



2-Dimensional Electroelastic Analysis of Piezoelectric Cylinders Using First-Order Shear Deformation and First-Order Electric Potential Theories

M. Parhizkar Yaghoobi, M. Ghannad*

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Semnan, Iran

ABSTRACT: Today, sensors and actuators have a special place in the science and industry world. Therefore, the electromechanical analysis of piezoelectric materials is one of the topics of interest for researchers. To that effect, besides understanding the behavior of piezoelectric structures by optimizing this behavior, they could facilitate designing and manufacturing structures. In this study, using the first-order shear deformation theory and the first-order electrical potential theory and applying the energy method, the governing equations are extracted for thick piezoelectric cylinders subjected to mechanical and electrical loading at their internal and external surfaces under various boundary conditions in two cylinder heads. Then an analytical solution is presented for the governing equations. Using this solution, the results of the electromechanical behavior of the cylinders under different boundary conditions in two cylinder heads are estimated and evaluated. Then these results are compared with the finite element method's results. The analytical solution is not a series solution, and therefore there would be no need to investigate the convergence. Furthermore, it is of less computational volume. The results obtained from the analytical method and the finite element method have a good agreement, showing that the presented analytical solution can be used with higher accuracy.

Review History:

Received: Jul. 04, 2019
Revised: Sep. 14, 2019
Accepted: Nov. 05, 2019
Available Online: Nov. 15, 2019

Keywords:

Thick cylinder
Piezoelectric
Shear deformation theory
First-order electrical potential theory

1. INTRODUCTION

The significance of the electro-elastic analysis of the piezoelectric cylinder lies in its application in a wide range of smart systems such as sensors, actuators, and active controllers [1]. That explains why so many researchers have published papers about the electro-elastic analysis of different kinds of cylinders. Nevertheless, many studies for electro-elastic analysis consider the one-dimensional electro-elastic analysis in a cylinder based on infinite length cylinder assumptions, and a few studies perform the two-dimensional electro-elastic analysis in the cylinder just for special boundary conditions in the cylinder head [2-3].

In this research, the two-dimensional electro-elastic analysis of a piezoelectric cylinder with different boundary conditions in cylinder heads (electrical and mechanical conditions), which is subjected to electro-mechanical loading in its inner and outer surface, is investigated by the analytical solution. Therefore, all electro-mechanical behaviors of the finite length piezoelectric cylinder are investigated according to the first-order shear deformation theory and first-order electrical potential theory. The analytical solution is not a kind of Series solution, hence, it does not need to check the convergence. Furthermore, it is of less computational volume and has less processing time. In order to verify the accuracy of this method, the results are compared with the results of the

finite element method analysis, which have good accuracy. Finally, the Two-Dimensional (2D) electro-elastic analysis for the finite length of the piezoelectric cylinder is done, and its electro-mechanical behavior is investigated.

2. GOVERNING EQUATIONS

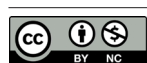
Fig. 1 shows the cross-section of the piezoelectric cylinder under electromechanical loading on the inner and outer surfaces.

based on the problem is axisymmetric, the functions expressing the electromechanical behavior (displacement field and electric potential) in the cylinder will be only a function of the radial coordinate z and the longitudinal coordinate x , which can be written by Taylor's expansion around the middle layer of the cylinder. Accordingly, we have the function of the electric potential (φ) as follows in the cylinder.

$$\varphi = \varphi(z, x) = \varphi(0, x) + z \left. \frac{\partial \varphi(z, x)}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{z^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi(z, x)}{\partial z^2} \right|_{z=0} + \dots = \varphi^0 + z \varphi^1 \quad (1)$$

Using the first-order shear deformation theory, the first-order electric potential theory, the definition of mechanical-electrical resultants [4-5], and applying the energy method [6], the system of governing equations and boundary conditions will be derived as follow:

*Corresponding author's email: mghannadk@shahroodut.ac.ir
ghannad.mehdi@gmail.com



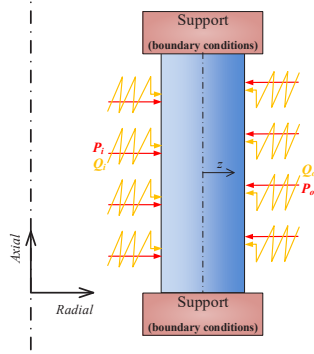


Fig. 1. Cross-section of the piezoelectric cylinder under electro-mechanical loading in inner and outer surfaces

$$\left\{ \begin{aligned}
 R \frac{dN_x^m}{dx} &= 0 \\
 R \left(Q_x^m - \frac{dM_x^m}{dx} \right) &= 0 \\
 R \left(\frac{N_\theta^m}{R} - \frac{dQ_x^m}{dx} \right) &= P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \\
 \frac{M_\theta^m}{R} + N_z^m - \frac{dM_x^m}{dx} &= \frac{h}{2R} \left(P_i \left(\frac{h}{2} - R \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right) \\
 R \frac{dN_x^e}{dx} &= Q_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - Q_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \\
 \left(N_z^e - \frac{dM_x^e}{dx} \right) &= \frac{h}{2R} \left(Q_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - Q_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right)
 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\left[N_x^m \delta U_x^0 + M_x^m \delta U_x^1 + Q_x^m \delta U_z^0 + M_{zx}^m \delta U_z^1 + N_x^e \delta \varphi^0 + M_x^e \delta \varphi^1 \right]_{0,L} = 0 \quad (3)$$

3. RESULT AND DISCUSSION

To study the electro-mechanical behavior, a cylinder with a middle layer diameter of 50 mm, a thickness of 20 mm and a length of 800 mm is considered. This piezoelectric cylinder is made PZT-4 [1]. The inner layer of the cylinder has 15×10^{-7} C/m² surface charge density and the outer layer is subjected to 600 kPa pressure. The cylinder is studied in two states (1) two clamped heads with zero electric potential, and (2) one head with zero electric potential and another one with zero surface charge density. The average total CPU time taken to perform analytical resolution is 9.586 seconds by Maple 13 software.

By comparing the state (1) and (2) in Fig. 1, it can be realized when the cylinder head is not constrained, leading to an increase in the maximum axial displacement value. As can be seen in Fig. 2 too; there is good agreement between the analytical method and the finite element method.

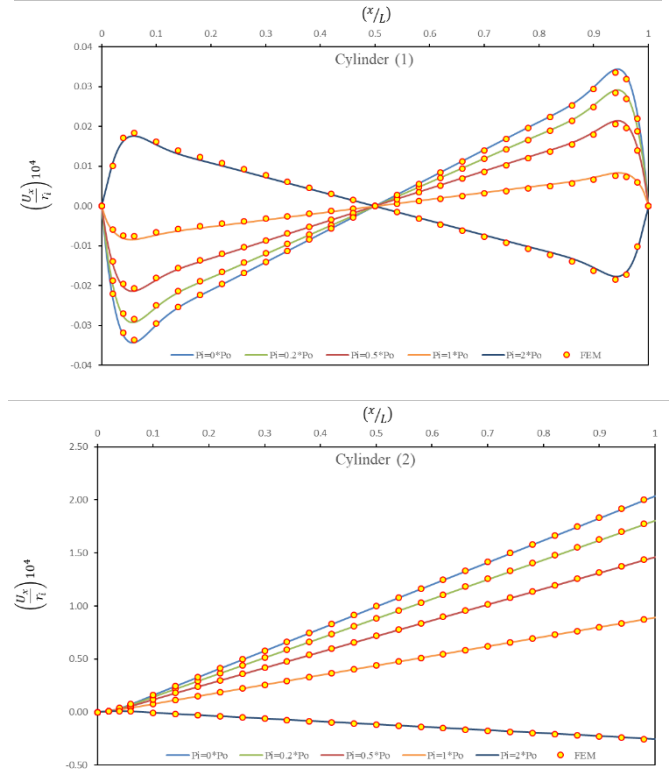


Fig. 2. Distribution of axial displacement in the middle layer of piezoelectric cylinders with various boundary conditions

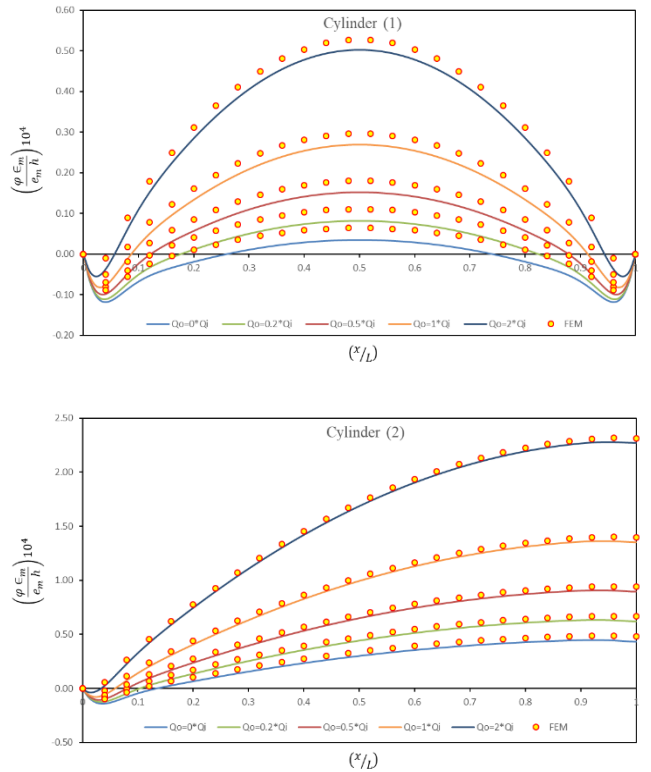


Fig. 3. Distribution of electrical potential in the middle layer of piezoelectric cylinders with various boundary conditions

4. CONCLUSIONS

Some of the important achievements of this research are listed as following:

The results show that, unlike the displacement field, it does not have much variation in the thickness direction of the cylinder. The electrical potential, even in areas far off the boundaries, changes in thickness; therefore, a two-dimensional mechanical-electrical analysis of piezoelectric actuators, sensors, and controllers of finite length cylinders is of particular importance.

Evaluation of the results of the cylinders with different boundary conditions in the two heads of cylinder shows that the absolute maximum value of the mechanical and electrical behavioral parameters of the cylinders (displacement field, electric potential, and stresses) occurs near the boundaries or at the cylinder boundaries; so, the designers should pay particular attention to border areas.

REFERENCES

- [1] J. Yang, *The mechanics of piezoelectric structures*, World Scientific, 2006.
- [2] I. Ghaffari, M.P. Yaghoobi, M. Ghannad, Complete mechanical behavior analysis of FG Nano Beam under non-uniform loading using non-local theory, *Materials Research Express*, 5(1) (2018) 015016.
- [3] M. Jabbari, M. Zamani Nejad, Electro-mechanical Analysis of Rotating Cylinder Made of Functionally Graded Piezoelectric Materials: Sensor and Actuator, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 51(1) (2019) 215-224 (in Persian).
- [4] M. Ghannad, M.P. Yaghoobi, 2D thermo elastic behavior of a FG cylinder under thermomechanical loads using a first order temperature theory, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 149 (2017) 75-92.
- [5] A. Zingoni, *Structural Engineering, Mechanics and Computation: SEMC 2001 (2 Volume Set)*, Elsevier, 2001.
- [6] I. Ghaffari, M.P. Yaghoobi, M. Ghannad, Complete mechanical behavior analysis of FG Nano Beam under non-uniform loading using non-local theory, *Materials Research Express*, 5(1) (2018) 015016.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Parhizkar Yaghoobi, M. Ghannad, *2-Dimensional Electroelastic Analysis of Piezoelectric Cylinders Using First-Order Shear Deformation and First-Order Electric Potential Theories*, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(2) (2021) 193-196.

