Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(2) (2021) 175-178
DOI: 10.22060/mej.2019.16554.6388

Spherical Lame-Type Problem in Second Strain Gradient Theory

F. Ojaghnezhad*

Engineering Department, Alzahra University, Tehran, Iran

ABSTRACT: Second strain gradient theory is employed to examine the spherical single/double-phase Lame-type problem. Due to the capability of strain gradient theory to capture the effects of the surface, size, and discrete nature of materials, the pertinent relaxed configuration is sought. The theory is written in the spherical coordinate system and the equilibrium equations, stress/strain components, constitutive relations, and tractions are derived. The relaxed configuration is obtained for both the diamond carbon and carbon-coated crystalline silicon shell. Afterwards, the external symmetric loading is applied to the relaxed configuration to analyze the mechanical response. The elastic material parameters are calculated via the quantum computations, lattice dynamics, and material continuum description. The analysis shows that the mechanical response in the augmented theory is significantly different from that in the classical elasticity. For example, in the single-phase problem with an inner and outer radius equal to two and ten lattice parameter, respectively, under a normalized external pressure of about 0.0001, the classic elasticity predicts an approximately constant normalized radial stress of about -0.0001 in the nanoshell. However, in the framework of strain gradient theory, the normalized radial stress is varying from about -0.001 and -0.0002 in the vicinity of the inner and outer boundaries, respectively, to about 0.0003 in the middle of the hollow nanoshell. With increasing the inner radius, the difference between the two results in the middle points decreases.

Review History:

Received: Jun. 12, 201
Revised: Sep. 20, 2019
Accepted: Nov. 05, 2019
Available Online: Nov. 15, 2019

Keywords:

Second strain gradient theory
Size effect
Surface effect
Spherical Lame-type problem
Spherical symmetry

1. INTRODUCTION

Recently, consideration of the mechanics and physics of nanowires, nanotubes, and nano-particles has been of interest due to their vast applications in electronics, energy conversion, optics, chemical sensing, cancer therapy, and drug delivery, among other fields. In view of the traditional continuum inadequacy in treating the mechanical aspects of nanostructures, resorting to augmented continuum theories especially, Second Strain Gradient Theory (SSGT), seems to be remedial [1-3]. Based on the methodology presented by Shodja et al. [4], the material parameters in SSGT are calculated via quantum computations and lattice dynamics combined with the continuum description of materials. Because of the vast possible applications of the carbon-coated silicon nanospheres in lithium batteries [5, 6], the present work focuses on the physical and mechanical characteristics of these nanostructures. First, The relaxed configuration under the surface effects is obtained. Afterwards, an external symmetric loading is applied to the nanospherical relaxed configuration and SSGT mechanical response is resulted and compared with the pertinent response in the Classic Theory (CT).

2. SECOND STRAIN GRADIENT THEORY IN A MEDIUM WITH SPHERICAL SYMMETRY

The governing equilibrium equation in a medium with spherical symmetry in SSGT in the spherical coordinate system has the following form [3]:

$$\begin{aligned}&r^6 u_r'''''' + 6r^5 u_r''''' - (6r^4 + p_1 r^6) u_r'''' \\ &-4r^5 p_1 u_r''' + (4p_1 r^4 + p_2 r^6) u_r'' \\ &+2p_2 r^5 u_r' - 2p_2 r^4 u_r = 0,\end{aligned} \tag{1}$$

where p_1 and p_2 depend on Mindlin characteristic lengths $\{\ell_{11}, \ell_{12}, \ell_{21}, \ell_{22}\}$, r is the radial variable in the spherical domain, and u_r is the radial displacement. The corresponding six independent solutions are

$$\begin{aligned}&u_r(r) = \mathscr{L}\{r, \frac{1}{r}\cosh\frac{r}{\ell_{11}} - \frac{\ell_{11}}{r^2}\sinh\frac{r}{\ell_{11}}, \\ &\frac{1}{r}\cosh\frac{r}{\ell_{12}} - \frac{\ell_{12}}{r^2}\sinh\frac{r}{\ell_{12}}, \\ &\frac{1}{r^2}, \frac{\ell_{11}+r}{r^2}e^{-\frac{r}{\ell_{11}}}, \frac{\ell_{12}+r}{r^2}e^{-\frac{r}{\ell_{12}}}\}.\end{aligned} \tag{2}$$

Three of the above solutions are undefined at origin ($r=0$) and the others are undefined at infinity. The tractions at the boundaries of the spherical domain are obtained in the spherical coordinates, as well. Employing the obtained solution, two problems of spherical Lame-type and coated

*Corresponding author's email: f.ojaghnezhad@alzahra.ac.ir

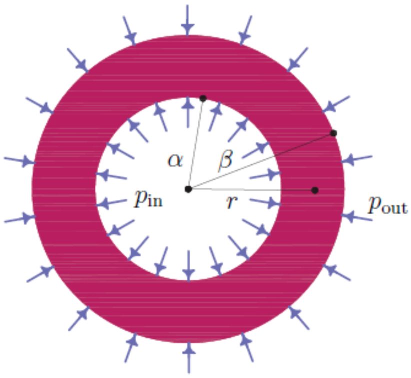


Fig. 1. The spherical Lame-type problem with inner and outer radii α and β under the external pressures p_{in} and p_{out}.

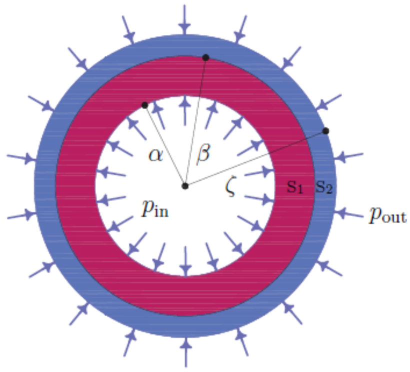


Fig. 2. The spherical coated shell with radii α, β, and ζ under the external pressures p_{in} and p_{out}.

Table 1. Lame constants in terms of $\mathrm{eV/\mathring{A}^3}$ and characteristic lengths in terms of $\mathring{A}$ for silicon and carbon

	λ	μ	ℓ_{11}, ℓ_{12}	ℓ_{21}, ℓ_{22}
Si	0.45	0.62	$0.44 \pm 0.71i$	$1.19 \pm 1.35i$
C	0.94	2.94	$0.67 \pm 0.84i$	$0.87 \pm 1.05i$

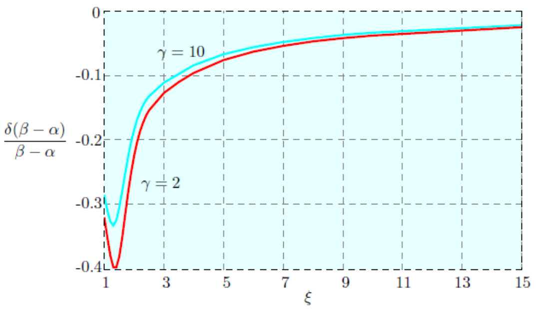


Fig. 3. The average radial strain in the carbon shell due to the surface relaxation versus ξ for two values of γ.

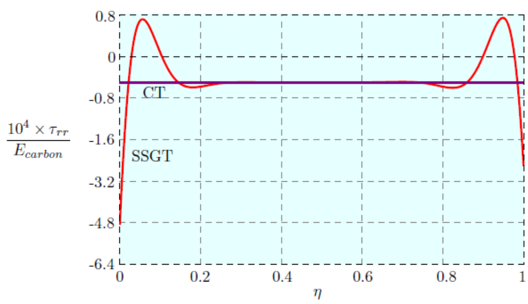


Fig. 4. The normalized radial stress versus η for the carbon shell under external pressure.

spherical shell are examined. In the Lame-type problem depicted in Fig. 1, with inner and outer radii α and β, the external surface loadings are p_{in} and p_{out}. For this problem, there are six unknown coefficients in the displacement field that are determined via the six traction boundary conditions.

In the coated shell problem, Fig. 2, with two material phases (S_1 and S_2), there are twelve unknown coefficients in u_r determined via nine traction and three displacement boundary conditions. It should be noted that at the boundary of S_1 and S_2, the radial components of traction and displacement are assumed to be continuous.

3. RESULTS AND DISCUSSION

To give the numerical results, the material parameters in SSGT should be evaluated. Exploiting the results and methodology of Ojaghnezhad and Shodja [2, 7] and Shodja et al. [4], Lame constants and characteristic lengths are computed as summarized in Table 1.

In a carbon shell, the surface relaxation implies a radial strain causing a thickness change. The average radial strain is plotted in Fig. 3 versus the normalized thickness, ξ for two normalized radii, γ. It is observed that the average strain tends to zero with increasing ξ.

Applying $p_{in} = p_{out} = 0.0001E_{carbon}$ on the carbon shell ($\gamma = 10$, $\xi = 10$) relaxed configuration implies radial stress plotted versus radial normalized variable η and compared with that of CT in Fig. 4.

Consider a carbon-coated silicon nanosphere in SSGT to obtain its relaxed configuration under the surface effect. For example, the average radial strain in the silicon shell versus its initial normalized thickness ξ_1 is plotted in Fig. 5 for different values of the normalized inner radius γ and coating normalized thickness ξ_2.

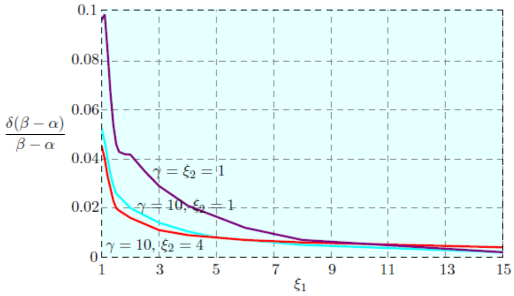


Fig. 5. The average radial strain in the silicon shell versus ξ_1 for some values of γ and ξ_2 under surface effect.

4. CONCLUSION

The surface effect in spherical domains implies a radial strain field causing the thicknesses change. With increasing the dimensions, the effects tend to zero as predicted by CT. Under an external loading, SSGT predictions are different from those of CT, especially near the boundaries.

REFERENCES

[1] R.D. Mindlin, Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, International Journal of Solids and Structures, 1 (1965) 417-438.

[2] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, Surface elasticity revisited in the context of second strain gradient theory, Mechanics of Materials, 93 (2016) 220-237.

[3] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, Second strain gradient theory in orthogonal curvilinear coordinates: Prediction of the relaxation of a solid nanosphere and embedded spherical nanocavity, Applied Mathematical Modelling, 76 (2019) 669-698.

[4] H.M. Shodja, H. Moosavian, F. Ojaghnezhad, Toupin–Mindlin first strain gradient theory revisited for cubic crystals of hexoctahedral class: Analytical expression of the material parameters in terms of the atomic force constants and evaluation via ab initio DFT, Mechanics of Materials, 123 (2018) 19-29.

[5] Y. Yao, M.T. McDowell, I. Ryu, H. Wu, N. Liu, L. Hu, W.D. Nix, Y. Cui, Interconnected silicon hollow nanospheres for lithium-ion battery anodes with long cycle life, Nano Letters, 11 (2011) 2949-2954.

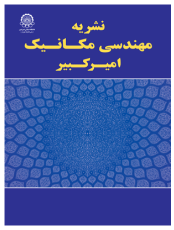
[6] K. Zhao, M. Pharr, S. Cai, J.J. Vlassak, Z. Suo, Large plastic deformation in high-capacity lithium-ion batteries caused by charge and discharge, Journal of American Ceramic Society, 94 (2011) 226-235.

[7] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, A combined first principles and analytical treatment for determination of the surface elastic constants: application to Si(001) ideal and reconstructed surfaces, Philosophical Magazine Letters, 92(1) (2012) 7-19.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

F. Ojaghnezhad, Spherical Lame-Type Problem in Second Strain Gradient Theory, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(2) (2021) 175-178.

DOI: 10.22060/mej.2019.16554.6388



نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ۲، سال ۱۴۰۰، صفحات ۷۱۳ تا ۷۳۲
DOI: 10.22060/mej.2019.16554.6388

مساله متقارن کروی در نظریه گرادیان دوم کرنش

فرزانه اجاق‌نژاد*

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه الزهرا، تهران، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۲۲
بازنگری: ۱۳۹۸/۰۶/۲۹
پذیرش: ۱۳۹۸/۰۸/۱۴
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۸/۲۴

کلمات کلیدی:
نظریه گرادیان دوم کرنش
اثر اندازه
اثر سطح
لمه‌گونه کروی
تقارن کروی

خلاصه: هدف، حل مساله متقارن کروی یک/دو فازی با استفاده از الاستیسیته گرادیان دوم کرنش و مقایسه با الاستیسیته کلاسیک است. نظر به قابلیت گرادیان دوم کرنش در پیش‌بینی اثرات سطح، اندازه و ماهیت گسسته مواد، مساله متقارن کروی مدل‌سازی و تحت اثرات مذکور مطالعه می‌شود. با تبیین گرادیان دوم کرنش در دستگاه مختصات کروی، معادلات تعادل، میدان تنش و کرنش، روابط آن‌ها و نیروهای سطحی استخراج می‌شود. بعد از آسایش سطحی، بارگذاری خارجی متقارن روی سازه اعمال و پاسخ مکانیکی بررسی می‌شود. خواص مکانیکی پوسته تک‌فازی از بلور الماس و پوسته دوفازی از سیلیکون بلوری با پوشش کربنی مطالعه می‌شود. مقادیر ثابت‌های مواد توسط محاسبات کوانتومی، نظریه دینامیک شبکه و مدل‌سازی محیط پیوسته محاسبه می‌شود. محاسبات نشان می‌دهد که پیش‌بینی نظریه تقویت‌یافته از خواص نانوسازه تفاوت چشمگیری با پیش‌بینی کلاسیک دارد. مثلا، در پوسته کربنی با شعاع داخلی و خارجی به ترتیب ۲ و ۱۰ برابر پارامتر شبکه، تحت بارگذاری فشاری خارجی یکه شده ۰/۰۰۰۱، تنش شعاعی کلاسیک یکه، ثابت و حدود ۰/۰۰۰۱- است، در حالی‌که در گرادیان کرنش، تنش شعاعی یکه از مقادیر ۰/۰۰۱- و ۰/۰۰۰۲- در مرزهای داخلی و خارجی، به ترتیب، به ۰/۰۰۰۳ در میانه متغیر است. با افزایش شعاع داخلی، اختلاف دو نظریه در میانه محیط کاهش می‌یابد اما در نزدیکی سطوح اختلاف قابل ملاحظه است.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، نانوسیم‌ها، نانوکرات، نانوتیوب‌ها و نانوذرات به عنوان نانوسازه‌های متقارن ساخته شده از موادی مانند فلزات، نیمه‌رسانا‌ها، عایق‌ها و مواد طبیعی، بسیار مورد علاقه و بررسی محققین بوده است. دلیل این رویکرد و جهت‌گیری به سوی این نانوسازه‌ها کاربرد فراوانی است که این نانوشکل‌ها در صنایع مختلف مانند الکترونیک، باتری‌ها، تبدیل انرژی، اپتیک، سنسورهای شیمیایی، درمان سرطان و غیره پیدا کرده است. کاربردهای فراوان مذکور، مطالعه و بررسی، جهت تعیین خواص مکانیکی و فیزیکی نانوسازه‌های مورد اشاره را اجتناب‌ناپذیر می‌نماید. لازم به یادآوری است که مهمترین ویژگی این ساختارها نانو مقیاس بودن در یک الی سه بعد و داشتن شکل هندسی متقارن است.

