



Optimization of concrete tension stiffening model based on layered nonlinear analysis of FRP – RC beams

A. Kamali¹, S.R. Mousavi^{2*}, M.R. Ghasemi³

¹ Graduated M.Sc., Civil Engineering Department, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran.

² Associate Professor, Civil Engineering Department, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran.

³ Professor, Civil Engineering Department, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran.

ABSTRACT: Tension stiffening effect, which is due to participation of concrete in resisting tension between cracks, results in the reduction of strains of reinforced concrete member relative to pure bars. In some researches, this effect was involved at strain – stress behavior of concrete after cracking that few researches investigated FRP reinforced concrete. In Present investigation, comparison of experimental data with results of layered nonlinear analysis of wide collection FRP-reinforced concrete beams relative to prior researches was used for extracting of concrete strain – stress after cracking. The resulting model unlike previous models was developed for all type of FRP bars. The constants of model are obtained from optimization method based on genetic. 78 curves from 87 curves of FRP – reinforced concrete beams under four-point bending are used for deriving of model coefficients and the others are used for investigating of optimal model. Furthermore, 20 percent of load – deflection data of 78 beams are also randomly selected for controlling of optimal model instead of developing of model. The average natural logarithm of experimental/calculated deflection ratios for randomly selected data by applying initial model and optimal model is 1.0457 and 0.2668, respectively. According to ideal value of zero for natural logarithm of experimental/calculated deflection ratio, applying optimal model has improved this statistical parameter by 74 percent. Responses of nonlinear analysis by using initial model and optimized model are compared with those of code relations.

Review History:

Received: 2019-05-28

Revised: 2019-08-29

Accepted: 2019-11-05

Available Online: 2021-11-18

Keywords:

deflection

Tension stiffening

FRP bars

Nonlinear analysis

Optimization

1. INTRODUCTION

Due to the presence of cracks, the flexural rigidity of a cracked reinforced concrete beam is less than the flexural stiffness of an uncracked reinforced concrete beam, however in the tension zones of the section, the concrete in contact with the reinforcing bars between the cracks by transferring the bonding force from reinforcing bars to concrete is capable of withstanding a certain level of tensile stress and contributes to the flexural rigidity of the beam. This phenomenon is called tension stiffening [1]. tension stiffening relationships can be used to obtain the stress-strain response of concrete after cracking [2]. In this study, section analysis by finite layer approach is used to analyze a number of simple supported beams under four-point bending that their experimental load-deflection curves are available and one of the proposed models for tensile behavior of reinforced concrete with FRP bars was investigated and its parameters was obtained based on minimizing difference between experimental and analytical results. The investigation is conducted in the service load range because the deflection limitation is important in serviceability conditions.

2. PROPOSED MODEL

In this research, the model proposed by Hsu and Zhu

(2002) [3] is chosen because of its simplicity and feasibility for all considered beams with regard to their given properties. In this model, two parameters a and b , according to Eq. (1), are used to calibrate the model using the experimental results of FRP reinforced concrete beams.

$$\begin{aligned} f_{ct} &= E_c \varepsilon_t & (\varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr}) \\ f_{ct} &= a f_{cr} / (\varepsilon_t / \varepsilon_{cr})^b & (\varepsilon_t > \varepsilon_{cr}) \end{aligned} \quad (1)$$

Where f_{ct} , ε_t , f_{cr} and ε_{cr} are tensile stress, tensile strain, cracking stress and cracking strain, respectively.

3. METHODOLOGY

One of the applications of the tension stiffening models is the calculation of concrete beam deflection using section analysis by finite layer approach. The method used to predict the bending behavior of reinforced concrete beam sections reinforced with steel and FRP bars is an incremental-iterative technique with secant stiffness formulation [4]. In this method, the moment-curvature relation of section is first calculated, then the nonlinear load – deflection response of beam is formulated by using second moment area theorem.

The stress-strain behavior of reinforcing steel is assumed

*Corresponding author's email: s.r.mousavi@eng.usb.ac.ir



Table 1. Initial and optimized values of model parameters

Method	Parameter	
	a	b
Hsu & Zhu (2002)[3]	1	0.4
Values obtained from optimization	0.142	0.274

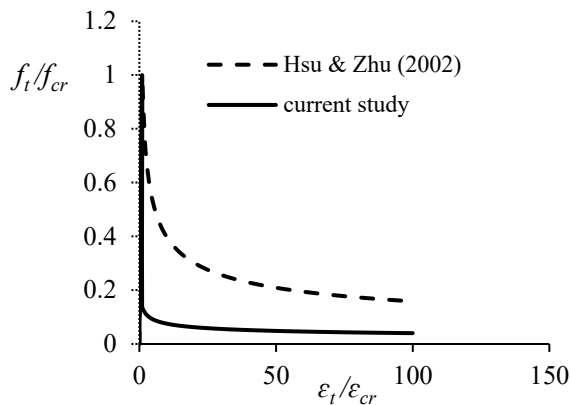


Fig. 1. Normalized tension-stiffening curves with initial parameters [3] and Optimized parameters (current study)

to be bilinear, and The corresponding behavior for FRP bars is considered to be linear up to brittle failure, furthermore the parabolic curve obtained by Hognestad et al. (1955) is chosen to represent the concrete stress-strain relation in compression [5]. The experimental load-deflection data were obtained from the load-deflection diagrams of 87 beams under four-point bending test.

4. RESULTS AND DISCUSSION

The data of 9 beams from the set of 87 beams with available experimental load-deflection results and 20% of the data of remaining 78 beams are randomly selected for control and are not take in developing the optimal model. the genetic algorithm was used to minimize Square Root of the Sum of the Squares of difference between experimental and analytical results as objective function and to obtain the optimal values of the model parameters. The dimensionless curves of the model with the initial and optimal parameters are plotted in Fig. 1. The average value of the initial and the optimal function (f_t / f_{cr}) in the range of 1 to100 of $\epsilon_t / \epsilon_{cr}$ is 0.25 and 0.054, respectively, indicating that the average value of the optimal function or tension stiffening is decreased by 78%.

The control data which is 20% of data of 78 beams and randomly selected, is used to check the accuracy of the of experimental/calculated deflection ratio of control data, which is zero if the analytical and experimental results are fully matched, is 1.0457 and 0.02668 for the obtained optimal parameters. The mean natural logarithm reduction. The mean experimental/ analytical deflection ratio of control data is

2.845 and 1.306 for the initial and optimal model, respectively, indicating that both models produce nonconservative results.

For control beams, the mean natural logarithm of experimental/calculated deflection ratio of control beams using the optimal model was significantly reduced by about 80%. To observe the effect of optimizing the tension stiffening model, experimental load – deflection curve and analytical load – deflection curves with the initial model and the optimal model along with the results of the deflection analytical relation presented in the ISIS Canada (2001) [6] and developed by Bischoff (2005) [7] for three cases of control beams (CB6-1[8], BC2[9], CFRP1[10]) are depicted in Fig. 2. For all three beams shown in Fig. 2, both analytical relations underestimate the moment rigidity of the member in the cracking region and are conservative, also their error is more than the error of the nonlinear analysis results, because a more accurate nonlinear relationship is considered for the stress-strain behavior of the materials in the nonlinear analysis.

5. CONCLUSION

Tension stiffening effect, which is due to stress transfer between concrete and reinforcing bars between cracks,

can be approach by the mean stress-strain relation of the concrete after cracking. This relation is used in section analysis by finite layer approach or truss analysis. In this research, by using section analysis by finite layer approach for a number of beams under four-point bending and comparing the analytical and experimental results in the service load range, the tension stiffening model proposed by Hsu and Zhu (2002) is modified by employing genetic algorithm optimization.

The optimal model predicts less tension stiffening effect than the original model for FRP bars, so that the average value of the optimal function is about %78 lower than the initial function in the range of cracking.

The mean natural logarithm of experimental/calculated deflection ratio of control data is 1.0457 and 0.02668 for the initial and optimal model, respectively, which shows a 74% reduction. The reduction in this parameter for control beams is also about 80%. It is noteworthy that the results of both models are non-conservative because their mean experimental to analytical deflection ratio is greater than one.

Comparison of the experimental and analytical load – deflection curve with the curves obtained from the two analytical relationships shows that both analytical relationships underestimate moment rigidity in after cracking region, for all three beams and these relationships are conservative but they have more error due to use less accurate stress-strain

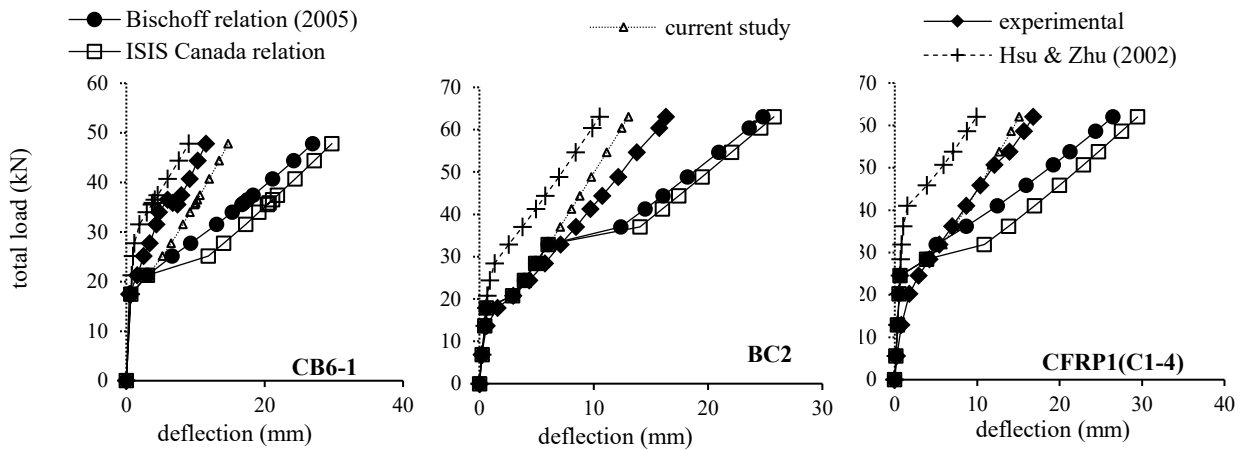


Fig. 2. comparison of Experimental load-deflection curve with curves obtained from analytical models and relations

behavior for materials than nonlinear analysis.

REFERENCES

[1] P. Ng, J. Lam, A. Kwan, Effects of concrete-to-reinforcement bond and loading conditions on tension stiffening, *Procedia engineering*, 14 (2011) 704-714.

[2] G. Kaklauskas, V. Gribniak, D. Bacinskas, P. Vainiunas, Shrinkage influence on tension stiffening in concrete members, *Engineering Structures*, 31(6) (2009) 1305-1312.

[3] T.T. Hsu, R.R. Zhu, Softened membrane model for reinforced concrete elements in shear, *Structural Journal*, 99(4) (2002) 460-469.

[4] R. Nayal, H.A. Rasheed, Tension stiffening model for concrete beams reinforced with steel and FRP bars, *Journal of Materials in Civil Engineering*, 18(6) (2006) 831-841.