DOI: [10.22060/mej.2019.16689.6421](https://doi.org/10.22060/mej.2019.16689.6421)





تحلیل دوبعدی الکتروالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم پیزوالکتریک با استفاده از نظریه‌های تغییر شکل برشی و پتانسیل الکتریکی مرتبه یک

محمد پرهیزکار یعقوبی، مهدی قناد*

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۴/۱۳

بازنگری: ۱۳۹۸/۰۶/۲۳

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۸/۱۴

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۸/۲۴

کلمات کلیدی:

استوانه جدار ضخیم

پیزوالکتریک

نظریه تغییر شکل برشی

نظریه پتانسیل الکتریکی مرتبه یک

خلاصه: امروزه، عملگرها و حسگرها، جایگاه ویژه‌ای در جهان علم و صنعت دارند. بنابراین تحلیل الکتروالاستیک مواد پیزوالکتریک از موضوعات مورد توجه پژوهشگران بوده تا بتوانند درک صحیحی از رفتار سازه‌ها بیابند و با بهینه‌سازی آن‌ها، گام مؤثری در طراحی و ساخت سازه‌ها بردارند. در پژوهش حاضر با استفاده از روش انرژی، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه یک و نظریه پتانسیل الکتریکی مرتبه یک، معادلات حاکم استوانه‌های جدار ضخیم پیزوالکتریک که تحت بارگذاری الکتریکی و مکانیکی در لایه‌های داخلی و خارجی استوانه و دارای شرایط مرزی مختلف در دو سر استوانه، استخراج شده است. سپس یک حل تحلیلی و ریاضی برای دستگاه معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای ارائه می‌شود و با استفاده از این حل، نتایج مربوط به رفتار الکترومکانیکی استوانه برای شرایط مرزی مختلف الکتریکی و مکانیکی استخراج شده و با نتایج عددی حاصل از روش اجزای محدود مقایسه و بررسی می‌شوند. حل تحلیلی ارائه شده در این پژوهش، زیرمجموعه حل‌های سری گونه نیست و نیاز به بررسی همگرایی پاسخ ندارد. هم‌چنین حل ارائه شده، از حجم محاسباتی کم‌تری نسبت به حل‌های سری گونه برخوردار است. نتایج به‌دست آمده از دو روش تحلیلی و عددی، دارای تطابق خوبی بوده و نشان می‌دهند که حل تحلیلی ارائه شده با دقت مطلوب، قابل استفاده می‌باشد.

۱- مقدمه

یا کنترل‌کننده فعال سازه استفاده کرد. در میان سازه‌های مکانیکی، پوسته‌ها به دلیل تحمل بار بالا، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. نمونه‌های زیادی از این سازه‌ها مانند: سقف‌های گنبدی، تانکرها، مخازن تحت فشار، رآکتورهای اتمی، پرتابه‌ها، موشک‌ها و ... در مصنوعات ساخت بشر یافت می‌شوند. سازه‌های پوسته‌ای در سیستم‌های طبیعی نیز یافت می‌شوند که می‌توان برای مثال از جمجمه، صدف، لاک و ... نام برد. این نمونه‌ها، تنها بخش محدودی از کاربرد وسیع پوسته‌ها در سیستم‌های طبیعی و مصنوعی می‌باشند [۱]. در میان هندسه‌های مختلف پوسته‌ای، استوانه‌ها به دلیل فراوانی کاربرد و سهولت ساخت، از گذشته مورد توجه پژوهشگران بوده و کماکان می‌باشد.

امروزه، پژوهشگران به دنبال موادی هستند که علاوه بر دارا بودن خواص مطلوب سازه‌ای نظیر وزن کم و استحکام بالا، دارای ویژگی‌های مطلوب دیگری نیز باشند تا بتوان توسط این گروه از مواد، انقلاب تازه‌ای را در سازه‌ها، دستگاه‌ها و تجهیزات مکانیکی ایجاد کنند. پیزوالکتریک‌ها موادی هستند که بر اثر ایجاد تغییر شکل در آن‌ها، میدان الکتریکی تولید می‌شود و بر اثر اعمال این میدان بر روی آن‌ها، مجدداً دچار تغییر شکل می‌شوند. پیزوالکتریک‌ها را می‌توان به عنوان مواد هوشمند^۱ تلقی کرد، زیرا رفتار الکترومکانیکی این گروه از مواد باعث می‌شود که از این مواد بتوان به عنوان عملگر^۲، حسگر^۳ و

- 1 Smart Materials
- 2 Actuator
- 3 Sensor

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mghannadk@shahroodut.ac.ir

نظریه پیزوترموالاستیک پوسته نازک، بر اساس نظریه پیزوالکتریک خطی و فرضیات لوو-کیرشفیلد توسط تئزو و هووارد [۲] در سال ۱۹۹۴ استخراج گردید؛ در این پژوهش ماده به‌صورت



ناهمگنی و رفتار الکتروالاستیک سازه مورد بحث و بررسی قرار گرفت. دای و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۱۰ با استفاده از نظریه الاستیسیته مستوی^۳، تحلیل یک‌بعدی الکتروترموگنتوالاستیک استوانه‌های ناهمگن را به‌دست آوردند. در این پژوهش، انتقال حرارت و تعادل الکترواستاتیک به‌صورت یک‌بعدی و در راستای شعاعی در نظر گرفته شد و فرض شد استوانه در میدان یکنواخت مغناطیسی در راستای محور خود قرار دارد. ایشان با حل این معادلات و اعمال شرایط مرزی، به مطالعه و بررسی رفتار الکتروترموگنتوالاستیک استوانه تحت بارگذاری الکتروترموگنتوالاستیک پرداختند. سپس دای و همکاران [۱۱] با استفاده از نظریه الاستیسیته مستوی، حل تحلیلی یک‌بعدی سازه‌های پوسته‌ای توخالی از جنس مواد پیزوالکتریک متغیر تابعی را به‌دست آوردند. طبق این پژوهش، استوانه و کره توخالی که تحت بارهای مکانیکی و الکتریکی قرار داشت و خواص آن به‌صورت توانی تغییر می‌کرد، بررسی شد. اندکی بعد، لی و همکاران [۱۲] مشابه پژوهش [۱۱]، با استفاده از نظریه الاستیسیته مستوی و به‌کارگیری انتگرال فردهولم، حل یک‌بعدی دقیق استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک را برای هر توزیع دلخواه ناهمگنی خواص به‌دست آوردند و نتایج را تنها برای زمانی که خواص به‌صورت توانی و کسر حجمی تغییر می‌کرد، نشان دادند. در همین سال، حل‌های تحلیلی برای دو نوع محرک‌های پیزوالکتریک تحت بارهای برشی توسط تائوتائو و ژیفای [۱۳] در سال ۲۰۱۰ ارائه شد و اندکی بعد ایشان حل دقیق رفتار الکتروالاستیک را برای دو نوع استوانه پیزوالکتریک دارای خواص متغیر ارائه نمودند [۱۴]. در این تحقیق، با استفاده از توابع تنش ایری^۴ و فرضیات کرنش صفحه‌ای تحلیل الکتروالاستیک برای استوانه‌های ناهمگن چندلایه و استوانه‌های ناهمگن یکپارچه مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

در سال ۲۰۱۱ یک حل دقیق یک‌بعدی (در راستای شعاعی) با استفاده از نظریه الاستیسیته مستوی در شرایط کرنش صفحه‌ای (استوانه طویل) برای استوانه‌های از جنس مواد متغیر تابعی پیزوالکتریک توسط ونگ [۱۵]، ارائه شد. در این مقاله، آثار تغییرات خواص بر روی رفتار الکتروالاستیک سیلندر مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در همین سال تحلیل الکتروالاستیک استوانه‌های متغیر تابعی پیزوالکتریک ساندویچی چندلایه با شرایط مرزی تکیه‌گاهی دو سر کاملاً ساده که تحت بارگذاری الکترومکانیکی در لایه‌های داخلی و

همسانگرد عرضی در نظر گرفته شد، سپس ایشان با استفاده از ساده‌سازی‌هایی که مبتنی بر پارامترهای لامه و شعاع انحناها بود، کاربرد این نظریه را برای محیط‌های مختلف پیزوالکتریکی نشان دادند. در سال ۱۹۹۵، تئزو و باو [۳] کاری مشابه پژوهش پیشین انجام دادند، با این تفاوت که ماده را به‌صورت ناهمسانگرد در نظر گرفتند و معادلات ترموالکترومکانیکی حاکم بر پوسته چندلایه را با استفاده از اصل همیلتون^۱ استخراج کردند.

در سال ۱۹۹۶ کاپوریا و همکاران [۴] با استفاده از توابع پتانسیلی که شرایط مرزی را در دو سر پوسته استوانه‌ای ارضا می‌کرد، حل تحلیلی پیزوترموالاستیک پوسته استوانه‌ای متقارن محوری محدود را با استفاده از سری‌ها به‌دست آوردند. در سال ۲۰۰۰ بن‌جی‌دو [۵] مطالعه مروری را بر پیشرفت مدل‌سازی اجزای محدود پیزوالکتریک المان‌های سازه‌ای انطباق‌پذیر انجام داد. حل دقیق پیزوترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد متغیر تابعی^۲ با استفاده از سری‌های توانی و فوریه، توسط ژیاو-هونگ و همکاران [۶] در سال ۲۰۰۳ ارائه شد. با استفاده از تبدیل هانکل، معادله انتقال حرارت هدایتی فوریه را در حالت پایدار حل و میدان دما را به‌صورت معین در معادلات فرض کردند؛ ایشان معادلات حاکم را برای حالتی حل کردند که شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی دو سر استوانه به‌صورت تکیه‌گاه ساده و اتصال به زمین باشند. در سال ۲۰۰۵، بن‌جی‌دو و آندریان‌آری‌سون [۷] نظریه ترموپیزوالکتریک همراه با حساب تغییرات را برای کامپوزیت‌های چندلایه هوشمند ارائه کردند.

در سال ۲۰۰۷، وو و تسای [۸] حل سه‌بعدی مگنتوالکتروالاستیک پوسته‌های ناهمگن دارای دو انحنا را ارائه کردند، که دارای شرایط مرزی مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی کاملاً ساده در لبه خود بودند. ایشان نشان دادند که میدان سینماتیک به‌دست آمده از نظریه کلاسیک جفت‌شده پوسته ممکن است در زمانی که بارهای مغناطیسی و الکتریکی هم‌زمان وجود دارد، برای پوسته‌های ناهمگن و مگنتوالکتروالاستیک مناسب نباشد. سپس، وو و سیو [۹] حل دقیق پنل‌های منحنی‌وار استوانه‌ای از جنس مواد متغیر تابعی پیزوالکتریک را به‌دست آوردند. در این پژوهش با استفاده از فرض طویل بودن پنل و وجود شرایط مرزی کاملاً ساده تکیه‌گاهی و اتصال به زمین در لبه‌های پنل در راستای محیطی حل دقیق را استخراج نمودند و آثار

3 Plane Elasticity Theory (PET)

4 Airy

1 Hamiltonians Principal

2 Functionally Graded Materials (FGMs)

قرار داشت. با استفاده از شرایط تئوری کلاسیک (عدم وجود تنش برشی) و طولی بودن استوانه (حالت کرنش صفحه‌ای)، اقدام به استخراج معادلات حاکم انجام شد. در این پژوهش با استفاده از روش اویلر-کوشی اقدام به حل معادلات حاکم انجام شد و شرایط پیوستگی برای ناحیه تماس استوانه‌های داخلی و خارجی، برابر بودن جابه‌جایی شعاعی و تنش شعاعی در نظر گرفته شد.

جباری و اقدم [۲۵] در سال ۲۰۱۵ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های سه‌لایه را که از دو استوانه همگن پیزوالکتریک و یک استوانه ناهمگن تشکیل می‌شد، به‌دست آوردند. استوانه ناهمگن میان استوانه‌های همگن پیزوالکتریک قرار می‌گرفت. ایشان با استفاده از تئوری کلاسیک و حالت کرنش صفحه‌ای و فرض تغییرات یک‌بعدی میدان حرارتی و الکتریکی در راستای شعاعی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسأله را استخراج و با استفاده از شرایط مرزی و پیوستگی اقدام به حل معادلات حاکم شد.