بدیهی است که به دلیل وجود اثر سطح به عنوان یک خرابی دوبعدی و همچنین اثر اندازه در نانوساختارها، بررسی دقیق خواص مکانیکی نانوسازه‌ها در چهارچوب نظریه الاستیسیته کلاسیک امکان‌پذیر نیست و ناگزیر باید از روش‌های آزمایشگاهی و عددی برای حل مسایل مکانیکی بهره برد [۳-۱]. همین مساله در حدود سال‌های ۱۹۶۰ الی ۱۹۷۵ انگیزه‌ای قوی برای ارائه‌ی نظریه‌های الاستیسیته تقویت‌یافته به عنوان یک راهکار محیط پیوسته برای بررسی و مطالعه ویژگی‌های مکانیکی نانوسازه‌ها بوده است. به عنوان مثال، لازار [۴] نظریه محیط پیوسته‌ی نابجایی غیرتکین را با استفاده از الاستیسیته گرادیان کرنش بسط و توسعه داده است. در مقاله‌ای دیگر، لازار و آگیاسوفیتو [۵] کمیت‌های بنیادی را در الاستیسیته تعمیم‌یافته و

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: f.ojaghnezhad@alzahra.ac.ir

نظریه نابجایی بلورها ارائه داده‌اند. همچنین، از فعالیت‌های پژوهشی صورت گرفته در این زمینه می‌توان به استخراج تانسور گرین برای نظریه گرادیان اول کرنش غیرهمسانگرد توسط پو و همکاران [۶] اشاره کرد. در فعالیتی دیگر، دلفانی و همکاران [۷] با استفاده از الاستیسیته گرادیان دوم کرنش، مدول برشی موثر را برای مواد مرکب تخمین زده‌اند. با توجه به فعالیت‌های پژوهشی ذکر شده در زمینه الاستیسیته تعمیم‌یافته در سال‌های اخیر، لازم است تاریخچه مختصری برای نظریه گرادیان کرنش ارائه شود. در نظریه گرادیان اول کرنش، توپین [۸] فرض کرد که چگالی انرژی کرنشی تابعی از تانسور مرتبه دوم کرنش و گرادیان اول آن است. تناظر بین این نظریه با ساختار اتمی ماده توسط توپین و گیزیس [۹] با در نظر گرفتن اندرکنش هر اتم با همسایه‌های اول و دوم نشان داده شد و آن‌ها دریافتند که لایه نخست اتمی در موادی که تقارن مرکزی ندارند، بر اثر خواص سطحی و بر اساس نظریه گرادیان اول کرنش به سمت داخل یا خارج حرکت می‌کند. برای این‌که اثر سطح در مواد با تقارن مرکزی نیز مشاهده شود، میندلین [۱۰] چگالی انرژی کرنشی را به‌صورت تابعی از تانسور کرنش و گرادیان‌های اول و دوم در نظر گرفت. در این نظریه، میندلین پارامتری به نام مدول چسبندگی معرفی می‌کند که منجر به لحاظ شدن اثر سطح در تحلیل نانوسازه‌ها در چهارچوب این نظریه است [۱۱]. اخیرا، با توجه به توانایی نظریه گرادیان دوم کرنش در احتساب اثر سطح در سازه‌ها، اجاق‌نژاد و شجاع [۱۲] نظریه الاستیسیته سطح گرتین و مرداک [۱۳] را در قالب الاستیسیته گرادیان دوم کرنش صورت‌بندی کردند و ارتباط میان پارامترهای الاستیک سطح و ثابت‌های میندلین را مورد بررسی قرار دادند.

به منظور استفاده از نظریه گرادیان دوم کرنش برای تحلیل خواص مکانیکی نانوکرات، لازم است که این نظریه در مختصات منحنی‌الخط متعامد کروی نوشته شود. با استفاده از ابزار ریاضی ارائه شده توسط ارینگن [۱۴] و نماد کریستوفل، این تبدیل دستگاه مختصات صورت می‌گیرد. جی و همکاران [۱۵] صورت‌بندی کلی نظریه گرادیان اول کرنش ساده شده توسط ژو و همکاران [۱۶] را در دستگاه منحنی‌الخط متعامد ارائه کرده‌اند. اجاق‌نژاد و شجاع [۱۷] معادلات تعادل، شرایط مرزی و روابط بنیادی تنش-کرنش را در چهارچوب الاستیسیته گرادیان دوم کرنش میندلین در دستگاه مختصات منحنی‌الخط ارائه داده‌اند. بر این اساس، تحلیل مکانیکی کامپوزیت‌های با تقارن کروی در چهارچوب نظریه گرادیان دوم کرنش با توجه به کاربرد وسیعی که این مسایل در صنایع نوین امروزی (به خصوص در صنعت باتری) دارند و همچنین ارائه مثال‌های عددی برای نشان دادن اهمیت کاربرد این تئوری در سازه‌های نانومقیاس مهمترین دستاورد مقاله پیش روست. با استفاده از روش سری فروبینیس معادله تعادل برای محیط با تقارن کروی حل شده، جواب‌های مستقل معادله حاصل می‌شود. سپس، با اعمال شرایط مرزی مناسب، مکانیک نانومحیط مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای به‌دست آوردن نتایج عددی و نمودار کمیت‌ها، داشتن مقادیر عددی ثابت‌های مواد لازم و ضروری است. در نظریه‌های الاستیسیته تعمیم‌یافته علاوه بر ثابت‌های متداول لمه، ثابت‌های مواد جدید در تئوری وارد می‌شود. به عنوان مثال، در تئوری گرادیان دوم کرنش میندلین، شانزده ثابت ماده جدید معرفی می‌شود. در سال‌های اخیر فعالیت‌های قابل توجهی در زمینه تعیین مقادیر عددی ثابت‌های اضافی مواد در چهارچوب نظریه‌های گرادیان اول و دوم کرنش صورت گرفته است [۱۱، ۱۲، ۲۱-۱۸].

با توجه به اهمیت و کاربرد وسیع نانوکرات سیلیکونی با پوشش کربنی در افزایش کارایی باتری‌های لیتیومی [۳۱-۲۲]، تعیین خواص فیزیکی و مکانیکی این قبیل سازه‌ها در اثر آسایش سطحی[1]، اثر سطح و اثر اندازه و بارگذاری خارجی متقارن کروی، مساله مهمی به نظر می‌رسد. در این مطالعه، بر اساس راهکار ارائه شده توسط شجاع و همکاران [۱۹] که برای ماده با ساختار مکعبی در نظریه گرادیان اول کرنش ارائه شده است، ثابت‌های لمه و شانزده پارامتر اضافی میندلین، با در نظر گرفتن تئوری دینامیک شبکه و محاسبات اصول اولیه کوانتمی برای عناصر بلوری سیلیکون و کربن که ساختار الماس دارند، محاسبه می‌شود. با در دست داشتن مقادیر عددی ثابت‌های مواد، اثرات سطح و مرز در پیکربندی متعادل[2] نانوکره توخالی کربنی و نانوکره توخالی سیلیکونی با پوشش کربنی در چهارچوب نظریه گرادیان دوم کرنش مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس، بارگذاری با تقارن کروی بر سطوح داخلی و خارجی نانوکره توخالی پوشش‌دار و بدون پوشش با پیکربندی متعادل سطحی اعمال می‌شود و پاسخ مکانیکی نانوسازه با پاسخ کلاسیک مقایسه

1 Surface Relaxation
2 Relaxed Configuration

می‌شود. پرواضح است که جواب الاستیسیته کلاسیک برای حالتی که نانوتیوب پوشش‌دار و بدون پوشش بدون هیچ بارگذاری خارجی در نظر گرفته می‌شود و صرفا تحت اثر سطح آسوده می‌شود، پاسخ بدیهی (پاسخ صفر) است. این درحالیست که نظریه گرادیان دوم کرنش برای این مساله پاسخ غیربدیهی (غیر صفر) دارد. توزیع کرنش شعاعی در این سازه‌ها بعد از آسایش سطحی در بخش نتایج به‌صورت نمودار آورده شده است. همچنین، کرنش شعاعی متوسط که برابر تغییر ضخامت در اثر آسایش سطحی به ضخامت اولیه است، برای چند حالت هندسی رسم و مقایسه شده است. به عنوان مثال، برای یک نانوتیوب کربنی با شعاع داخلی ۱۰ برابر پارامتر شبکه و ضخامت ۳ برابر پارامتر شبکه، تغییر ضخامت به ضخامت اولیه حدود ۰/۱- است و برای نانوتیوب با شعاع داخلی ۲ برابر پارامتر شبکه و همان ضخامت، تغییر ضخامت به ضخامت اولیه حدود ۰/۳۱- است. بعد از رسیدن به حالت متعادل سطحی، بارگذاری خارجی متقارن روی سطوح داخلی و خارجی سازه‌ها اعمال می‌شود و پاسخ حاصل با پاسخ کلاسیک مقایسه می‌شود. به عنوان مثال، در مساله نانوتیوب سیلیکونی با پوشش کربنی با شعاع داخلی ۱۰ برابر پارامتر شبکه سیلیکون، ضخامت لایه سیلیکون برابر یک برابر پارامتر شبکه سیلیکون، ضخامت لایه کربنی برابر یک برابر پارامتر شبکه کربن و تحت بارگذاری داخلی و خارجی حدود ۰/۰۰۰۱- برابر مدول یانگ کربن، تغییر ضخامت در پوسته کربنی بر اساس الاستیسیته کلاسیک، افزایشی اما بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش، کاهشی است. نکته مهم در این است که در همه مسایل در نظر گرفته شده، با افزایش ابعاد، پاسخ نظریه گرادیان دوم کرنش، مطابق انتظار، به پاسخ الاستیسیته کلاسیک همگرا می‌شود.

۲- نظریه گرادیان دوم کرنش

در این بخش، نظریه گرادیان دوم کرنش به‌طور مختصر ارائه می‌شود. بر اساس نظریه ارائه شده توسط میندلین، در یک ماده خطی، الاستیک، همگن و همسانگرد با تقارن مرکزی، چگالی انرژی کرنشی (W) علاوه بر میدان کرنش ($\overset{1}{\boldsymbol{\varepsilon}}$) به گرادیان دوم میدان جابجایی ($\overset{2}{\boldsymbol{\varepsilon}}$) و همچنین گرادیان سوم آن ($\overset{3}{\boldsymbol{\varepsilon}}$) وابسته است. فرض کنید که میدان جابجایی مربوط به یک نقطه مادی به وسیله بردار $\boldsymbol{u}$ نشان داده شود، در این صورت میدان کرنش و گرادیان‌های دوم و سوم جابجایی به شکل زیر تعریف می‌شود [۱۰]:

$$\overset{1}{\boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla u}+\boldsymbol{u\nabla}), \tag{۱}$$

$$\overset{2}{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{\nabla\nabla u}, \tag{۲}$$

$$\overset{3}{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{\nabla\nabla\nabla u}. \tag{۳}$$

برای ماده مافوق کشسان[1]، میدان‌های تنش مراتب دوم، سوم و چهارم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overset{1}{\boldsymbol{\tau}}=\frac{\partial W}{\partial \overset{1}{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \tag{۴}$$

$$\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}=\frac{\partial W}{\partial \overset{2}{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \tag{۵}$$

$$\overset{3}{\boldsymbol{\tau}}=\frac{\partial W}{\partial \overset{3}{\boldsymbol{\varepsilon}}}. \tag{۶}$$

بر اساس تحلیل صورت گرفته توسط میندلین، برای محیط مادی با حجم V که توسط سطح S احاطه شده است، چنانچه نیروی حجمی برابر $\boldsymbol{f}$ باشد، معادله برداری تعادل جسم به شکل زیر استخراج می‌شود [۱۰]:

$$\boldsymbol{\nabla}.(\overset{1}{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{\nabla}.\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}+\boldsymbol{\nabla\nabla}:\overset{3}{\boldsymbol{\tau}})+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}. \tag{۷}$$

ضرب اسکالر دو نقطه‌ای در عبارت فوق، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\nabla\nabla}:\overset{3}{\boldsymbol{\tau}}=\tau_{ijkl,ij}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l, \tag{۸}$$

که در رابطه فوق، $\boldsymbol{e}_k$ بردار پایه در جهت k است. همچنین، اگر $\boldsymbol{n}$ بردار واحد برون‌سو برای سطح S باشد، نیروهای سطحی[2] در مرز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱۰]:

1 Hyperelastic
2 Traction Boundary Conditions

$$\overset{1}{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{n}.(\overset{1}{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{\nabla}.\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}+\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}:\overset{3}{\boldsymbol{\tau}})+\boldsymbol{L}.(\boldsymbol{n}.(\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{\nabla}.\overset{3}{\boldsymbol{\tau}})+\boldsymbol{L}.(\boldsymbol{n}.\overset{3}{\boldsymbol{\tau}})-(\overset{s}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{n}).(\boldsymbol{nn}:\overset{3}{\boldsymbol{\tau}})),\quad (۹)$$

$$\overset{2}{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{nn}:(\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{\nabla}.\overset{3}{\boldsymbol{\tau}})+\boldsymbol{n}.(\boldsymbol{L}.(\boldsymbol{n}.\overset{3}{\boldsymbol{\tau}}))+\boldsymbol{L}.(\boldsymbol{nn}:\overset{3}{\boldsymbol{\tau}}),\quad (۱۰)$$

$$\overset{3}{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{nnn}\vdots\overset{3}{\boldsymbol{\tau}},\quad (۱۱)$$