[5] M. El Sayed, T. El Maaddawy, Analytical model for prediction of load capacity of RC columns confined with CFRP under uniaxial and biaxial eccentric loading, *Materials and structures*, 44(1) (2011) 299-311.


[6] ISIS Canada, Reinforcing concrete structures with fibre reinforced polymers, Design Manual,3, (2001), Winnipeg Manitoba.

[7] P.H. Bischoff, Reevaluation of deflection prediction for concrete beams reinforced with steel and fiber reinforced polymer bars, *Journal of structural engineering*, 131(5) (2005) 752-767

[8] R. Masmoudi, M. Theriault, B. Benmokrane, Flexural behavior of concrete beams reinforced with deformed fiber reinforced plastic reinforcing rods, *Structural Journal*, 95(6) (1998) 665-676.

[9] M. Theriault, B. Benmokrane, Effects of FRP reinforcement ratio and concrete strength on flexural behavior of concrete beams, *Journal of composites for construction*, 2(1) (1998) 7-16.

[10] C. Kassem, A.S. Farghaly, B. Benmokrane, Evaluation of flexural behavior and serviceability performance of concrete beams reinforced with FRP bars, *Journal of Composites for Construction*, 15(5) (2011) 682-695.

<p>HOW TO CITE THIS ARTICLE</p> <p>A. Kamali, S.R. Mousavi, M.R. Ghasemi, <i>Optimization of concrete tension stiffening model based on layered nonlinear analysis of FRP – RC beams, Amirkabir J. Civil Eng., 52(11) (2021) 683-686.</i></p> <p>DOI: 10.22060/ceej.2019.16440.6229</p>	
--	---



بهینه سازی مدل سخت‌شوندگی کششی بتن براساس تحلیل غیرخطی لایه‌ای تیرهای بتنی مسلح شده با میلگردهای FRP

آرزو کمالی^۱، سیدروح ا... موسوی^{۲*}، محمدرضا قاسمی^۳

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
^۲ دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
^۳ استاد گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸-۰۳-۰۷
بازنگری: ۱۳۹۸-۰۶-۰۷
پذیرش: ۱۳۹۸-۰۸-۱۴
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۸-۲۷

کلمات کلیدی:

خیز
سخت‌شوندگی کششی
میلگردهای FRP
تحلیل غیرخطی
بهینه‌سازی

خلاصه: اثر سخت‌شوندگی کششی که ناشی از مشارکت بتن بین ترک‌ها در تحمل کشش است، منجر به کاهش کرنش‌های عضو بتن مسلح نسبت به کرنش میلگردها به تنهایی می‌شود. در برخی پیشنهادها، این اثر در رفتار تنش-کرنش بتن بعد از ترک‌خوردگی گنجانده شده است که تعداد اندکی از آن‌ها بتن با مسلح‌کننده‌های FRP را بررسی کرده‌اند. در این تحقیق از مقایسه نتایج تحلیل غیرخطی لایه‌ای و نتایج آزمایشگاهی مجموعه‌ی نسبتاً گسترده‌ای از تیرهای بتنی مسلح شده با میلگردهای FRP نسبت به تحقیقات پیشین، برای استخراج رابطه‌ی تنش-کرنش بتن بعد از ترک‌خوردگی استفاده شده است. مدل به دست آمده برخلاف مدل‌های پیشین برای همه‌ی انواع میلگردهای FRP ارائه شده است. ثابت‌های مدل با کاربرد روش بهینه‌سازی ژنتیک به دست می‌آیند. از ۸۷ نمودار بار-خیز آزمایشگاهی تیرهای بتنی مسلح شده با میلگردهای FRP تحت خمش چهار نقطه‌ای، ۷۸ نمودار برای استخراج ثابت‌های مدل و ۹ نمودار برای بررسی مدل بهینه به دست آمده به کار می‌روند. علاوه بر این ۲۰ درصد از داده‌های ۷۸ تیر در نظر گرفته شده برای استخراج مدل، به صورت تصادفی حذف شده و به جای محاسبه‌ی مدل در کنترل مدل به کار می‌روند. میانگین لگاریتم طبیعی نسبت خیز آزمایشگاهی به محاسباتی برای داده‌های انتخاب شده برای کنترل، با کاربرد مدل اولیه ۱/۰۴۵۷ و با کاربرد مدل بهینه ۰/۲۶۶۸ است. با توجه به این که مقدار ایده‌آل لگاریتم نسبت خیز آزمایشگاهی به محاسباتی صفر است، کاربرد مدل بهینه این پارامتر آماری را ۷۴ درصد بهبود داده است. نتایج تحلیل غیرخطی با مدل‌های اولیه و بهینه با روابط آیین‌نامه‌ای نیز مقایسه شده‌اند.

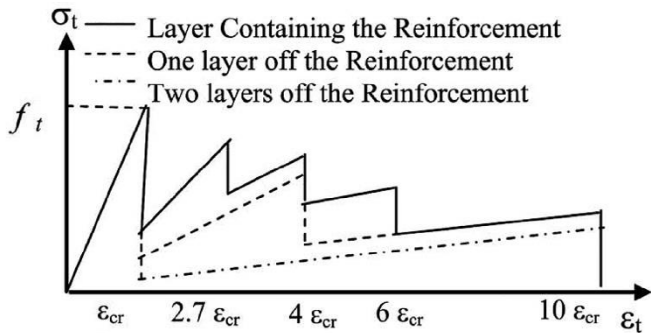
۱- مقدمه

برای یک تیر بتن مسلح ترک‌خورده، به دلیل حضور ترک‌ها، سختی خمشی آن کم‌تر از سختی خمشی قبل از ترک‌خوردگی است، با این وجود در ناحیه‌ی کششی تیر، بتن در تماس با میلگردهای مسلح‌کننده بین ترک‌ها از طریق انتقال نیروی پیوستگی از میلگردهای مسلح‌کننده به بتن هنوز قادر به تحمل سطح خاصی از تنش‌های کششی است و در سختی خمشی تیر سهیم است. این پدیده، سخت‌شوندگی کششی نامیده می‌شود، این نام‌گذاری به این

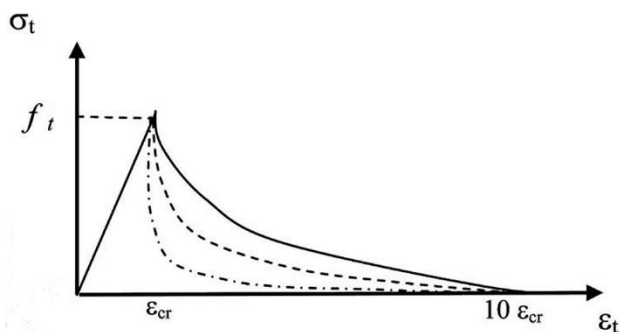
دلیل است که تیر بر اثر مقاومت کششی بتن سخت‌تر شده است [۱].
اثر سخت‌شوندگی کششی از دهه‌ی هفتاد میلادی، در تحلیل مشخصات بار-خیز المان‌های بتن مسلح و از دهه‌ی هشتاد میلادی، در توصیه‌های آیین‌نامه‌های طراحی برای سطح بار بهره‌برداری، معرفی شد. این اثر تا روی دادن تسلیم مسلح‌کننده‌های طولی وجود دارد [۲]. سخت‌شوندگی کششی ویژگی مهمی از سازه‌های بتن مسلح محسوب می‌شود زیرا نه تنها تغییر شکل‌های سازه بلکه عرض ترک‌ها، فاصله ترک‌ها و شکل‌گیری ترک‌های گوناگون را کنترل می‌کند [۳].
در مواردی که تنش‌ها و کرنش‌های میانگین برای پیش‌بینی رفتار عضو به کار برده می‌شوند، نیاز است که اثر سخت‌شوندگی

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: s.r.mousavi@eng.usb.ac.ir





شکل ۱. مدل سخت شونده کششی ارائه شده توسط اسکانون و ماری [۶]
Fig. 1. Tension Stiffening model suggested by Scanlon and Murray [6]



شکل ۲. مدل سخت شونده کششی ارائه شده توسط لین و اسکوردلیس [۶]
Fig. 2. Tension Stiffening model suggested by Lin and Scordelis [6]

مطابق شکل ۲ برای تنش کششی میانگین بتن بعد از ترک خوردگی در نظر گرفتند که براساس مطالعات آن‌ها روی دال‌ها و پوسته‌های بتنی به دست آمده است، مدل ارائه شده توسط آن‌ها دارای شاخه نزولی چندجمله‌ای پس از ترک خوردگی است [۶]. پس از آن‌ها، گیلبرت^۶ و وارنر^۷ در سال ۱۹۷۸، نموداری برای تنش - کرنش بتن بعد از ترک خوردگی در نظر گرفتند که شاخه‌ی نزولی آن بعد از ترک خوردگی مطابق شکل ۳- الف به صورت دوخطی و با ناپیوستگی می‌باشد. علاوه بر این، آن‌ها به لایه‌های کششی مختلف، بسته به مجاورت آن‌ها به مسلح کننده‌های فولادی، پارامترهای مدل متفاوتی نسبت دادند [۶]. مدل ارائه شده توسط آن‌ها بعدها در سال ۲۰۰۶ توسط نایال^۸ و رشید^۹ برای تیرهای بتنی مسلح شده با میلگردهای فولادی و FRP مورد استفاده قرار گرفت. آن‌ها برای پارامترهای S_t , R_t , P_t و F_t که در شکل ۳- ب نشان داده شده‌اند به ترتیب مقادیر 0.8 ،

کششی در نظر گرفته شود. این روش‌ها به یک مدل رفتاری مناسب برای بتن ترک خورده نیاز دارند و روابط سخت‌شوندگی کششی می‌توانند برای به دست آوردن پاسخ تنش - کرنش کششی بتن پس از ترک خوردگی استفاده شوند. بر مبنای فرضیات مختلف مدل‌های رفتاری متفاوتی برای بتن مسلح در کشش پیشنهاد شده است [۴].

در این تحقیق با کاربرد تحلیل لایه‌ای مقطع برای تعدادی تیر دوسر ساده تحت خمش چهار نقطه‌ای که منحنی بار - خیز آزمایشگاهی آن‌ها موجود است، یکی از مدل‌های ارائه شده برای رفتار کششی بتن مسلح شده با میلگردهای FRP مورد بررسی قرار می‌گیرد و پارامترهای آن براساس کمینه‌سازی خطای نتایج بار - خیز آزمایشگاهی و نتایج حاصل از تحلیل غیرخطی به دست می‌آیند. بررسی پارامترها در محدوده‌ی بارهای بهره‌برداری صورت می‌گیرد زیرا کنترل خیز تنها در شرایط بهره‌برداری اهمیت دارد. در اکثر تحقیقات گذشته مدل‌های تنش - کرنش سخت‌شوندگی کششی با نمودارهای لنگر - انحنای بررسی شده‌اند، استفاده از نمودارهای بار - خیز در این پژوهش موجب گستردگی داده‌های آزمایشگاهی به کار رفته در استخراج نتایج شده است. در این تحقیق تنها به تغییر شکل‌های آنی پرداخته شده است.

