



Solution of the Isotropic Heat Equation Using the Finite Volume Monte Carlo Method

H. Naeimi^{1*}, F. Kowsary²

¹ Department of Mechanical Engineering, University of Bojnord, Bojnord, North Khorasan, Iran

² School of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

ABSTRACT: The solution of the heat diffusion equation in most practical applications involving complex geometry, thermophysical properties, and boundary conditions is not simply possible and there are some limitations for available numerical solutions. In this research, the finite volume Monte Carlo method was used for the solution of the isotropic heat equation due to two intrinsic capabilities of the finite volume method; first, each cell is energy conserved and second, the grid transformation is not necessary for complex geometries. The Monte Carlo method is a statistical approach based on the physical simulation of the problem capable to solve heat equation with any degree of complexity. First, a simple problem was investigated for validation of the method by comparing results with the analytical solution. Second, the prediction performance of the finite volume Monte Carlo method was evaluated in a problem with complex geometry, varying properties, and boundary conditions. Finally, the performance of the finite volume Monte Carlo method was investigated in estimating the temperature distribution of a three-layer body with different thermal conductivities and convection boundary condition. In all of the considered test cases, the predicted results were in good agreement with analytical and computational fluid dynamics solutions. It was also indicated that for a relatively small number of particles, it is possible to achieve acceptable accuracy with a low computational cost.

Review History:

Received: 2019-05-04

Revised: 2019-09-29

Accepted: 2019-11-05

Available Online: 2019-11-29

Keywords:

Monte Carlo

Finite volume

Diffusion heat equation

Conduction

Isotropic material

1. INTRODUCTION

The Monte Carlo method is an efficient approach for the simulation of the conduction heat transfer [1-3]. In most of the practical applications including 3D geometries with arbitrary shaped boundaries, variable thermophysical properties, and complicated boundary conditions using the finite difference scheme in the derivation of the Monte Carlo form of the heat equation is restricted, especially when an unstructured mesh is superposed over the domain. Using the finite volume discretization technique will expand the scope of the Monte Carlo method in the analysis of real-world conduction problems. In the current study, the Finite Volume Monte Carlo (FVMC) method [4] is used in three problems with different levels of complexity to assess its performance under difficult conditions.

2. METHODOLOGY

The FVMC form of the heat equation may be derived by first integrating over a control volume and then applying the Green's theorem and finally using the central difference discretization scheme for the resulting first-order derivatives on each of the cell faces [4]. The final FVMC form of the heat equation may be written as:

$$T_P = F_E T_E + F_W T_W + F_N T_N + F_S T_S + F_T T_T + F_B T_B + S_P \quad (1)$$

*Corresponding author's email: h.naeimi@ub.ac.ir

The FVMC method is started by releasing N particles from each point in the solution region and tracing them from cell to cell until they are absorbed by one of the domain boundaries. At each step, the random walk direction is determined by generating a uniformly distributed random number, R , and following relations

$$\begin{aligned} P \rightarrow E & \text{ if } 0 < R < F_E \\ P \rightarrow W & \text{ if } F_E < R < F_E + F_W \\ P \rightarrow N & \text{ if } F_E + F_W < R < F_E + F_W + F_N \\ P \rightarrow S & \text{ if } F_E + F_W + F_N < R < F_E + F_W + F_N + F_S \\ P \rightarrow T & \text{ if } F_E + F_W + F_N + F_S < R < F_E + F_W + F_N + F_S + F_T \\ P \rightarrow B & \text{ Otherwise} \end{aligned} \quad (2)$$

Now the temperature of node P is calculated from:

$$T_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_C(i) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i-1} S_P(x_j, y_j, z_j) \quad (3)$$

3. RESULTS AND DISCUSSION

3.1 Unit cube without heat generation

In this section, the temperature profile on the midline of



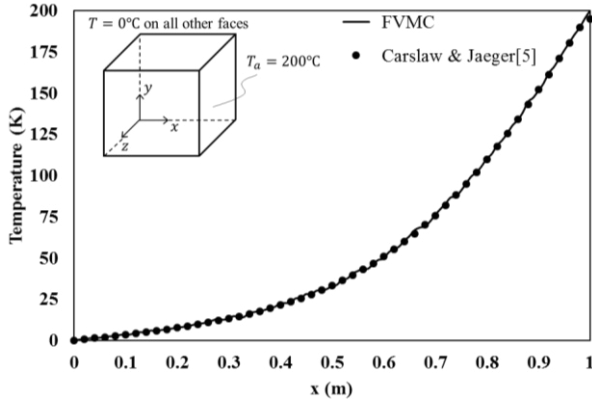


Fig. 1. Comparison of the temperature profiles on the midline of the unit cube

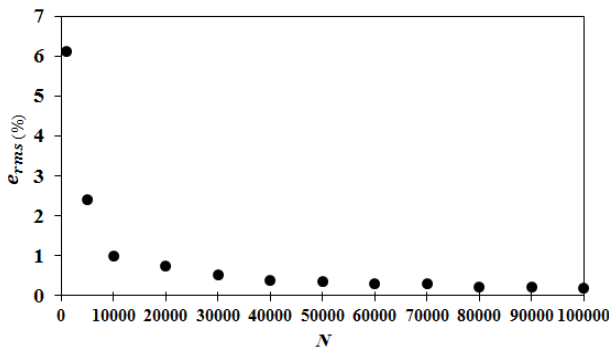


Fig. 2. e_{rms} of the FVMC method on the $z=0.5$ m plane as a function of N

a unit cube with boundary conditions as shown in Fig. 1, is calculated by the FVMC method and the results are compared with the exact data from the Carslaw and Jaeger [5] solution. As shown in Fig. 1, the results are consistent together which confirms the accuracy of the FVMC method.

The relative root mean square error, e_{rms} , of the estimated results on the $z = 0.5$ m plane with respect to the total number of investigated particles from each point, N , is plotted in Fig. 2. It is clear from Fig. 2 that by using a relatively small number of particles ($N = 10000$) a very good accuracy is achieved.

3.2 Spherical cavity in a cube with variable k

In order to investigate the robustness of the proposed method to handle problems with complicated geometries, the FVMC method was used to calculate the temperature distribution of a unit cube with a hole inside with a radius of 0.25 m. The temperature of the outside surfaces of the cube is assumed zero where a constant heat flux of $q_s'' = 10000$ W/m² is applied to the surface of the hole. The thermal conductivity of the medium and the heat source are defined as:

$$k = 10 \exp(x^2) \exp(y^2) \exp(z^2) \quad (4)$$

$$g = 100000 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z) \quad (5)$$

The temperature distribution on the radial line with an

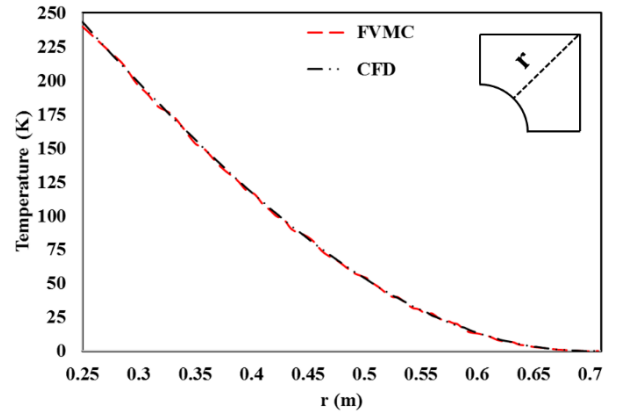


Fig. 3. Comparison of the temperature profiles on the radial line with an angle of 45 degrees

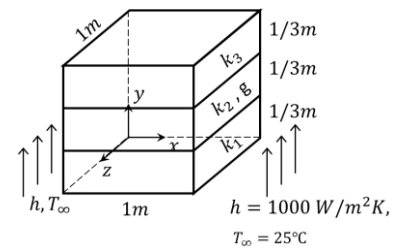


Fig. 4. Geometry and boundary conditions of the three-layered cube

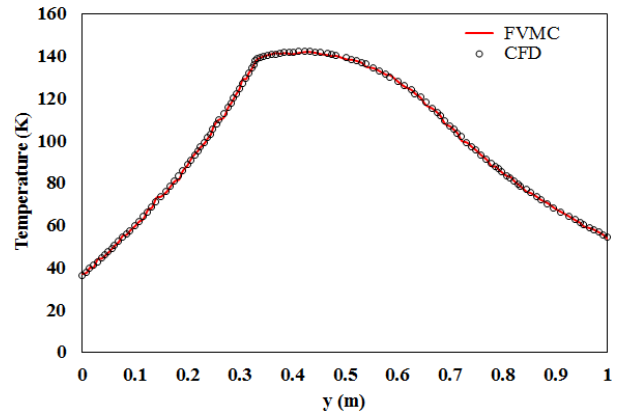


Fig. 5. Comparison of the temperature profiles on the $y = 0.5$ m line

angle of 45 degrees was compared with the computational fluid dynamics (CFD) solution in Figure 3. As it is evident from this Figure, the predicted temperatures from the FVMC method are fully consistent with those from the CFD method.

3.3 Three-layered cube

Consider a three-layered cube with different thermal conductivities as $k_1 = 50$ W/mK, $k_2 = 300$ W/mK, and $k_3 = 250$ W/mK where a uniform heat source $g = 500000$ W/m³ is placed within the middle layer of the body, as shown in Fig. 4. The temperature distribution on the $y = 0.5$ m was compared with the CFD solution in Fig. 5 which are consistent together.

