conduction in composite conical shells, International Journal of Thermal Sciences, 94 (2015) 110-125.

[31] U. Grigull, H. Sandner, Heat conduction, (1984)) .

[32] J. Ashton, J.C. Halpin, P.H. Petit, Primer on composite materials: analysis, Technomic Publishing Company1969.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Emamian, A. Amiri Delouei, S. Karimnejad, H. Sajadi, Analytical solution of heat transfer in a cone made of functionally graded materials, Amirkabir J. Mech Eng., 53(Special Issue 1) (2021) 539-552.

DOI: 10.22060/mej.2019.16288.6320