در عبارات فوق، عملگرهای گرادیان سطح، $\overset{s}{\boldsymbol{\nabla}}$ و $\boldsymbol{L}$ به‌صورت $\overset{s}{\boldsymbol{\nabla}}=\boldsymbol{\nabla}-\boldsymbol{nn}\boldsymbol{\nabla}$ و $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{n}\overset{s}{\boldsymbol{\nabla}}.\boldsymbol{n}-\overset{s}{\boldsymbol{\nabla}}$ تعریف می‌شود. با در نظر گرفتن قرارداد جمع اندیسی انیشتن، چگالی انرژی کرنشی را برای ماده الاستیک و همسانگرد می‌توان به‌صورت زیر نوشت [۱۰]:

$$\begin{aligned}W=&\frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}+\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}+a_1\varepsilon_{ijj}\varepsilon_{ikk}+a_2\varepsilon_{iik}\varepsilon_{kjj}+\\&a_3\varepsilon_{iik}\varepsilon_{jjk}+a_4\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}+a_5\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji}\\&+b_1\varepsilon_{iijj}\varepsilon_{kkll}+b_2\varepsilon_{ijkk}\varepsilon_{ijll}+b_3\varepsilon_{iijk}\varepsilon_{jkll}+b_4\varepsilon_{iijk}\varepsilon_{llkj}+\\&b_5\varepsilon_{iijk}\varepsilon_{lljk}+b_6\varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{ijkl}+b_7\varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{jkli}\\&+c_1\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jjkk}+c_2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ijkk}+c_3\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kkij}+b_0\varepsilon_{iijj},\end{aligned}\quad (۱۲)$$

در رابطه ، ε_{ij}، ε_{ijk} و ε_{ijkl}، به ترتیب، مولفه‌های تانسورهای $\overset{1}{\boldsymbol{\varepsilon}}$، $\overset{2}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ و $\overset{3}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ است. ضرایب λ و μ ثابت‌های لمه و ضرایب a_1 تا a_5، b_1 تا b_7، c_1 تا c_3 و b_0 ثابت‌های اضافی میندلین نامیده می‌شود. ثابت b_0 که دارای بعد نیرو است تحت عنوان مدول چسبندگی[1] تعریف می‌شود. با استفاده از روابط(۴) تا (۶) و (۱۲)، معادلات تنش-کرنش به‌صورت زیر قابل استخراج است:

$$\tau_{pq}=\lambda\varepsilon_{ii}\delta_{pq}+2\mu\varepsilon_{pq}+c_1\varepsilon_{iijj}\delta_{pq}+c_2\varepsilon_{pqii}+\frac{1}{2}c_3(\varepsilon_{iipq}+\varepsilon_{iiqp}),\quad (۱۳)$$

$$\begin{aligned}\tau_{pqr}=&a_1(\varepsilon_{pii}\delta_{qr}+\varepsilon_{qii}\delta_{pr})+\\&\frac{1}{2}a_2(\varepsilon_{iip}\delta_{qr}+2\varepsilon_{rii}\delta_{qp}+\varepsilon_{iiq}\delta_{pr})+\\&2a_3\varepsilon_{iir}\delta_{pq}+2a_4\varepsilon_{pqr}+a_5(\varepsilon_{rqp}+\varepsilon_{rpq}),\end{aligned}\quad (۱۴)$$

$$\begin{aligned}\tau_{pqr}=&\frac{2}{3}b_1\varepsilon_{iijj}\delta_{pqrs}+\frac{2}{3}b_2\varepsilon_{jkii}\delta_{jkpqrs}+\\&\frac{1}{6}b_3((\varepsilon_{iijk}+\varepsilon_{iikj})\delta_{jkpqrs}+2\varepsilon_{jsii}\delta_{jpqr})+\\&\frac{2}{3}b_4\varepsilon_{iisj}\delta_{jpqr}+\frac{2}{3}b_5\varepsilon_{iijs}\delta_{jpqr}+2b_6\varepsilon_{pqrs}+\\&\frac{2}{3}b_7(\varepsilon_{qrsp}+\varepsilon_{rspq}+\varepsilon_{spqr})+\frac{1}{3}c_1\varepsilon_{ii}\delta_{pqrs}+\\&\frac{1}{3}c_2\varepsilon_{ij}\delta_{ijpqrs}+\frac{1}{3}c_3\varepsilon_{is}\delta_{pqrs}+\frac{1}{3}b_0\delta_{pqrs},\end{aligned}\quad (۱۵)$$

در روابط فوق δ_{ij} تابع دلتای کرانیکر[2] است و همچنین:

$$\begin{aligned}&\delta_{ijkl}=\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{jk}\delta_{il},\\&\delta_{ijklmn}=\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn}+\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{\ln}+\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}.\end{aligned}\quad (۱۶)$$

با استفاده از روابط تنش-کرنش ارائه شده و تعاریف کرنش‌های مرتبه دو، سه و چهار و جایگذاری در معادله (۷) ، معادله تعادل بر حسب میدان جابجایی به‌صورت زیر حاصل می‌شود [۱۰]:

$$\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)(1-(\ell_{11}^2+\ell_{12}^2)\nabla^2+\ell_{11}^2\ell_{12}^2\nabla^4)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{u}-\\&\mu(1-(\ell_{21}^2+\ell_{22}^2)\nabla^2+\ell_{21}^2\ell_{22}^2\nabla^4)\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0},\end{aligned}\quad (۱۷)$$

طول‌های مشخصه ظاهر شده در عبارت فوق به‌صورت زیر برای $j=۱,۲$ تعریف می‌شود:

$$2(\lambda+2\mu)\ell_{1j}^2=\overline{a}-2\overline{c}\pm((\overline{a}-2\overline{c})^2-4\overline{b}(\lambda+2\mu))^{\frac{1}{2}},\quad (۱۸)$$

$$2\mu\ell_{2j}^2=\overline{a}'-c_3\pm((\overline{a}'-c_3)^2-4\overline{b}'\mu)^{\frac{1}{2}},\quad (۱۹)$$

تعاریف مربوط به پارامترهای ظاهر شده در تعریف طول‌های مشخصه عبارتند از:

$$\begin{aligned}&\overline{a}=2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5),\\&\overline{b}=2(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7),\\&\overline{c}=c_1+c_2+c_3,\\&\overline{a}'=2(a_3+a_4),\\&\overline{b}'=2(b_5+b_6).\end{aligned}\quad (۲۰)$$

1 Modulus of Cohesion

2 Kronecker Delta

همانطور که ملاحظه می‌شود، علاوه بر ثابت‌های لمه متداول در تئوری الاستیسیته، در نظریه گرادیان دوم کرنش برای ماده همگن و همسانگرد، شانزده ثابت ماده جدید در روابط مربوط به معادله تعادل، تنش-کرنش و نیروهای سطحی در مرزها وارد می‌شود.

۳- محیط مادی با تقارن کروی

محیط پیوسته‌ای را در نظر بگیرید که دارای تقارن کروی در هندسه و بارگذاری است. در این صورت، تنها مولفه غیرصفر میدان جابجایی مولفه $u_r(r)$ است که در آن r متغیر فاصله از مرکز محیط با تقارن کروی است. در این حالت، با نوشتن معادلات تعادل، در دستگاه مختصات کروی و اعمال تقارن کروی مساله، معادله تعادل در چهارچوب نظریه گرادیان دوم کرنش بر حسب مولفه‌های تنش به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\tau_{rr,r}-\tau_{rrr,rr}+\tau_{rrrr,rrr}+(2\tau_{rr}-2\tau_{\theta\theta}-4\tau_{rrr,r}+\\
&4\tau_{r\theta\theta,r}+2\tau_{\theta\theta r,r}+6\tau_{rrrr,rr}-6\tau_{rr\theta\theta,rr}-6\tau_{r\theta\theta r,rr})/r\\
&+(-2\tau_{rrr}+8\tau_{r\theta\theta}+4\tau_{\theta\theta r}+6\tau_{rrrr,r}-24\tau_{rr\theta\theta,r}-\\
&24\tau_{r\theta\theta r,r}+6\tau_{\theta\theta\theta\theta,r}+6\tau_{\theta\theta\varphi\varphi,r})/r^2\\
&-(12\tau_{rr\theta\theta}+12\tau_{r\varphi\varphi r}-6\tau_{\theta\varphi\varphi\theta}-6\tau_{\varphi\varphi\varphi\varphi})/r^3=0,
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

که در آن (r,θ,ϕ) مختصات نقطه در دستگاه مختصات کروی است. با جایگذاری مولفه‌های تنش از روابط (۱۳) تا (۱۵)، معادله تعادل بر حسب میدان جابجایی به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&r^6u_r'''''' + 6r^5u_r''''' - (6r^4+p_1r^6)u_r'''' - 4r^5p_1u_r''' +\\
&(4p_1r^4+p_2r^6)u_r'' + 2p_2r^5u_r' - 2p_2r^4u_r = 0,
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

که در آن:

$$p_1=\frac{\ell_{11}^2+\ell_{12}^2}{\ell_{11}^2\ell_{12}^2}, \qquad p_2=\frac{1}{\ell_{11}^2\ell_{12}^2}. \tag{۲۳}$$

معادله دیفرانسیل (۲۲) یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۶ خطی همگن است. با در نظر گرفتن جواب معادله فوق به‌صورت سری فروبینیس[1]، جواب عمومی این معادله دیفرانسیل یک ترکیب خطی از توابع زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&u_r(r)=\mathrm{L}\{r,\frac{1}{r}\cosh\frac{r}{\ell_{11}}-\frac{\ell_{11}}{r^2}\sinh\frac{r}{\ell_{11}},\\
&\frac{1}{r}\cosh\frac{r}{\ell_{12}}-\frac{\ell_{12}}{r^2}\sinh\frac{r}{\ell_{12}},\\
&\frac{1}{r^2},\frac{\ell_{11}+r}{r^2}e^{-\frac{r}{\ell_{11}}},\frac{\ell_{12}+r}{r^2}e^{-\frac{r}{\ell_{12}}}\}.
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

از شش جواب مستقل معادله دیفرانسیل مذکور، سه جواب در صفر و سه جواب در بینهایت تعریف نشده هستند. همچنین، با استفاده از روابط (۹) تا (۱۱) مولفه‌های غیر صفر نیروهای سطحی در روی سطوح فضای مورد نظر که تقارن کروی دارد، به‌صورت زیر استخراج خلاصه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{t}_r=-\frac{2b_0}{r^2}+(\frac{2\lambda}{r}-\frac{4(a_4+a_5+\overline{a}-2c_2-2c_3)}{r^3}\\
&-\frac{8(\overline{b}-2b_1+4b_6+4b_7)}{r^5})u_r\\
&+(\lambda+2\mu+\frac{4(a_4+a_5+\overline{a}+c_1)-10\overline{c}}{r^2}+\\
&\frac{8(\overline{b}-2b_1+4b_6+4b_7)}{r^4})u_{r,r}\\
&+(\frac{4\overline{c}-2\overline{a}+2c_1}{r}+\frac{8(b_2+b_3+b_4+b_5)}{r^3})u_{r,rr}+\\
&(2\overline{c}-\overline{a}-\frac{10\overline{b}}{r^2})u_{r,rrr}+\frac{4\overline{b}u_{r,rrrr}}{r}+\overline{u}_{r,rrrrr},
\end{aligned} \tag{۲۵}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{2}{t}_r=\frac{2b_0}{r}+(\frac{4(a_1+a_2+a_3)+4c_1+2\overline{c}}{r^2}+\frac{8(\overline{b}-2b_1+4b_6+4b_7)}{r^4})u_r\\
&+(\frac{4(a_1+a_2+a_3)}{r}-\frac{8(\overline{b}-2b_1+4b_6+4b_7)}{r^3})u_{r,r}\\
&+(\overline{a}-\overline{c}+\frac{12\overline{b}-8(b_2+b_3+b_4+b_5)}{r^2})u_{r,rr}-\frac{2\overline{b}}{r}u_{r,rrr}-\overline{b}u_{r,rrrr},
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{3}{t}_r=b_0+(\frac{2c_1}{r}+\frac{8(b_2+b_3+b_4+b_5)}{r^3})u_r+(\overline{c}-\frac{8(b_2+b_3+b_4+b_5)}{r^2})u_{r,r}\\
&+(\frac{2\overline{b}+4b_1-4b_6-4b_7}{r})u_{r,rr}+\overline{b}u_{r,rrr},
\end{aligned} \tag{۲۷}$$

با در دست داشتن جواب معادله دیفرانسیل برای مساله با تقارن کروی، همچنین روابط تنش-کرنش و نیروهای سطحی روی مرز محیط مورد نظر، در ادامه مساله لمه کروی و مساله دو پوسته کروی بررسی و مطالعه می‌شود.

1 Frobenius series

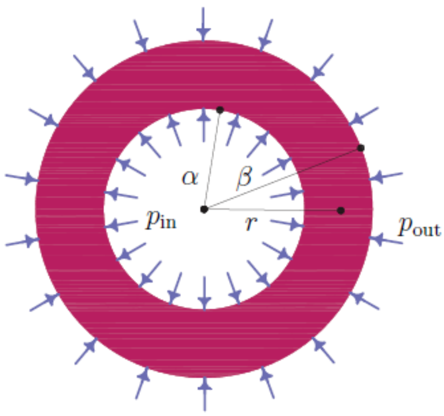


Fig. 1. The spherical Lame-type problem with inner and outer radii α and β under the external pressures p_{in} and p_{out}.

شکل ۱: مسالهٔ لمه‌گونه کروی با شعاع داخلی α و شعاع خارجی β تحت فشار داخلی و خارجی p_{in} و p_{out}

۱-۳- مساله لمه

مساله لمه کروی با استفاده از یک محیط با تقارن کروی که شعاع داخلی و خارجی آن به ترتیب با نمادهای α و β نمایش داده می‌شود و تحت فشار داخلی و خارجی p_{in} و p_{out} قرار دارد، مطابق شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود.