دای و جیانگ [۲۶] در سال ۲۰۱۵ با استفاده از نظریه خطی پوسته فن کارمن^۲، تحلیل ترمومگنتوالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن را انجام دادند. تغییرات دما به‌صورت یک‌بعدی و در راستای شعاعی در نظر گرفته شد و فرض شد استوانه تحت میدان یکنواخت مغناطیسی در راستای شعاعی قرار دارد. در این پژوهش آثار ناهمگنی، بارگذاری ترمومگنتوالاستیک و شرایط مرزی بر رفتار مگنتومکانیکی استوانه بررسی شد.

عطریان و همکاران [۲۷] در سال ۲۰۱۵، تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک را که تحت بارگذاری نامتقارن محوری بود، به‌دست آوردند. رفتار الکتروترمومکانیکی استوانه جدار ضخیم ناهمگن به‌صورت دویبعدی و در راستای شعاعی و محیطی مطالعه و بررسی شد. نسبت پواسون، ثابت و سایر خواص به‌صورت ناهمگن شعاعی فرض شدند. هم‌چنین از فرض قرار داشتن استوانه تحت پتانسیل الکتریکی متقارن محوری استفاده شد که منجر به ساده‌سازی جفت‌شدگی معادلات تعادل میدان مکانیکی و الکتریکی گردید و با استفاده از روش جداسازی متغیرها و استفاده از سری فوریه، حل دقیق مسأله به‌دست آمد. تحلیل الکتروالاستیک استوانه‌های چرخان ناهمگن پیزوالکتریک با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا، توسط جباری و زمانی‌نژاد [۲۸] در سال ۲۰۱۷ ارائه شد.

خارجی استوانه قرار داشتند، توسط وو و تسای [۱۶] ارائه شد. در سال ۲۰۱۲، رحیمی و همکاران [۱۷] به وسیله نظریه تغییر شکل برشی مرتبه یک^۱، استوانه جدار ضخیم ناهمگن پیزوالکتریک تحت فشار داخلی را تحلیل کردند. در این پژوهش، ناهمگنی خواص به‌صورت توانی مدل‌سازی شد. ایشان نشان دادند که نظریه تغییر شکل برشی مقادیر جابه‌جایی را با دقت خوبی پیش‌بینی می‌کند و در نواحی دور از مرز تطابق خوبی با نظریه الاستیسیته مستوی دارد. در ادامه عارفی و رحیمی [۱۸] معادلات حرکت سه‌بعدی حاکم بر پوسته‌های ساخته شده از مواد متغیر تابعی پیزوالکتریک حاصل از دوران با شعاع انحنا و جدار متغیر دلخواه که دارای توزیع ناهمگنی دلخواه در سازه بودند را با استفاده از روش انرژی استخراج و بیان کردند. سپس، دای و همکاران [۱۹] تحلیل تنش یک‌بعدی را با استفاده از فرض طولی بودن استوانه (شرایط کرنش صفحه‌ای) در استوانه‌های چرخان ساخته شده از مواد متغیر تابعی پیزوالکتریک که تحت بارگذاری حرارتی، مکانیکی و الکتریکی قرار داشت انجام دادند. هم‌چنین، قربان‌پور آرانی و همکاران [۲۰]، تحلیل تنش یک‌بعدی را برای استوانه‌ای با توزیع ناهمگنی خواص به‌صورت نمایی انجام دادند. در همین سال، عارفی و همکاران [۲۱] حل دقیق استوانه‌های طولی متغیر تابعی پیزوالکتریک را که تحت بارگذاری یک‌بعدی الکتروترمومکانیکی قرار گرفته و در میدان مغناطیسی قرار داشتند، ارائه نمودند. سپس، تحلیل دویبعدی الکتروالاستیک استوانه‌های ساخته شده از مواد متغیر تابعی پیزوالکتریک در راستای شعاعی و محیطی توسط جعفری فشارکی و همکاران [۲۲] انجام شد. در ادامه تحلیل الکتروترموالاستیک استوانه‌های متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن متخلل اشباع شده با مایع توسط جباری و همکاران [۲۳] ارائه شد. تحلیل ارائه شده در این پژوهش به‌صورت یک‌بعدی و در راستای شعاعی ارائه شد و حل دقیق با استفاده از سری فویه مختلط و روش قانون توابع توانی بدست آمد.

لقمان و پارسا [۲۴] در سال ۲۰۱۴ حل دقیق مگنتو ترموالاستیک استوانه دولایه‌ای طولی را که جنس استوانه داخلی ناهمگن و استوانه خارجی همگن بود، به‌دست آوردند. استوانه تحت میدان یک‌بعدی دمایی و مغناطیسی قرار داشت که تنها در راستای شعاعی تغییر می‌کرد و هم‌چنین در شعاع داخلی و خارجی تحت بارگذاری فشاری

2 Von Karman

1 First Order Shear Deformation Theory (FSDT)

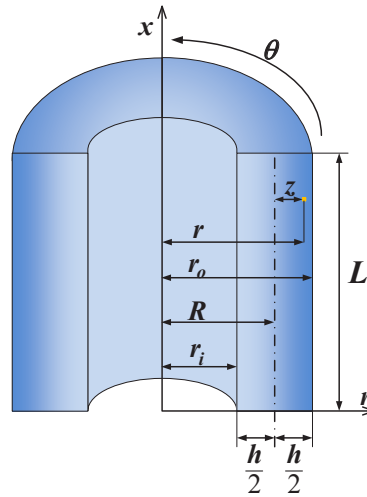


Fig. 1. Geometry and cross-section of the axisymmetric piezoelectric cylinder

شکل ۱: هندسه و مقطع استوانه پیزوالکتریک متقارن محوری

روش تحلیلی، حل آن انجام می‌شود. با اعمال شرایط مرزی دلخواه الکترومکانیکی در دو سر استوانه، ثابت‌های حل تحلیلی دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ای به دست می‌آید و نتایج عددی برای استوانه با شرایط مرزی مختلف نشان داده می‌شود. در انتها نتایج حل تحلیلی با نتایج حاصل از روش اجزای محدود^۲ مقایسه و ارزیابی می‌شوند.

۲- دستگاه معادلات حاکم

پوسته استوانه‌ای مورد تحلیل از نظر هندسه، جنس، بارگذاری و شرایط مرزی، متقارن محوری است و می‌توان از تغییرات در راستای محیطی استوانه چشم‌پوشی کرد؛ بنابراین توابع بیان‌کننده رفتار مکانیکی، الکتریکی مستقل از زاویه^۱ Θ بوده و تابعی از شعاع r و محور x استوانه می‌باشند.

با توجه به آنچه که بیان شد، میدان جابه‌جایی در این حالت به صورت زیر است.

$$u_r = u_r(r, x), u_\theta = 0, u_x = u_x(r, x) \quad (1)$$

u_r ، u_θ و u_x مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای شعاعی، محیطی و محوری هستند که $u_r(r, x)$ و $u_x(r, x)$ تابعی از شعاع و محور استوانه می‌باشند. مطابق شکل ۱، فاصله هر نقطه از پوسته استوانه‌ای تا محور تقارن آن (۲) به صورت فاصله آن تا لایه میانی استوانه (z)

در این پژوهش توزیع پتانسیل الکتریکی به صورت رابطه پیشنهادی [۲۹] در نظر گرفته شد و با استفاده از روش انرژی معادلات حاکم برای استوانه‌های ناهمگن با توزیع توانی استخراج گردید. پرهیزکار یعقوبی و همکاران [۳۰] در سال ۲۰۱۸ تحلیل تنش و تحلیل کنترل فعال استوانه‌های بلند (حالت کرنش صفحه‌ای) و دیسک‌های نازک (حالت تنش صفحه‌ای) ناهمگن پیزوالکتریک را با استفاده از نظریه الاستیسیته مستوی انجام دادند. در این پژوهش ایشان فرض کردند که سطح داخلی سازه به عنوان حسگر و سطح خارجی آن به عنوان عملگر باشد و بر اساس روش ناویر، حل دقیق یک‌بعدی (در راستای شعاعی) را برای سازه‌های مذکور ارائه کردند.

با توجه به پیشینه مذکور، به نظر می‌رسد که در نظر گرفتن تنش و کرنش برشی و تحلیل دوبعدی الکتروالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم با طول محدود در حالت کلی شرایط مرزی، بررسی نشده و تنها در مواردی محدود به صورت یک‌بعدی و یا با در نظر گرفتن شرایط مرزی خاص در دو سر استوانه، حل تحلیلی سری‌گونه آن انجام شده است. برای این منظور در پژوهش حاضر با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه یک، نظریه مرتبه یک میدان الکتریکی^۱ و استفاده از روش انرژی، معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم با طول محدود که تحت بارگذاری الکترومکانیکی قرار دارد؛ با شرایط مرزی دلخواه الکترومکانیکی در دو سر آن به دست می‌آید. معادلات تعادل حاکم به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل است که با استفاده از

2 Finite Element Method (FEM)

1 First Order Electrical Potential Theory (FEPT)

$$\varphi = \varphi(z, x) = \varphi(0, x) + z \left. \frac{\partial \varphi(z, x)}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{z}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi(z, x)}{\partial z^2} \right|_{z=0} + \dots = \varphi^0 + z \varphi^1 \quad (5)$$

که φ^0 و φ^1 به ترتیب مؤلفه‌های مرتبه صفر و یک پتانسیل الکتریکی بوده که تنها تابعی از مختصه محوری x است.

با استفاده از روابط گرادیان در مختصات استوانه‌ای و استفاده از روابط (۴) و (۵) میدان کرنش و میدان الکتریکی استخراج می‌شود [۵].

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= U_z^1, \quad \varepsilon_\theta = \frac{U_z^0 + z U_z^1}{R + z}, \\ \varepsilon_x &= \frac{dU_x^0}{dx} + z \frac{dU_x^1}{dx}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{dU_z^0}{dx} + z \frac{dU_z^1}{dx} + U_x^1 \end{aligned} \quad (6)$$

ε_z ، ε_θ و ε_x به ترتیب کرنش‌های نرمال شعاعی، محیطی و محوری می‌باشند. همچنین γ_{zx} کرنش برشی شعاعی-محوری است.

$$E_z = -\varphi^1, \quad E_\theta = 0, \quad E_x = -\frac{d\varphi^0}{dx} - z \frac{d\varphi^1}{dx} \quad (7)$$

E_z ، E_θ و E_x مؤلفه‌های میدان الکتریکی به ترتیب در راستای شعاعی، محیطی و محوری می‌باشند. در ادامه معادلات ساختاری برای استوانه همسانگرد عرضی^۱ با در نظر گرفتن قطبی بودن^۲ در راستای شعاعی با استفاده از [۳۳] بیان می‌گردد.

$$\begin{aligned} \sigma_z &= c_{11} \varepsilon_z + c_{12} \varepsilon_\theta + c_{12} \varepsilon_x - e_{11} E_z \\ \sigma_\theta &= c_{12} \varepsilon_z + c_{22} \varepsilon_\theta + c_{23} \varepsilon_x - e_{12} E_z \\ \sigma_x &= c_{12} \varepsilon_z + c_{23} \varepsilon_\theta + c_{22} \varepsilon_x - e_{12} E_z \\ \tau_{zx} &= c_{55} \gamma_{zx} - e_{35} E_x \\ D_z &= e_{11} \varepsilon_z + e_{12} \varepsilon_\theta + e_{12} \varepsilon_x + \epsilon_{11} E_z \\ D_x &= e_{35} \gamma_{zx} - \epsilon_{22} E_x \end{aligned} \quad (8)$$

به‌علاوه فاصله لایه میانی تا محور تقارن استوانه (R) بیان می‌شود. این کار، سبب تغییر مختصه و جزء دیفرانسیلی، از r به z می‌شود $(dr, (r, x) \rightarrow dz, (z, x))$ [۳۲-۳۱]. با توجه به آن‌چه بیان شد، داریم.

$$r = R + z, \quad R = \frac{r_o + r_i}{2}, \quad h = r_o - r_i \quad (2)$$

همچنین برای بازه تغییرات z و x داریم.