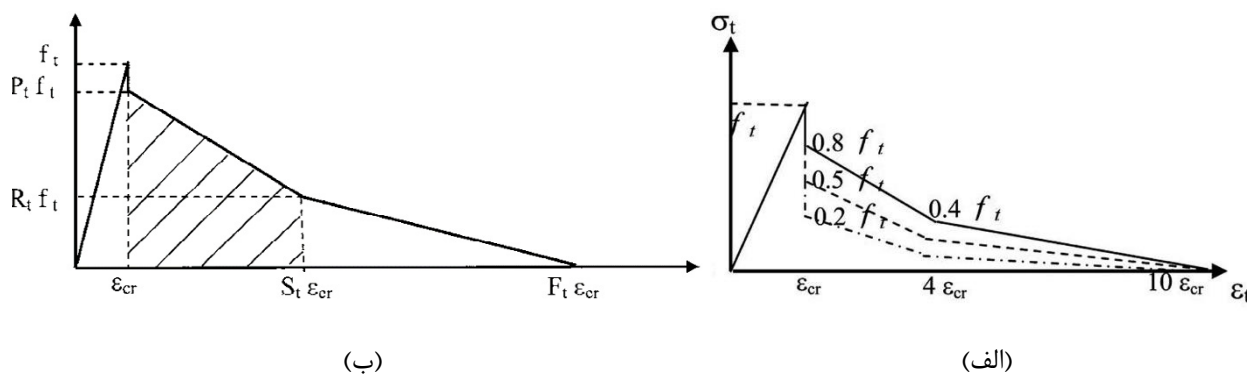
۲- پیشینه تحقیق

در نظر گرفتن اثر سخت شوندگی کششی با یک پاسخ تنش - کرنش میانگین برای بتن ترک خورده که معادل با در نظر گرفتن مدول الاستیسیته کاهش یافته برای بتن است اولین بار تحت عنوان روش سه‌م بار بتن حدود ۱۰۰ سال پیش توسط کانسیدر^۱ در سال ۱۸۹۹ معرفی شد و توسط اسکانون^۲ و ماری^۳ در سال ۱۹۷۴ برای تحلیل المان محدود به کار برده شد، آن‌ها اولین کسانی بودند که سخت‌شوندگی کششی را با مدول کاهش یافته‌ی بتن مدل کردند [۵]. مدل در نظر گرفته شده توسط آن‌ها در شکل ۱ نشان داده شده است، در این شکل σ و ϵ به ترتیب تنش و کرنش کششی میانگین بتن مسلح، f_t و ϵ_{cr} نیز به ترتیب تنش و کرنش ترک خوردگی بتن می‌باشند.

در سال ۱۹۷۵ لین^۴ و اسکوردلیس^۵ روند کاهش همواری را

- 1 Considere
- 2 Scanlon
- 3 Murray
- 4 Lin
- 5 Scordelis

- 6 Gilbert
- 7 Warner
- 8 Nayal
- 9 Rashid



شکل ۳. مدل سخت شونده کششی ارائه شده توسط (الف) گیلبرت و وارنر و (ب) نایال و رشید [۶]
 Fig. 3. Tension Stiffening model suggested by (a) Gilbert and Warner and (b) Nayal and Rasheed [6]

اعمال می‌کند ($\alpha_1 = 1$) برای پیوستگی کامل و $\alpha_1 = 0$ برای مسلح کننده بدون پیوستگی) و α_2 نوع بارگذاری را در نظر می‌گیرد ($\alpha_2 = 1$ برای بارگذاری آبی)، سایر پارامترها نیز مشابه رابطه (۱) تعریف می‌شوند [۸].

در همین راستا، شو^۴ و چو^۵ نیز در سال ۲۰۰۲ با بررسی ورق‌های بتنی مسلح شده با میلگردهای فولادی تحت اثر برش، رابطه‌ای توانی (رابطه (۳)) را برای تخمین تنش کششی میانگین بتن مسلح بعد از ترک خوردگی پیشنهاد نمودند [۹].

$$f_{ct} = E_c \varepsilon_t \quad (\varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr}) \quad (3)$$

$$f_{ct} = f_{cr} / (\varepsilon_t / \varepsilon_{cr})^{0.4} \quad (\varepsilon_t > \varepsilon_{cr})$$

که پارامترهای این رابطه مشابه رابطه (۱) تعریف می‌شوند. کاکلوسکاس^۶ و همکاران نیز در سال ۲۰۱۸ رابطه (۴) را برای سخت شونده کششی برای بتن‌های مختلف در شرایطی که اثر جمع شدگی حذف می‌شود، ارائه نمودند [۱۰]:

$$f_{ct} = E_c \varepsilon_t \quad (\varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr}) \quad (4)$$

$$f_{ct} = 0.025 f_c - \frac{0.85(10^3 \varepsilon_t)^{0.8} - 1.5}{0.25(10^3 \varepsilon_t)^{0.3} + 0.8} \quad (\varepsilon_t > \varepsilon_{cr})$$

این رابطه براساس مقاومت فشاری بتن (f_c) ارائه شده است. با توجه به روابط ارائه شده اثر سخت شونده کششی بتن مسلح شده با میلگردهای FRP با یک مدل نسبتاً ساده مورد بررسی قرار

۴۰/۴۵ و ۱۰۰ را برای تیرهای بتنی مسلح شده با میگردهای FRP پیشنهاد نمودند.

پس از ارائه‌ی شاخه‌ی نزولی چندجمله‌ای و شاخه نزولی دوخطی توسط محققان، کالینس^۱ و وکیو^۲ در سال ۱۹۸۶، رابطه‌ی (۱) را برای تنش میانگین بتن بعد از ترک خوردگی ارائه نمودند که با آزمایش ۳۰ ورق بتنی مسلح شده با میلگردهای فولادی تحت اثر شرایط مختلف تنش‌های دو محوری گسترده یکنواخت شامل برش خالص به دست آمده است [۷].

$$f_{ct} = E_c \varepsilon_t \quad (\varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr}) \quad (1)$$

$$f_{ct} = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{200\varepsilon_t}} \quad (\varepsilon_t > \varepsilon_{cr})$$

در این رابطه E_c مدول الاستیسیته بتن، f_{ct} تنش کششی بتن، ε_t کرنش کششی میانگین ناشی از تنش در بتن، f_{cr} تنش ترک خوردگی بتن و ε_{cr} کرنش ترک خوردگی است [۷]. کالینس و میچل^۳ در سال ۱۹۹۱، ضرایب رابطه ارائه شده توسط کالینس و وکیو (رابطه (۱)) را مورد بررسی قرار دادند و آن را مطابق رابطه (۲) اصلاح نمودند [۸].

$$f_{ct} = E_c \varepsilon_t \quad (\varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr}) \quad (2)$$

$$f_{ct} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{cr}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_t}} \quad (\varepsilon_t > \varepsilon_{cr})$$

که α_1 ضریبی است که مشخصات پیوستگی بتن به میلگردها را

4 Hsu
5 Zhu
6 Kaklauskas

1 Collins
2 Vecchio
3 Mitchell

گرفته و تأثیر آن در خیز تیرهای بتنی مسلح شده با میلگردهای FRP مدلسازی می‌شود.

۳- عوامل مؤثر بر سخت شوندگی کششی

اثر سخت شوندگی کششی به عوامل متعددی مانند شرایط بارگذاری، نسبت آرماتور، قطر میلگردهای کششی، مدول الاستیسیته و مقاومت مصالح و نیز پیوستگی بین مسلح کننده ها و بتن بستگی دارد. تحقیقات نشان می دهد که مدول الاستیسیته بتن تأثیر قابل توجهی روی رفتار سخت شوندگی کششی ندارد، در حالی که با افزایش مقاومت بتن اثر سخت شوندگی کششی افزایش می یابد [۱۱]. شرایط بارگذاری که همان تغییر لنگر خمشی، انحنای و تنش کششی در جهت طولی تیر است، تأثیرات خاصی را روی رفتار سخت شوندگی کششی اعمال می کند [۱]. در این تحقیق به دلیل بارگذاری همه ی تیرها تحت شرایط یکسان (بارگذاری چهارنقطه ای) این عامل تأثیرگذار نمی باشد.

اینگ^۱ و همکاران در سال ۲۰۱۱ تأثیر پیوستگی بتن به آرماتور را روی سخت شوندگی کششی مورد بررسی قرار دادند، این نتیجه حاصل شد که برای یک نسبت آرماتور خاص، اگر تعداد بیشتری از میلگردها با قطر کوچکتر به کار برده شود، سختی پیوستگی و نیروی پیوستگی نهایی بیشتری فراهم میشود و اگر تعداد کمتری از میلگردها با قطر بزرگ به کار رود، سختی پیوستگی کمتر و نیروی پیوستگی نهایی کمتری فراهم میشود. از طرف دیگر، هم سختی پیوستگی و هم نیروی پیوستگی نهایی، برای میلگردهای آجدار بیشتر از میلگردهای صاف است. بنابراین مشخصات پیوستگی هم به نوع مسلح کننده ها و هم به سطح تماس آنها با بتن بستگی دارد. در نتیجه توافق عمومی ای درباره ی تأثیر مشخصات پیوستگی بر سخت شوندگی کششی به دست نیامده است و وابستگی بلوک تنش کششی به پارامتر پیوستگی گزارش نشده است [۱].

استراماندینولی^۲ و لاروور^۳ در سال ۲۰۰۸ مدلی رابطه تنش- کرنش ارائه کردند که اثر همزمان نسبت مسلح کننده ها و مدول الاستیسیته مسلح کننده ها را در نظر می گرفت. اما پیچیدگی این مدل منجر می شود که تأثیر منحصر این عوامل قابل تشخیص