Table 1. e_{rms} of the FVMC method (%)

First problem	Second problem	Third problem
0.63	0.82	0.91

4. CONCLUSIONS

Main conclusions of the paper are:

- The FVMC method can predict the temperature distribution in all of the considered test cases with any levels of complexity.
- The calculated e_{rms} for all of the three problems for $N = 50000$ particles are given in Table 1. As evident from this Table, the predictive performance of the FVMC is good even in complicated conditions.
- The FVMC method is quite suitable for the inverse heat conduction problems that only need to calculate the temperature at one or more points.
- It may be better to use the FVMC method in the problems with unstructured meshes that other numerical techniques

are incapable of solving the problem.

REFERENCES

- [1] F. Kowsary, M. Arabi, Monte Carlo solution of anisotropic heat conduction, International Communications in Heat and Mass Transfer, 26(8) (1999) 1163-1173.
- [2] A. Haji-Sheikh, E.M. Sparrow, The Solution of Heat Conduction Problems by Probability Methods, Journal of Heat Transfer, Transaction of ASME, (1967) 121-130.
- [3] B.T. Wong, M. Francoeur, M. Pinar Mengüç, A Monte Carlo simulation for phonon transport within silicon structures at nanoscales with heat generation, International Journal of Heat and Mass Transfer, 54 (2011) 1825-1838.
- [4] H. Naeimi, F. Kowsary, Finite Volume Monte Carlo (FVMC) method for the analysis of conduction heat transfer, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 41 (2019) 260.
- [5] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, Oxford Science Publications, 1986.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

H. Naeimi, F. Kowsari, Solution of the Isotropic Heat Diffusion Equation using the Finite Volume Monte Carlo Method, Amirkabir J. Mech Eng., 53(Special Issue 1) (2021) 117-120.

DOI: 10.22060/mej.2019.16275.6318





حل معادله پخش گرمای همسانگرد به روش مونت کارلوی حجم محدود

هومن نعیمی^{۱*}، فرشاد کوثری^۲

^۱ گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران
^۲ دانشکده مهندسی مکانیک، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸-۰۲-۱۴
بازنگری: ۱۳۹۸-۰۷-۰۷
پذیرش: ۱۳۹۸-۰۸-۱۴
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۹-۰۸

کلمات کلیدی:

مونت کارلو
حجم محدود
معادله پخش گرما
رسانش
مواد همسانگرد

خلاصه: حل معادله پخش گرما در بسیاری از کاربردهای واقعی انتقال گرمای رسانشی مشتمل بر هندسه، خواص ترموفیزیکی و شرایط مرزی پیچیده به سادگی امکان پذیر نبوده و روش‌های عددی موجود، هر یک با محدودیت‌هایی مواجه هستند. در این پژوهش روش مونت کارلوی حجم محدود برای حل معادله پخش گرمای همسانگرد با توجه به دو قابلیت ذاتی روش حجم محدود یکی ارضای بقای انرژی در هر سلول شبکه و دیگری عدم نیاز به تغییر مختصات در هندسه‌های پیچیده معرفی شده است. روش مونت کارلوی حجم محدود به عنوان یک ابزار محاسباتی آماری مبتنی بر شبیه‌سازی فیزیکی با قابلیت حل پخش گرما با هر میزانی از پیچیدگی، در سه مساله با سطوح دشواری متفاوت مورد استفاده قرار گرفته است. در ابتدا از یک مساله ساده برای اعتبارسنجی روش مونت کارلوی حجم محدود از طریق مقایسه نتایج با حل تحلیلی استفاده گردید. سپس عملکرد پیش‌بینی روش پیشنهادی در مساله‌ای با هندسه پیچیده، خواص متغیر و شرایط مرزی گوناگون مورد ارزیابی قرار گرفت. در پایان نیز به بررسی عملکرد روش مونت کارلوی حجم محدود در تخمین توزیع دما در یک جسم سه‌لایه با ضرایب رسانش متفاوت و شرط مرزی جابجایی پرداخته شد. در تمامی موارد نتایج محاسبه شده توسط روش مونت کارلوی حجم محدود انطباق بسیار خوبی با نتایج حل تحلیلی و روش دینامیک سیالات محاسباتی بروز دادند و نشان داده شد که به ازای تعداد نسبتاً کمی از ذرات و با هزینه محاسباتی پایین می‌توان به دقت قابل قبولی در روش مونت کارلوی حجم محدود دست یافت.

۱- مقدمه

غیرممکن نباشد با دشواری همراه است. روش‌های عددی گوناگونی برای حل معادله پخش گرما مورد استفاده قرار گرفته‌اند که از آن جمله می‌توان به روش حجم محدود [۴]، روش تفاضل محدود [۵]، روش اغتشاش تصادفی [۶] و روش انتگرال لاپلاس [۷] اشاره نمود. این روش‌های عددی عمدتاً در مسایل ساده نظیر هندسه‌های ساده با خواص فیزیکی ثابت به کار برده شده‌اند که دما را در کل دامنه حل به صورت هم‌زمان محاسبه می‌کنند. دو روش اغتشاش تصادفی و انتگرال لاپلاس خیلی سراسر نبوده و کدنویسی آن‌ها برای تحلیل عددی مسایل بسیار دشوار است.

شبیه‌سازی انتقال گرمای رسانشی مستلزم حل معادله پخش گرما در دامنه محاسباتی است که در حالت کلی دارای هندسه سه‌بعدی با شکل مرز دلخواه است. همچنین خواص ترموفیزیکی ماده به کار رفته در محیط نیز می‌تواند متغیر بوده و ممکن است شرایط مرزی پیچیده در مرزهای هندسه برقرار باشند. بنابراین حل معادله پخش گرما در بسیاری از کاربردهای واقعی و مهندسی نظیر عایق‌های گرمایی چندلایه، مواد مرکب و مواد هدفمند از اهمیت به‌سزایی برخوردار است [۱-۳]. این کاربردها اغلب دارای هندسه، خواص یا شرایط مرزی پیچیده هستند و محاسبه حل تحلیلی آن‌ها اگر که

1 ^۲ Stochastic Perturbation

2 ^۳ Laplace Integration



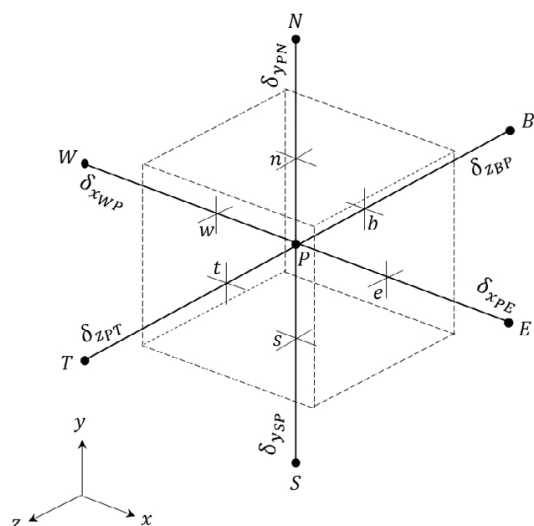
روش مونت کارلو در حل معادله پخش گرما مبتنی بر شبیه سازی آماری فرایند فیزیکی پخش گرما در دامنه حل است که نخستین بار توسط حاجی-شیخ و اسپارو [۸] برای حل مسایل رسانش گرمایی به کار گرفته شد. در ابتدای معرفی روش مونت کارلو، رسیدن به دقت مناسب مستلزم صرف زمان بسیار طولانی در مقایسه با دیگر روش های عددی بود. اما در سال های اخیر به دلیل رشد چشمگیر سرعت پردازش، کاهش قیمت رایانه های سریع و افزایش ظرفیت ذخیره سازی اطلاعات، روش مونت کارلو از یک ابزار با هزینه محاسباتی بالا به یک روش مقرون به صرفه تبدیل شده است. کوثری و عربی [۹] با استفاده از تغییر مختصات مناسب، شکل بی بعد معادله گرما را به دست آورده و توزیع دما را برای یک جسم ناهمسانگرد دوبعدی با استفاده از شکل تفاضل محدود روش مونت کارلو محاسبه نمودند و نشان دادند که با انتخاب اندازه مناسب برای شبکه، کاهش قابل ملاحظه ای در زمان محاسباتی حاصل می گردد. گریگوریو [۱۰] یک روش مونت کارلو مبتنی بر فرایند ایتو^۱ را به منظور حل معادله گرمای گذرا و پایدار توسعه داد که هر دو نوع شرط مرزی نیومن و دیریکله را بدون نیاز به گسسته سازی دامنه حل پوشش می داد. روش مونت کارلو توسط ونگ و همکاران [۱۱] در شبیه سازی تبادله فونون در مقیاس نانو در درون ساختارهای سیلیکونی به کار گرفته شد که در معرض منابع گرمایی متفاوت قرار داشتند. در پژوهش مزبور نشان داده شد که در صورت در نظر گرفتن عبارت تولید گرمای خارجی در معادله گرما، ممکن است که توزیع دما کمتر از مقدار واقعی پیش بینی گردد. در پژوهش جدیدی الگوریتم مونت کارلو مبتنی بر تابع گرین [۱۲] برای حل معادله هلمهولتز یک بعدی با شرایط مرزی نیومن و مختلط به کار برده شد و صحت گذاری نتایج حاصل از الگوریتم مزبور با حل تحلیلی انجام گرفت. ویژگی اصلی روش پیشنهادی حذف استفاده از مرزهای انعکاسی از طریق استفاده از توابع گرین جدید است که شرایط مرزی مساله را شبیه سازی می کند. روش مونت کارلو تقابلی بهینه مبتنی بر انتشار^۲ توسط ژنگ و همکاران [۱۳] توسعه داده شد. در این روش بسامد تابع توزیع با تابع توزیع مرتبط با دمای بیشینه در داخل دامنه حل جایگزین گردید. سپس تابع توزیع انتشار واقعی در یک سلول در هر دمایی با افزودن ضریب اصلاح به هر ذره پرتابی به دست آمد. نتایج حاصل از روش مورد نظر با داده های تحلیلی حاصل