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (3)$$

در نظریه تغییرشکل برشی مرتبه یک، فرض بر این است که خطوط راست و عمود بر صفحه میانی، پس از تغییرشکل، راست باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود بر صفحه میانی نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی لحاظ می‌گردد. میدان جابه‌جایی برای استوانه متقارن محوری با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه یک به‌صورت زیر بیان می‌شود [۳۱-۳۲].

$$\begin{aligned} U_z &= U_z(z, x) = U_z^0(x) + z U_z^1(x) = U_z^0 + z U_z^1 \\ U_\theta &= 0 \\ U_x &= U_x(z, x) = U_x^0(x) + z U_x^1(x) = U_x^0 + z U_x^1 \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن U_z ، U_θ و U_x مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در راستای شعاعی، محیطی و محوری می‌باشند؛ همچنین با توجه به نظریه تغییر شکل برشی، U_z^0 و U_z^1 به ترتیب مؤلفه‌های مرتبه صفر و یک جابه‌جایی شعاعی و U_x^0 و U_x^1 به ترتیب مؤلفه‌های مرتبه صفر و یک جابه‌جایی محوری است که تنها تابعی از مختصه محوری x می‌باشند. با توجه به فرض متقارن محوری بودن مسأله تابع بیان کننده توزیع پتانسیل الکتریکی φ در استوانه تنها تابعی از مختصه شعاعی z و مختصه طولی x طولی خواهد بود ($\varphi(z, x)$) که می‌توان بسط تیلور این تابع را حول لایه میانی استوانه ($z=0$) نوشت. در نظریه پتانسیل الکتریکی مرتبه یک فرض بر این است که تغییرات پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت به صورت خطی است و در واقع می‌توان رفتار تابع را با تقریب خوبی با دو جمله از سری تیلور آن در نظر گرفت [۵].

1 Transversely Isotropic
2 Polarized

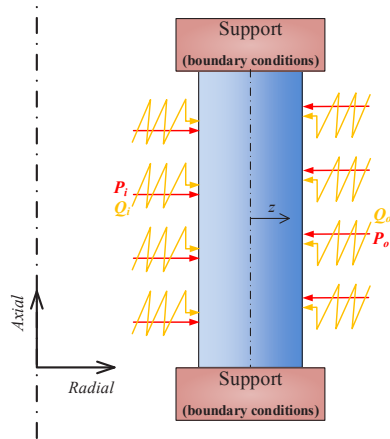


Fig. 2. Cross-section of the piezoelectric cylinder under electro-mechanical loading in inner and outer surfaces

شکل ۲: مقطع استوانه پیزوالکتریک تحت بارگذاری الکترومکانیکی در سطوح داخلی و خارجی

در رابطه (۸) σ_x و σ_θ ، σ_z به ترتیب تنش‌های نرمال شعاعی، محیطی و محوری، τ_{zx} تنش برشی شعاعی-محوری و D_x و D_z به ترتیب مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی الکتریکی در راستای شعاعی و محوری می‌باشند. همچنین c_{11} ، c_{12} ، c_{22} ، c_{23} و c_{55} ثابت‌های الاستیک، e_{11} ، e_{12} و e_{35} ثابت‌های پیزوالکتریک-تنش و ϵ_{11} و ϵ_{22} ثابت‌های دی‌الکتریک هستند. شایان ذکر است؛ اندیس‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر جهت‌های شعاعی، محیطی و محوری هستند.

شکل ۲ مقطع استوانه پیزوالکتریک را نشان می‌دهد که در سطوح داخلی و خارجی تحت بارگذاری الکترومکانیکی قرار دارد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود فشار P_i و چگالی بار الکتریکی Q_i به سطح خارجی استوانه و فشار P_o و چگالی بار الکتریکی Q_o به سطح داخلی استوانه اعمال می‌شوند.

منتجه‌های مکانیکی و الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌گردند

[۳۱، ۳۲، ۳۴].

$$\begin{Bmatrix} N_z^m \\ N_\theta^m \\ N_x^m \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} dz \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} M_\theta^m \\ M_x^m \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} z dz \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x^m \\ M_{zx}^m \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \tau_{zx} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} N_z^e \\ N_x^e \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} D_z \\ D_x \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (12)$$

$$M_x^e = \int_{-h/2}^{h/2} D_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \quad (13)$$

براساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی پتانسیل الکترومکانیکی سازه، برابر با تغییرات کار ناشی از نیروهای خارجی اعمالی به سازه است ($\delta U = \delta W$) [۵، ۷، ۳۵]. که U انرژی پتانسیل الکترومکانیکی کل جسم و W کل کار ناشی از اعمال فشار و چگالی بار الکتریکی در سطوح داخلی و خارجی استوانه است. انرژی پتانسیل الکترومکانیکی کل جسم و کار ناشی از این نیروها به صورت زیر محاسبه می‌شود [۵ و ۷].

$$\begin{cases} U = \iiint U^* d\Omega; d\Omega = r dr d\theta dx = (R+z) dz d\theta dx \\ U^* = \frac{1}{2} (\sigma_z \epsilon_z + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \sigma_x \epsilon_x + \tau_{zx} \gamma_{zx} - D_z E_z - D_x E_x) \end{cases} \quad (14)$$

$$W = \iint_S \left(P_i u_r|_{r=r_i} - P_o u_r|_{r=r_o} - Q_i \phi|_{r=r_i} - Q_o \phi|_{r=r_o} \right) dS \quad (15)$$

تغییرات کار و انرژی [۵ و ۷]:

$$\delta U = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} - D_z \delta E_z - D_x \delta E_x)(R+z) dz d\theta dx$$

$$\delta W = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left((P_i u_r|_{r=r_i} - Q_i \phi|_{r=r_i})(R - \frac{h}{2}) - (P_o u_r|_{r=r_o} + Q_o \phi|_{r=r_o})(R + \frac{h}{2}) \right) d\theta dx \quad (16)$$

دستگاه برابر ۶ است. لذا، امکان حل این دستگاه براساس منته‌های مکانیکی و الکتریکی میسر نیست و می‌بایست دستگاه معادلات (۱۷) براساس مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی که ۶ عدد می‌باشند، بیان شوند. این امر مستلزم انجام عملیات ریاضی و استفاده از معادلات (۶) تا (۱۳) در دستگاه معادلات (۱۷) است تا این دستگاه معادلات براساس مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی بیان شود؛ لذا:

$$\tilde{A} \frac{d^2}{dx^2} \bar{y} + \tilde{B} \frac{d}{dx} \bar{y} + \tilde{C} \bar{y} = \tilde{F};$$

$$\bar{y} = \left\{ U_z^0 \quad U_z^1 \quad \frac{dU_x^0}{dx} \quad U_x^1 \quad \frac{d\phi^0}{dx} \quad \phi^1 \right\}^T \quad \& \quad (19)$$

$$\tilde{F} = \{ K_9 \quad 0 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 x + K_{10} \quad F_6 \}^T$$

با قرار دادن روابط (۶) تا (۸) در رابطه (۱۶)، به‌کارگیری اصل کار مجازی ($\delta U - \delta W = 0$) و استفاده از اصل ریاضی $\int_0^L F(x)G'(x) dx = F(x)G(x)|_0^L - \int_0^L F'(x)G(x) dx$ و ساده‌سازی، دستگاه معادلات حاکم و شرایط مرزی به ترتیب به صورت روابط (۱۷) و (۱۸) به‌دست می‌آید.

که $\tilde{A}_{6 \times 6}$ ، $\tilde{B}_{6 \times 6}$ و $\tilde{C}_{6 \times 6}$ ماتریس‌های ضرایب و $\tilde{F}_{6 \times 1}$ شبه‌برداری نیروی الکترومکانیکی می‌باشد که مؤلفه‌های غیرصفر آن‌ها در پیوست ارائه شده است. K_9 و K_{10} از ثابت‌های حل بوده که به دلیل انتگرال‌گیری از معادلات حاکم (۱۷) ایجاد شده‌اند. حل این دستگاه معادلات (۱۷) شامل دو بخش: حل خصوصی \bar{y}_p و حل عمومی \bar{y}_g است.

$$\bar{y} = \bar{y}_p + \bar{y}_g \quad (20)$$

۳-۱ حل خصوصی دستگاه معادلات حاکم

همان‌گونه که از معادله (۱۹) پیداست؛ قسمت ناهمگن دستگاه معادلات دیفرانسیل یک چندجمله‌ای مرتبه یک است. بنابراین حل قسمت خصوصی به‌صورت یک چندجمله‌ای مرتبه یک با ضرایب نامعین است.

$$\bar{y}_p = \bar{y}_{p1} x + \bar{y}_{p0} \quad (21)$$

این ضرایب نامعین (مجهول) به‌صورت زیر مشخص (معلوم) می‌شود.

$$\left\{ \begin{aligned} R \frac{dN_x^m}{dx} &= 0 \\ R \left(Q_x^m - \frac{dM_x^m}{dx} \right) &= 0 \\ R \left(\frac{N_\theta^m}{R} - \frac{dQ_x^m}{dx} \right) &= P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \\ \left(\frac{M_\theta^m}{R} + N_z^m - \frac{dM_{xz}^m}{dx} \right) &= \frac{h}{2R} \left(P_i \left(\frac{h}{2} - R \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right) \\ R \frac{dN_x^e}{dx} &= Q_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - Q_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \\ \left(N_z^e - \frac{dM_x^e}{dx} \right) &= \frac{h}{2R} \left(Q_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - Q_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right) \end{aligned} \right. \quad (17)$$

هم‌چنین برای شرایط مرزی:

$$[N_x^m \delta U_x^0 + M_x^m \delta U_x^1 + Q_x^m \delta U_z^0 + M_{xz}^m \delta U_z^1 + N_x^e \delta \phi^0 + M_x^e \delta \phi^1]_{0,L} = 0 \quad (18)$$

۳-۲ حل تحلیلی دستگاه معادلات حاکم

در این بخش، یک حل تحلیلی برای دستگاه معادلات (۱۷) ارائه می‌شود. در دستگاه معادلات (۱۷) تعداد مجهولات یا منته‌های مکانیکی و الکتریکی برابر ۱۰ است در حالی که تعداد معادلات در این

۳-۳ شرایط مرزی

شرایط مرزی به دو دسته شرایط مرزی هندسی (یا ضروری)^۱ و شرایط مرزی دینامیک (یا طبیعی)^۲ دسته‌بندی می‌شوند [۳۶]. شرایط مرزی هندسی یا اساسی، شرایط مرزی است که یک قید سینماتیک به مرز سیستم تحمیل می‌کند که در چنین مرزی نیروها خود را برای حفظ محدودیت تنظیم می‌کنند. از سوی دیگر شرایط مرزی دینامیک یا طبیعی، شرایط مرزی است که یک قید نیرویی به سیستم تحمیل می‌کند که در چنین مرزی هندسه خود را برای حفظ محدودیت تنظیم می‌کند. به عبارت دیگر، شرایط اساسی یا هندسی همان شرایط مرزی دیریکله^۳ هست که وجود آن برای حل مسأله ضرورت دارد و شرایط مرزی دینامیک یا طبیعی همان شرایط مرزی نیومن^۴ است. شرایط مرزی در دو سر استوانه می‌تواند از نوع شرایط ضروری باشد، برای مثال برای استوانه با دوسر گیردار و دارای پتانسیل الکتریکی صفر در دو سر این شرایط به صورت زیر بیان می‌شود.

$$x = 0, L \rightarrow \begin{cases} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (28)$$

شرایط مرزی در دو سر استوانه می‌تواند ترکیبی از شرایط ضروری و طبیعی باشد، برای مثال برای استوانه با یک‌سر گیردار و دارای پتانسیل الکتریکی صفر و یک سر آزاد و فاقد بار الکتریکی سطحی، شرایط مرزی در دو سر این استوانه به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}; x = L \rightarrow \begin{cases} N_x^m \\ M_x^m \\ Q_x^m \\ M_{zx}^m \\ N_x^e \\ M_x^e \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{p1} &= \bar{C}^{-1} \times \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ F_5 \ 0\}^T \\ \bar{y}_{p0} &= \bar{C}^{-1} \times (\{K_9 \ 0 \ F_3 \ F_4 \ K_{10} \ F_6\}^T - \bar{B} \bar{y}_{p1}) \end{aligned} \quad (22)$$