1 Ng
2 stramandinoli
3 La Rovere

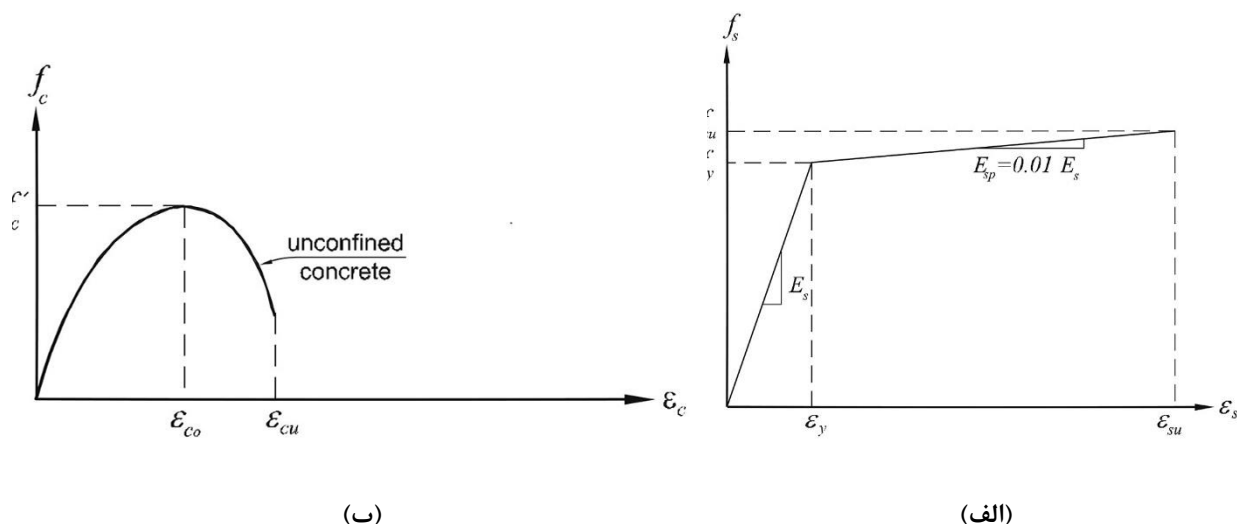
نباشد [۲]. علاوه بر این تحقیقات صورت گرفته توسط مؤلفان بر روی مدلی که تأثیر مدول الاستیسیته را در مدل سخت شوندگی اعمال می نماید نشان داد که به کارگیری این مدل نمی تواند نتایج را به میزان قابل توجهی بهبود بخشد و برای کاهش پیچیدگی مدل از اعمال این پارامتر در مدل صرف نظر شده است [پایان نامه مؤلف ۱۲]. اگر میزان کرنش جمع شدگی بتن مشخص باشد، با استفاده از روابط سازگاری میتوان این مقدار کرنش را برای حذف اثر جمع شدگی و اصلاح روابط یا نمودارها به کار برد. در یک نمودار سخت شوندگی حاصل از نتایج آزمایشگاهی اگر اثر جمع شدگی حذف شود کرنش های نمودار سخت شوندگی افزایش می یابند. در این پژوهش به دلیل گستردگی داده های آزمایشگاهی به کار رفته و عدم اطلاعات کافی درباره شرایط آزمایشگاهی در آنها، تأثیر جمع شدگی ناچیز در نظر گرفته شده و از اثر آن بر نتایج صرفنظر می شود [۸].

۴- مدل پیشنهادی

همه ی مدل های ارائه شده توسط محققان گذشته روند مشابهی در قسمت کاهش نمودار تنش-کرنش دارند و تمرکز اصلی در این تحقیق کاربرد مجموعه نسبتا گسترده از داده های آزمایشگاهی در محاسبه ضرایب و ثابت های مدل می باشد که می تواند دقت مدل را برای پیش بینی اثر سخت شوندگی در بتن های مسلح شده با میلگردهای FRP افزایش دهد. از مدل های معرفی شده توسط محققان در تحقیقات گذشته، در این تحقیق مدل ارائه شده توسط شو و جو در سال ۲۰۰۲ به دلیل سادگی و امکان استفاده از آن برای همه ی تیرهای مورد بررسی با توجه به مشخصات در دسترس از آنها انتخاب می شود. مدل انتخاب شده با مقایسه نتایج آزمایشگاهی و نتایج تحلیل غیرخطی مورد بررسی قرار می گیرد. در این مدل دو پارامتر a و b ، مطابق رابطه (۵)، برای کالیبره کردن مدل با استفاده از نتایج آزمایشگاهی تیرهای بتنی مسلح شده با میلگردهای FRP در نظر گرفته شده است.

$$f_{ct} = E_c \varepsilon_t \quad (\varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr})$$

$$f_{ct} = \frac{af_{cr}}{\left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_{cr}}\right)^b} \quad (\varepsilon_t > \varepsilon_{cr}) \quad (5)$$



شکل ۴. نمودارهای تنش - کرنش (الف) فولاد (ب) بتن فشاری محصور نشده [۱۴]
 Fig. 4. Stress-strain curve of (a) steel and (b) unconfined compressive concrete [14]

بار- خیز غیرخطی تیر با استفاده از لنگر سطح فرمول بندی می‌شود. از آن جایی که صلبیت خمشی با افزایش لنگر کاهش می‌یابد، انتظار می‌رود که سختی تیر، در یک روش غیرخطی، با تغییر در لنگر خمشی در طول دهانه‌ی تیر متغیر باشد. این مطالعه قصد دارد که یک توزیع دقیق سختی را در طول تیر در نظر بگیرد. برای بدست آوردن توزیع دقیق سختی باید کل طول تیر به تعداد زیادی قطعه تقسیم شود و صلبیت خمشی مقطع در وسط هر قطعه، تحت هر افزایش بار مشخص محاسبه شود در این جا تعداد تقسیمات هر تیر به گونه‌ای است که هر قطعه دارای طول ۵ سانتی‌متر است.

در روند عددی به کار برده شده برای محاسبه رابطه‌ی لنگر- انحنای مقطع به تعدادی لایه‌های مجزا به ضخامت ۱۰ میلی‌متر تقسیم می‌شود. به طوری که کرنش در مرکز هر لایه برای کل ضخامت لایه در نظر گرفته می‌شود. ابتدا برای محل مرکز غیرالاستیک یک موقعیت اولیه فرض می‌شود سپس مقدار جاری صلبیت خمشی سکانتی حول مرکز غیرالاستیک محاسبه می‌شود. توزیع کرنش با استفاده از انحنای به دست آمده از تقسیم لنگر اعمال شده بر مقدار جاری صلبیت خمشی سکانتی حول مرکز غیرالاستیک تعیین می‌شود. با مشخص شدن توزیع کرنش ناحیه‌های فشاری و کششی مقطع مشخص می‌شوند؛ کرنش در مرکز هر لایه محاسبه می‌شود. تنش در هر لایه با استفاده از مدول سکانتی متناظر برای مصالح تعیین می‌شود. با محاسبه تنش هر لایه می‌توان نیروی محوری مقطع را که متناظر با مرکز غیرالاستیک مفروض است محاسبه نمود، محل

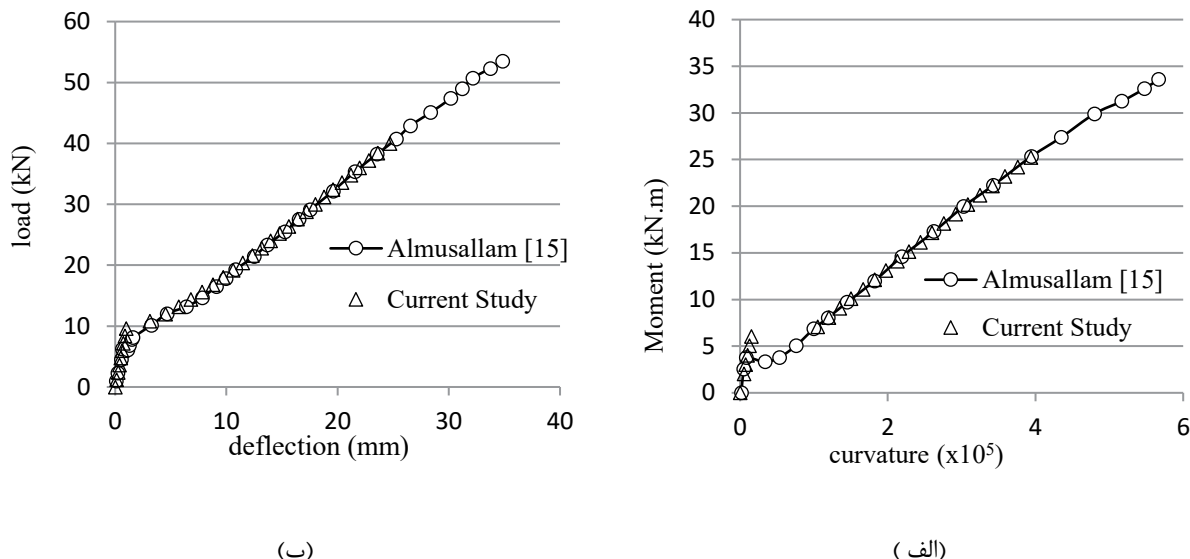
۵- تحلیل غیرخطی با استفاده از مدل پیشنهادی

یکی از کاربردهای مدل‌های ذکر شده محاسبه خیز تیرهای بتنی با روش تحلیل غیرخطی لایه‌ای مقطع می‌باشد. در این روش طول تیر به قطعاتی کوچک و هر مقطع آن نیز به تعدادی لایه‌ی موازی با محور خمشی در مقطع تقسیم بندی می‌شود که تنش‌ها در هر لایه براساس کرنش‌ها و همچنین رابطه‌ی غیرخطی در نظر گرفته شده برای بتن محاسبه می‌شوند. در این مطالعه سعی بر این است که ثابت‌های رابطه تنش کرنش بتن بعد از ترک خوردگی (مطابق رابطه (۵)) به گونه‌ای تعیین شود که دقت مقدار خیز ارائه شده با این روش افزایش یابد.

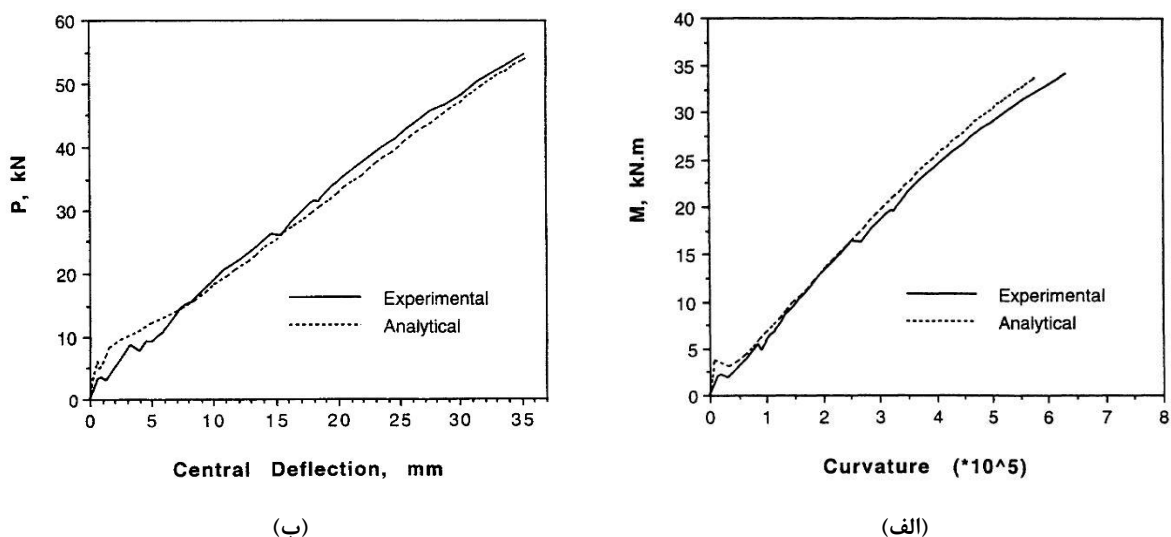
روش دنبال شده برای پیش بینی رفتار خمشی مقاطع تیر بتنی مسلح شده با میلگردهای فولادی و میلگردهای FRP یک روش افزایشی - تکراری با فرمول بندی سختی سکانتی است. فرض می‌شود که مقطع از فرض قراردادی برنولی^۱ - ناپیر^۲ مربوط به تیرهای با عمق کم، با چشم پوشی از اثر تغییر شکل برشی، پیروی کند [۶]. در این روش بتن به صورت یک مصالح همگن و توزیع کرنش در عمق مقطع خطی در نظر گرفته می‌شود. علاوه بر این برای هر لایه‌ای از بتن تحت کشش، رابطه تنش کرنش یکسانی به کار برده می‌شود [۱۳].