از مسایل شاخص مقایسه گردید. اخیراً به منظور افزایش کارایی شبیه سازی در مسایل انتقال گرمای تابشی، الگوریتم مونت کارلو ضمنی اصلاح شده [۱۴] معرفی گردیده است. در الگوریتم اصلاح شده، ذرات با بسامدهای بیشتر از بسامد تفکیک از طریق روش مونت کارلو ضمنی استاندارد انتقال می یابند در حالی که باقی ذرات توسط روش حرکت تصادفی^۳ انتقال داده می شوند. روش جدید زمان محاسباتی را در مقایسه با روش استاندارد به میزان ۲ تا ۴ برابر و در مقایسه با روش مونت کارلو ضمنی استاندارد به میزان ۳ تا ۶ برابر کاهش داد. از روش مونت کارلو برای شبیه سازی خواص ترموفیزیکی آلیاژهای مایع کبالت-گادولینیوم نیز استفاده شده است [۱۵]. نتایج این پژوهش نشان داد که با افزایش میزان گادولینیوم، کشش سطحی شبیه سازی شده در دمای ذوب کاهش می یابد و این در حالی است که ضریب دمای کشش سطحی شبیه سازی شده با افزایش همراه بوده است. روند تغییر ثابت پخش جسم حل شونده با میزان گادولینیوم به صورت تابع درجه دو به دست آمد و همچنین محاسبات نشان داد که سیالیت مایع با افزایش میزان گادولینیوم افزایش می یابد. به منظور بیان کمی خطاهای روش مونت کارلو مستقیم یک روش اعتبار بخشی مبتنی بر قوانین فیزیکی بقا حاصل از معادله بولتزمن توسط کارچانی و میونگ [۱۶] معرفی گردید. تحلیل همگرایی نشان داد که روش مونت کارلو مستقیم می تواند با دقت قابل قبولی قوانین بقا را ارضا نماید. در پایان بیان گردید که میزان انحراف کلی نتایج از قوانین بقا با کاهش اندازه فضای نمونه و تعداد ذرات و با افزایش اندازه سلول ها و گام زمانی افزایش می یابد. از دیگر کاربردهای روش مونت کارلو می توان به تخمین کمیت های مجهول بر مبنای تاریخچه شار گرمایی یا دماهای اندازه گیری شده در مسایل رسانش گرمایی معکوس اشاره نمود [۱۷ و ۱۸].

برای حل معادله گرما با استفاده از روش مونت کارلو لازم است که از یک روش گسسته سازی مناسب استفاده گردد. از میان تمامی تکنیک های گسسته سازی موجود در تحلیل های عددی، دو روش تفاضل محدود و حجم محدود بیشتر مورد استفاده قرار گرفته اند. در تمامی مطالعات پیشین که در آن ها از روش مونت کارلو با گام زمانی ثابت استفاده شده است برای تعیین شکل تصادفی معادله گرما، روش تفاضل محدود به کار گرفته شده است. روش حجم محدود دارای دو

1 Itô Process

2 Optimized Emission-Based Reciprocity Monte Carlo



شکل ۱. نمایش حجم کنترل سه بعدی و آرایش نقاط همسایه
Fig. 1. 3D control volume and the arrangement of its neighbor nodes

$$k_e A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - k_w A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w + k_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - k_s A_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s + k_t A_t \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_t - k_b A_b \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_b + \bar{g} \Delta V = 0 \quad (3)$$

که در آن $\bar{g}$ تولید گرمای حجمی متوسط در حجم کنترل، A مساحت سطح و ΔV حجم مربوط به حجم کنترل است. معادله (۳) همان قانون بقای انرژی برای حجم کنترل شکل ۱ است و بیان می‌دارد که مجموع نرخ انتقال گرمای ورودی به حجم کنترل و نرخ تولید گرمای حجمی در آن برابر با نرخ تولید گرمای خروجی از حجم کنترل است که با معادله بالانس انرژی به صورت زیر قابل توصیف است:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = 0 \quad (4)$$

با استفاده از روش بالانس انرژی به راحتی می‌توان به شکل حجم کنترلی معادله پخش گرما در تمامی سلول‌های و حتی سلول‌های مرزی در معرض شرایط مرزی گوناگون دست یافت. از آنجا که جهت واقعی جریان گرما معمولاً نامشخص است به صورت قراردادی جریان گرما از جوهی از حجم کنترل که بردار نرمال سطح آن‌ها در جهت مثبت محورهای مختصات است با علامت مثبت و در سایر موارد با علامت منفی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین شکل مناسب معادله

مزیت اساسی نسبت به روش تفاضل محدود است که استفاده از آن را در پژوهش حاضر توجیه‌پذیر می‌نماید. نخست این که این طرح ضامن برقراری بقای انرژی در هر سلول گسسته از شبکه محاسباتی است و این موضوع تعیین شکل تصادفی معادله گرما را ساده‌تر می‌کند. دوم این که در روش حجم محدود برای تحلیل شبکه نامنظم دیگر نیازی به تغییر مختصات نیست و در نتیجه می‌توان در هندسه‌های پیچیده با شبکه نامنظم نیز از روش حجم محدود استفاده نمود. اگرچه حل معادله گرما در پژوهش‌های متعددی مورد مطالعه قرار گرفته و مقالات بسیاری در این خصوص موجود است اما اغلب آن‌ها محدود به مسایل ساده مشتمل بر هندسه ساده، خواص ترموفیزیکی ثابت یا شرایط مرزی ساده هستند که به میزان قابل توجهی تحلیل مساله را ساده می‌کنند [۱۹ و ۲۰]. هدف پژوهش حاضر، بررسی روش جدید مونت کارلوی حجم محدود برای حل معادله گرمای حالت پایدار بدون هرگونه محدودیت در هندسه، خواص فیزیکی و شرایط مرزی است. این روش انعطاف‌پذیری روش مونت کارلو را در حل معادله پخش گرما افزایش می‌دهد و روش مونت کارلوی حجم محدود را به یک ابزار آماری قدرتمند تبدیل می‌کند که می‌تواند گستره وسیعی از کاربردهای صنعتی و عملی را پوشش دهد.

۲- توصیف روش

شکل کلی معادله پخش گرمای حالت پایدار در یک جسم همسانگرد با در نظر گرفتن تولید گرمای حجمی به صورت زیر است:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + g = 0 \quad (1)$$

که در آن g نرخ تولید گرمای حجمی در جسم است. با انتگرال‌گیری از معادله (۱) روی یک حجم کنترل و سپس استفاده از قضیه دیورژانس عبارت زیر برای معادله پخش گرما حاصل می‌شود:

$$\int_A (k \nabla T) \cdot n \, dA + \int_V g \, dV = 0 \quad (2)$$

در روش حجم کنترلی این معادله انتگرالی به هر یک از سلول‌های شبکه محاسباتی اعمال می‌شود. برای سلول حجم کنترلی سه بعدی نشان داده شده در شکل ۱ با حذف انتگرال‌های سطحی رابطه زیر حاصل می‌گردد:

جدول ۱. ضرایب معادله پخش گرمای گسسته برای گره داخلی
Table 1. Coefficients of the discretized heat equation for an interior node

a_E	a_W	a_N	a_S	a_T	a_B
$\frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{k_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$\frac{k_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{k_t A_t}{\delta z_{PT}}$	$\frac{k_b A_b}{\delta z_{BP}}$

جدول ۲. ضرایب بی‌بعد معادله مونت کارلوی حجم محدود
Table 2. Non-dimensional coefficients of the FVMC method

F_E	F_W	F_N	F_S	F_T	F_B	S_P
$\frac{a_E}{a_P}$	$\frac{a_W}{a_P}$	$\frac{a_N}{a_P}$	$\frac{a_S}{a_P}$	$\frac{a_T}{a_P}$	$\frac{a_B}{a_P}$	$\frac{\bar{g}\Delta V}{a_P}$

که در آن:

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B \quad (9)$$

ضرایب معادله گرمای گسسته شده حجم کنترلی (۸) در جدول ۱
ارایه شده‌اند.

معادله (۸) را می‌توان با تقسیم طرفین بر a_P به صورت زیر
بازنویسی نمود:

$$T_P = F_E T_E + F_W T_W + F_N T_N + F_S T_S + F_T T_T + F_B T_B + S_P \quad (10)$$

ضرایب بی‌بعد و جمله منبع استفاده شده در معادله (۱۰) در
جدول ۲ معرفی گردیده‌اند [۲۱].