میدان جابجایی این مساله بر اساس الاستیسیته گرادیان دوم کرنش با استفاده از رابطه (۲۴) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_r(r) = A_1 r + A_2\left(\frac{1}{r}\cosh\frac{r}{\ell_{11}} - \frac{\ell_{11}}{r^2}\sinh\frac{r}{\ell_{11}}\right) + A_3\left(\frac{1}{r}\cosh\frac{r}{\ell_{12}} - \frac{\ell_{12}}{r^2}\sinh\frac{r}{\ell_{12}}\right) + \frac{A_4}{r^2} + A_5\frac{\ell_{11}+r}{r^2}e^{-\frac{r}{\ell_{11}}} + A_6\frac{\ell_{12}+r}{r^2}e^{-\frac{r}{\ell_{12}}}, \quad (۲۸)$$

که ضرایب A_1 الی A_6 در رابطه فوق، با استفاده از شرایط مرزی مساله به‌دست می‌آید. شرایط مرزی مساله لمه با استفاده از مقادیر نیروهای سطحی (روابط ، و) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{t}_r(r=\alpha) = -p_{in},\\
&\overset{2}{t}_r(r=\alpha) = 0,\\
&\overset{3}{t}_r(r=\alpha) = 0,\\
&\overset{1}{t}_r(r=\beta) = -p_{out},\\
&\overset{2}{t}_r(r=\beta) = 0,\\
&\overset{3}{t}_r(r=\beta) = 0,
\end{aligned} \quad (۲۹)$$

با محاسبه نیروهای سطحی بر حسب میدان جابجایی از روابط (۲۵) تا (۲۷) و (۲۸) و حل معادلات جبری (۲۹) ضرایب مجهول بر حسب α، β، p_{in} و p_{out} به دست می‌آید. با در دست داشتن ضرایب A_1 الی A_6، میدان تنش مرتبه دوم در ماده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= A_1(3\lambda+2\mu) + \\
&A_2(-2\ell_{11}r(c_2+c_3+2\ell_{11}{}^2\mu)\cosh(\frac{r}{\ell_{11}}) + \\
&((c_1+\lambda\ell_{11}{}^2)r^2 + (c_2+c_3+2\ell_{11}{}^2\mu)(2\ell_{11}{}^2+r^2)) \\
&\sinh(\frac{r}{\ell_{11}}))/(\ell_{11}{}^3r^3) + \\
&A_3(-2\ell_{12}r(c_2+c_3+2\ell_{12}{}^2\mu)\cosh(\frac{r}{\ell_{12}}) \\
&+((c_1+\lambda\ell_{12}{}^2)r^2 + \\
&(c_2+c_3+2\ell_{12}{}^2\mu)(2\ell_{12}{}^2+r^2)) \\
&\sinh(\frac{r}{\ell_{12}}))/(\ell_{12}{}^3r^3) - \frac{4A_4\mu}{r^3} \\
&-A_5e^{-\frac{r}{\ell_{11}}}((c_2+c_3+2\ell_{11}{}^2\mu)(2\ell_{11}{}^2+2\ell_{11}r+r^2) \\
&+r^2(c_1+\ell_{11}{}^2\lambda))/(\ell_{11}{}^3r^3) \\
&-A_6e^{-\frac{r}{\ell_{12}}}((c_2+c_3+2\ell_{12}{}^2\mu)(2\ell_{12}{}^2+2\ell_{12}r+r^2) \\
&+r^2(c_1+\ell_{12}{}^2\lambda))/(\ell_{12}{}^3r^3),
\end{aligned} \quad (۳۰)$$

$$
\begin{aligned}
&\tau_{\theta\theta}=\tau_{\phi\phi}=A_1(3\lambda+2\mu)+\\
&A_2(\ell_{11}r(c_2+c_3+2\ell_{11}{}^2\mu)\cosh(\frac{r}{\ell_{11}})+(c_1r^2\\
&-\ell_{11}{}^2(c_2+c_3+2\ell_{11}{}^2\mu-\lambda r^2))\\
&\sinh(\frac{r}{\ell_{11}}))/(\ell_{11}{}^3r^3)+\\
&A_3(\ell_{12}r(c_2+c_3+2\ell_{12}{}^2\mu)\cosh(\frac{r}{\ell_{12}})\\
&+(c_1r^2-\ell_{12}{}^2(c_2+c_3+2\ell_{12}{}^2\mu-\lambda r^2))\\
&\sinh(\frac{r}{\ell_{12}}))/(\ell_{12}{}^3r^3)+\frac{2A_4\mu}{r^3}\\
&+A_5e^{-\frac{r}{\ell_{11}}}((c_2+c_3+2\ell_{11}{}^2\mu)\ell_{11}(\ell_{11}+r)\\
&-r^2(c_1+\ell_{11}{}^2\lambda))/(\ell_{11}{}^3r^3)\\
&+A_6e^{-\frac{r}{\ell_{12}}}((c_2+c_3+2\ell_{12}{}^2\mu)\ell_{12}(\ell_{12}+r)\\
&-r^2(c_1+\ell_{12}{}^2\lambda))/(\ell_{12}{}^3r^3).
\end{aligned}
\tag{۳۱}
$$

در چهارچوب صورت‌بندی کلاسیک الاستیسیته، میدان جابجایی به‌صورت زیر است:

$$u_r(r)=B_1r+\frac{B_2}{r^2},\tag{۳۲}$$

و میدان تنش به شکل زیر ساده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\tau_{rr}=\frac{p_{out}(r^3-\alpha^3)\beta^3+p_{in}(\beta^3-r^3)\alpha^3}{r^3(\alpha^3-\beta^3)},\\
&\tau_{\theta\theta}=\tau_{\phi\phi}=\frac{p_{out}(2r^3+\alpha^3)\beta^3-p_{in}(\beta^3+2r^3)\alpha^3}{2r^3(\alpha^3-\beta^3)}.
\end{aligned}
\tag{۳۳}
$$

همانطور که ملاحظه می‌شود میدان تنش در چهارچوب نظریه گرادیان دوم کرنش به مشخصه‌های طولی در ماده که منعکس‌کننده ساختار اتمی و گسسته محیط است، بستگی دارد.

۳-۲- مساله دوپوسته‌ای[1]

در این قسمت مساله دوپوسته‌ای به عنوان دومین مساله با تقارن کروی معرفی می‌شود. با توجه به شکل ۲، در این مساله یک محیط کروی با شعاع‌های α، β و ζ در نظر گرفته می‌شود که تحت فشار p_{in} و p_{out} به ترتیب روی سطوح خارجی و داخلی قرار دارد. در این مساله نیز، مشابه مساله لمه، میدان جابجایی مطابق رابطه (۲۸) برای محیط‌های S_1 و S_2 به‌صورت جداگانه نوشته می‌شود. به این ترتیب دوازده ضریب نامعلوم در این مساله وجود دارد که با استفاده از شرایط مرزی به‌دست می‌آید.

شرایط مرزی مربوط به نیروهای سطحی در این مساله به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&{}^{1S_1}t_r(r=\alpha)=-p_{in},\quad {}^{1S_2}t_r(r=\beta)={}^{1S_1}t_r(r=\beta),\quad {}^{1S_2}t_r(r=\zeta)=-p_{out},\\
&{}^{2S_1}t_r(r=\alpha)=0,\quad {}^{2S_2}t_r(r=\beta)={}^{2S_1}t_r(r=\beta),\quad {}^{2S_2}t_r(r=\zeta)=0,\\
&{}^{3S_1}t_r(r=\alpha)=0,\quad {}^{3S_2}t_r(r=\beta)={}^{3S_1}t_r(r=\beta),\quad {}^{3S_2}t_r(r=\zeta)=0,
\end{aligned}
\tag{۳۴}
$$

و همچنین، شرایط مرزی مربوط به میدان جابجایی و مشتقات عمود بر مرز آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&u_r^{S_2}(r=\beta)=u_r^{S_1}(r=\beta),\\
&u_{r,r}^{S_2}(r=\beta)=u_{r,r}^{S_1}(r=\beta),\\
&u_{r,rr}^{S_2}(r=\beta)=u_{r,rr}^{S_1}(r=\beta),
\end{aligned}
\tag{۳۵}
$$

که در روابط فوق، بالانویس S_1 و S_2 بیانگر نیروی سطحی یا جابجایی به ترتیب، در فضای پوسته داخلی و پوسته خارجی است. با استفاده از دوازده شرط مرزی بالا، دوازده ضریب مجهول مربوط به دو محیط مادی در نظر گرفته شده، محاسبه می‌شود.

۴- نتایج

به منظور ارائه نتایج عددی برای خواص مکانیکی نانوسازه، ابتدا باید مقادیر عددی ثابت‌های مواد در نظریه گرادیان دوم کرنش تعیین شود. مطابق راهکار ارائه شده توسط اجاق‌نژاد و شجاع [۱۱ و ۱۲] و شجاع و همکاران [۱۹]، ثابت‌های لمه و طول‌های مشخصه میندلین به وسیله محاسبات کوانتومی اصول اولیه، توصیف محیط پیوسته مواد و نظریه دینامیک شبکه تعیین می‌شود. بعلاوه، از معادل کردن چگالی انرژی کرنشی حاصل از دیدگاه دینامیک شبکه با چگالی انرژی کرنشی حاصل از توصیف محیط پیوسته روابط زیر حاصل می‌شود:

1 Double-Shell

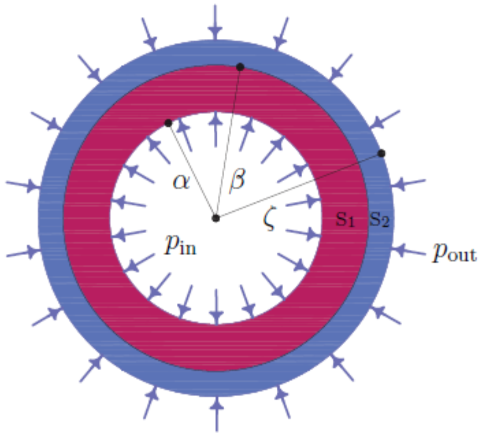


Fig. 2. The spherical coated shell with radii α , β , and ζ under the external pressures p_{in} and p_{out}

شکل ۲: مساله دو پوسته‌ای با شعاع‌های α، β و ζ تحت فشار داخلی و خارجی p_{in} و p_{out}

جدول ۱: ثابت‌های لمه بر حسب الکترون-ولت بر آنگستروم به توان ۳، طول‌های مشخصه حجمی بر حسب آنگستروم، طول مشخصه سطح بر حسب آنگستروم، مدول چسبندگی بر حسب الکترون-ولت بر آنگستروم و پارامتر شبکه‌ای بر حسب آنگستروم برای سیلیکون و کربن بلوری با ساختار الماس

Table 1. Lame constants in terms of eV/ $\mathring{A}^3$, bulk and surface characteristic lengths in terms of $\mathring{A}$, modulus of cohesion in terms of eV/ $\mathring{A}$, and lattice parameter in terms of $\mathring{A}$ for crystalline silicon and carbon with diamond structure

a_0	b_0	ℓ_{10}	ℓ_{21},ℓ_{22}	ℓ_{11},ℓ_{12}	μ	λ	عنصر
۵/۴۶	-۰/۷۷	۱/۵۱	۱ i /۱ ± ۳۵/۱۹	۰ i /۰ ± ۷۱/۴۴	۰/۶۲	۰/۴۵	سیلیکون
۳/۵۹	۳/۹۱	۱/۹۴	۱ i /۰ ± ۰۵/۸۷	۰ i /۰ ± ۸۴/۶۷	۲/۹۴	۰/۹۴	کربن

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_2 = a_5,\\
&2a_3 = a_4,\\
&2c_1 = c_2 = c_3,\\
&4b_1 = 2b_2 = b_3 = 4b_4 = 2b_7,\\
&2b_5 = 3b_6.
\end{aligned}
\qquad (۳۶)
$$

با بهره‌گیری از روابط ارائه شده برای انرژی سطح و تنش سطح توسط اجاق‌نژاد و شجاع [۱۲] و داشتن مقادیر عددی این کمیت‌ها با استفاده از راهکار ارائه شده توسط اجاق‌نژاد و شجاع [۳۲] و استفاده از محاسبات کوانتومی، تمام ثابت‌های اضافی میندلین مطابق جدول ۱ محاسبه می‌شود. با استفاده از محاسبات اصول اولیه[1] مقدار انرژی سطح برای Si(۰۰۱) و C(۰۰۱) به ترتیب برابر ۰/۰۷۹ و ۰/۳۲ الکترون-ولت بر مجذور آنگستروم و مقدار تنش سطح برای Si(۰۰۱) و C(۰۰۱) به ترتیب برابر ۰/۰۵۳ و ۰/۸۲- الکترون-ولت بر مجذور آنگستروم محاسبه شده است.

در جدول ۱، طول‌های مشخصه حجمی، $\ell_{11},\ell_{12},\ell_{21},\ell_{22}$ از روابط(۱۸) و (۱۹) محاسبه می‌شود. همچنین، طول مشخصه سطحی بر اساس رابطه $\ell_{10}^2 = \overline{c}/(\lambda+۲\mu)$ تعریف و تعیین می‌شود.

۴-۱- مساله لمه

در این قسمت، یک نانوکره توخالی کربنی با جداره نازک، ابتدا تحت اثر سطح در چهارچوب نظریه گرادیان دوم کرنش مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این حالت، بارگذاری خارجی صفر در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه اثر سطح، و البته تقارن کروی فضا، نظریه گرادیان دوم کرنش پیش‌بینی می‌کند که یک کرنش شعاعی در فضای کروی القا شود و تغییر ضخامت در نانوکره توخالی کربنی به وجود آید. سپس، بارگذاری به صورت فشار داخلی و خارجی برابر ($p_{in} = p_{out}$) بر نانوکره توخالی کربنی اعمال می‌شود. در اثر بارگذاری متقارن کروی اعمال شده بر نانوکره توخالی، کرنش شعاعی

1 Ab Initio Calculations

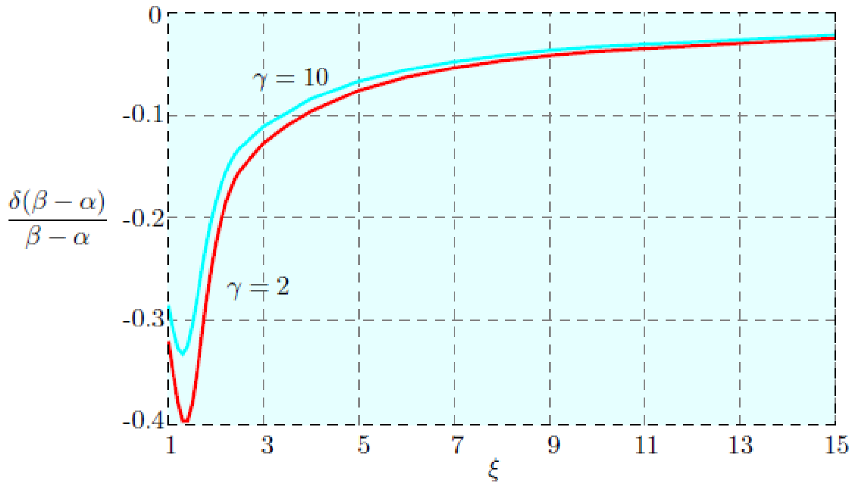


Fig. 3. The average radial strain in the carbon shell due to the surface relaxation versus ξ for two values of $\gamma = 2,10$ in second strain gradient theory.