در تحلیل غیرخطی به روش مقطع لایه‌ای ابتدا رابطه‌ی لنگر- انحنای مقطع عضو محاسبه می‌شود سپس با روش لنگر سطح، پاسخ

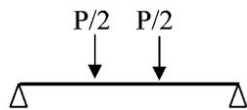
1 Bernoulli
 2 Navier



شکل ۵. مقایسه نمودارهای (الف) لنگر- انحنا و (ب) بار- خیز به دست آمده از این تحقیق و ارائه شده در مرجع [۱۵]
 Fig. 5. Comparison of (a) Moment-curvature and (b) load-deflection curves obtained from this study with curves provided in the Reference[15]



شکل ۶. نمودارهای (الف) لنگر- انحنا و (ب) بار- خیز آزمایشگاهی و تحلیلی ارائه شده در مرجع [۱۵]
 Fig. 6. Experimental and analytical (a) Moment-curvature and (b) load-deflection curves provided in the Reference[15]



شکل ۷. شرایط بارگذاری در آزمایش خمش چهار نقطه‌ای
 Fig. 7. Four-point bending test conditions

کننده‌های FRP در کشش و در فشار خطی در نظر گرفته می‌شود، شکست این مصالح نیز ترد و بدون تسلیم در نظر گرفته می‌شود. رفتار تنش - کرنش در نظر گرفته شده برای بتن در فشار

مرکز غیر الاستیک با سعی و خطا و بر مبنای صفر شدن مقدار نیروی محوری مقطع با تکراری برابر با 5×10^{-7} محاسبه می‌شود. با تکرار این روند برای مقادیر لنگر اعمال شده مختلف می‌توان رابطه‌ی لنگر انحنای مقطع را محاسبه نمود [۶].

رفتار تنش - کرنش مسلح کننده‌های فولادی به صورت دوخطی و مطابق شکل ۴- الف در نظر گرفته می‌شود که در این شکل f_y و E_s به ترتیب تنش و کرنش تسلیم فولاد، f_{su} و E_{su} به ترتیب تنش و کرنش شکست فولاد می‌باشند [۱۴]. رفتار تنش - کرنش مسلح

جدول ۱. محدوده ی تغییر برخی مشخصات مکانیکی نمونه های آزمایشگاهی مورد استفاده
Table 1. Variation range of some mechanical properties of used experimental samples

پارامتر	میانگین	حداقل	حداکثر	انحراف استاندارد
نسبت ارتفاع به عرض مقطع تیر	۱/۵۶	۰/۳۶	۲/۷۵	۰/۴۵
مقاومت فشاری بتن	۴۱/۳۶	۲۰	۶۴	۱۰/۵
نسبت دهانه برشی به نصف طول تیر	۰/۷۲	۰/۶۴	۰/۹۳	۰/۰۹۵
نسبت مسلح کننده های کششی	۰/۰۱۳	۰/۰۰۱۴	۰/۰۳۹	۰/۰۰۹
نسبت مدول الاستیسیته فولاد به مدول الاستیسیته میلگردهای کششی	۴/۴۸	۱	۷/۶۳	۱/۵

روش تحلیل را نقض کند.

موادریهای آزمایشگاهی تیر مورد بررسی در صحت سنجی نیز در شکل ۶ همراه با نمودار تحلیلی به دست آمده در مرجع [۱۵] نشان داده شده اند.

۶- داده های آزمایشگاهی

داده های آزمایشگاهی مورد بررسی از نمودارهای بار - خیز ۸۷ تیر تحت آزمایش خمش چهار نقطه ای مطابق شکل ۷، که توسط سایر محققان آزمایش شده اند، به دست آمده اند. مشخصات آیین تیرها را می توان به صورت جدول ۱ خلاصه نمود. محور افقی و عمودی نمودارهای بار-خیز ذکر شده که داده های آزمایشگاهی شامل نقاط روی این منحنی ها می باشند به ترتیب، خیز وسط دهانه تیر و مجموع بارهای متمرکز می باشند. با توجه به این که بررسی خیز در شرایط بهره برداری انجام می شود، تنها نقاط بار- تغییر مکان مربوط به محدوده ی بهره داری به کار برده شده اند. حد بار بهره برداری مطابق آیین نامه ی بتن آمریکا (ACI ۴۴۰، ۱R-۰۶) در نظر گرفته شده است [۱۶].

۷- تجزیه و تحلیل

در این پژوهش، از مجموعه ۸۷ تیر ذکر شده در بخش قبل، نه تیر به عنوان تیرهای کنترل انتخاب می شوند و داده های بار-خیز آنها در محاسبات یافتن مدل بهینه شرکت داده نمی شوند که مشخصات این نه تیر در جدول ۲ نشان داده شده اند که در این جدول نسبت دهانه برشی به نصف طول تیر، معرف موقعیت اعمال بارهای متمرکز

بر اساس رابطه ارائه شده توسط هوگنستاد^۱ و همکاران در سال ۱۹۵۵ به صورت سهمی نشان داده شده در شکل ۴- ب و طبق رابطه ۶ است [۱۴].

$$f_c = f'_c \left[\frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} \right)^2 \right] \quad (۶)$$

$$\varepsilon_{co} = \frac{2f'_c}{E_c}$$

که در این رابطه ε_{co} کرنش متناظر با حداکثر تنش فشاری بتن E_c ، مدول الاستیسیته بتن، f_c تنش فشاری بتن، ε_c کرنش فشاری بتن و f'_c تنش حداکثر فشاری بتن است [۱۴].

صحت سنجی روش تحلیل با استفاده از نمودار لنگر - انحنا و بار - خیز تحلیلی ارائه شده برای تیر Group II در مرجع [۱۵] انجام شده است که در شکل ۵ نشان داده شده اند. همان طور که در شکل ۵ دیده می شود می توان گفت که نمودارها منطبق هستند، متفاوت بودن نتایج در محدوده ی ترک خوردگی به علت تفاوت در رابطه در نظر گرفته شده برای تنش ترک خوردگی بتن است، همچنین پرش نمودار لنگر- انحنا ی تحلیلی به دست آمده در این پژوهش، برخلاف نمودار مرجع، که بعد از ترک خوردگی رخ می دهد به علت پیشبرد گام های تحلیل بر مبنای افزایش لنگر است. شکست سریعتر عضو در این نمودارها نیز حاکی از تفاوت بین معیارهای شکست در نظر گرفته شده است. واضح است که هیچ یک از این تفاوت ها نمی تواند صحت

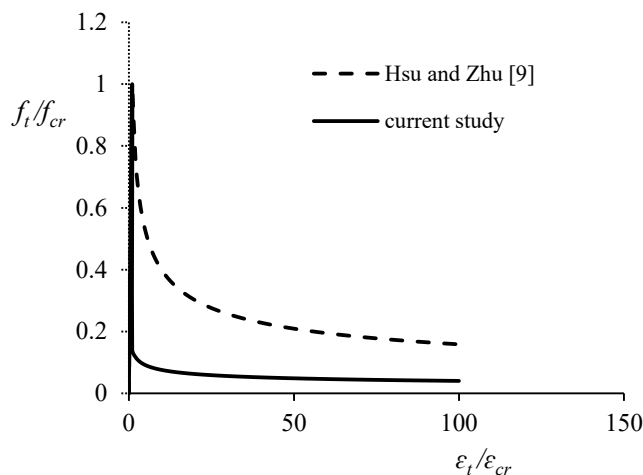
1 Hognestad

جدول ۲. مشخصات مکانیکی تیرهای کنترل
Table 2. Mechanical properties of control beams

نام [مرجع]	عرض مقطع (میلی متر)	ارتفاع مقطع (میلی متر)	نوع مسلح کننده های کششی	مدول الاستیسیته (مگاپاسکال)
[۱۷]CFRP1(C1-4)	۲۰۰	۳۰۰	CFRP	۱۱۴۰۰۰
[۱۸]۱	۱۸۰	۵۰۰	GFRP	۴۲۰۰۰
[۱۹]CB6-1	۲۰۰	۳۰۰	GFRP	۳۸۰۰۰
[۲۰]D	۲۰۰	۲۵۰	GFRP	۳۵۶۳۰
[۲۱]BC2	۱۵۰	۲۵۰	CFRP	۱۳۲۰۰۰
[۲۲]N-212-D1	۱۴۰	۱۹۰	GFRP	۶۴۶۳۴
[۱۹]CB2-1	۲۰۰	۳۰۰	GFRP	۳۸۰۰۰
[۲۳]B3	۱۵۰	۲۰۰	GFRP	۴۱۰۰۰
[۱۸]AFRP(AR-8)	۳۰۰	۲۰۰	AFRP	۵۲۰۰۰

جدول ۳. مقادیر پارامترهای اولیه و پارامترهای بهینه مدل
Table 3. initial and optimized values of model parameters

پارامتر		روش
b	a	
۰/۴	۱	شو و چو [۹] (۲۰۰۲)
۰/۲۷۴	۰/۱۴۲	مقادیر حاصل از بهینه سازی



شکل ۸. منحنی‌های سخت شونده‌گی کششی بدون بعد با پارامترهای اولیه (مرجع [۹]) و پارامترهای بهینه (پژوهش حاضر)

Fig. 8. Normalized tension-stiffening curves with initial parameters (Reference [9]) and Optimized parameters (this study)

روی تیر است و علاوه بر این برابر با نسبت طول ناحیه‌ی خمش خالص میانی به کل طول تیر نیز می‌باشد. علاوه بر این حدود ۲۰ درصد از داده‌های مربوط به ۷۸ تیر باقی‌مانده (۱۹۲ نقطه از ۹۶۷ نقطه) نیز تحت عنوان داده‌های کنترل و به صورت تصادفی برای کنترل نتایج در نظر گرفته شده و در یافتن مدل بهینه به کار نمی‌روند.