با نگاهی به جدول ۲ به وضوح می‌توان دید که مجموع تمامی
ضرایب بی‌بعد برابر با یک است. توصیف احتمالی معادله (۱۰) بدین
صورت قابل بیان است که اگر حرکت تصادفی یک ذره را که در نقطه
 P قرار دارد در نظر بگیریم احتمال حرکت ذره به هر یک از گره‌های
 E, W, N, S, T, B به ترتیب برابر با $F_E, F_W, F_N, F_S, F_T, F_B$
و F_B خواهد بود. در روش مونت کارلوی حجم محدود برای تعیین
جهت حرکت ذره به سمت هر یک از شش گره مجاور ابتدا باید
یک عدد تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $0 < R < 1$ تولید کرده
و سپس با توجه به شرایط زیر جهت حرکت تصادفی ذره را تعیین
نمود [۲۱]:

بالانس انرژی برای حجم کنترل شکل ۱ به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} & (\dot{Q}_W + \dot{Q}_S + \dot{Q}_B) + \bar{g}\Delta V - \\ & (\dot{Q}_E + \dot{Q}_N + \dot{Q}_T) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

همان‌گونه که در شکل ۱ نشان داده شده است، حجم کنترل
دربگیرنده نقطه P دارای شش گره همسایه در شرق، غرب، شمال،
جنوب، بالا و پایین است که به ترتیب با حروف E, W, N, S, T, B و
نشان داده شده‌اند. همچنین نمادهای e, w, n, s, t, b به ترتیب به
دیوارهای شرقی، غربی، شمالی، جنوبی، بالایی و پایینی حجم کنترل
مورد بررسی اشاره دارند. ضریب رسانش گرمایی در هر یک از این
دیواره‌ها با میان‌یابی خطی مقادیر دو گره مجاور به صورت زیر محاسبه
می‌شود:

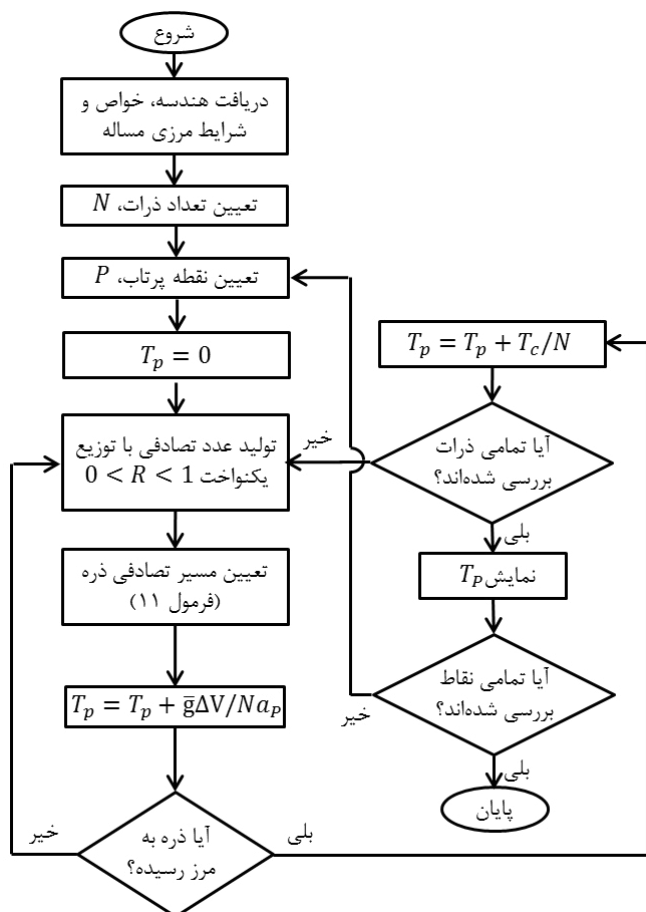
$$\begin{aligned} k_e &= (k_E + k_P) / 2, \quad k_w = (k_W + k_P) / 2, \\ k_n &= (k_N + k_P) / 2, \quad k_s = (k_S + k_P) / 2, \\ k_t &= (k_T + k_P) / 2, \quad k_b = (k_B + k_P) / 2 \end{aligned} \quad (6)$$

گرادیان دما در هر دیواره از حجم کنترل به صورت تفاضل مرکزی
دمای دو گره مجاور با روابط زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e &= \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w = \frac{T_P - T_W}{\delta x_{WP}}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n &= \frac{T_N - T_P}{\delta y_{PN}}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s = \frac{T_P - T_S}{\delta y_{SP}}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_t &= \frac{T_T - T_P}{\delta z_{PT}}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_b = \frac{T_P - T_B}{\delta z_{BP}} \end{aligned} \quad (7)$$

با جاگذاری معادلات (۶) و (۷) در معادله (۳) شکل حجم کنترلی
معادله پخش گرما برای یک گره داخلی نشان داده شده در شکل ۱ با
تولید گرما به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_P T_P &= a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + \\ & a_S T_S + a_T T_T + a_B T_B + \bar{g}\Delta V \end{aligned} \quad (8)$$



شکل ۲. فلوچارت روش مونت کارلوی حجم محدود
Fig 2. Flowchart of the FVMC method

می‌شود مرتبه معادله دیفرانسیل یک درجه کاهش یافته و دیگر نیازی نیست که ضریب رسانش گرمایی ماده مشتق‌پذیر باشد و می‌توان با استفاده از این روش مواد چندلایه را نیز بررسی نمود. از طرفی در مسائلی با شرایط مرزی نوع دوم و سوم نیازی به محاسبه گرادیان دما در مرزها نیست و همچنین به دست آوردن فرمولاسیون روش مونت کارلوی حجم محدود به راحتی با استفاده از روش بالانس انرژی امکان‌پذیر است. با استفاده از روش بالانس انرژی، می‌توان رابطه مونت کارلوی حجم محدود را برای سلول مرزی نشان داده شده در شکل ۳ نیز که در معرض انتقال گرمای جابجایی با ضریب جابجایی h و دمای سیال مرجع T_∞ قرار دارد به صورت زیر نوشت با این تفاوت که ضرایب بی‌بعد معادله گسسته مونت کارلوی حجم کنترلی باید مطابق جدول ۳ اصلاح گردند:

$$T_p = F_E T_\infty + F_W T_W + F_N T_N + F_S T_S + F_T T_T + F_B T_B + S_p \quad (13)$$

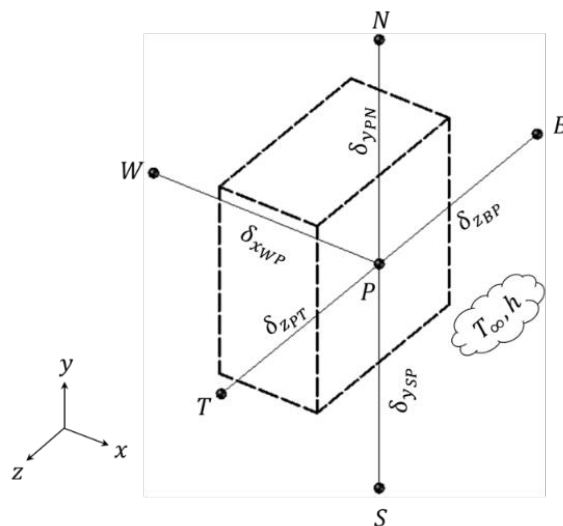
$$\begin{aligned} P \rightarrow E & \text{ اگر } 0 < R < F_E \\ P \rightarrow W & \text{ اگر } F_E < R < F_E + F_W \\ P \rightarrow N & \text{ اگر } F_E + F_W < R < F_E + F_W + F_N \\ P \rightarrow S & \text{ اگر } F_E + F_W + F_N < R < F_E + F_W + F_N + F_S \\ P \rightarrow T & \text{ اگر } F_E + F_W + F_N + F_S < R < F_E + F_W + F_N + F_S + F_T \\ P \rightarrow B & \text{ اگر } F_E + F_W + F_N + F_S + F_T < R < 1 \end{aligned} \quad (11)$$

برای محاسبه دمای گره P ، یک ذره به صورت تصادفی حرکت خود را از گره مزبور به سمت یکی از شش گره مجاور شروع می‌کند. جهت تصادفی حرکت ذره در یکی از شش جهت محتمل از طریق مقایسه عدد تصادفی تولید شده با توزیع یکنواخت با شرایط معادله (۱۱) تعیین می‌گردد و ذره وارد سلول مجاور در جهت تعیین شده می‌شود. این ذره شبکه محاسباتی را به صورت گره‌به‌گره در روند کاملاً تصادفی توصیف شده طی می‌کند تا در نهایت به یکی از مرزهای هندسه برسد و در این هنگام حرکت ذره متوقف می‌گردد. هنگامی که ذره به یکی از مرزها می‌رسد، دمای مشخص مرز در نقطه برخورد ذخیره می‌شود که این دما با T_C نشان داده می‌شود. اگر $T_C(1)$ دمای مرزی مربوط به خاتمه اولین حرکت ذره از نقطه P ، $T_C(2)$ دمای مرزی در پایان دومین حرکت ذره از همان نقطه و به همین صورت $T_C(N)$ دمای مرزی در پایان N مین حرکت ذره از نقطه P باشد، در نهایت دمای نقطه P از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$T_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_C(i) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i-1} S_p(x_j, y_j, z_j) \quad (12)$$

در رابطه (۱۲) S_p جمله مرتبط با تولید گرمای حجمی در داخل جسم است که در صورت وجود باید مقدار آن در هر مرحله از حرکت تصادفی ذره ذخیره گردد. همچنین N تعداد کل ذرات رها شده از نقطه P و m_i تعداد کل مراحل طی شده توسط ذره i ام از نقطه P تا رسیدن به مرز هندسه است. روند تکراری روش مونت کارلوی حجم محدود در فلوچارت شکل ۲ نمایش داده شده است. همان‌گونه که در این فلوچارت نشان داده شده است معیار توقف برای هر حرکت تصادفی ذره برخورد به یکی از مرزهای هندسه و معیار توقف برای محاسبه دما در هر نقطه بررسی تمام N ذره رها شده از نقطه مورد نظر و جذب توسط مرزهای هندسه حل می‌باشد.