شکل ۳: کرنش شعاعی متوسط ایجاد شده در اثر سطح در نانوکره توخالی کربنی بر حسب ξ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش برای دو حالت هندسی $\gamma = ۲,۱۰$

جدیدی به وجود می‌آید و تغییر ضخامت القا می‌شود. به منظور ارائه نتایج، پارامترهای γ و ξ که بیانگر شعاع داخلی و ضخامت اولیه نانوکره توخالی به‌صورت بی‌بعد هستند، بر حسب پارامتر شبکه‌ای کربن به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha = \gamma a_0^c, \qquad \beta - \alpha = \xi a_0^c, \tag{۳۷}$$

که a_0^c پارامتر شبکه‌ای بلور کربن با ساختار الماس است. به منظور بررسی اثر سطح در تغییر ضخامت نانوکره توخالی کربنی به نسبت ضخامت اولیه، که به‌صورت کرنش متوسط شعاعی قابل تعبیر است، پارامتر γ برابر ۲ و ۱۰ در نظر گرفته شده، کرنش شعاعی متوسط در نانوکره کربنی بر حسب ξ در شکل ۳ رسم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، کرنش شعاعی متوسط با افزایش ξ به سمت صفر میل می‌کند و اثر سطح در کاهش ضخامت نانوکره توخالی با افزایش γ، مطابق انتظار، کاهش پیدا می‌کند.

توزیع کرنش شعاعی القا شده در شعاع نانوکره توخالی برای مقادیر $\gamma = ۱۰$ و $\xi = ۲,۱۰,۵۰$ به ترتیب در شکل‌های ۴ (الف) تا ۴ (ج) بر حسب پارامتر η که به‌صورت $\eta = \gamma a_0^c + \xi a_0^c$ تعریف شده است، نشان داده شده است. پارامتر η در ضخامت نانوکره از مقدار صفر در جدار داخلی تا مقدار یک در جدار خارجی تغییر می‌کند.

همانطور که ملاحظه می‌شود، کرنش شعاعی القایی در اثر سطح در نزدیکی سطوح داخلی و خارجی نانو کره زیاد است و هر چه ضخامت نانوکره توخالی افزایش می‌یابد، بخش وسیعی از نواحی داخلی دارای کرنش شعاعی نزدیک به صفر خواهد بود و اثر سطح به همسایگی سطوح داخلی و خارجی محدود خواهد بود.

بعد از محاسبه اثر سطح توسط نظریه گرادیان دوم کرنش (بعد از آسایش سطحی)، بارگذاری خارجی به‌صورت فشاری (یا کششی) روی سطوح داخلی و خارجی نانوکره توخالی به‌صورت مساوی ($p_{in} = p_{out}$) اعمال می‌شود. درصد تغییر ضخامت نسبت به ضخامت اولیه نانوکره (ضخامت نانوکره بعد از آسایش سطحی و قبل از اعمال بار خارجی)، بر حسب درصد بارگذاری فشاری (یا کششی) روی سطوح داخلی و خارجی (یکه شده نسبت به مدول یانگ کربن) برای دو هندسه مختلف در شکل‌های ۵ (الف) و (ب) رسم شده است. در این اشکال، درصد تغییر ضخامت، به ترتیب، برای دو حالت هندسی $\gamma = ۱۰$، $\xi = ۲$ و $\gamma = ۱۰$، $\xi = ۱۰$ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش[1] و نظریه الاستیسیته کلاسیک[2] رسم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، در حالتی که ضخامت نانوکره توخالی کم است، پاسخ گرادیان دوم کرنش تفاوت چشمگیری با

1 Second Strain Gradient Theory (SSGT)
2 Classic Theory of Elasticity (CT)

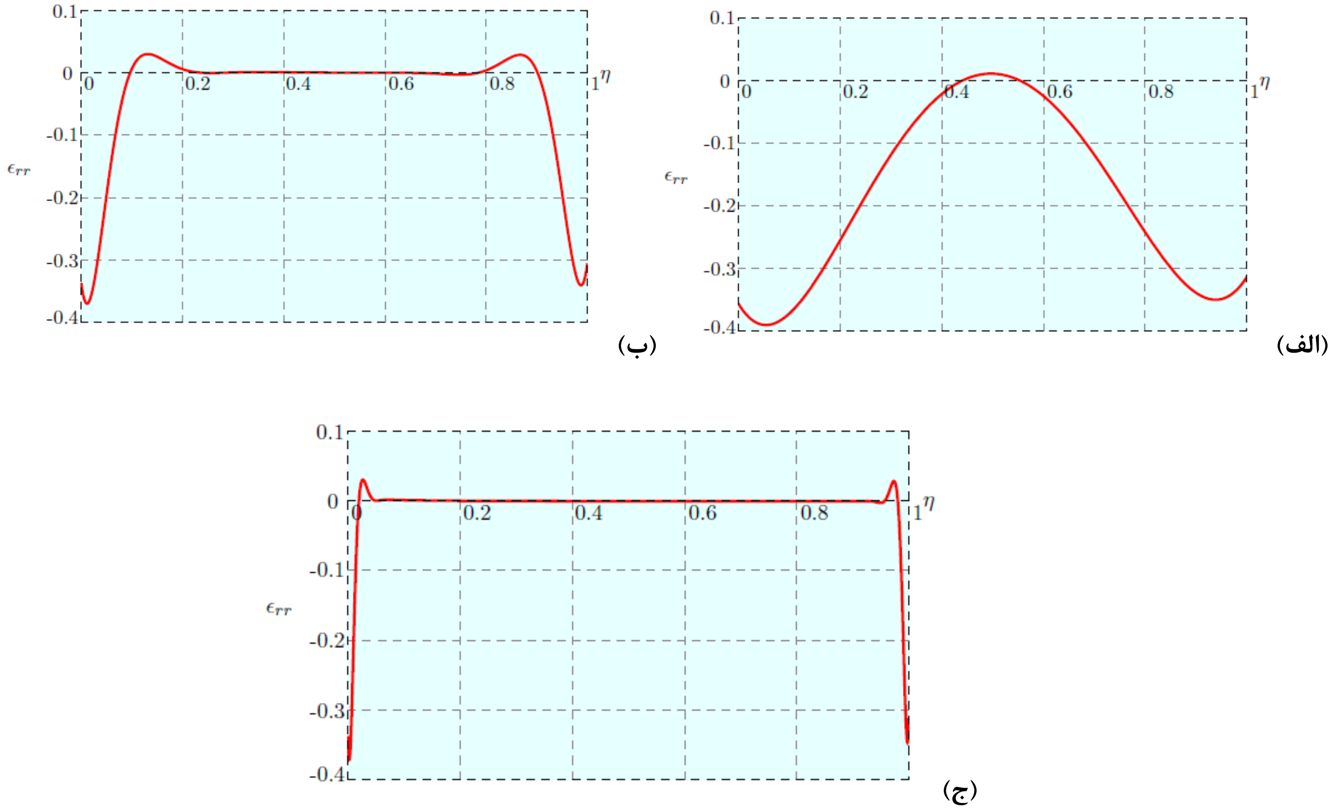


Fig. 4. The radial distribution of the radial strain versus η due to the surface effect in the carbon shell for $\gamma=10$ and a) $\xi=2$, b) $\xi=10$, and c) $\xi=50$ in second strain gradient theory.

شکل ۴: توزیع شعاعی کرنش شعاعی ناشی از اثر سطح در نانوکره توخالی کربنی بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش به ازای $\gamma=۱۰$ و (الف) $\xi=۲$، (ب) $\xi=۱۰$ و (ج) $\xi=۵۰$ بر حسب η.

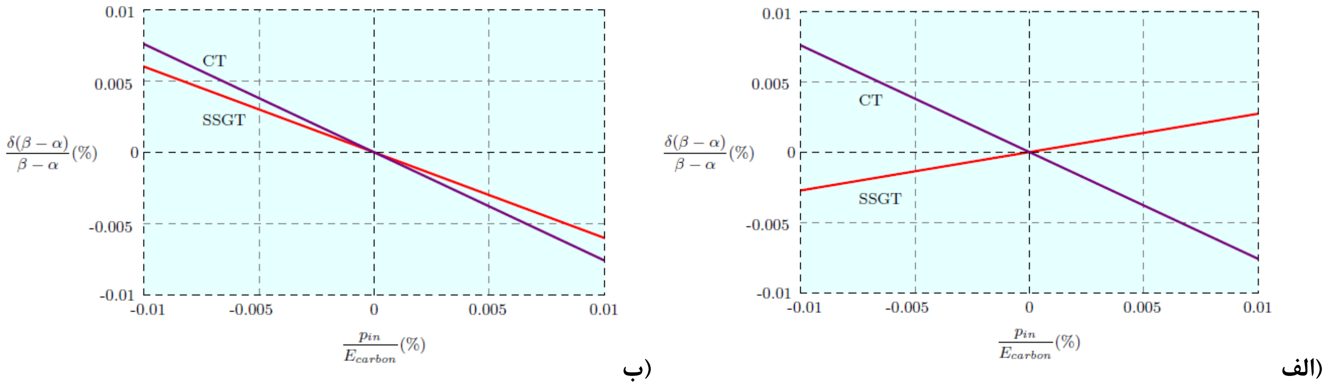


Fig. 5. The thickness change normalized with respect to the initial thickness in the carbon shell under the equal inner and outer external pressure (tension) normalized with respect to the carbon Young's modulus for a) $\gamma=10, \xi=2$ and b) $\gamma=10, \xi=10$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۵: درصد تغییر ضخامت نانوکره توخالی کربنی آسوده نسبت به ضخامت اولیه تحت بارگذاری فشاری (یا کششی) برابر روی سطوح داخلی و خارجی بر حسب درصد بارگذاری نسبت به مدول یانگ کربن برای الف) $\gamma=۱۰، \xi=۲$ و ب) $\gamma=۱۰، \xi=۱۰$ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش و الاستیسیته کلاسیک.

حالت کلاسیک دارد به‌گونه‌ای که پیش‌بینی دو نظریه در خصوص انقباض یا انبساط نانوکره در اثر بارگذاری بر عکس یکدیگر است. این در حالی است که با افزایش ضخامت نانوکره توخالی این دو پاسخ به یکدیگر همگرا می‌شود.

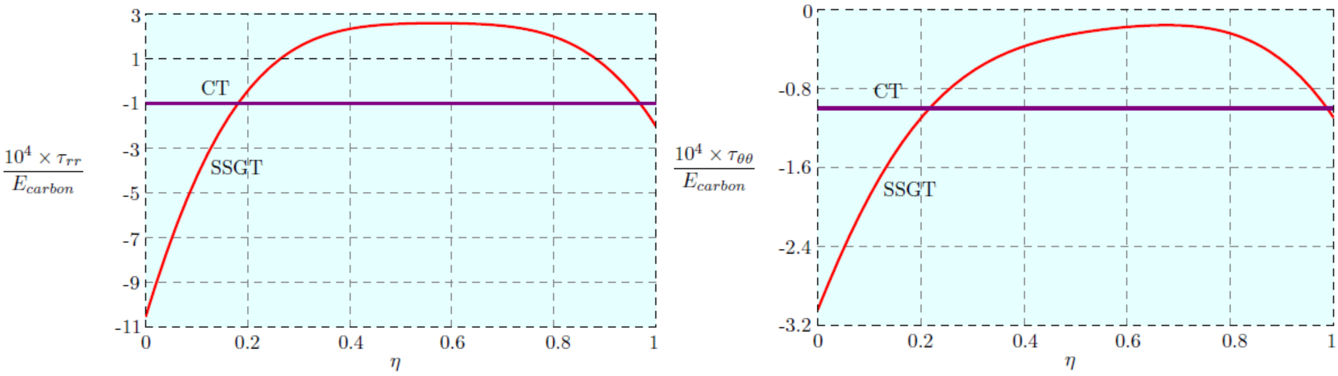


Fig. 6. The stress a) τ_{rr} and b) $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ normalized with respect to the carbon Young's modulus in the carbon shell versus η under the external pressure $p_{in}=p_{out}=0.0001E_{carbon}$ for $\gamma=10, \xi=2$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۶: توزیع مولفه تنش الف) τ_{rr} و ب) $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ یکه شده بر حسب مدول یانگ کربن، در محیط نانوکره کربنی تو خالی بر حسب η در اثر بارگذاری خارجی فشاری $p_{in}/E_{carbon}=p_{out}/E_{carbon}=۰/۰۰۰۱$ برای حالت هندسی $\gamma=۱۰$ ، $\xi=۲$ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش و نظریه الاستیسیته کلاسیک.

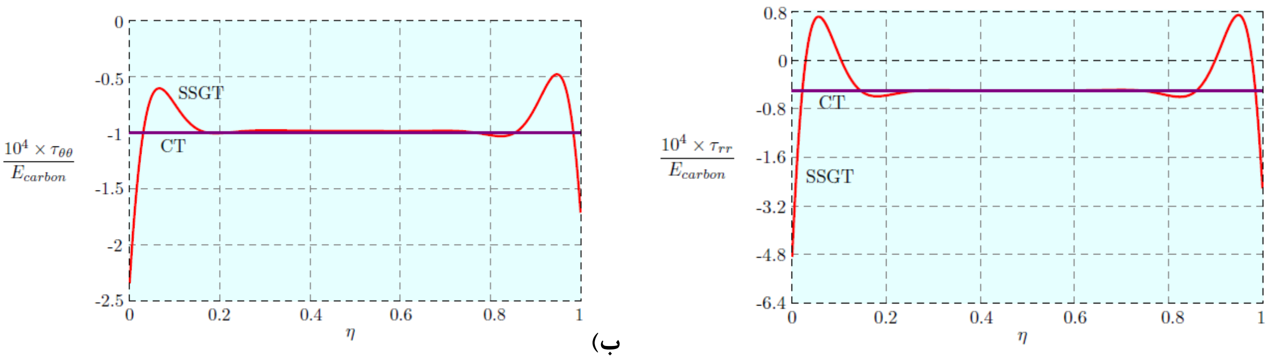


Fig. 7. The stress a) τ_{rr} and b) $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ normalized with respect to the carbon Young's modulus in the carbon shell versus η under the external pressure $p_{in}=p_{out}=0.0001E_{carbon}$ for $\gamma=10, \xi=10$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۷: توزیع مولفه تنش الف) τ_{rr} و ب) $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ یکه شده بر حسب مدول یانگ کربن، در محیط نانوکره کربنی تو خالی بر حسب η در اثر بارگذاری خارجی فشاری $p_{in}/E_{carbon}=p_{out}/E_{carbon}=۰/۰۰۰۱$ برای حالت هندسی $\gamma=۱۰$ ، $\xi=۱۰$ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش و نظریه الاستیسیته کلاسیک.