۲-۳ حل عمومی دستگاه معادلات حاکم

برای حل عمومی، می‌باید دستگاه معادلات به صورت زیر حل شود.

$$\tilde{A} \frac{d^2}{dx^2} \bar{y} + \tilde{B} \frac{d}{dx} \bar{y} + \tilde{C} \bar{y} = \bar{0} \quad (23)$$

حل عمومی به فرم $\bar{y}_g = \bar{\xi} e^{mx}$ است و با جایگذاری آن در رابطه (۲۳)، مسأله مقدار ویژه به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$(\tilde{A} m^2 + \tilde{B} m + \tilde{C}) \bar{\xi} e^{mx} = \bar{0} \quad (24)$$

که برای این منظور می‌باید دترمینان دستگاه معادلات (۲۴) برابر صفر باشد.

$$\det(\tilde{A} m^2 + \tilde{B} m + \tilde{C}) = 0 \quad (25)$$

با حل مسأله مقدار ویژه (رابطه (۲۵)) و پیدا کردن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با آن‌ها، حل عمومی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\bar{y}_g = \sum_{i=1}^8 K_i \bar{\xi} e^{m_i x} \quad (26)$$

بنابراین حل دستگاه معادلات (۱۹) به دست می‌آید.

$$\left\{ U_z^0 \ U_z^1 \ \frac{dU_x^0}{dx} \ U_x^1 \ \frac{d\varphi^0}{dx} \ \varphi^1 \right\}^T = \sum_{i=1}^8 K_i \bar{\xi} e^{m_i x} + \bar{y}_p \quad (27)$$

با توجه به رابطه (۲۷)، حل به دست آمده برای مشتق‌های توابع U_x^0 و φ^0 می‌باشد؛ لذا برای به دست آوردن این توابع، می‌باید از حل ارائه شده برای مشتق این توابع، انتگرال گرفت که در این صورت، ثابت‌های K_{11} و K_{12} به دست می‌آیند. اکنون با اعمال شرایط مرزی در دو سر استوانه، ثابت‌های به دست می‌آیند.

1 Essential B.C.
2 Natural B.C.
3 Dirichlet B.C.
4 Neumann B.C.

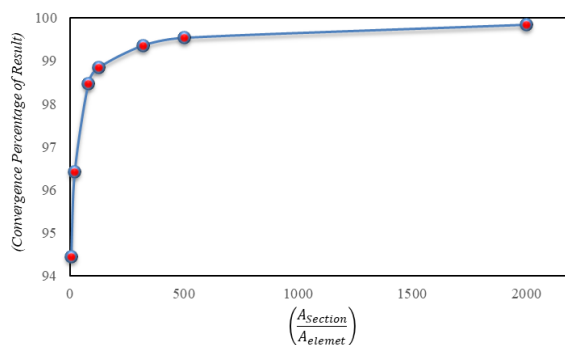


Fig. 3. The convergence curve of finite element analysis

شکل ۳: نمودار همگرایی تحلیل المان محدود

مستطیل شکل قرار می‌گیرد. شکل ۳ درصد همگرایی نتایج را به ازای نسبت مساحت سطح مقطع استوانه به مساحت المان مربعی شکل نشان می‌دهد؛ زمانی که مساحت سطح مقطع استوانه حدود ۱۵۰ برابر مساحت المان مربعی شکل باشد؛ نتایج حاصل از تحلیل المان محدود به همگرایی در حدود ۹۹ درصد می‌رسد و تحلیل المان محدود پذیرفتنی خواهد بود. مقدار میانگین کل زمان واحد پردازنده مرکزی^۵ صرف شده برای انجام حل اجزای محدود برابر ۱۲/۰۴۷ ثانیه توسط نرم افزار انسیس ۱۲،۰ است.

۵- نتایج و بحث

به منظور مطالعه عددی، یک استوانه با قطر لایه میانی ۵۰ میلی‌متر، $h = 0.4R$ و طول ۸۰۰ میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود. این استوانه پیزوالکتریک، تیتانات زیرکونات سرب-۴^۶ بوده و مطابق جدول ۱ دارای خواص مکانیکی و الکتریکی است [۳۷].

لایه داخلی این استوانه، تحت چگالی بار الکتریکی سطحی C/I ($m^{-2} \times 10^{-7}$) و لایه خارجی آن تحت فشار (kPa) ۶۰۰ است. این استوانه پیزوالکتریک در دو حالت (۱) دوسر گیردار با پتانسیل الکتریکی صفر و (۲) یک‌سر گیردار با پتانسیل الکتریکی صفر و یک‌سر آزاد با چگالی بار الکتریکی سطحی صفر بررسی می‌شود. مقدار میانگین کل زمان واحد پردازنده مرکزی صرف شده برای انجام حل تحلیلی برابر ۹/۵۸۶ ثانیه توسط نرم افزار میپل ۱۳ است.

شکل ۴، توزیع پتانسیل الکتریکی، جابه‌جایی شعاعی و محوری را در استوانه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی مختلف نشان می‌دهد.

بنابراین با اعمال شرایط مرزی در دو سر استوانه، ۶ شرط در یک سر (۴ شرط مکانیکی و ۲ شرط الکتریکی) و ۶ شرط در سر دیگر (۴ شرط مکانیکی و ۲ شرط الکتریکی) ثابت‌های K_1 تا K_{14} به دست می‌آیند. فرایند حل ریاضی با استفاده از کدنویسی در نرم‌افزار میپل نسخه ۱۳^۱ به دست آمده است.

۴- حل اجزای محدود

به منظور انجام حل اجزای محدود در این پژوهش از نرم‌افزار انسیس ۱۲،۰^۲ استفاده می‌گردد. با عنایت به حالت تقارن محوری مسأله، در این حالت نیازی به مدل‌سازی سه‌بعدی نیست و می‌توان از المان‌های دوبعدی نرم‌افزار که قابلیت تقارن محوری دارند، استفاده کرد و نتایج را به صورت سه‌بعدی استخراج کرد. در نرم‌افزار انسیس با استفاده از المان صفحه ۲۲۳^۳ می‌توان استوانه پیزوالکتریک را تحلیل کرد. این المان دوبعدی از هشت گره تشکیل شده که تا چهار درجه آزادی (دو درجه برای جابه‌جایی، یک درجه برای پتانسیل الکتریکی و یک درجه برای دما) را برای هر گره تأمین می‌کند. این المان دارای دقت بالا برای تحلیل مسائل متقارن محوری می‌باشد. برای این منظور مطابق شکل ۲ مقطع مستطیل شکل استوانه به صورت دوبعدی مدل‌سازی می‌گردد.

شبکه‌بندی^۴ باید به صورتی انجام گیرد که تحلیل المان محدود مستقل از شبکه‌بندی باشد و نتایج به دست آمده قابل اطمینان باشند. برای این منظور المان صفحه ۲۲۳ به شکل مربع بر روی مقطع

1 MAPLE 13
2 ANSYS 12.0
3 PLANE223 Element
4 Mesh

5 Total CPU Time
6 PZT-4

جدول ۱: خواص مکانیکی و الکتریکی استوانه پیزوالکتریک

Table 1. Mechanical and electrical properties of the piezoelectric cylinder

ثابت‌های الاستیک (GPa)				
C_{11}	C_{12}	C_{22}	C_{23}	C_{55}
۱۱۵	۷۴	۱۳۹	۷۸	۲۵/۶
ثابت‌های پیزوالکتریک-تنش (C/m^2)				
e_{11}		e_{12}	e_{35}	
۱۵/۱		-۵/۲	۱۲/۷	
ثابت‌های پیزوالکتریک-تنش ($10^{-8} \times C/(V \cdot m)$)				
ϵ_{11}			ϵ_{22}	
۰/۵۶۲			۰/۶۴۶	

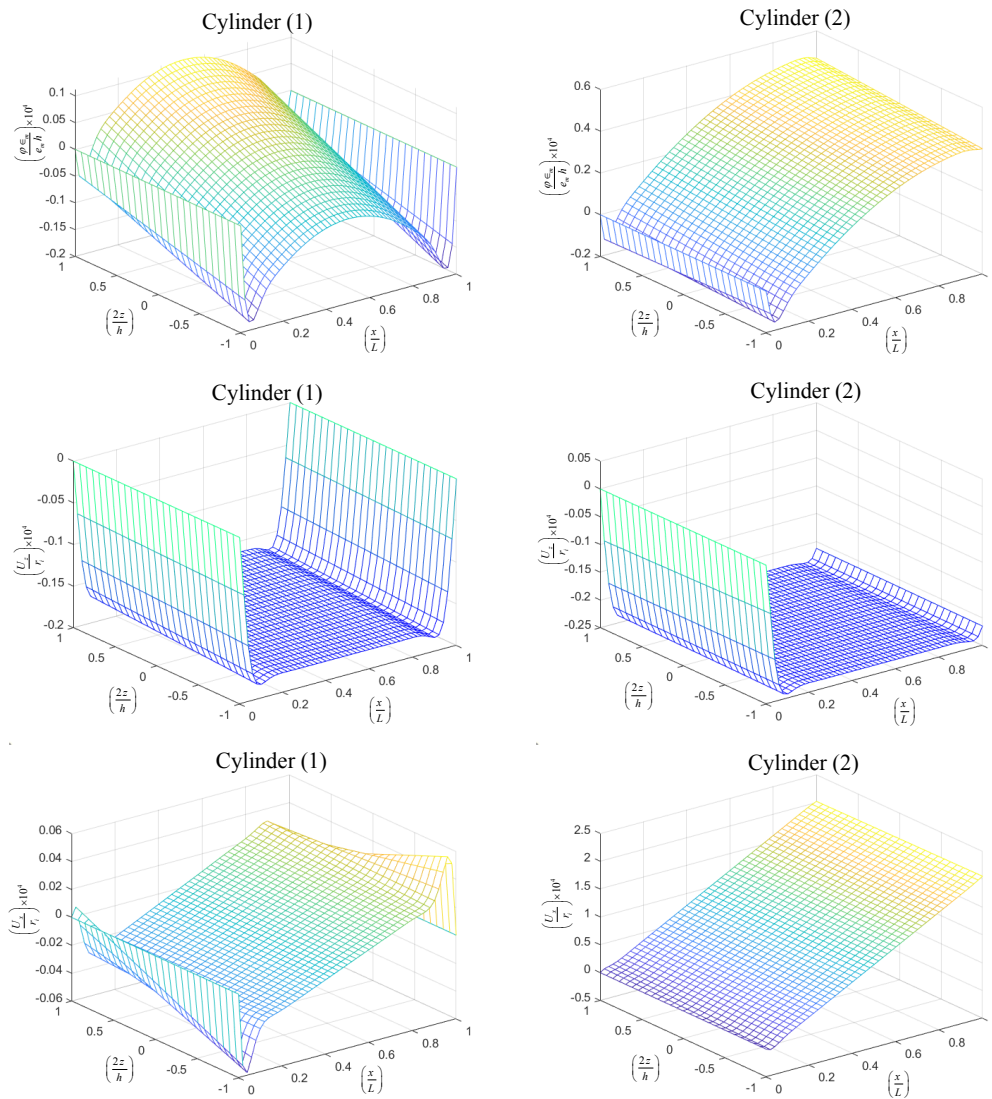


Fig. 4. Distribution of electrical potential and radial and axial displacements in piezoelectric cylinders with various boundary

شکل ۴: توزیع پتانسیل الکتریکی، جابه‌جایی شعاعی و محوری در استوانه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی مختلف

الکتریکی، بسته به شرایط مرزی دو سر آن، طراح باید به نواحی مرزی و نواحی دور از مرز نیز توجه داشته باشد.