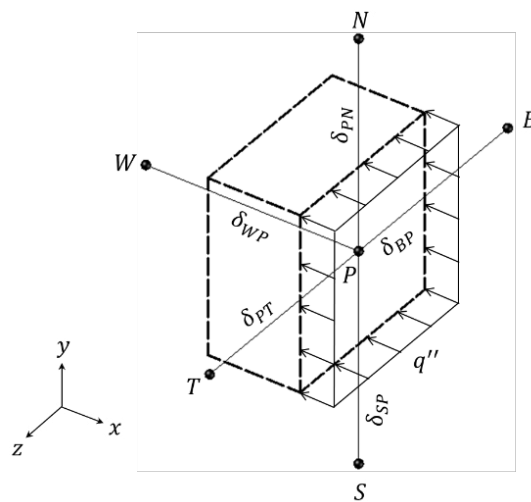
مزیت اصلی روش مونت کارلوی حجم محدود در مسایل دارای شبکه نامنظم است. همان‌گونه که در معادله (۳) به وضوح دیده



شکل ۳. سلول مرزی با جابجایی در مرز
Fig. 3. Boundary cell with convection

جدول ۳. ضرایب بی بعد معادله مونته کارلوی حجم محدود برای سلول مرزی با جابجایی در مرز
Table 3. Non-dimensional coefficients of the FVMC method for a boundary cell with convection

F_E	F_W	F_N	F_S	F_T	F_B	S_P	a_p
$\frac{hA_e}{a_p}$	$\frac{a_W}{a_p}$	$\frac{a_N}{2a_p}$	$\frac{a_S}{2a_p}$	$\frac{a_T}{2a_p}$	$\frac{a_B}{2a_p}$	$\frac{\bar{g}\Delta V}{a_p}$	$hA_e + a_W + \frac{1}{2}a_N + \frac{1}{2}a_S + \frac{1}{2}a_T + \frac{1}{2}a_B$



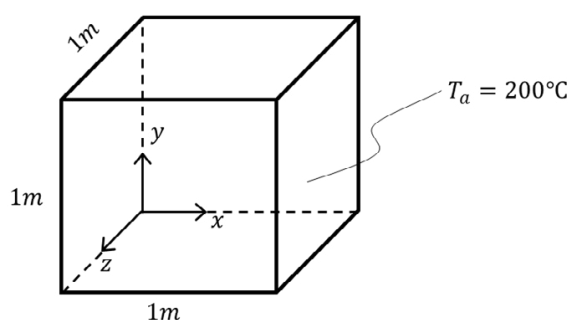
شکل ۴. سلول مرزی با شار گرمایی ثابت در مرز
Fig. 4. Boundary cell with constant heat flux

گرفت و رابطه مونته کارلوی حجم کنترلی را برای آن به دست آورد. در این حالت ضرایب معادله مونته کارلوی حجم کنترلی در رابطه (۱۰) باید مطابق جدول ۴ اصلاح گردند.

همچنین به شیوه مشابه می توان روش بالانس انرژی و معادله (۵) را برای محاسبه رابطه مونته کارلوی حجم محدود در سلول مرزی نشان داده شده در شکل ۴ با شار گرمایی ثابت در سطح مرزی به کار

جدول ۴. ضرایب بی بعد معادله مونته کارلوی حجم محدود برای سلول مرزی با شار گرمایی ثابت در مرز
Table 4. Non-dimensional coefficients of the FVMC method for a boundary cell with constant heat flux

F_E	F_W	F_N	F_S	F_T	F_B	S_p	a_p
0	$\frac{a_W}{a_p}$	$\frac{a_N}{2a_p}$	$\frac{a_S}{2a_p}$	$\frac{a_T}{2a_p}$	$\frac{a_B}{2a_p}$	$\frac{q'' A_e + \bar{g} \Delta V}{a_p}$	$a_W + \frac{1}{2} a_N + \frac{1}{2} a_S + \frac{1}{2} a_T + \frac{1}{2} a_B$



شکل ۵. هندسه و شرایط مرزی مکعب واحد بدون تولید گرما
Fig. 5. Geometry and boundary conditions of a unit cube without heat generation

رابطه تحلیلی توزیع دما برای این مساله توسط کارسلو و جگر [۵] به صورت زیر ارائه گردیده است:

$$T_{ss}(x, y, z) = \frac{16T_a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sinh(lx)}{(2n+1)(2p+1)\sinh(l)} \sin[(2n+1)\pi y] \sin[(2p+1)\pi z] \quad (14)$$

که در آن:

$$l^2 = (2n+1)^2 \pi^2 + (2p+1)^2 \pi^2 \quad (15)$$

$; n, p = 0, 1, 2, \dots$

به منظور درک بهتر دقت روش مونته کارلوی حجم محدود، توزیع دمای پیش بینی شده توسط این روش روی خط حاصل از تقاطع صفحات $z=0.5m$ و $y=0.5m$ با نتایج به دست آمده از حل تحلیلی ارائه شده توسط معادله (۱۴) مقایسه گردیده است. شکل ۶ مویده انطباق کامل داده های به دست آمده از دو روش مونته کارلوی حجم محدود و تحلیلی است. همچنین در صفحه میانی مکعب ($z=0.5m$) کانتورهای دمای پیش بینی شده توسط روش مونته کارلوی حجم محدود به ازای 10^5 حرکت تصادفی برای هر نقطه و نیز کانتورهای دمای حاصل از حل تحلیلی به ترتیب در شکل های ۷ و ۸ ارائه گردیده اند.

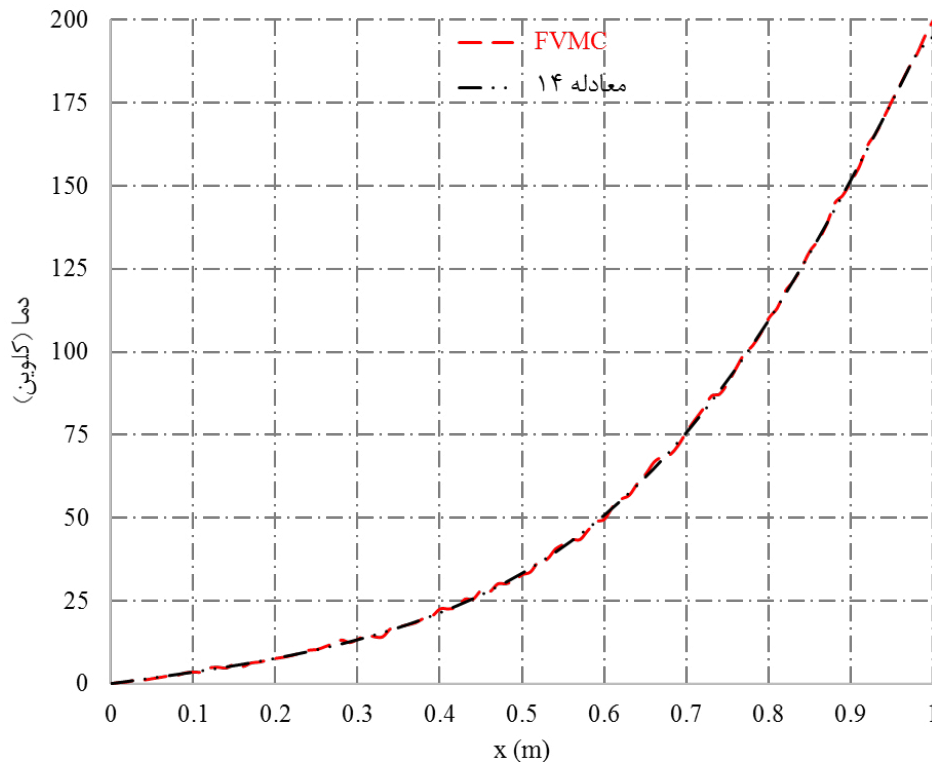
ضرایب a_W, a_N, a_S, a_T, a_B و a_B که در جداول ۳ و ۴ ظاهر شده اند همان ضرایب ارائه شده در جدول ۱ می باشند.

۳- نتایج و بحث

در این بخش، عملکرد و دقت روش مونته کارلوی حجم محدود از طریق مقایسه نتایج حاصل از روش پیشنهادی با نتایج حاصل از حل تحلیلی و نیز نتایج روش دینامیک سیالات محاسباتی انجام می پذیرد. بدین منظور ابتدا کد رایانه ای روش مونته کارلوی حجم محدود بر مبنای الگوریتم ارائه شده در شکل ۲ تهیه گردیده و سپس به منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی، در تحلیل سه مساله مختلف مورد استفاده قرار می گیرد. نخست برای نشان دادن دقت و اعتبار روش مونته کارلوی حجم محدود از این روش در یک مساله ساده استفاده می گردد که حل تحلیلی آن موجود است. سپس از روش مونته کارلوی حجم محدود در دو مساله دشوارتر یکی با هندسه پیچیده و شرایط مرزی گوناگون و دیگری ماده چندلایه با ضرایب رسانش گرمایی متفاوت استفاده شده و عملکرد پیش بینی روش در مقایسه با نتایج حاصل از روش دینامیک سیالات محاسباتی مورد ارزیابی قرار می گیرد که در آن ها داده های مربوط به روش دینامیک سیالات محاسباتی توسط کد رایانه ای تهیه شده بر اساس فرمولاسیون تفاضل محدود استخراج شده اند.

۳-۱- مکعب واحد بدون تولید گرما

در این بخش برای صحت گذاری نتایج و بررسی اعتبار روش مونته کارلوی حجم محدود از یک مکعب واحد با ضریب رسانش گرمایی ثابت $k=1 \text{ W/mK}$ و بدون تولید گرما استفاده گردیده که هندسه و شرایط مرزی آن در شکل ۵ نشان داده شده است. دیواره سمت راست این مکعب ($x=1m$) در دمای $T_a=200^\circ\text{C}$ قرار داشته و دمای دیگر سطوح مکعب صفر در نظر گرفته شده است.



شکل ۶. مقایسه توزیع دمای مونت کارلوی حجم محدود با حل تحلیلی بر روی خط $(y=0.5m$ و $z=0.5m)$ در مساله آزمون اول
Fig. 6. Comparison of the FVMC temperature with the analytical solution on the $(y = 0.5m, z = 0.5m)$ line for the first test case

صفحه $z=0.5m$ است. خطای نسبی جذر میانگین مربعات نتایج روش مونت کارلوی حجم محدود به ازای مقادیر گوناگون N در شکل ۹ ترسیم شده است. مهم‌ترین ویژگی این نمودار روند به شدت کاهشی e_{rms} با افزایش N در ابتدای نمودار است که بیانگر این موضوع است که مقادیر پیش‌بینی شده به سرعت به داده‌های تحلیلی نزدیک شده و به ازای تعداد نسبتاً کمی از ذرات، می‌توان به دقت قابل قبولی در نتایج روش مونت کارلوی حجم محدود رسید. این مقدار برای مساله مورد بررسی در این بخش در حدود ۱۰۰۰۰ حرکت تصادفی تعیین گردید در حالی که مقدار e_{rms} روش مونت کارلوی حجم محدود در این مقدار حدود ۱ درصد است.