همچنین، در اثر بارگذاری پیکربندی آسوده نانوکره توخالی، مولفه‌های تنش τ_{rr} و $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ در محیط نانوکره توخالی کربنی به‌صورت شعاعی توزیع می‌شود. به عنوان مثال، توزیع مولفه‌های تنش یکه شده نسبت به مدول یانگ کربن در اثر بارگذاری خارجی فشاری $p_{in}/E_{carbon}=p_{out}/E_{carbon}=۰/۰۰۰۱$ برای حالت هندسی $\gamma=۱۰$ ، $\xi=۲$ در شکل‌های ۶ (الف) و (ب) و $\gamma=۱۰$ ، $\xi=۱۰$ در شکل‌های ۷ (الف) و (ب) نمایش داده شده است. در این اشکال نیز، نتایج حاصل از نظریه گرادیان دوم کرنش با نظریه کلاسیک مقایسه شده است.

همانطور که ملاحظه می‌شود، در این حالت بارگذاری، توزیع مولفه‌های تنش در ضخامت نانوکره در نظریه کلاسیک بر خلاف نظریه گرادیان دوم کرنش یکنواخت است. این درحالی است که بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش و برای ضخامت‌های کوچک نانوکره توخالی، توزیع مولفه‌های تنش در ضخامت بسیار متغیر است. با افزایش ضخامت نانوکره توزیع این مولفه‌های تنش در نقاط داخلی به جواب کلاسیک نزدیک می‌شود، در حالی‌که در نقاط نزدیک به سطوح

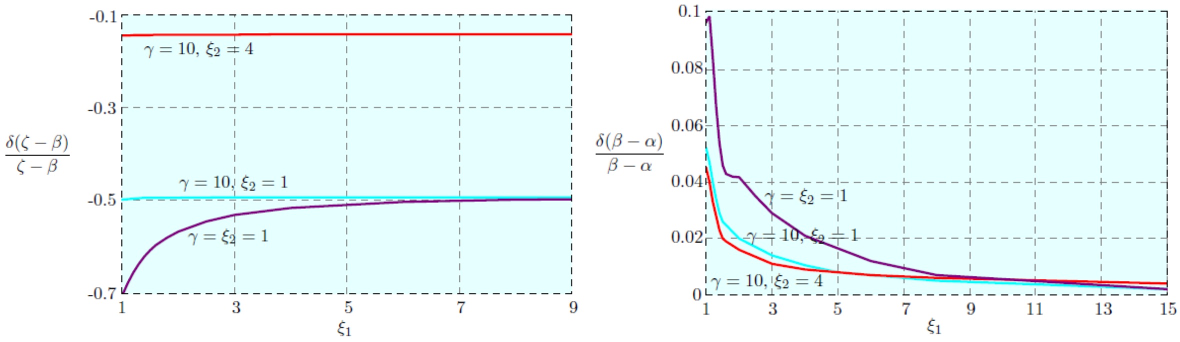


Fig. 8. The normalized thickness change in the a) carbon coating $\frac{\delta(\zeta-\beta)}{\zeta-\beta}$ and b) inner silicon shell $\frac{\delta(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$ versus ξ_1 due to the surface and size effect for the different geometries $\gamma=\xi_2=1$, $\gamma=10,\xi_2=1$, $\gamma=10,\xi_2=4$ in second strain gradient theory.

شکل ۸: تغییر ضخامت الف) پوسته کربنی خارجی $\frac{\delta(\zeta-\beta)}{\zeta-\beta}$ و ب) پوسته سیلیکونی داخلی $\frac{\delta(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$ بر حسب ξ_1 در اثر سطح و اندازه به ازای مقادیر مختلف $\gamma=\xi_2=1$، $\gamma=10$، $\xi_2=1$ و $\gamma=10$، $\xi_2=4$ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش.

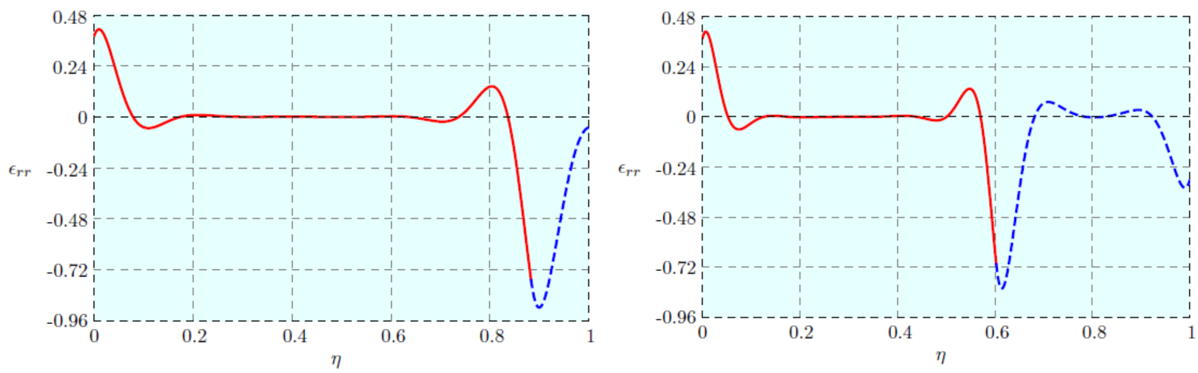


Fig. 9. The radial strain distribution under the surface and size effect in the spherical double shell versus η for a) $\gamma=10,\xi_1=5,\xi_2=1$ and b) $\gamma=10,\xi_1=5,\xi_2=5$ in second strain gradient theory.

شکل ۹: توزیع کرنش شعاعی حاصل از اثر سطح و اثر اندازه در فضای دو پوسته کروی بر حسب η برای الف) $\gamma=10$، $\xi_1=5$، $\xi_2=1$ و ب) $\gamma=10$، $\xi_1=5$، $\xi_2=5$ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش.

داخلی و خارجی تغییرات ناگهانی و زیاد در مولفه‌ها ملاحظه می‌شود.

۲-۴- مساله دوپوسته‌ای

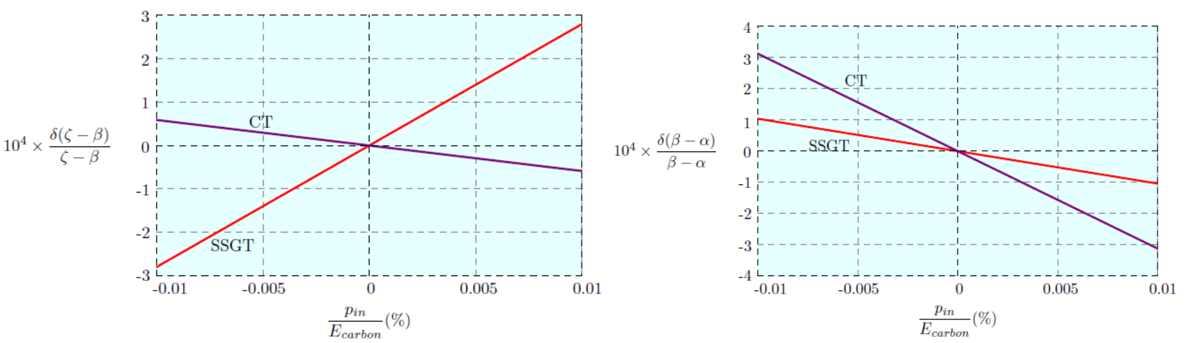
در این قسمت، نتایج مربوط به مساله دو پوسته‌ای، با فرض یک پوسته سیلیکونی با پوشش کربنی در نظر گرفته و ارائه می‌شود. پارامترهای بی‌بعد هندسی برای این مساله به‌صورت $\alpha=\gamma a_0^{si}$، $\beta-\alpha=\xi_1 a_0^{si}$ و $\zeta-\beta=\xi_2 a_0^{c}$ تعریف می‌شود که a_0^{si} و a_0^{c} پارامترهای شبکه‌ای سیلیکون و کربن بلوری با ساختار الماس است.

اگر این ساختار تحت اثر سطح و بدون اعمال بارگذاری خارجی در چهارچوب نظریه گرادیان دوم کرنش مورد بررسی قرار گیرد، یک میدان جابجایی شعاعی غیربدیهی در فضای کروی دو پوسته القا می‌شود و درنتیجه یک تغییر شعاعی در ابعاد هندسی به دلیل اثر سطح و اثر اندازه به وجود می‌آید. به منظور نشان دادن پیش‌بینی گرادیان دوم کرنش در مورد اثر سطح، در شکل ۸-الف، میزان تغییر ضخامت پوسته داخلی سیلیکونی در اثر سطح و اندازه به ازای ضخامت اولیه این پوسته که با پارامتر بی‌بعد ξ_1 نمایش داده

می‌شود، برای مقادیر مختلف شعاع حفره داخلی (پارامتر بی‌بعد γ) و ضخامت پوسته خارجی کربنی (پارامتر بی‌بعد ξ_2) ترسیم شده است. همچنین، در شکل ۸-ب، تغییر ضخامت پوسته کربنی خارجی در اثر سطح و اندازه نسبت به ضخامت اولیه این پوسته برای مقادیر مختلف γ و ξ_2 بر حسب ξ_1 رسم شده است. پرواضح است که در چهارچوب نظریه کلاسیک الاستیسیته، میدان جابجایی به وجود آمده در اثر سطح و اندازه و در غیاب بارگذاری خارجی جواب بدیهی صفر خواهد بود. همانطور که در شکل ۸-الف ملاحظه می‌شود، اثر اندازه و اثر سطح منجر به افزایش بعد شعاعی پوسته داخلی سیلیکونی می‌شود این در حالی است که بر اساس نتایج نشان داده شده در شکل ۸-ب، اثر سطح و اندازه منجر به کاهش بعد شعاعی پوسته خارجی کربنی می‌شود. میزان این افزایش یا کاهش در بعد شعاعی پوسته‌های داخلی یا خارجی با افزایش γ و/یا ξ_2 کاهش پیدا می‌کند. همچنین، مطابق انتظار، با افزایش ξ_1 تغییر در ضخامت پوسته داخلی به سمت صفر و تغییر در ضخامت پوسته خارجی به سمت یک عدد ثابت میل می‌کند. همچنین، از مقایسه شکل‌های ۸-الف و ب نتیجه می‌شود که حساسیت تغییر ضخامت پوسته داخلی به پارامتر ξ_1 بیشتر از حساسیت تغییر ضخامت پوسته خارجی به این پارامتر است که البته این نتیجه نیز منطقی به نظر می‌رسد.

علاوه بر این، توزیع میدان مولفه شعاعی کرنش حاصل از اثر سطح و اندازه در فضای دو پوسته در شکل‌های ۹ (الف) و (ب) بر حسب η برای دو حالت هندسی $\gamma = ۱۰$، $\xi_1 = ۵$، $\xi_2 = ۱$ و $\gamma = ۱۰$، $\xi_1 = ۵$، $\xi_2 = ۵$، به ترتیب، رسم شده است. در این اشکال، توزیع میدان کرنش شعاعی در پوسته سیلیکونی با رنگ قرمز و خط پر و کرنش شعاعی در پوسته کربنی با رنگ آبی و خط‌چین نمایش داده شده است. همانطور که در این اشکال مشاهده می‌شود، میدان کرنش شعاعی در داخل محیط کروی و دور از سطوح مرزی حدود صفر و در نقاط نزدیک به مرز غیرصفر است و با افزایش ضخامت پوسته خارجی تغییرات در مولفه شعاعی کرنش زیادتر می‌شود.

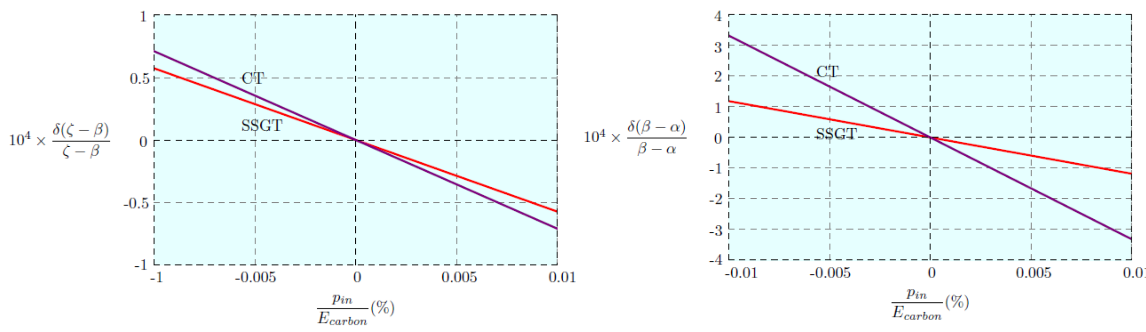
حال بعد از آسایش سطحی، اگر دو پوسته کروی تحت بارگذاری خارجی $p_{in} = p_{out}$ قرار گیرد، تغییر در ابعاد آسوده دو پوسته به وجود می‌آید. درصد تغییر ضخامت نسبت به ضخامت اولیه (ضخامت بعد از آسایش سطحی) در هر پوسته بر حسب درصد بارگذاری فشاری یا کششی p_{in} روی سطوح داخلی و خارجی که نسبت به مدول یانگ کربن یکه شده است، برای حالت‌های $\gamma = ۱۰$، $\xi_1 = \xi_2 = ۱$، $\gamma = ۱۰$، $\xi_1 = ۱$، $\xi_2 = ۱۰$، $\gamma = ۱۰$، $\xi_1 = ۱۰$، $\xi_2 = ۱$ و $\gamma = \xi_1 = \xi_2 = ۱۰$ به ترتیب در شکل‌های ۱۰ الی ۱۳ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که در حالتی که ضخامت هر دو پوسته کوچک است (شکل ۱۰)، اختلاف پیش‌بینی دو نظریه کلاسیک و گرادیان دوم کرنش در تغییر ضخامت هر دو پوسته چشمگیر است و حتی پیش‌بینی دو نظریه در مورد تغییر ضخامت پوسته خارجی عکس یکدیگر است. وقتی ضخامت پوسته داخلی کم و ضخامت پوسته خارجی زیاد است (شکل ۱۱)، اختلاف پیش‌بینی دو نظریه در تغییر