شکل‌های ۵ و ۶ به ترتیب توزیع جابه‌جایی شعاعی و محوری را در لایه میانی استوانه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی مختلف تحت فشارهای داخلی متفاوت نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود؛ زمانی که نسبت فشار داخلی به فشار خارجی از حدود $1/3$ برابر بیشتر می‌شود؛ تغییر شکل استوانه در راستای شعاعی از حالت انقباضی به انبساطی تغییر می‌یابد. همچنین، بیشینه مقادیر جابه‌جایی‌ها در نواحی مرزی یا نزدیک به مرزها رخ می‌دهد. مقید نبودن یک سر استوانه، سبب می‌شود که بیشینه مقدار جابه‌جایی‌ها افزایش یابد که این افزایش در بیشینه مقدار جابه‌جایی محوری چشمگیرتر بوده است. در استوانه با حالت شرایط مرزی (۲)، تغییرات جابه‌جایی‌ها در راستای ضخامت ناچیز بوده و می‌توان رفتار جابه‌جایی در استوانه یک‌سر آزاد-یک‌سر گیردار را مستقل از ضخامت فرض کرد و تحلیل نمود. شایان ذکر است؛ مقادیر پیش بینی‌شده در شکل‌های ۵ و ۶ از

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود استوانه (۲) برخلاف استوانه (۱) تنها دارای یک سر مقید بوده و سر دیگر آزاد است؛ همین نکته سبب می‌شود، بیشینه مقدار پتانسیل الکتریکی و جابه‌جایی‌ها به مقدار قابل ملاحظه‌ای در استوانه افزایش یابد. بیشترین افزایش مربوط به جابه‌جایی محوری استوانه است که بیشینه مقدار جابه‌جایی محوری حدود ۴۰ برابر افزایش یافته است. تغییرات جابه‌جایی شعاعی و محوری در راستای ضخامت (غیر از جابه‌جایی محوری در نزدیکی مرزها) اندک است، اما پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت، دارای تغییرات قابل ملاحظه‌ای است. درحقیقت حساسیت پتانسیل الکتریکی به ضخامت استوانه بیشتر از حساسیت میدان جابه‌جایی به ضخامت است. بیشینه مقادیر جابه‌جایی‌ها در نواحی مرزی یا نزدیک به این نواحی رخ می‌دهد، درحالی‌که بیشینه مقدار پتانسیل الکتریکی، زمانی که دو سر استوانه مقید باشد، در نواحی دور از مرزها یا وسط استوانه رخ می‌دهد؛ لذا طراحان در هنگام محدودیت میدان جابه‌جایی، باید به نواحی مرزی سازه توجه کنند در صورتی که در هنگام محدودیت و قیود پتانسیل

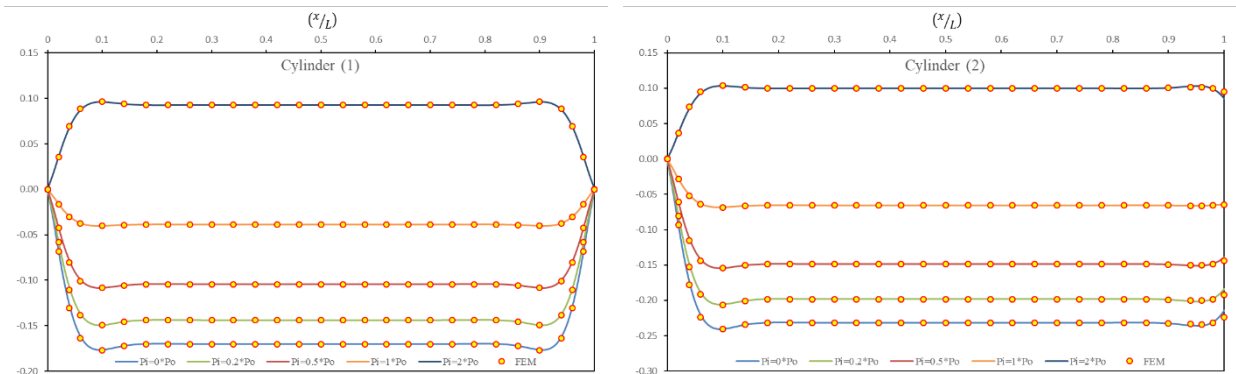


Fig. 5. Distribution of radial displacement in the middle layer of piezoelectric cylinders with various boundary

شکل ۵: توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه میانی استوانه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی مختلف

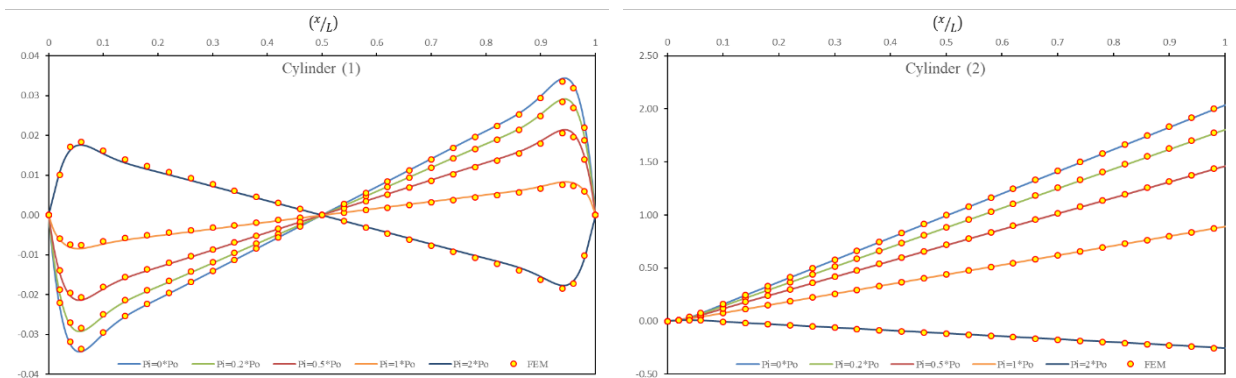


Fig. 6. Distribution of axial displacement in the middle layer of piezoelectric cylinders with various boundary conditions

شکل ۶: توزیع جابه‌جایی محوری در لایه میانی استوانه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی مختلف

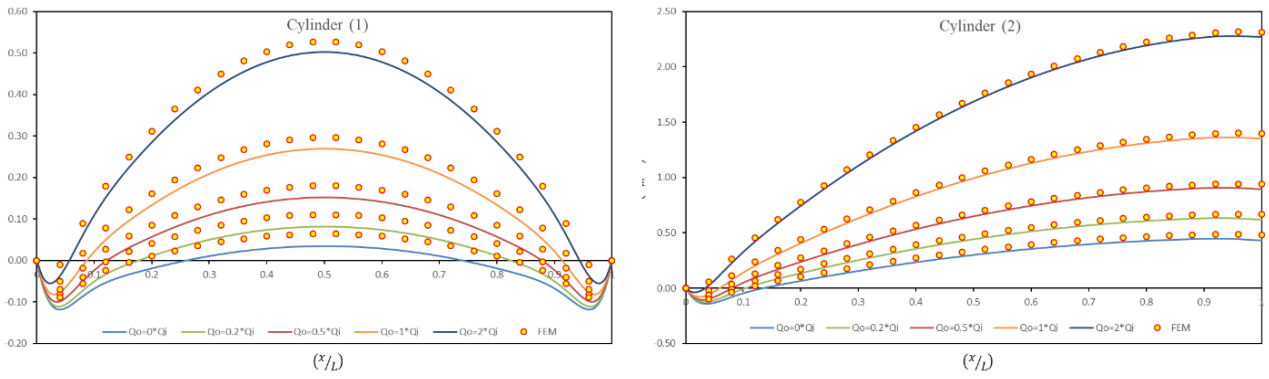


Fig. 7. Distribution of electrical potential in the middle layer of piezoelectric cylinders with various boundary conditions

شکل ۷: توزیع پتانسیل الکتریکی در لایه میانی استوانه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی مختلف

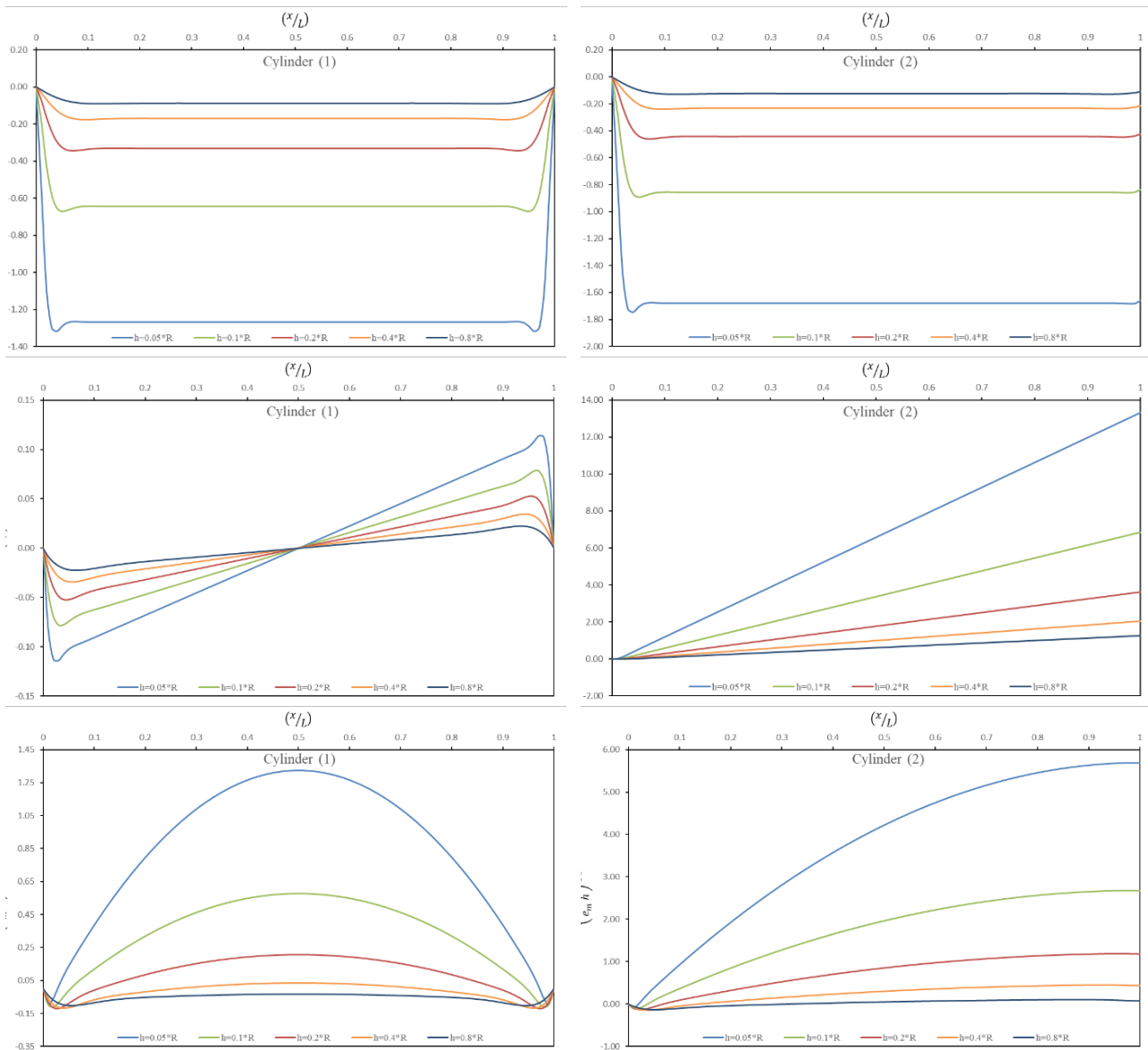


Fig. 8. variation of electrical potential and radial and axial displacements with the change of thickness in the middle layer

شکل ۸: تغییرات توزیع پتانسیل الکتریکی، جابه‌جایی شعاعی و محوری با تغییر ضخامت در لایه میانی

استوانه نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌گردد؛ هرچه استوانه به سمت توپر شدن پیش می‌رود، از تغییرات پتانسیل الکتریکی، جابه‌جایی شعاعی و محوری در راستای طولی استوانه کاسته می‌شود و آثار مرزهای مقید بر روی رفتار استوانه کاهش می‌یابد. همچنین ملاحظه می‌گردد؛ شدت حساسیت تغییرات رفتار استوانه به تغییر ضخامت در حالت (۲) نسبت به حالت (۱) بیشتر است که این امر به دلیل وجود تنها یک سر مقید از لحاظ مکانیکی و الکتریکی در استوانه حالت (۲) است.