۳-۲- حفره کروی در مکعب با شرایط متغیر

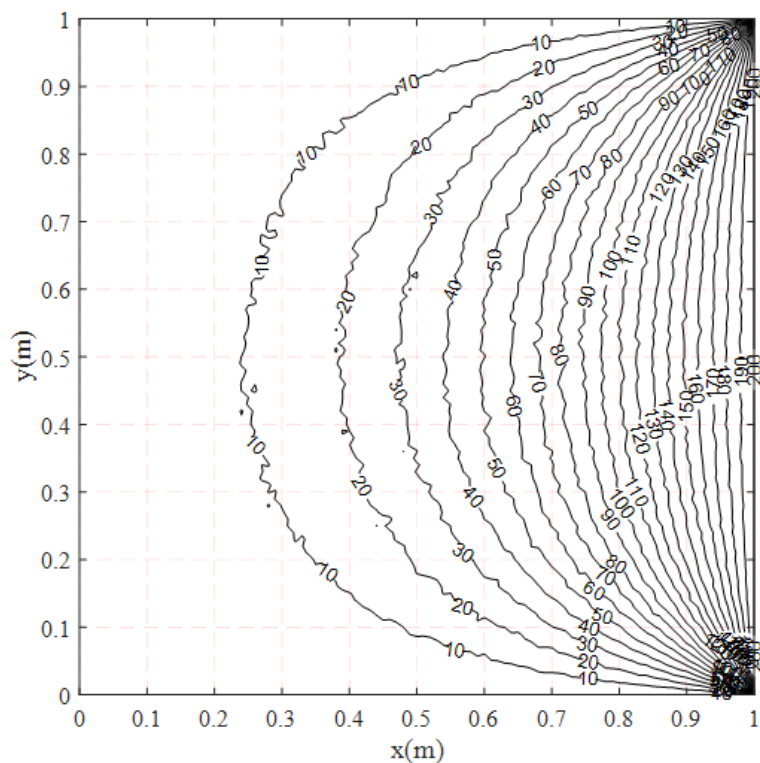
در این بخش از پژوهش به منظور نمایش توانمندی روش مونت کارلوی حجم محدود در شرایط دشوار یک هندسه پیچیده به شکل یک حفره کروی به شعاع $R = 0.52m$ در درون یک جدار مکعبی به طول واحد، که در شکل ۱۰ نشان داده شده است، مورد

با مقایسه شکل‌های ۷ و ۸ به وضوح دیده می‌شود که روند تغییرات دما در محدوده مورد بررسی توسط روش مونت کارلوی حجم محدود به درستی پیش‌بینی گردیده و هماهنگی کامل با نتایج به‌دست آمده از حل تحلیلی دارد. حداکثر خطای نسبی بین نتایج دو روش ۰/۹۴ درصد محاسبه گردید. با محاسبه خطای نسبی جذر میانگین مربعات^۱، e_{rms} ، بر حسب تعداد کل ذرات، N ، درک بهتری از دقت نتایج روش مونت کارلوی حجم محدود به‌دست می‌آید. خطای نسبی جذر میانگین مربعات بیانگر اختلاف بین نتایج تحلیلی و تقریبی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

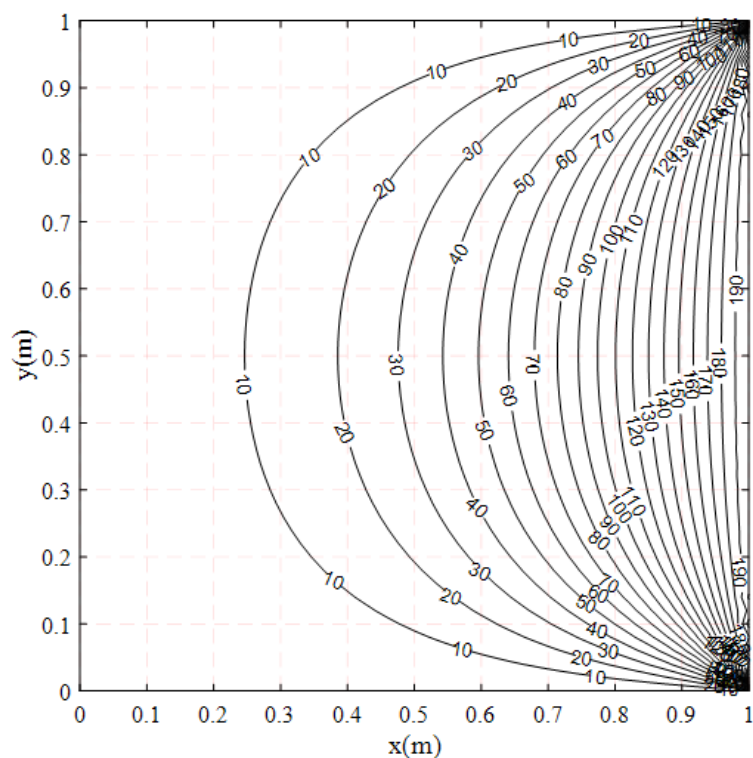
$$e_{rms} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x} \left[(T_{i,FVMC} - T_{i,anal}) / T_{i,anal} \times 100 \right]^2 / n_x} \quad (16)$$

که در آن $T_{i,FVMC}$ دمای تخمینی از روش مونت کارلوی حجم محدود در گره i ام، $T_{i,anal}$ دمای تحلیلی محاسبه شده توسط معادله (۱۴) در همان گره و n_x نیز تعداد فواصل در طول محور x بر روی

1 Relative Root Mean Square Error

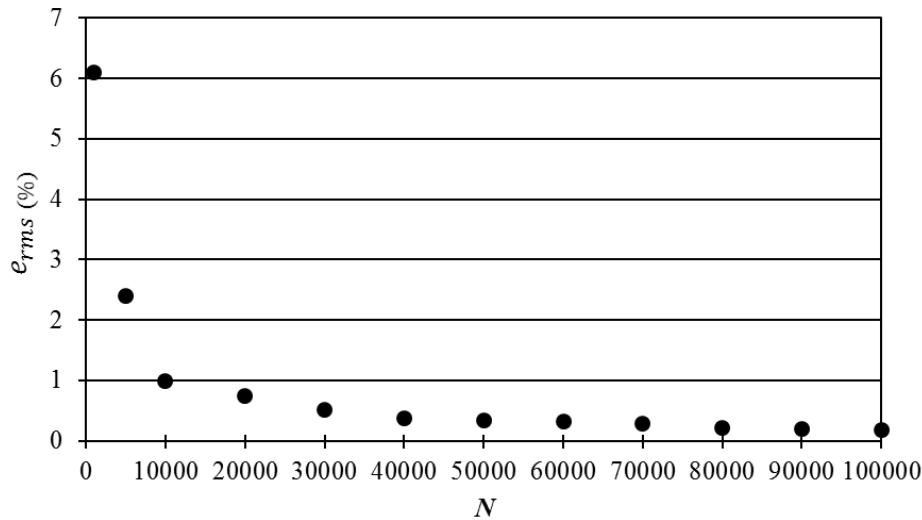


شکل ۷. کانتور دمای حاصل از روش مونت کارلوی حجم محدود بر روی صفحه $z=0.5m$ از مسأله آزمون اول
Fig. 7. FVMC temperature contour of the first test case on the $z = 0.5m$ plane

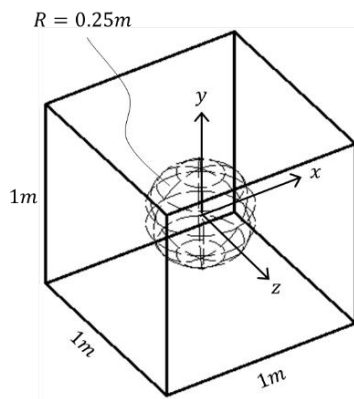


شکل ۸. کانتور دمای حاصل از حل تحلیلی بر روی صفحه $z=0.5m$ از مسأله آزمون اول
Fig. 8. Analytical temperature contour of the first test case on the $z = 0.5m$ plane

استفاده قرار گرفته است. ضریب رسانش گرمایی در این مسأله متغیر فرض شده که رابطه آن به صورت زیر است:



شکل ۹. محاسبه شده برای نتایج مونت کارلوی حجم محدود در مساله آزمون اول بر حسب N
 Fig. 9. e_{rms} of the FVMC results on the $z = 0.5m$ plane for the first test case



شکل ۱۰. هندسه حفره کروی در مکعب با شرایط متغیر
 Fig. 10. Geometry of the spherical hole in a cube with variable conditions

محاسباتی در صفحه میانی $z=0.5m$ به ترتیب در دو شکل ۱۲ و ۱۳ نمایش داده شده است. به دلیل تقارن هندسی و تقارن شرایط مرزی و فیزیکی مساله، نمودار توزیع دما در محدوده یک‌چهارم از هندسه ترسیم گردیده است. از مقایسه نتایج این دو شکل به وضوح می‌توان دید که روش مونت کارلوی حجم محدود حتی در شرایط دشوار که بسیاری از روش‌ها قادر به حل مساله نیستند از توانایی بالایی در پیش‌بینی دقیق نتایج برخوردار است.