الف) ب)

Fig. 10. The thickness change normalized with respect to the relaxed dimensions in the a) carbon coating and b) silicon inner shell versus the external loading normalized with respect to the carbon Young's modulus for $\gamma = 10, \xi_1 = \xi_2 = 1$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

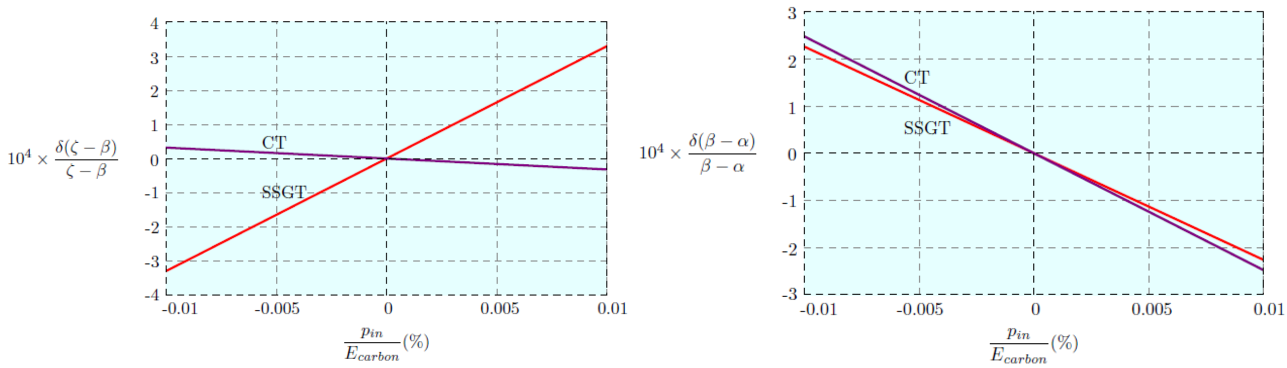
شکل ۱۰: تغییر ضخامت یکه شده نسبت به ابعاد بعد از آسایش سطحی در الف) پوسته خارجی کربنی و ب) پوسته داخلی سیلیکونی بر حسب بارگذاری خارجی یکه شده نسبت به مدول یانگ کربن برای $\gamma = ۱۰$، $\xi_1 = \xi_2 = ۱$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان **دوم کرنش**.



الف) ب)

Fig. 11. The thickness change normalized with respect to the relaxed dimensions in the a) carbon coating and b) silicon inner shell versus the external loading normalized with respect to the carbon Young's modulus for $\gamma = 10, \xi_1 = 1, \xi_2 = 10$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

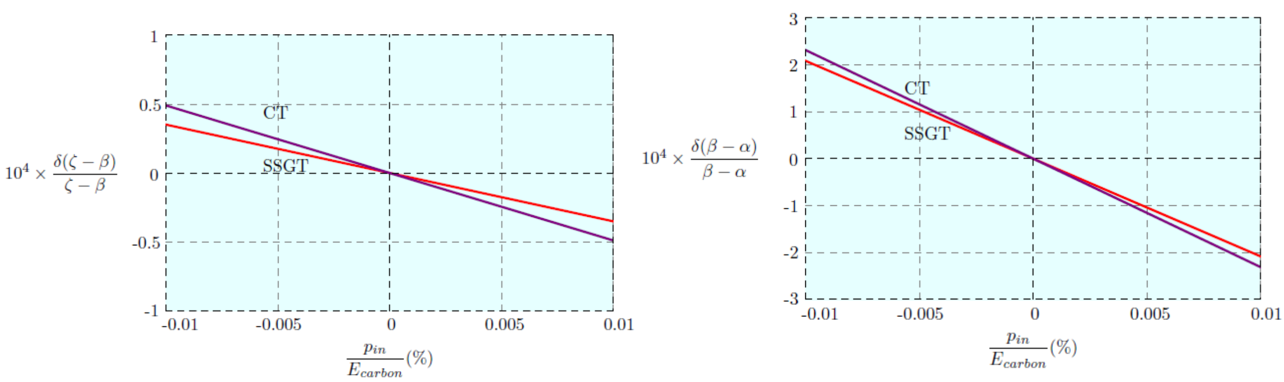
شکل ۱۱: تغییر ضخامت یکه شده نسبت به ابعاد بعد از آسایش سطحی در الف) پوسته خارجی کربنی و ب) پوسته داخلی سیلیکونی بر حسب بارگذاری خارجی یکه شده نسبت به مدول یانگ کربن برای ۱۰ $= \gamma$، ۱ $= \xi_1$، ۱۰ $= \xi_2$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.



الف) ب)

Fig. 12. The thickness change normalized with respect to the relaxed dimensions in the a) carbon coating and b) silicon inner shell versus the external loading normalized with respect to the carbon Young's modulus for $\gamma = 10, \xi_1 = 10, \xi_2 = 1$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۱۲: تغییر ضخامت یکه شده نسبت به ابعاد بعد از آسایش سطحی در الف) پوسته خارجی کربنی و ب) پوسته داخلی سیلیکونی بر حسب بارگذاری خارجی یکه شده نسبت به مدول یانگ کربن برای ۱۰ $= \gamma$، ۱۰ $= \xi_1$، ۱ $= \xi_2$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.



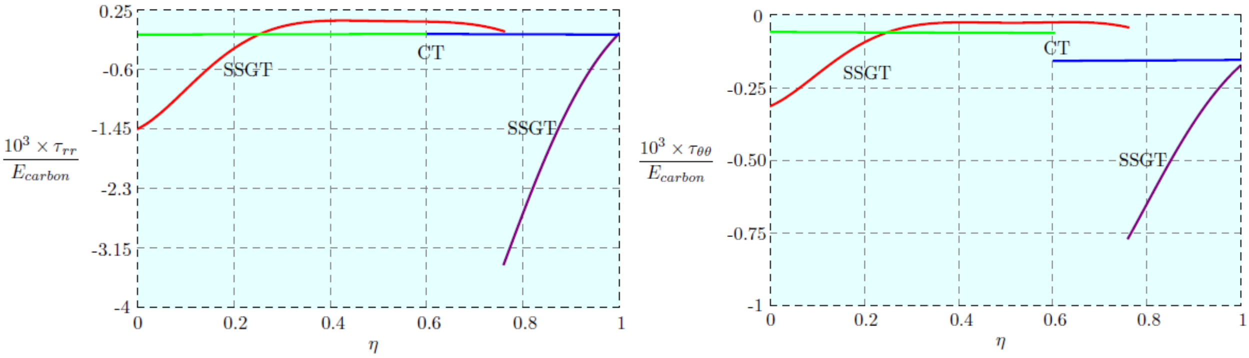
الف) ب)

Fig. 13. The thickness change normalized with respect to the relaxed dimensions in the a) carbon coating and b) silicon inner shell versus the external loading normalized with respect to the carbon Young's modulus for $\gamma = \xi_1 = \xi_2 = 10$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۱۳: تغییر ضخامت یکه شده نسبت به ابعاد بعد از آسایش سطحی در الف) پوسته خارجی کربنی و ب) پوسته داخلی سیلیکونی بر حسب بارگذاری خارجی یکه شده نسبت به مدول یانگ کربن برای ۱۰ $= \gamma = \xi_1 = \xi_2$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.

ضخامت پوسته داخلی زیاد و در تغییر ضخامت پوسته خارجی کم است اما در هر دو پوسته پیش‌بینی دو نظریه همسو است. در شکل ۱۲، ضخامت پوسته داخلی زیاد و ضخامت پوسته خارجی کم است و بنا بر انتظار تفاوت پیش‌بینی دو نظریه در تغییر ضخامت پوسته داخلی و خارجی، به ترتیب کم و زیاد است. اما، این پیش‌بینی‌ها در مورد تغییر ضخامت پوسته خارجی عکس یکدیگر است. در نهایت، زمانی که ضخامت هر دو پوسته زیاد باشد (شکل ۱۳)، پیش‌بینی نظریه گرادیان دوم کرنش در مورد تغییر ضخامت هر دو پوسته، هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت به پیش‌بینی نظریه کلاسیک میل می‌کند.

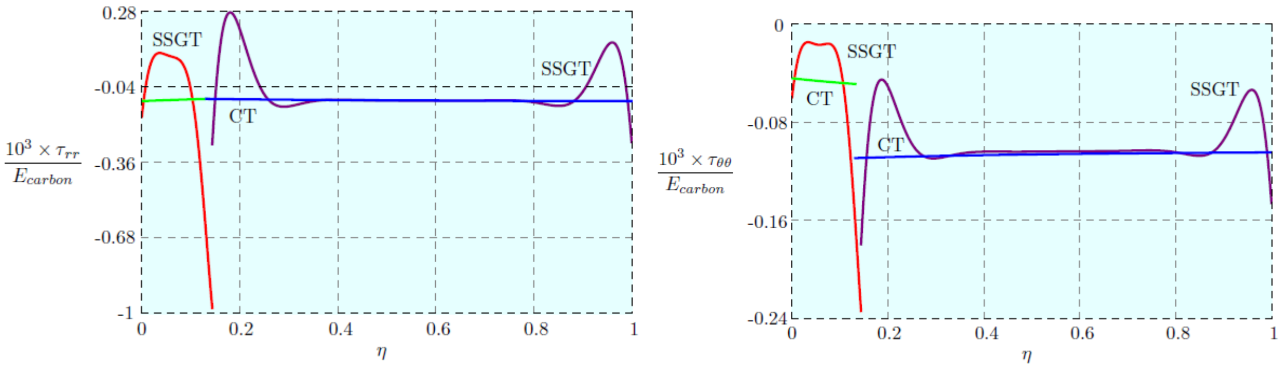
علاوه بر این، توزیع مولفه‌های تنش τ_{rr} و $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ یکه شده در فضای دو پوسته سیلیکونی و کربنی در اثر بارگذاری خارجی فشاری $p_{in}/E_{carbon}=p_{out}/E_{carbon}=$ ۰/۰۰۰۱ روی سطوح داخلی و خارجی بر حسب موقعیت شعاعی یکه شده η، برای چهار حالت هندسی مختلف $\gamma=$ ۱۰، $\xi_1=\xi_2=$ ۱، $\gamma=$ ۱۰، $\xi_1=$ ۱، $\xi_2=$ ۱۰، $\gamma=$ ۱۰، $\xi_1=$ ۱۰، $\xi_2=$ ۱ و $\gamma=\xi_1=\xi_2=$ ۱۰ به ترتیب در شکل‌های ۱۴ الی ۱۷ نمایش داده شده و با پاسخ کلاسیک مقایسه شده است. در این اشکال، مولفه‌های تنش در دو پوسته با رنگ‌های متفاوت ترسیم شده‌اند. همانطور که در این اشکال دیده می‌شود، جواب الاستیسیته کلاسیک در هر دو پوسته و در تمام حالات



الف)　　　　ب)

Fig. 14. The stress components a) τ_{rr} and b) $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ normalized with respect to the carbon Young's modulus in the carbon and silicon double shell in second strain gradient as well as classic elasticity $\gamma=10,\xi_1=\xi_2=1$ versus η for.

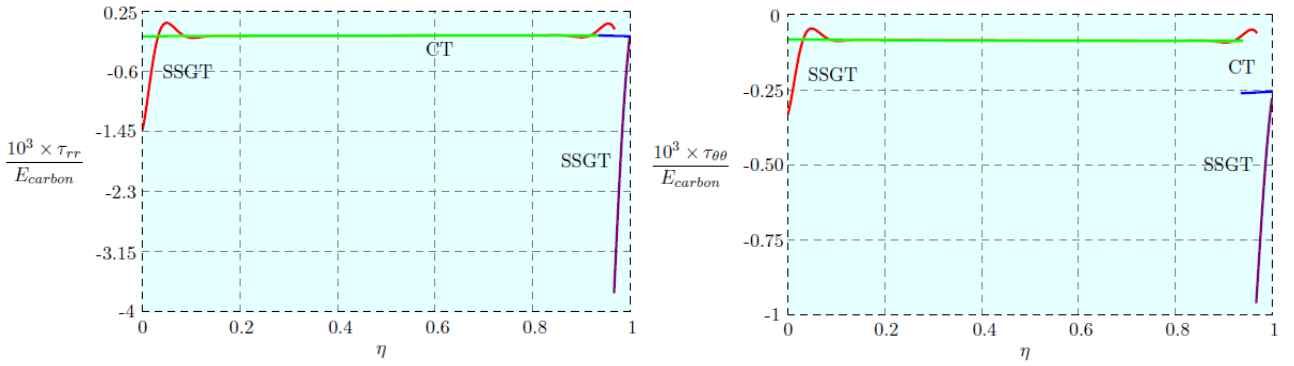
شکل ۱۴: توزیع مولفه‌های تنش الف) τ_{rr} و ب) $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ در فضای دو پوسته سیلیکونی و کربنی که بر حسب مدول یانگ کربن یکه شده است، بر حسب η برای $\gamma=$ ۱۰، $\xi_1=\xi_2=$ ۱ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.



الف)　　　　ب)

Fig. 15. The stress components a) τ_{rr} and b) $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ normalized with respect to the carbon Young's modulus in the carbon and silicon double shell versus η for $\gamma=10,\xi_1=1,\xi_2=10$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

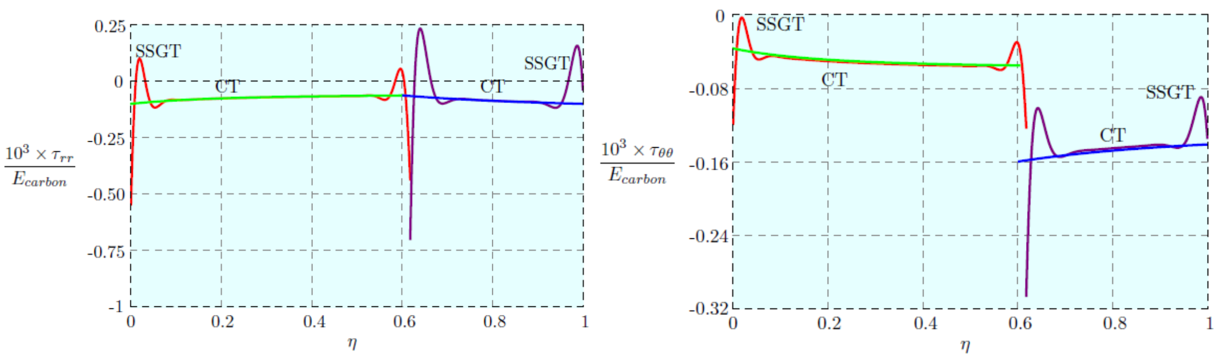
شکل ۱۵: توزیع مولفه‌های تنش الف) τ_{rr} و ب) $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ در فضای دو پوسته سیلیکونی و کربنی که بر حسب مدول یانگ کربن یکه شده است، بر حسب η برای $\gamma=$ ۱۰، $\xi_1=$ ۱، $\xi_2=$ ۱۰ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.