برای محاسبه مقادیر بهینه پارامترهای مدل پیشنهادی از روش بهینه سازی با الگوریتم ژنتیک استفاده شده است. در فرایند بهینه سازی ابتدا الگوریتم بهینه ساز مقادیری برای پارامترهای a و b مدل، براساس بازه تعیین شده برای آن‌ها، در نظر می‌گیرد، سپس با مدل به دست آمده و انجام تحلیل غیرخطی تیرها، مقدار خیز را برای همه‌ی مقادیر بار محاسبه می‌نماید و سپس خطای خیزهای به دست آمده را نسبت به خیزهای آزمایشگاهی مربوطه محاسبه می‌کند. تابع هدف در بهینه سازی در الگوریتم ژنتیک خطای جذر میانگین مربعات تفاضل مقدار خیز آزمایشگاهی و خیز تحلیلی، مطابق رابطه (۷) است.

$$error = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_{exp} - d_{cal})^2}{n}} \quad (7)$$

که در این رابطه d_{exp} مقدار خیز آزمایشگاهی، d_{cal} مقدار خیز محاسباتی با تحلیل غیرخطی و n تعداد داده‌های به کار رفته در

جدول ۴. نتایج آماری حاصل از مدل اولیه و مدل بهینه برای داده‌ها و تیرهای کنترل
Table 4. Statistical results from initial and optimized model for control data and control beams

روش‌ها						نتایج	
تیرهای کنترل			داده‌های کنترل				
مطالعه حاضر	نایال و رشید [۶]	شو و چو [۹]	مطالعه حاضر	نایال و رشید [۶]	شو و چو [۹]		
۰/۱۱۶	۰/۸۲۵۷	۰/۹۰۸	۰/۲۶۷	۰/۹۶۴۶	۱/۰۴۶	میانگین	نسبت خیز آزمایشگاهی
۰/۷۳۱	۰/۶۰۳۶	۰/۶۴۱	۰/۹۳۰	۰/۸۵۴۷	۰/۸۸۵	انحراف استاندارد	به محاسباتی در مقیاس لگاریتم طبیعی
۱/۱۲۲	۲/۲۸۳۴	۲/۴۷۹	۱/۳۰۶	۲/۶۲۳۸	۲/۸۴۵	میانگین	نسبت خیز آزمایشگاهی به محاسباتی
۹۸۸-۲۷۶ ۰/۱	۲/۰۵۴۱-۲/۵۳۸۳	۲/۲۱۶-۲/۷۷۴	۱۴۶-۴۸۹ ۱/۱	۳۲۵۰-۹۶۱۰ ۲/۲	۵۱۱-۲۲۵ ۲/۳	بازه اطمینان ۹۰ درصد	
۰/۸۹۸	۰/۸۲۸۷	۱/۰۷۷	۱/۵۲۵	۱/۳۵۰۷	۱/۴۲۳	واریانس	
۲/۶۴۲	۴/۵۱۸۹	۴/۷۴۴	۱/۱۶۰	۲/۲۲۶۱	۲/۲۹۲	خطای جذر میانگین مربعات	
۰/۰۷۷	۰/۱۳۲۱	۰/۱۳۹	۰/۰۹۸	۰/۱۸۸۶	۰/۱۹۴	خطای جذر میانگین مربعات نرمال شده	

آزمایشگاهی به محاسباتی داده‌های کنترل که در صورت تطابق کامل نتایج محاسباتی و آزمایشگاهی صفر می‌شود، در جدول ۴ نشان داده شده است. این پارامتر برای مدل اولیه ۰/۴۵۷ و برای مدل بهینه ۰/۲۶۶۸ به دست آمده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مدل بهینه به دست آمده تطابق بهتری با نتایج آزمایشگاهی دارد زیرا این پارامتر به میزان ۷۴ درصد کاهش یافته است.

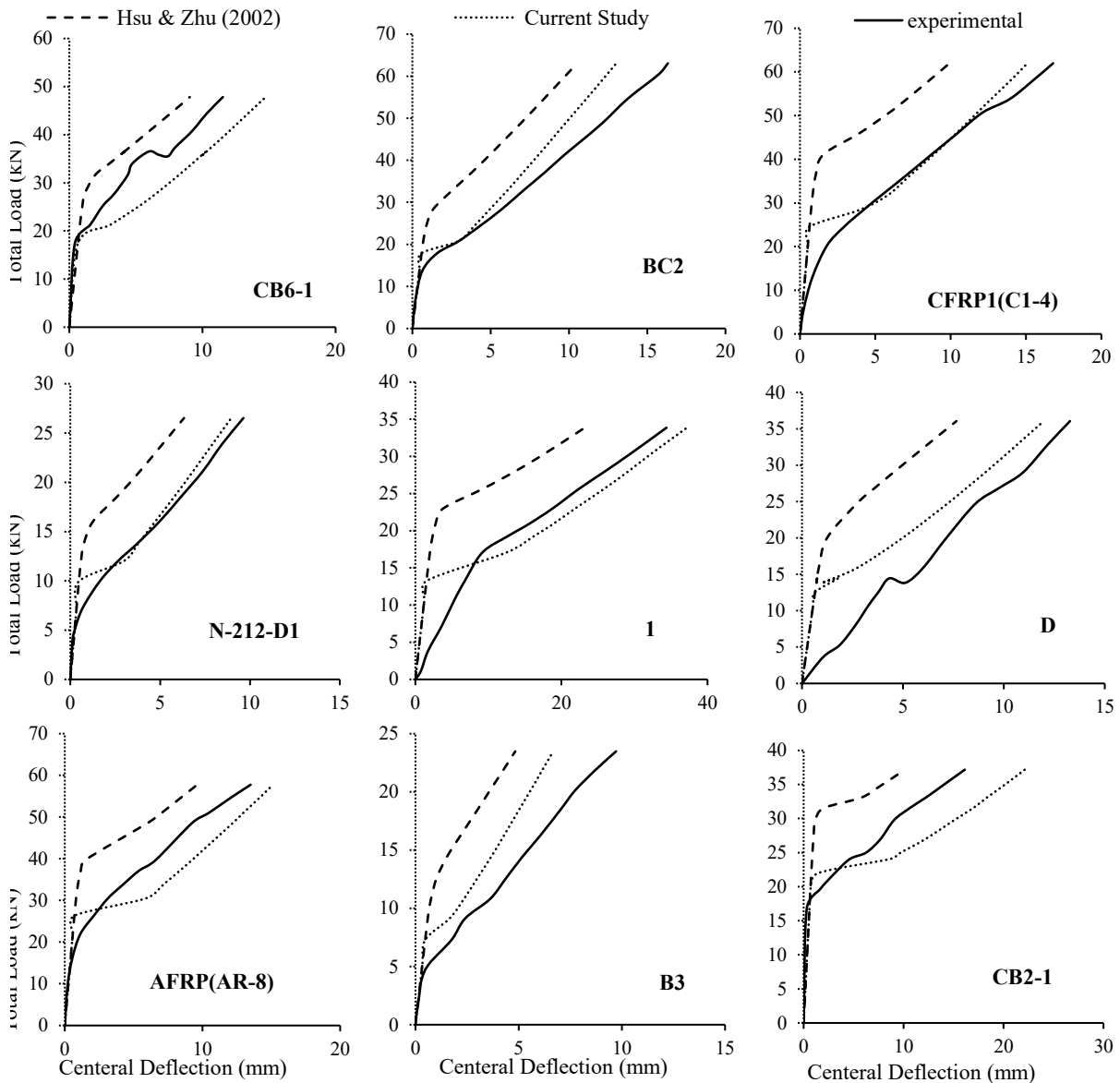
با کاربرد مدل بهینه به دست آمده میانگین نسبت خیز آزمایشگاهی به محاسباتی نیز به مقدار یک که مقدار مطلوب است نزدیکتر شده است.

با توجه به این که برای محافظه کارانه بودن نتایج باید نسبت خیز آزمایشگاهی به محاسباتی کوچک تر از یک باشد، هم نتایج حاصل از مدل اولیه و هم نتایج حاصل از مدل بهینه نشان می‌دهد که این مدل‌ها به طور میانگین نتایج غیرمحافظه کارانه‌ای ارائه می‌دهد. پارامترهای دیگری نیز در جدول ۴ برای مقایسه مدل اولیه و مدل بهینه آورده شده‌اند که مقایسه همه‌ی پارامترها برای مدل اولیه و مدل بهینه تطابق بهتر مدل بهینه با نتایج آزمایشگاهی را نشان می‌دهد.

محاسبه‌ی خطا است.

پس از کمینه سازی تابع هدف در الگوریتم ژنتیک مقدار بهینه برای پارامترهای مدل طبق جدول ۳ به دست آمده‌اند و منحنی‌های بدون بعد مدل با پارامترهای اولیه و پارامترهای حاصل از بهینه سازی در شکل ۸ ترسیم شده‌اند. در این شکل محور قائم نسبت تنش کششی به تنش ترک خوردگی بتن و محور افقی نسبت کرنش کششی بتن به کرنش ترک خوردگی آن است. مقایسه منحنی بهینه با منحنی اولیه در مرجع [۹] نشان می‌دهد که منحنی بهینه تنش میانگین و در واقع سخت شوندگی کششی کم‌تری برای مسلح کننده‌های FRP پیش بینی می‌کند. مقدار متوسط تابع اولیه و تابع بهینه (f_{ct} / f_{cr}) در محدوده‌ای که $\epsilon_t / \epsilon_{cr}$ بین ۱ و ۱۰۰ است، به ترتیب برابر با ۰/۲۵ و ۰/۵۴ می‌باشد که نشان می‌دهد مقدار متوسط تابع بهینه در محدوده‌ی ذکر شده ۷۸ درصد کاهش داشته است.

داده‌های کنترل که شامل ۲۰ درصد داده‌های مربوط به ۷۸ تیر با انتخاب تصادفی می‌باشند برای بررسی دقت پارامترهای بهینه به دست آمده، به کار برده می‌شوند. میانگین لگاریتم طبیعی نسبت خیز



شکل ۹. مقایسه نمودارهای بار - خیز تحلیلی (با استفاده از مدل‌های اولیه و بهینه) با منحنی آزمایشگاهی برای تیرهای کنترل
 Fig. 9. comparison of analytical load-deflection curves (using initial and optimized models) with Experimental curve for control beams

این شکل منحنی بار-خیز آزمایشگاهی و منحنی‌های تحلیلی با مدل اولیه و مدل بهینه شده برای هر تیر در محدوده‌ی بهره برداری ترسیم شده‌اند. قابل ذکر است که دقت مدل به دست آمده در محاسبه‌ی ظرفیت نهایی مقطع با روش تحلیل غیرخطی لایه‌ای، بی تأثیر است زیرا در محاسبات حالت حدی، بتن در ناحیه‌ی کششی مقطع، ترک خورده در نظر گرفته می‌شود و در همه‌ی مدل‌های سخت شوندگی کششی، تنش کششی میانگین بتن بعد از کرنش ترک خوردگی صفر است.

همان‌طور که از نمودارهای بار - تغییر مکان نشان داده شده در شکل ۹ مشخص است تقریباً در همه این نمودارها شیب اولیه

در جدول ۴ نتایج به دست آمده از مدل ارائه شده توسط نایال و رشید [۶] نیز نشان داده شده‌اند. با توجه به اینکه مدل ارائه شده توسط آن‌ها با بررسی تیرهای بتنی مسلح شده با میلگردهای FRP به دست آمده است، می‌توان نتیجه گرفت که مدل به دست آمده در این پژوهش نه تنها نسبت به مدل شو و جو [۹] که حاصل از بررسی بتن مسلح شده با میلگردهای فولادی است بلکه نسبت به مدل حاصل از بررسی تیرهای بتنی مسلح شده با میلگردهای FRP نیز عملکرد بهتری دارد.