۳-۳- جسم سه‌بعدی چندلایه

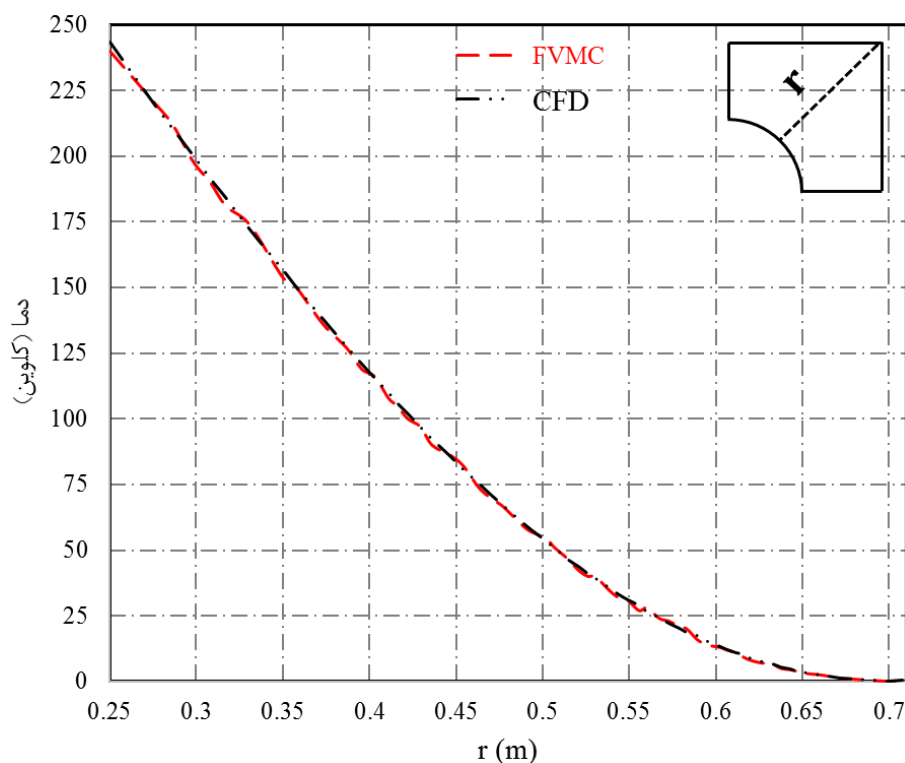
گونه که پیشتر بدان اشاره گردید با استفاده از روش همان Fi

$$k = 10 \exp(x^2) \exp(y^2) \exp(z^2) \quad (17)$$

همچنین یک منبع گرمایی متغیر کسینوسی به صورت زیر در مساله تعبیه شده است:

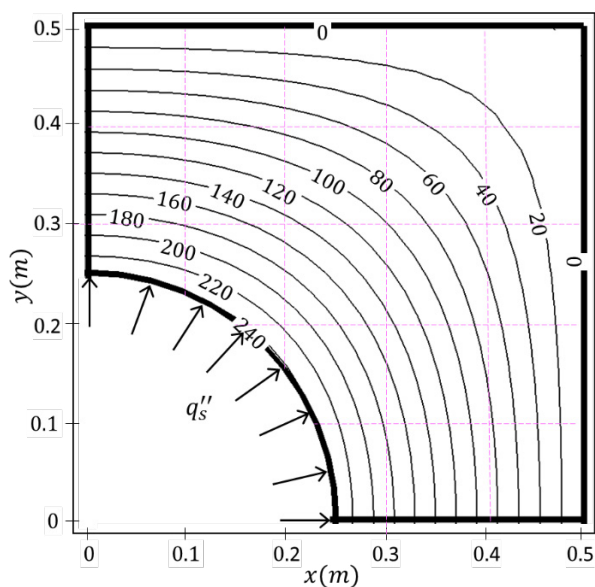
$$g = 100000 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z) \quad (18)$$

بر روی سطح داخلی حفره کروی شار گرمایی ثابت $q''_s = 10000 \text{ W/m}^2$ اعمال گردیده و دمای سطوح بیرونی بخش مکعبی صفر در نظر گرفته شده است. تحلیل سلول‌های مرزی که در معرض شار گرمایی ثابت قرار دارند توسط معادله مونت کارلوی حجم محدود (۱۰) با ضرایب ارایه شده در جدول ۴ صورت می‌پذیرد. محاسبات با استفاده از کد رایانه‌ای تهیه شده برای دو روش مونت کارلوی حجم محدود و دینامیک سیالات محاسباتی انجام شده و توزیع دمای حاصل بر روی خط شعاعی با زاویه ۴۵ درجه در صفحه $z=0.5m$ ، که در راهنمای نمودار نشان داده شده است، در شکل ۱۱ مقایسه گردیده است. نتایج پیش‌بینی شده توسط روش مونت کارلوی حجم محدود به خوبی بر داده‌های دینامیک سیالات محاسباتی منطبق گردیده به نحوی که عملاً تفکیک دو نمودار امکان‌پذیر نمی‌باشد و حداکثر خطای نسبی در این حالت ۰/۶۹ درصد تعیین گردید. برای این مساله نیز روند تغییرات دمای حاصل از دو روش مونت کارلوی حجم محدود و دینامیک سیالات

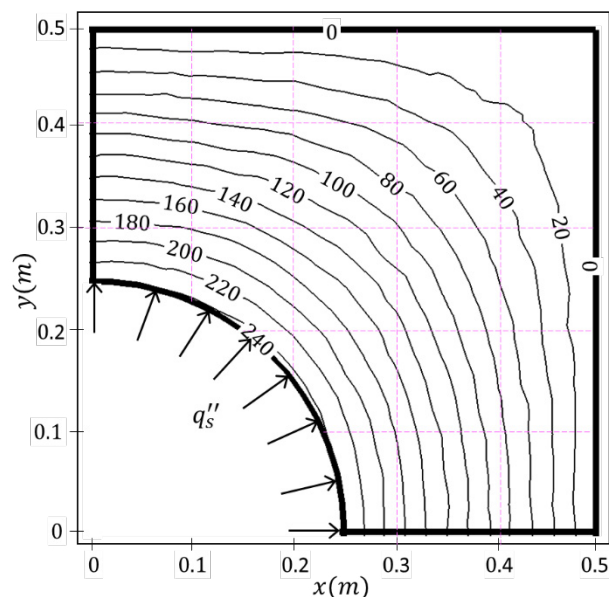


شکل ۱۱. مقایسه توزیع دمای مونت کارلوی حجم محدود با سی.اف.دی بر روی خط $(y=0.5\text{m}$ و $z=0.5\text{m})$ در مساله آزمون دوم

Fig. 11. Comparison of the FVMC temperature with the CFD solution on the $(y = 0.5\text{m}, z = 0.5\text{m})$ line for the second test case



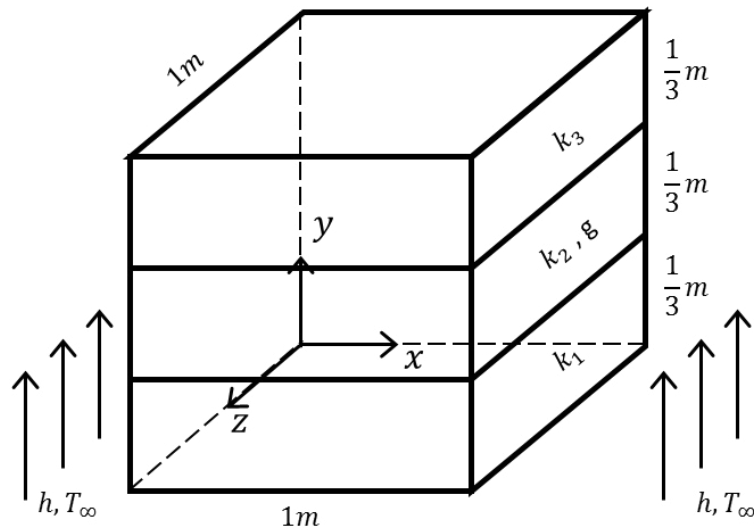
شکل ۱۳. توزیع دمای حاصل از روش دینامیک سیالات محاسباتی بر روی صفحه میانی مساله آزمون دوم
Fig. 13. Temperature distribution of the CFD method on the midplane of the second test case



شکل ۱۲. توزیع دمای حاصل از روش مونت کارلوی حجم محدود بر روی صفحه میانی مساله آزمون دوم
Fig. 12. Temperature distribution of the FVMC method on the midplane of the second test case

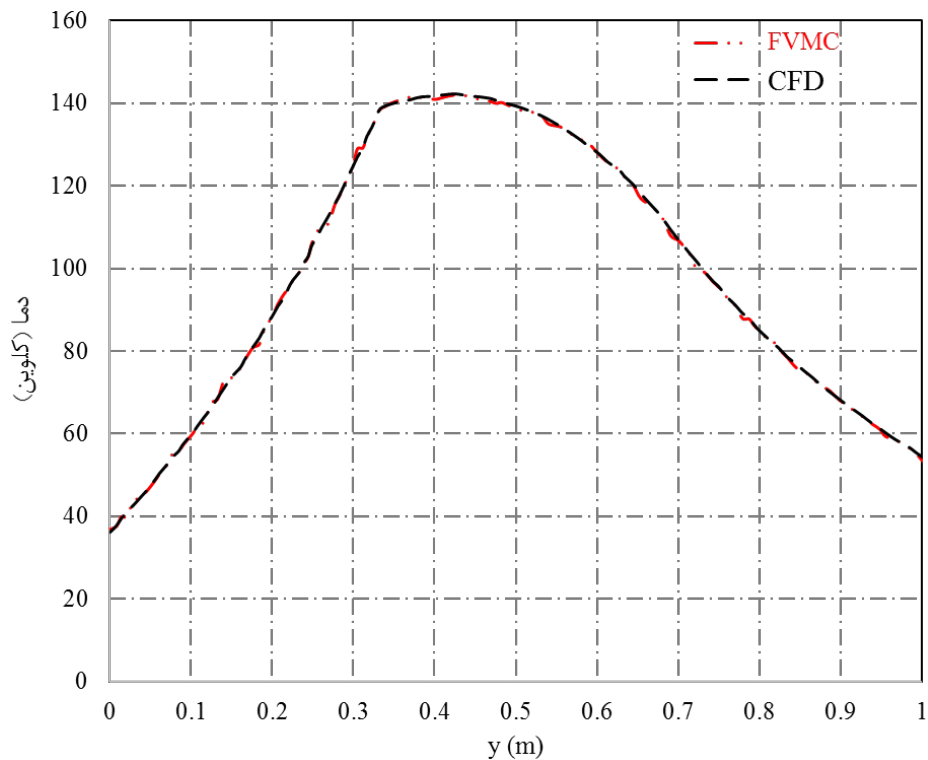
گرمایی مربوط به جسم مورد بررسی یک تابع پیوسته و مشتق پذیر