شکل ۹، توزیع تنش مؤثر را براساس معیار تسلیم فن میزس [۳۱] نشان می‌دهد. بیشینه مقدار تنش مؤثر در نزدیکی نواحی مرزی رخ می‌دهد.

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + 6\tau_{zx}^2} \quad (30)$$

جدول ۲، نتایج حاصل از حل تحلیلی و حل اجزای محدود را با استفاده از نرم‌افزار انسیس ۱۲.۰ در وسط طول استوانه نشان می‌دهد.

دو روش اجزای محدود و تحلیلی از توافق و انطباق خوبی برخوردارند. شکل ۷، توزیع پتانسیل الکتریکی را در لایه‌های مختلف استوانه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی مختلف تحت چگالی‌های بار الکتریکی سطح خارجی متفاوت نشان می‌دهد. در استوانه پیزوالکتریک نوع (۱)، سه نقطه اکسترمم وجود دارد که به دلیل تقارن توزیع در واقع دارای دو اکسترمم است. یک مینیمم در نزدیکی مرزها و یک ماکزیمم در میانه استوانه است، درحالی‌که در استوانه پیزوالکتریک نوع (۲)، دو نقطه اکسترمم وجود دارد. یک مینیمم در نزدیکی مرز دارای پتانسیل الکتریکی مقید و یک ماکزیمم در نزدیکی مرز فاقد بار الکتریکی سطحی وجود دارد. بنابراین طراحان و مهندسان هنگام طراحی و استفاده از استوانه‌های پیزوالکتریک باید به این نکات، توجه کنند. همانطور که مشاهده می‌گردد؛ در شکل ۷ نیز انطباق خوبی میان نتایج پیش‌بینی شده از دو روش حل تحلیلی و اجزای محدود وجود دارد.

شکل ۸، تغییرات توزیع پتانسیل الکتریکی، جابه‌جایی شعاعی و محوری با تغییر ضخامت در محدوده $\frac{1}{4} \leq \frac{h}{R} \leq \frac{16}{4}$ را در لایه میانی

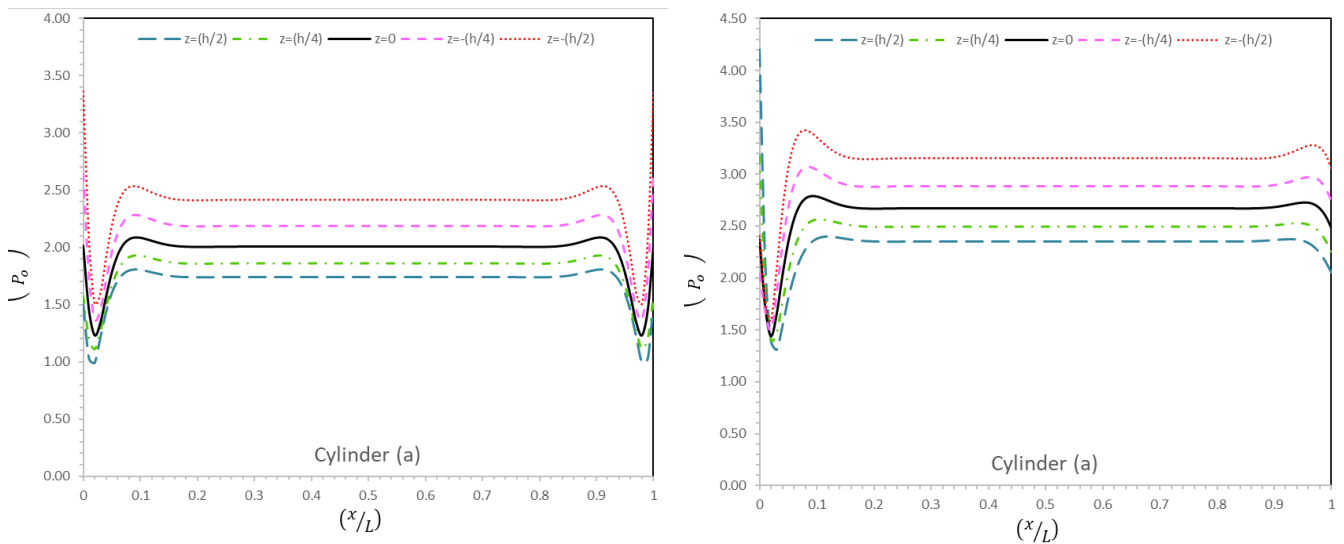


Fig. 9. Distribution of effective stress in the various layers of piezoelectric cylinders with various boundary conditions

شکل ۹: توزیع تنش مؤثر در لایه‌های مختلف استوانه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی مختلف

جدول ۲: نتایج عددی حل تحلیلی و اجزای محدود استوانه‌های پیزوالکتریک ($x=L/2$)

Table 2. Numerical results of analytical and finite element solution of the piezoelectric cylinders ($x=L/2$)

استوانه پیزوالکتریک با شرایط مرزی (۱)				
U_r (mm)	σ_{eff} (MPa)	φ (V)		
-۰/۰۰۰۷۱	۱/۴۴۸	-۱۰۳/۷۱	حل تحلیلی	
-۰/۰۰۰۷۳	۱/۸۷۸	-۱۰۰/۵۰	حل اجزای محدود	لایه داخلی
۲/۸۱	۲۹/۷۰	۳/۱۰	درصد تفاوت (%)	
-۰/۰۰۰۶۵	۱/۰۴۵	۲۷۹/۲۷	حل تحلیلی	
-۰/۰۰۰۶۷	۰/۸۵۴	۳۰۶/۸۰	حل اجزای محدود	لایه خارجی
۳/۰۷	۱۸/۲۸	۹/۸۶	درصد تفاوت (%)	
استوانه پیزوالکتریک با شرایط مرزی (۲)				
U_r (mm)	σ_{eff} (MPa)	φ (V)		
-۰/۰۰۰۹۳	۱/۸۹۴	۶۶۳/۸۸	حل تحلیلی	
-۰/۰۰۰۹۵	۲/۱۷۵	۶۸۲/۸۵	حل اجزای محدود	لایه داخلی
۲/۱۵	۱۴/۸۴	۲/۸۶	درصد تفاوت (%)	
-۰/۰۰۰۹۲	۱/۴۱۱	۸۴۳/۰۸	حل تحلیلی	
-۰/۰۰۰۹۳	۱/۳۷۹	۸۸۷/۶۱	حل اجزای محدود	لایه خارجی
۱/۰۹	۲/۲۷	۵/۲۸	درصد تفاوت (%)	

تکیه‌گاهی در سازه استفاده شود.

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، تطابق خوبی بین نتایج پیش‌بینی شده از دو روش وجود دارد.

۲- بررسی و مقایسه نتایج حاصل از دو روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد؛ استفاده از نظریه پتانسیل الکتریکی مرتبه یک قابل اطمینان و راهگشا بوده و نتایج را به خوبی پیش‌بینی می‌کند. ولیکن هنگامی که که زمان انجام محاسبات و افزایش حجم آن‌ها در اولویت کمتری نسبت به افزایش دقت در محاسبات قرار دارد، می‌توان از نظریه پتانسیل میدان الکتریکی مرتبه بالا و نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا استفاده نمود.

۳- نتایج نشان می‌دهد، برخلاف میدان جابه‌جایی که در نواحی دور از مرز دارای تغییرات چندانی در راستای ضخامت استوانه نیست و می‌توان رفتار میدان جابه‌جایی را مستقل از ضخامت فرض نمود، ولیکن تغییرات پتانسیل الکتریکی حتی در نواحی دور از مرزها

۵- نتیجه‌گیری

۱- پژوهش حاضر یک حل تحلیلی دوبعدی را برای میدان الکتریکی و مکانیکی ارائه می‌دهد که همانند سایر تحلیل‌های دوبعدی پیشین، زیرمجموعه روش‌های حل سری گونه نبوده و نیازی به بررسی همگرایی پاسخ ندارد؛ لذا دارای حجم عملیات کمتر، دقت بالاتر و نیاز به زمان کمتر، جهت محاسبات است. هم‌چنین روش حاضر مختص به شرایط مرزی خاص در دو سر استوانه نبوده و قادر به پاسخ‌گویی به شرایط مرزی مختلف در دو سر استوانه است. واضح است که روش بالا به راحتی می‌تواند برای دستیابی به مقادیر بهینه بارگذاری و شرایط

- Science, 45(9) (2007) 744-769.
- [9] C.-P. Wu, Y.-S. Syu, Exact solutions of functionally graded piezoelectric shells under cylindrical bending, *International Journal of Solids and Structures*, 44(20) (2007) 6450-6472.
- [10] H.-L. Dai, L. Hong, Y.-M. Fu, X. Xiao, Analytical solution for electromagnetothermoelastic behaviors of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder, *Applied Mathematical Modelling*, 34(2) (2010) 343-357.
- [11] H.-L. Dai, X. Xiao, Y.-M. Fu, Analytical solutions of stresses in functionally graded piezoelectric hollow structures, *Solid State Communications*, 150(15-16) (2010) 763-767.
- [12] X.-F. Li, X.-L. Peng, K.Y. Lee, Radially polarized functionally graded piezoelectric hollow cylinders as sensors and actuators, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 29(4) (2010) 704-713.
- [13] Z. Taotao, S. Zhifei, Analytical solutions of two kinds of piezoelectric actuators under shearing load, *Smart Materials and Structures*, 19(11) (2010) 115023.
- [14] T. Zhang, Z. Shi, Exact analyses for two kinds of piezoelectric hollow cylinders with graded properties, *Smart Struct. Syst*, 6(8) (2010) 975-989.
- [15] H. Wang, Parametric Analysis of Composite Cylinders with an Embedded Exponentially Graded Piezoelectric Layer, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 24(1) (2011) 13-28.
- [16] C.-P. Wu, T.-C. Tsai, Exact solutions of functionally graded piezoelectric material sandwich cylinders by a modified Pagano method, *Applied Mathematical Modelling*, 36(5) (2012) 1910-1930.
- [17] G. Rahimi, M. Arefi, M. Khoshgoftar, Electro elastic analysis of a pressurized thick-walled functionally graded piezoelectric cylinder using the first order shear deformation theory and energy method, *Mechanics*, 18(3) (2012) 292-300.
- [18] M. Arefi, G. Rahimi, Three-dimensional multi-field equations of a functionally graded piezoelectric thick shell with variable thickness, curvature and arbitrary nonhomogeneity, *Acta Mechanica*, 223(1) (2012) 63-79.
- نیز در راستای ضخامت دارای تغییرات محسوس است؛ لذا تحلیل دوبعدی مکانیکی-الکتریکی عملگرها، حسگرها و کنترل‌کننده‌های پیزوالکتریک استوانه‌های با طول محدود و با شرایط مرزی در دو سر آن دارای اهمیت ویژه است.
- ۴- بررسی و ارزیابی نتایج حاصل از استوانه‌ها با شرایط مرزی متفاوت در دو سر آن نشان می‌دهد؛ بیشینه قدر مطلق مقدار پارامترهای رفتاری مکانیکی و الکتریکی استوانه‌ها (میدان جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی و تنش‌ها) در نزدیکی مرزها یا در مرزهای استوانه رخ می‌دهد؛ لذا طراحان باید به مناطق مرزی و نواحی نزدیک به آن، توجه ویژه داشته باشند.