ب) الف)

Fig. 16. The stress components a) τ_{rr} and b) $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ normalized with respect to the carbon Young's modulus in the carbon and silicon double shell versus η for $\gamma=10, \xi_1=10, \xi_2=1$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۱۶: توزیع مولفه‌های تنش الف) τ_{rr} و ب) $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ در فضای دو پوسته سیلیکونی و کربنی که بر حسب مدول یانگ کربن یکه شده است، بر حسب η برای $\gamma=۱۰$، $\xi_1=۱۰$، $\xi_2=۱$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.



ب) الف)

Fig. 17. The stress components a) τ_{rr} and b) $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ normalized with respect to the carbon Young's modulus in the carbon and silicon double shell versus η for $\gamma=\xi_1=\xi_2=10$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۱۷: توزیع مولفه‌های تنش الف) τ_{rr} و ب) $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ در فضای دو پوسته سیلیکونی و کربنی که بر حسب مدول یانگ کربن یکه شده است، بر حسب η برای $\gamma=\xi_1=\xi_2=۱۰$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.

تقریبا در ضخامت ثابت است. این در حالی است که پاسخ مربوط به نظریه الاستیسیته تقویت شده در نزدیکی مرزها به شدت متغیر است و چنانچه ضخامت پوسته کم باشد، در کل تغییرات چشمگیر در میدان تنش ملاحظه می‌شود. همچنین، تنش τ_{rr} در پاسخ کلاسیک در مرز دو پوسته پیوسته است در حالی‌که مولفه‌های $\tau_{\theta\theta}=\tau_{\varphi\varphi}$ در مرز گسسته است. این در حالی است که در پاسخ گرادیان دوم کرنش همه مولفه‌های تنش در مرز گسسته است که با توجه به صورت‌بندی این نظریه، این مساله قابل پیش‌بینی بوده است. نکته قابل ذکر دیگر در خصوص این اشکال این است که مرز دو پوسته در نظریه گرادیان دوم کرنش محلی غیر از مرز دو پوسته در نظریه کلاسیک است که این مساله نیز به اثر سطح و جواب غیربدیهی نظریه گرادیان دوم کرنش در خصوص اثر سطح و اندازه است که منجر به آسایش سطحی قبل از بارگذاری خارجی در نظریه گرادیان دوم کرنش می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله مساله لمه‌گونه کروی در الاستیسیته گرادیان دوم

کرنش در دو حالت تک‌فازی و دوفازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در گرادیان دوم کرنش میندلین، چگالی انرژی کرنشی در محیط پیوسته به‌صورت تابعی از تانسور کرنش و گرادیان‌های مرتبه اول و دوم آن نوشته می‌شود و علاوه بر ثابت‌های لمه، شانزده ثابت ماده جدید شامل مدول چسبندگی و همچنین چهار طول مشخصه حجمی و یک طول مشخصه سطحی معرفی می‌شود. به دلیل وجود مدول چسبندگی در صورت‌بندی میندلین، امکان تعادل محیط پیوسته تحت اثرات سطح و اندازه توسط نظریه گرادیان دوم کرنش فراهم می‌شود. به منظور حل مساله لمه‌گونه با تقارن کروی، ابتدا این نظریه در دستگاه مختصات کروی نوشته می‌شود و معادلات تعادل، شرایط مرزی نیرویی و جابجایی و روابط بنیادین تنش و کرنش در این دستگاه مختصات استخراج می‌شود. با لحاظ کردن تقارن کروی در مساله لمه‌گونه، معادله تعادل یک معادله دیفرانسیل مرتبه شش خطی می‌شود که با استفاده از سری فروبینیوس حل شده، جواب‌های معادله حاصل می‌شود. در این مقاله، نانوکره توخالی کربنی به عنوان مساله لمه‌گونه تک‌فازی و نانوکره توخالی سیلیکونی با پوشش کربنی به عنوان مساله لمه‌گونه دوفازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به منظور به‌دست آوردن نتایج عددی، مقادیر عددی ثابت‌های مواد و طول مشخصه‌های آن‌ها با استفاده از نظریه شبکه و محاسبات کوانتمی برای سیلیکون و کربن بلوری با ساختار الماس تعیین می‌شود. برای هر دو مساله، ابتدا آسایش سطحی در نتیجه اثرات سطح و اندازه مورد بررسی قرار می‌گیرد و میدان جابجایی و کرنش حاصل از آن تعیین می‌شود. سپس، هر دو مساله تحت بارگذاری خارجی قرار گرفته، میدان تنش و تغییرات شعاعی در آن‌ها محاسبه و ارائه می‌شود. برخی نتایج ارائه شده با نتایج الاستیسیته کلاسیک مقایسه می‌شود. اثرات سطح و اندازه در هر دو مساله لمه‌گونه و دوپوسته منجر به القای کرنش‌های شعاعی و در نتیجه تغییر ابعاد در محیط‌های مادی مورد بحث می‌شود. این درحالی است که الاستیسیته کلاسیک، کرنش شعاعی ناشی از اثرات سطح و اندازه را پیش‌بینی نمی‌کند. هنگامی‌که اندازه شعاع فازها بسیار کوچک باشد، اثر سطح و اندازه بر نتایج قابل ملاحظه است. با افزایش شعاع فازها نتایج دو نظریه تعمیم‌یافته و کلاسیک به یکدیگر همگرا می‌شود. به عنوان مثال، در مساله دوپوسته، اثر سطح و اندازه در گرادیان دوم کرنش، تغییر ضخامت به ضخامت اولیه را در فاز سیلیکون حدود ۰/۰۳ برای $\xi_1 = 3$ و $\xi_2 = \gamma = 1$ پیش‌بینی می‌کند. با افزایش شعاع حفره داخلی در حالت $\gamma = 10$، $\xi_2 = 1$ این تغییر حدود ۵۰ درصد کاهش می‌یابد. بعد از رسیدن به آسایش سطحی، بارگذاری خارجی متقارن اعمال می‌شود. به عنوان مثال، برای بارگذاری خارجی یکه حدود۰/۰۰۰۱، تنش شعاعی یکه در دوپوسته برای حالت هندسی $\gamma = 10$، $\xi_1 = \xi_2 = 1$ تقریبا در هر دو فاز ثابت و حدود ۰/۰۰۰۱- است؛ این در حالی است که بر اساس گرادیان دوم کرنش، تنش شعاعی یکه در مرز پیوسته نیست و مثلا در فاز کربن و در مجاورت مرز دو فاز حدود ۰/۰۰۳۱۵- است.

منابع

[1] H. Hatami, M. Hosseini, Elastic-plastic analysis of bending moment-axial force interaction in metallic beam of T-section, J. Applied Comp. Mech., 5 (2019) 162-173.

[2] H. Hatami, M. Hosseini, A.K. Yasuri, Perforation of thin Aluminum targets under hypervelocity impact of aluminum spherical projectiles, Materials Evaluation, 77 (2019) 411-422.

[3] M. Shariati, H. Hatami, H.R. Eipakchi, H. Yarahmadi, H. Torabi, Experimental and numerical investigations on softening behavior of POM under cyclic strain-controlled loading, Polymar-Plastics Technology and Engineering, 50 (2011) 1576-1582.

[4] M. Lazar, Dislocations and Cracks in Generalized Continua. Encyclopedia of Continuum Mechanics, Springer-Verleg GmbH, Germany, 2018.

[5] M. Lazar, E. Agiasofitu, Fundamentals in generalized elasticity and dislocation theory of quasicrystals: Green tensor, dislocation key-formulas and dislocation loops, Philosophical Magazine, 94(35) (2014) 4080-4101.

[6] G. Po, N.C. Admal, M. Lazar, The Green tensor of Mindlin's anisotropic first strain gradient elasticity, Materials Theory, 3(1) (2019) 3.

[7] M.R. Delfani, S. Shojaeimanesh, V. Bagherpour, Effective shear modulus of functionally graded fibrous composites in second strain gradient elasticity, Journal of Elasticity, 137(1) (2018) 43-62.

[8] R.A. Toupin, Theories of elasticity with couple-stress, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 17(2)

crystals of hexoctahedral class: Analytical expression of the material parameters in terms of the atomic force constants and evaluation via ab initio DFT, Mechanics of Materials, 123 (2018) 19-29.

[20] H.M. Shodja, F. Ojaghnezhad, A. Etehadieh, M. Tabatabaei, Elastic moduli tensors, ideal strength, and morphology of stanene based on an enhanced continuum model and first principles, Mechanics of Materials, 110 (2017) 1-15.

[21] H.M. Shodja, A. Zaheri, A. Tehranchi, Ab initio calculations of characteristic lengths of crystalline materials in first strain gradient elasticity, Mechanics of Materials, 61 (2013) 73-78.

[22] Q. He, M. Ashuri, K. Zhang, S. Emani, M.S. Sawicki, J.S. Shamie, L.L. Shaw, Synthesis of carbon-coated hollow silicon nanospheres for Lithium-ion battery application, in: Materials Science & Technology, Pittsburgh, PA, USA, 2014.

[23] B. Li, F. Yao, J.J. Bae, J. Chang, M.R. Zamfir, D.T. Le, D.T. Pham, Y. Hongyan, Y.H. Lee, Hollow carbon nanospheres/silicon/alumina core-shell film as an anode for lithium-ion batteries, Scientific Reports, 5 (2015).

[24] A. Mukhopadhyay, B.W. Sheldon, Deformation and stress in electrode materials for Li-ion batteries, Progress in Materials Science, 63 (2014) 58-116.

[25] X. Su, Q. Wu, J. Li, X. Xiao, A. Lott, W. Lu, B.W. Sheldon, J. Wu, Silicon-based nanomaterials for lithium-ion batteries: A review, Advanced Energy Materials, (2013).

[26] L. Xue, G. Xu, Y. Li, S. Li, K. Fu, Q. Shi, X. Zhang, Carbon-coated Si nanoparticles dispersed in carbon nanotube networks as anode material for Lithium-ion batteries, ACS Applied Materials & Interfaces, 5(1) (2013) 21-25.

[27] C. Yang, Y. Zhang, J. Zhou, C. Lin, F. Lv, K. Wang, J. Feng, Z. Xu, J. Li, S. Guo, Hollow Si/SiO nanosphere/nitrogen-doped carbon superstructure with a double shell and void for high-rate and long-life lithium-ion storage, Journal of Materials Chemistry A, 6(17) (2018) 8039-8046.

[28] Y. Yao, M.T. McDowell, I. Ryu, H. Wu, N. Liu, L. Hu, W.D. Nix, Y. Cui, Interconnected silicon hollow nanospheres for lithium-ion battery anodes with long cycle life, Nano (1964) 85-112.

[9] R.A. Toupin, D.C. Gazis, Surface effects and initial stress in continuum and lattice models of elastic crystals, in: Wallis (Ed.) International Conference on Lattice Dynamics, Pergamon press, Copenhagen, 1963, pp. 597-602.

[10] R.D. Mindlin, Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, International Journal of Solids and Structures, 1 (1965) 417-438.

[11] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, A combined first principles and analytical determination of the modulus of cohesion, surface energy, and the additional constants in the second strain gradient elasticity, International Journal of Solids and Structures, 50(24) (2013) 3967-3974.

[12] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, Surface elasticity revisited in the context of second strain gradient theory, Mechanics of Materials, 93 (2016) 220-237.

[13] M.E. Gurtin, A.I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 57 (1975) 291-323.

[14] A.C. Eringen, Mechanics of continua, Robert E. Krieger publishing compan, New York, 1980.

[15] X. Ji, A.Q. Li, S.J. Zhou, The strain gradient elasticity theory in orthogonal curvilinear coordinates and its applications, Journal of Mechanics, 34(3) (2016) 311-323.

[16] S. Zhou, A. Li, B. Wang, A reformulation of constitutive relations in the strain gradient elasticity theory for isotropic materials, International Journal of Solids and Structures, 80 (2016) 28-37.

[17] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, Second strain gradient theory in orthogonal curvilinear coordinates: Prediction of the relaxation of a solid nanosphere and embedded spherical nanocavity, Applied Mathematical Modelling, 76 (2019) 669-698.

[18] H.M. Shodja, F. Ahmadpoor, A. Tehranchi, Calculation of the additional constants for fcc materials in second strain gradient elasticity: behavior of a nano-size Bernoulli-Euler beam with surface effects, ASME Journal of Applied Mechanics, 79 (2012) 021008-021015.

[19] H.M. Shodja, H. Moosavian, F. Ojaghnezhad, Toupin–Mindlin first strain gradient theory revisited for cubic

Letters, 11 (2011) 2949-2954.

[29] K. Zhao, M. Pharr, S. Cai, J.J. Vlassak, Z. Suo, Large plastic deformation in high-capacity lithium-ion batteries caused by charge and discharge, Journal of American Ceramic Society, 94 (2011) 226-235.

[30] K. Zhao, M. Pharr, L. Hartle, J.J. Vlassak, Z. Suo, Fracture and debonding in lithium-ion batteries with electrodes of hollow core-shell nanostructures, Journal of Power Sources, 218 (2012) 6-14.

[31] X. Zhou, A. Cao, L. Wan, Y. Guo, Spin-coated silicon nanoparticle/grapheme electrode as a binder-free anode for high-performance lithium-ion batteries, Nano Research, 5 (2012) 845-853.

[32] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, A combined first principles and analytical treatment for determination of the surface elastic constants: application to Si(001) ideal and reconstructed surfaces, Philosophical Magazine Letters, 92(1) (2012) 7-19.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

F. Ojaghnezhad, Spherical Lame-Type Problem in Second Strain Gradient Theory, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(2) (2021) 713-732.

DOI: 10.22060/mej.2019.16554.6388

این صفحه عمداً خالی است