منحنی‌های بار - خیز مربوط به نه تیر کنترل نیز که در محاسبه پارامترهای مدل بهینه شرکت نداشته‌اند در شکل ۷ ترسیم شده‌اند. در

مدول الاستیسیته ۴۲، ۳۸ و ۳۸ مگاپاسکال هستند، مدل بهینه اثر سخت‌شوندگی کششی را کم‌تر از واقعیت در نظر می‌گیرد زیرا نمودار به دست آمده با مدل بهینه در ناحیه پس از ترک خوردگی در یک بار یکسان خیزهای بیش‌تری به دست می‌دهد. اما در تیرهای D و B۳ که به ترتیب دارای مسلح‌کننده‌ی GFRP با مدول الاستیسیته ۳۵/۶۳ و ۴۰ مگاپاسکال هستند، مدل بهینه تأثیر سخت‌شوندگی را بیش‌تر از واقعیت تخمین می‌زند زیرا نمودار به دست آمده با مدل بهینه در ناحیه پس از ترک خوردگی در یک بار یکسان خیزهای کم‌تری نسبت به نمودار آزمایشگاهی به دست می‌دهد و در تیر N-۲۱۲-D۱ که دارای میلگردهای GFRP با مدول الاستیسیته ۶۴/۶۳ گیگاپاسکال است اثر سخت‌شوندگی کششی نزدیک به واقعیت تخمین زده می‌شود. بنابراین نمی‌توان بدون بررسی‌های بیش‌تر درباره رابطه اثر سخت‌شوندگی کششی با مدول الاستیسیته میلگردهای GFRP در این تیرها اظهار نظر نمود.

در تیر ۱(C۱)-CFRP (۴) که دارای مسلح‌کننده‌ی CFRP با مدول الاستیسیته ۱۱۴ گیگاپاسکال است مدل بهینه به دست آمده اثر سخت‌شوندگی را نزدیک به واقعیت تخمین می‌زند اما در مورد تیر BC۲ که دارای مسلح‌کننده‌ی CFRP با مدول الاستیسیته ۱۳۲ گیگاپاسکال است اثر سخت‌شوندگی را نزدیک به واقعیت تخمین می‌زند.

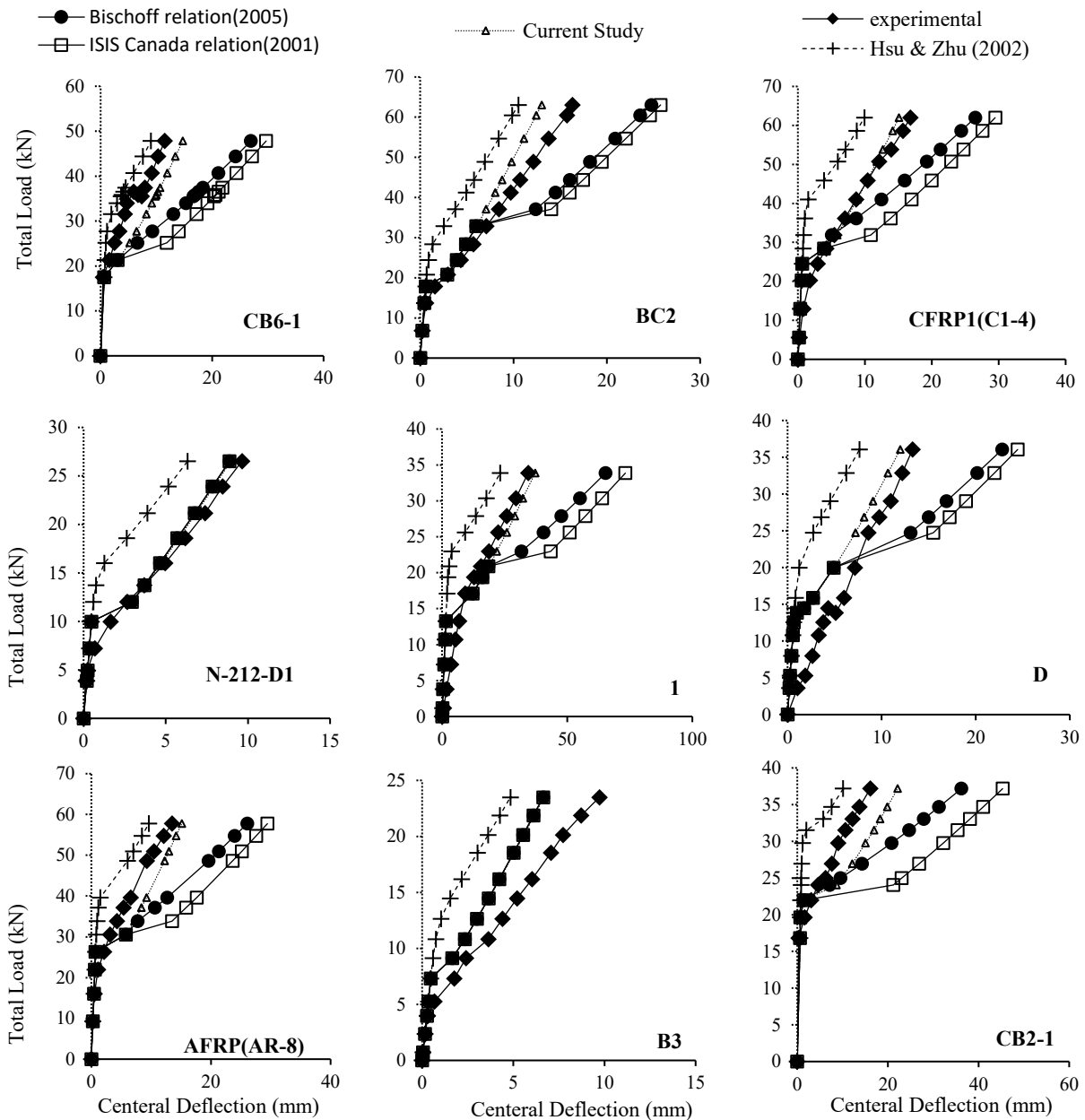
در جدول ۴، نتایج آماری علاوه بر داده‌های کنترل برای تیرهای کنترل به دست آمده‌اند. از بررسی و مقایسه نتایج می‌توان دریافت که برای تیرهای کنترل نیز میانگین لگاریتم طبیعی نسبت نتایج آزمایشگاهی به محاسباتی که مقدار مطلوب آن صفر است با کاربرد مدل بهینه کاهش قابل توجهی در حدود ۸۰ درصد داشته است و مقدار میانگین نسبت خیز آزمایشگاهی به محاسباتی به عدد ۱ نزدیک شده‌است. علاوه بر این مقایسه نتایج آماری برای داده‌های کنترل و تیرهای کنترل نشان می‌دهد که نتایج حاصل از تیرهای کنترل نسبت به داده‌های کنترل به مقادیر ایده‌آل نزدیک‌تر هستند و علت این موضوع را می‌توان به گستردگی مشخصات تیرهای در نظر گرفته شده برای استخراج داده‌های کنترل (از داده‌های ۷۸ تیر) نسبت به تیرهای کنترل (نه تیر) در نظر گرفت که در محاسبه نتایج مربوط به داده‌های کنترل، بررسی‌ها بر روی ۱۹۲ داده آزمایشگاهی که به صورت تصادفی از داده‌های نمودارهای بار - خیز ۷۸ تیر برداشت شده‌اند، صورت

نمودار با شیب نمودارهای آزمایشگاهی یکسان است که نشان می‌دهد سختی مقطع ترک نخورده مطابق نتایج آزمایشگاهی محاسبه می‌شود. ناحیه‌ی شکست نمودارهای محاسباتی مربوط به ترک خوردگی تیر است، همان‌طور که در این نمودارها مشاهده می‌شود بار ترک خوردگی محاسبه شده برای تیرها بیش‌تر از بار ترک خوردگی آزمایشگاهی است که یکی از دلایل این مسئله خطاهای موجود در رابطه لنگر ترک خوردگی است. از جمله دلایل این خطا، در نظر نگرفتن وزن تیر در محاسبه‌ی لنگر ترک خوردگی محاسباتی است. عامل دیگری که منجر به افزایش خطای لنگر محاسباتی می‌شود، رابطه تنش ترک خوردگی بتن بر حسب مقاومت مشخصه فشاری بتن است. برای همسان‌سازی نتایج محاسباتی برای همه‌ی تیرها در این تحقیق از رابطه (۸) برای محاسبه تنش ترک خوردگی بتن استفاده شده است [۲۴] و تنش ترک خوردگی آزمایشگاهی گزارش شده برای بتن برخی تیرها در محاسبات به کار نرفته است.

$$f_r = 0.623\sqrt{f'_c} \quad (8)$$

در بیش‌تر موارد، تنش ترک خوردگی محاسبه شده با این رابطه بیش‌تر از نتایج آزمایشگاهی گزارش شده برای بتن است، بر این اساس لنگر ترک خوردگی محاسبه شده با تنش ترک خوردگی محاسباتی که با آن رابطه خطی مستقیم دارد، بیش‌تر از واقعیت به دست می‌آید. در نواحی انتهایی اختلاف مقادیر خیز محاسباتی و آزمایشگاهی کاهش می‌یابد. علت این کاهش را می‌توان به تابع خطای در نظر گرفته شده برای انجام بهینه‌سازی نسبت داد زیرا در تابع خطای در نظر گرفته شده (رابطه ۶)، با اعمال توان ۲ به تفاضل مقدار خیز محاسباتی و آزمایشگاهی مقادیر بزرگ‌تر این تفاضل را که عموماً در مقادیر بزرگ‌تر خیز رخ می‌دهد با تأثیر بیش‌تری در نظر می‌گیرد. با توجه به تأثیر بیش‌تر مقادیر بزرگ‌تر تفاضل در تابع خطا، الگوریتم بهینه‌ساز مقادیر پارامترهای مدل را به گونه‌ای محاسبه می‌کند که نمودار بار - خیز محاسباتی در نواحی انتهایی به نمودار آزمایشگاهی نزدیک شود.

نکته‌ی دیگری که می‌توان از نمودارهای ترسیم شده در شکل ۹ به دست آورد دقت پیش‌بینی مدل سخت‌شوندگی کششی بهینه به دست آمده برای انواع مختلف مسلح‌کننده‌ها است. در تیرهای ۱-CB۶ و ۱-CB۲ که به ترتیب دارای مسلح‌کننده‌ی GFRP با



شکل ۱۰. مقایسه نمودار بار - خیز آزمایشگاهی با نمودارهای حاصل از تحلیلی غیر خطی و نمودارهای حاصل از روابط تحلیلی
Fig. 10. comparison of Experimental load-deflection curve with curves obtained from nonlinear analysis and closed form relations for control beams

آیین نامه‌ای نیز مقایسه نمود. برای این منظور منحنی آزمایشگاهی، منحنی های محاسباتی با مدل اولیه و مدل بهینه به همراه نتایج حاصل از رابطه تحلیلی ارائه شده در آیین نامه طراحی کانادا (ISIS) [۲۵] و رابطه تحلیلی بیشف^۱ [۲۶] برای تیرهای کنترل در شکل ۱۰ ترسیم شده‌اند.

بررسی شکل ۱۰ نشان می‌دهد که برای همه‌ی این تیرها، هر دو رابطه تحلیلی در نظر گرفته شده مقدار خیز را بیش‌تر از واقعیت

می‌گیرد اما نتایج مربوط به تیرهای کنترل، براساس داده‌های مربوط به نه تیر می‌باشند که تیرها به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند و واضح است که معادل سازی اثر سخت شوندگی برای ۷۸ تیر با یک مدل، خطای بیش‌تری نسبت به معادل سازی این اثر برای نه تیر ایجاد می‌کند به علاوه این گستردگی احتمال حضور داده‌هایی با خطای زیاد را که منجر به افزایش خطای میانگین گزارش شده در این جدول می‌شوند بالا می‌برد. نمودارهای بار - خیز حاصل از تحلیل غیرخطی با مدل اولیه و مدل بهینه را علاوه بر نتایج آزمایشگاهی می‌توان با روابط

1 Bischoff

حدود ۷۸ درصد کاهش داشته است.