مراجع

- [1] E. Ventsel, T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells: Theory: Analysis, and Applications*, CRC Press, 2001.
- [2] H.S. Tzou, R.V. Howard, *A Piezothermoelastic Thin Shell Theory Applied to Active Structures*, *Journal of Vibration and Acoustics*, 116(3) (1994) 295-302.
- [3] H. Tzou, Y. Bao, A theory on anisotropic piezothermoelastic shell laminates with sensor/actuator applications, *Journal of Sound and Vibration*, 184(3) (1995) 453-473.
- [4] S. Kapuria, P. Dumir, S. Sengupta, Exact piezothermoelastic axisymmetric solution of a finite transversely isotropic cylindrical shell, *Computers & structures*, 61(6) (1996) 1085-1099.
- [5] A. Benjeddou, Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey, *Computers & Structures*, 76(1-3) (2000) 347-363.
- [6] X.-H. Wu, Y.-P. Shen, C. Chen, An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensors or actuators, *Materials Letters*, 57(22-23) (2003) 3532-3542.
- [7] A. Benjeddou, O. Andrianarison, A thermopiezoelectric mixed variational theorem for smart multilayered composites, *Computers & structures*, 83(15-16) (2005) 1266-1276.
- [8] C.-P. Wu, Y.-H. Tsai, Static behavior of functionally graded magneto-electro-elastic shells under electric displacement and magnetic flux, *International Journal of Engineering*

- loads, *Applied Mathematics and Mechanics*, 36(7) (2015) 939-954.
- [28] M. Jabbari, M. Zamani Nejad, Electro-mechanical Analysis of Rotating Cylinder Made of Functionally Graded Piezoelectric Materials: Sensor and Actuator, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 51(1) (2019) 215-224 (in Persian).
- [29] A. Fernandes, J. Pouget, Structural response of composite plates equipped with piezoelectric actuators, *Computers & structures*, 84(22-23) (2006) 1459-1470.
- [30] M. Parhizkar Yaghoobi, I. Ghaffari, M. Ghannad, Stress and active control analysis of functionally graded piezoelectric material cylinder and disk under electro-thermo-mechanical loading, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 29(5) (2018) 924-937.
- [31] M. Ghannad, M. Parhizkar Yaghoobi, A thermoelasticity solution for thick cylinders subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions, *ADMT Journal*, 8(4) (2015) 1-11.
- [32] M. Ghannad, M.P. Yaghoobi, 2D thermo elastic behavior of a FG cylinder under thermomechanical loads using a first order temperature theory, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 149 (2017) 75-92.
- [33] X. Wang, Z. Zhong, The general solution of spherically isotropic magneto-electroelastic media and its applications, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 22(6) (2003) 953-969.
- [34] A. Zingoni, *Structural Engineering, Mechanics and Computation: SEMC 2001 (2 Volume Set)*, Elsevier, 2001.
- [35] I. Ghaffari, M.P. Yaghoobi, M. Ghannad, Complete mechanical behavior analysis of FG Nano Beam under non-uniform loading using non-local theory, *Materials Research Express*, 5(1) (2018) 015016.
- [36] P. Hagedorn, A. DasGupta, *Vibrations and waves in continuous mechanical systems*, Wiley Online Library, 2007.
- [37] J. Yang, *The mechanics of piezoelectric structures*, World Scientific, 2006.
- [19] H.-L. Dai, T. Dai, H.-Y. Zheng, Stresses distributions in a rotating functionally graded piezoelectric hollow cylinder, *Meccanica*, 47(2) (2012) 423-436.
- [20] A. Ghorbanpour, A. Loghman, A. Abdollahitaheri, V. Atabakhshian, Electrothermomechanical behavior of a radially polarized rotating functionally graded piezoelectric cylinder, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 6(6) (2011) 869-882.
- [21] M. Arefi, G. Rahimi, M. Khoshgoftar, Exact solution of a thick walled functionally graded piezoelectric cylinder under mechanical, thermal and electrical loads in the magnetic field, *Smart Structures and Systems*, 9(5) (2012) 427-439.
- [22] J.J. Fesharaki, V.J. Fesharaki, M. Yazdipoor, B. Razavian, Two-dimensional solution for electro-mechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder, *Applied Mathematical Modelling*, 36(11) (2012) 5521-5533.
- [23] M. Jabbari, M. Meshkini, M. Eslami, Nonaxisymmetric mechanical and thermal stresses in FGPPM hollow cylinder, *Journal of Pressure Vessel Technology*, 134(6) (2012) 061212.
- [24] A. Loghman, H. Parsa, Exact solution for magneto-thermo-elastic behaviour of double-walled cylinder made of an inner FGM and an outer homogeneous layer, *International Journal of Mechanical Sciences*, 88 (2014) 93-99.
- [25] M. Jabbari, M.B. Aghdam, Asymmetric Thermal Stresses of Hollow FGM Cylinders with Piezoelectric Internal and External Layers, *Journal of Solid Mechanics*, 7(3) (2015) 327-343.
- [26] H.-L. Dai, H.-J. Jiang, Magneto-thermoelastic bending analysis of a functionally graded material cylindrical shell, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 22(4) (2015) 281-289.
- [27] A. Atrian, J.J. Fesharaki, S. Nourbakhsh, Thermo-electromechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder under non-axisymmetric

پیوست - الف

در دستگاه معادلات (۱۷) تعداد مجهولات یا متجه‌های مکانیکی و الکتریکی برابر ۱۰ است در حالی که تعداد معادلات در این دستگاه برابر ۶ است. لذا، امکان حل این دستگاه براساس متجه‌های مکانیکی و الکتریکی میسر نیست و می‌بایست دستگاه معادلات (۱۷) براساس مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی که ۶ عدد می‌باشند، بیان شوند. این امر مستلزم انجام عملیات ریاضی و استفاده از معادلات (۶) تا (۱۳) در دستگاه معادلات ۱۷ است تا این دستگاه معادلات براساس مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی بیان شود؛ لذا:

$$\tilde{A} \frac{d^2}{dx^2} \bar{y} + \tilde{B} \frac{d}{dx} \bar{y} + \tilde{C} \bar{y} = \bar{F}; \bar{y} = \left\{ U_z^0 \quad U_z^1 \quad \frac{dU_x^0}{dx} \quad U_x^1 \quad \frac{d\varphi^0}{dx} \quad \varphi^1 \right\}^T \quad \& \quad (الف-۱)$$

$$\bar{F} = \{K_9 \quad 0 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 x + K_{10} \quad F_6\}^T$$

که $\tilde{A}_{6 \times 6}$ ، $\tilde{B}_{6 \times 6}$ و $\tilde{C}_{6 \times 6}$ ماتریس‌های ضرایب و $\bar{F}_{6 \times 1}$ شبه‌بردار نیروی الکترومکانیکی می‌باشد که مؤلفه‌های غیر صفر آن‌ها در ادامه ارائه شده است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_{2 \times 4} = - \int_{-h/2}^{h/2} c_{22i} (R+z) z^2 dz; \tilde{B}_{1 \times 4} = -\tilde{B}_{2 \times 3} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{22i} (R+z) z dz; \tilde{A}_{6 \times 6} = - \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{22i} (R+z) z^2 dz; \\ \tilde{A}_{3 \times 1} = - \int_{-h/2}^{h/2} K_s c_{55i} (R+z) dz; \tilde{B}_{2 \times 1} = -\tilde{B}_{3 \times 4} = \int_{-h/2}^{h/2} (K_s c_{55i} (R+z) - z c_{23i}) (R+z) dz \\ \tilde{A}_{3 \times 2} = \tilde{A}_{4 \times 1} = - \int_{-h/2}^{h/2} K_s c_{55i} (R+z) z dz; \tilde{B}_{2 \times 2} = -\tilde{B}_{4 \times 4} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(K_s c_{55i} - c_{12i} - \frac{z c_{23i}}{(R+z)} \right) (R+z) z dz \\ \tilde{A}_{3 \times 6} = - \int_{-h/2}^{h/2} K_s e_{35i} (R+z) z dz; \tilde{B}_{2 \times 6} = \int_{-h/2}^{h/2} (K_s z e_{35i} - z e_{12i}) (R+z) dz; \tilde{B}_{5 \times 6} = -\tilde{B}_{6 \times 5} = - \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{22i} (R+z) z dz \quad (الف-۲) \\ \tilde{A}_{4 \times 2} = - \int_{-h/2}^{h/2} K_s c_{55i} (R+z) z^2 dz; \tilde{B}_{3 \times 5} = - \int_{-h/2}^{h/2} K_s e_{35i} (R+z) dz; \tilde{B}_{6 \times 4} = \int_{-h/2}^{h/2} (e_{12i} - e_{35i}) (R+z) z dz \\ \tilde{A}_{4 \times 6} = - \int_{-h/2}^{h/2} K_s e_{35i} (R+z) z^2 dz; \tilde{B}_{4 \times 5} = - \int_{-h/2}^{h/2} K_s e_{35i} (R+z) z dz; \tilde{A}_{6 \times 1} = - \int_{-h/2}^{h/2} e_{35i} (R+z) z dz; \\ \tilde{B}_{5 \times 1} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{35i} (R+z) dz; \tilde{A}_{6 \times 2} = - \int_{-h/2}^{h/2} e_{35i} (R+z) z^2 dz; \tilde{B}_{5 \times 2} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{35i} (R+z) z dz \end{array} \right.$$

مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس‌های $\tilde{A}_{6 \times 6}$ و $\tilde{B}_{6 \times 6}$ با استفاده از رابطه (الف-۱) محاسبه شده که K_s در آن ضریب تصحیح برشی بوده و برابر ۰/۸۳۳ است [۱۸]. و نیز برای مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس $\tilde{C}_{6 \times 6}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{C}_{2 \times 5} &= \int_{-h/2}^{h/2} K_s e_{35i} (R+z) dz; \tilde{C}_{6 \times 6} = - \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{11i} (R+z) dz; \tilde{C}_{3 \times 1} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{22i} \frac{1}{(R+z)} dz; \tilde{C}_{5 \times 5} = - \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{22i} (R+z) dz \\ \tilde{C}_{3 \times 6} &= \tilde{C}_{6 \times 1} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{12i} dz; \tilde{C}_{1 \times 1} = \tilde{C}_{3 \times 3} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{23i} dz; \tilde{C}_{1 \times 3} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{22i} (R+z) dz; \tilde{C}_{5 \times 4} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{35i} (R+z) dz \\ \tilde{C}_{2 \times 4} &= \int_{-h/2}^{h/2} K_s c_{55i} (R+z) dz; \tilde{C}_{4 \times 6} = \tilde{C}_{6 \times 2} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(e_{11i} + \frac{z e_{12i}}{(R+z)} \right) (R+z) dz; \tilde{C}_{4 \times 2} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{c_{11i}}{z} (R+z) + 2c_{12i} + \frac{z c_{22i}}{(R+z)} \right) z dz \\ \tilde{C}_{3 \times 2} &= \tilde{C}_{4 \times 1} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(c_{12i} + \frac{z c_{22i}}{(R+z)} \right) \frac{1}{(R+z)} dz; \tilde{C}_{1 \times 2} = \tilde{C}_{4 \times 3} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(c_{12i} + \frac{z c_{23i}}{(R+z)} \right) (R+z) dz; \tilde{C}_{1 \times 6} = \tilde{C}_{6 \times 3} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{12i} (R+z) dz \end{aligned} \right. \quad (\text{الف-۳})$$

مؤلفه‌های غیر صفر شبه‌بردار \vec{F} به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\left\{ \begin{aligned} F_3 &= P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right); F_4 = \frac{h}{2} \left(P_i \left(\frac{h}{2} - R \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right) \\ F_5 &= Q_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - Q_o \left(R + \frac{h}{2} \right); F_6 = \frac{h}{2} \left(Q_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - Q_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{الف-۴})$$

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

M. Parhizkar Yaghoobi, M. Ghannad, 2-Dimensional Electroelastic Analysis of Piezoelectric Cylinders Using First-Order Shear Deformation and First-Order Electric Potential Theories, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(2) (2021) 815-832.

DOI: [10.22060/mej.2019.16689.6421](https://doi.org/10.22060/mej.2019.16689.6421)