• میانگین لگاریتم طبیعی نسبت خیز آزمایشگاهی به محاسباتی داده‌های کنترل که در صورت تطابق کامل نتایج محاسباتی و آزمایشگاهی صفر می‌شود برای مدل اولیه ۱/۰۴۵۷ و برای مدل بهینه ۰/۲۶۶۸ به دست آمده است که نشان می‌دهد در مدل بهینه این مقدار به میزان ۷۴ درصد کاهش یافته است. مقدار پارامتر ذکر شده با کاربرد مدل بهینه برای تیرهای کنترل نیز کاهش قابل توجهی در حدود ۸۰ درصد داشته است.

• هم مدل اولیه و هم مدل بهینه، برای داده‌های کنترل، به طور میانگین نتایج غیرمحافظة کارانه‌ای ارائه می‌دهند زیرا میانگین نسبت خیز آزمایشگاهی به محاسباتی برای آن‌ها بزرگ‌تر از یک است.

• مقایسه منحنی‌های بار-خیز آزمایشگاهی و منحنی‌های بار-خیز تحلیلی نشان می‌دهد که تقریباً سختی مقطع ترک نخورده که معادل شیب اولیه نمودار است، مطابق نتایج آزمایشگاهی محاسبه می‌شود اما بار ترک‌خوردگی محاسبه شده بیش از بار ترک‌خوردگی آزمایشگاهی است که ناشی از خطای رابطه تنش ترک خوردگی بتن در محاسبات لنگر ترک خوردگی و نیز صرف نظر نمودن از وزن بتن در محاسبات است.

• مقایسه منحنی‌های بار-خیز آزمایشگاهی و تحلیلی با منحنی‌های به دست آمده از دو رابطه تحلیلی نشان می‌دهد که برای همگی تیرها، هر دو رابطه تحلیلی در نظر گرفته شده سختی عضو را پس از ترک‌خوردگی کم‌تر از واقعیت تخمین می‌زنند یا به عبارتی اثر سخت‌شوندگی کششی را کم‌تر از واقعیت در نظر می‌گیرند و محافظه‌کارانه هستند اما این روابط نسبت به نتایج تحلیل غیرخطی خطای بیش‌تری دارند که علت آن نیز مدل‌سازی دقیق‌تر رفتار تنش-کرنش مصالح در تحلیل غیرخطی است.

مراجع

- [1] P. Ng, J. Lam, A. Kwan, Effects of concrete-to-reinforcement bond and loading conditions on tension stiffening, *Procedia engineering*, 14 (2011) 704-714.
- [2] R.S. Stramandinoli, H.L. La Rovere, An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members, *Engineering Structures*, 30(7) (2008) 2069-2080.

تخمین می‌زنند یا به عبارتی سختی عضو را پس از ترک‌خوردگی کم‌تر از واقعیت تخمین می‌زنند و محافظه‌کارانه هستند اما این روابط دارای خطای بیش‌تری نسبت به نتایج حاصل از تحلیل غیرخطی با مدل‌های سخت‌شوندگی کششی می‌باشند که علت این مسئله نیز واضح است زیرا در تحلیل غیرخطی، رابطه غیرخطی دقیق‌تری برای رفتار تنش - کرنش مصالح در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود که رابطه‌ی آیین‌نامه طراحی کانادا (ISIS) [۲۵] مقادیر خیز بیش‌تری نسبت به رابطه ارائه شده توسط بیشف [۲۶] به دست می‌آورد و خطای رابطه‌ی آیین‌نامه طراحی کانادا (ISIS) [۲۵] بیش‌تر از رابطه‌ی ارائه شده توسط بیشف [۲۶] است. بنابراین به طور کلی نتایج حاصل از روابط تحلیلی ارائه شده دارای دقت کم‌تری نسبت به نتایج حاصل از غیرخطی می‌باشند، هم‌چنین نتایج روابط تحلیلی برخلاف تحلیل غیرخطی محافظه‌کارانه‌اند.

۸- نتیجه گیری

اثر سخت‌شوندگی کششی که ناشی از انتقال تنش بین مسلح‌کننده‌ها و بتن در فاصله‌ی بین ترک‌ها می‌باشد را می‌توان با رابطه تنش - کرنش میانگین بتن بعد از ترک‌خوردگی معادل‌سازی نمود که در تحلیل لایه‌ای مقطع تیر و یا مدل‌سازی خرپا به کار می‌رود. در این تحقیق با تحلیل لایه‌ای مقطع برای تعدادی تیر تحت خمش چهار نقطه‌ای و مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی خیز در محدوده‌ی بهره‌برداری، مدل سخت‌شوندگی کششی ارائه شده توسط شو و جو در سال ۲۰۰۲ با استفاده از بهینه‌سازی با الگوریتم ژنتیک اصلاح می‌شود. از مجموع ۸۷ تیر، نه تیر (تیرهای کنترل) به صورت تصادفی انتخاب شده و برای کنترل نتایج، در محاسبات یافتن مدل بهینه به کار نمی‌روند. حدود ۲۰ درصد از مجموعه داده‌های مربوط به ۷۸ تیر باقی‌مانده (۱۹۲ نقطه از ۹۷۶ نقطه) نیز تحت عنوان داده‌های کنترل و به صورت تصادفی برای کنترل نتایج در نظر گرفته شده و در بهینه‌سازی پارامترهای مدل دخالت داده نمی‌شوند. بررسی‌ها نتایج زیر را ارائه می‌دهد:

• مقایسه مدل اولیه و مدل بهینه شده نشان می‌دهد که مدل بهینه اثر سخت‌شوندگی کششی کم‌تری را برای مسلح‌کننده‌های FRP پیش‌بینی می‌کند، می‌توان نشان داد که مقدار متوسط تابع بهینه نسبت به تابع اولیه، در محدوده‌ی بعد از ترک‌خوردگی، در

- beams reinforced with GFRP or steel bars and fibers, *Composites Part B: Engineering*, 50 (2013) 158-170.
- [14] M. El Sayed, T. El Maaddawy, Analytical model for prediction of load capacity of RC columns confined with CFRP under uniaxial and biaxial eccentric loading, *Materials and structures*, 44(1) (2011) 299-311.
- [15] T.H. Almusallam, Analytical prediction of flexural behavior of concrete beams reinforced by FRP bars, *Journal of Composite Materials*, 31(7) (1997) 640-657.
- [16] A.C.I.C. 440, Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with FRP Bars: ACI 440.1 R-06, in, American Concrete Institute, 2006.
- [17] C. Kassem, A.S. Farghaly, B. Benmokrane, Evaluation of flexural behavior and serviceability performance of concrete beams reinforced with FRP bars, *Journal of Composites for Construction*, 15(5) (2011) 682-695.
- [18] S. Khalfallah, Explaining the riddle of effective moment of inertia models for FRP concrete beams, *International Journal of Structural Engineering*, 2(1) (2011) 23-34.
- [19] R. Masmoudi, M. Theriault, B. Benmokrane, Flexural behavior of concrete beams reinforced with deformed fiber reinforced plastic reinforcing rods, *Structural Journal*, 95(6) (1998) 665-676.
- [20] S.H. Alsayed, Flexural behaviour of concrete beams reinforced with GFRP bars, *Cement and Concrete Composites*, 20(1) (1998) 1-11.
- [21] M. Theriault, B. Benmokrane, Effects of FRP reinforcement ratio and concrete strength on flexural behavior of concrete beams, *Journal of composites for construction*, 2(1) (1998) 7-16.
- [22] C. Barris, L. Torres, J. Comas, C. Mias, Cracking and deflections in GFRP RC beams: an experimental study, *Composites Part B: Engineering*, 55 (2013) 580-590.
- [23] S.R. Mousavi, M.R. Esfahani, Effective moment of inertia prediction of FRP-reinforced concrete beams based on experimental results, *Journal of Composites for Construction*, 16(5) (2012) 490-498.
- [24] A.C. Institute, Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-14): Commentary on
- [3] S. Khalfallah, Tension stiffening model for nonlinear analysis of GFRP-RC members, *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering*, 6(4) (2013) 269-277.
- [4] G. Kaklauskas, V. Gribniak, D. Bacinskas, P. Vainiunas, Shrinkage influence on tension stiffening in concrete members, *Engineering Structures*, 31(6) (2009) 1305-1312.
- [5] P.H. Bischoff, R. Paixao, Tension stiffening and cracking of concrete reinforced with glass fiber reinforced polymer (GFRP) bars, *Canadian Journal of Civil Engineering*, 31(4) (2004) 579-588.
- [6] R. Nayal, H.A. Rasheed, Tension stiffening model for concrete beams reinforced with steel and FRP bars, *Journal of Materials in Civil Engineering*, 18(6) (2006) 831-841.
- [7] F.J. Vecchio, M.P. Collins, The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, *ACI J.*, 83(2) (1986) 219-231.
- [8] P.C. Miglietta, G. Grasselli, E.C. Bentz, Finite/discrete element model of tension stiffening in GFRP reinforced concrete, *Engineering Structures*, 111 (2016) 494-504.
- [9] T.T. Hsu, R.R. Zhu, Softened membrane model for reinforced concrete elements in shear, *Structural Journal*, 99(4) (2002) 460-469.
- [10] G. Kaklauskas, V. Tamulenas, M.F. Bado, D. Bacinskas, Shrinkage-free tension stiffening law for various concrete grades, *Construction and Building Materials*, 189 (2018) 736-744.
- [11] S. Khalfallah, D. Guerdouh, Tension stiffening approach in concrete of tensioned members, *International Journal of Advanced Structural Engineering*, 6(1) (2014) 2.
- [12] A., Kamali, "Effect of tension stiffening on the deflection of flexural FRP-reinforced concrete members". MS Thesis, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Feb. (2012), See also URL <http://www.usb.ac.ir>.
- [13] V. Gribniak, G. Kaklauskas, L. Torres, A. Daniunas, E. Timinskas, E. Gudonis, Comparative analysis of deformations and tension-stiffening in concrete

- Winnipeg Manitoba.
- [26] P.H. Bischoff, Reevaluation of deflection prediction for concrete beams reinforced with steel and fiber reinforced polymer bars, *Journal of structural engineering*, 131(5) (2005) 752-767
- Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318R-14): an ACI Report, American Concrete Institute. ACI, 2014.
- [25] ISIS Canada, Reinforcing concrete structures with fibre reinforced polymers, *Design Manual*,3, (2001),

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Kamali, S.R. Mousavi, M.R. Ghasemi, *Optimization of concrete tension stiffening model based on layered nonlinear analysis of FRP – RC beams*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 52(11) (2021) 2779-2794.

DOI: [10.22060/ceej.2019.16440.6229](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.16440.6229)