مونت کارلوی حجم محدود دیگر نیازی نیست که ضریب رسانش



شکل ۱۴. هندسه و شرایط مرزی جسم سه بعدی چندلایه

Fig. 14. Geometry and boundary conditions of the multi-layer cube

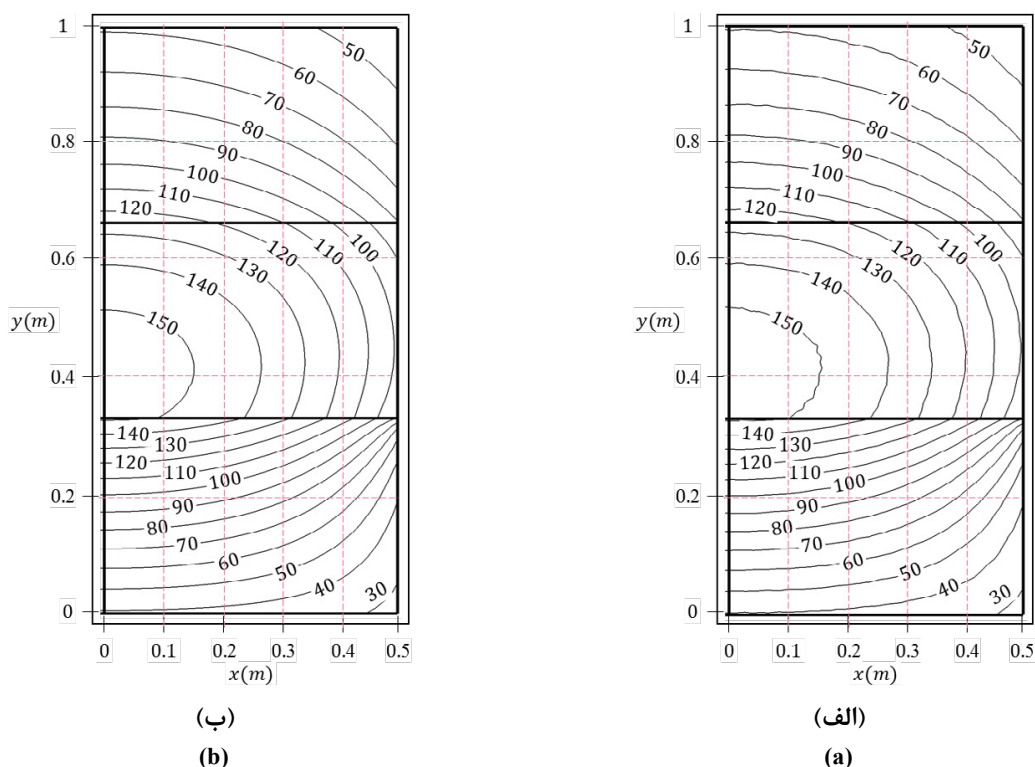


شکل ۱۵. مقایسه توزیع دمای مونت کارلوی حجم محدود با سی.اف.دی بر روی خط $(x=0.5m$ و $z=0.5m)$ در مساله آزمون سوم

Fig. 15. Comparison of the FVMC temperature with the CFD solution on the $(y = 0.5m, z = 0.5m)$ line for the third test case

بعدی محدود با دشواری همراه است. مطابق شکل ۱۴ یک جسم سه به شکل مکعب با ابعاد واحد متشکل از سه لایه با ضخامت برابر اما با $k_1 = 50 \text{ W/mK}$ ، $k_2 = 300 \text{ W/mK}$ و $k_3 = 250 \text{ W/mK}$ را در نظر بگیرید که در لایه میانی یک منبع

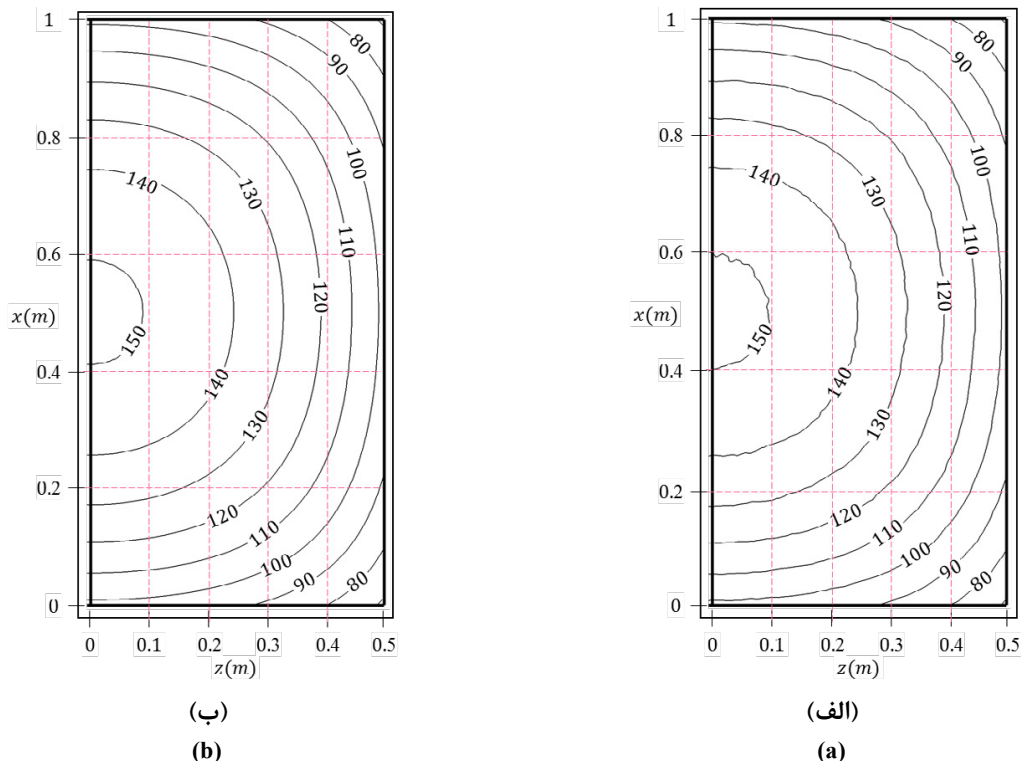
توان از روش مونت کارلوی حجم محدود برای تحلیل باشد. بنابراین می مسایلی متشکل از چند لایه با ضرایب رسانش گرمایی متفاوت نیز استفاده نمود که در آن‌ها به دلیل ناپیوستگی تابع ضریب رسانش هایی عددی نظیر روش تفاضل گرمایی حل مساله با سایر روش



شکل ۱۶. توزیع دما بر روی صفحه $z=0.5m$ در مساله آزمون سوم، (الف) روش مونت کارلوی حجم محدود (ب) روش دینامیک سیالات محاسباتی
Fig. 16. Temperature distribution on the $z = 0.5m$ plane of the third test case, (a) FVMC, (b) CFD

مونت کارلوی حجم محدود و دینامیک سیالات محاسباتی نشان داده شده است که البته به دلیل تقارن مساله، توزیع دمای حاصل از دو روش مزبور تنها در نیمی از هندسه نمایش داده شده است. به دلیل آن که ضریب رسانش گرمایی لایه فوقانی بسیار بیشتر از لایه زیرین است نفوذ اثر جابجایی هوای خنک در لایه فوقانی بیشتر بوده است که به دلیل مقاومت گرمایی کمتر آن با فیزیک مساله نیز مطابقت دارد. همچنین توزیع دمای حاصل از روش مونت کارلوی حجم محدود بر روی صفحه وسط از لایه میانی، با $y=0.5m$ ، با مقادیر به دست آمده از روش دینامیک سیالات محاسباتی در دو شکل ۱۷-الف و ۱۷-ب ارایه گردیده است. مجدداً به دلیل تقارن تنها توزیع دما بر روی نیمی از صفحه مزبور ترسیم گردیده است. مقایسه توزیع دمای ارایه شده در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ مویید این واقعیت است که ترازهای دما به درستی توسط روش اند و روش مونت کارلوی-بینی شده مونت کارلوی حجم محدود پیش حجم محدود حتی در شرایط دشوار که بسیاری از روش‌ها قادر به حل مساله نیستند از توانایی بالایی در پیش‌بینی دقیق نتایج برخوردار است.

قرار داده شده است. $g = 500000 \text{ W/m}^3$ گرمایی یکنواخت با مقدار روی تمامی دیوارهای مرزی، شرط مرزی جابجایی با ضریب برقرار $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ و دمای سیال آزاد $h = 1000 \text{ W/m}^2$ جابجایی است. در ابتدا از روش مونت کارلوی حجم محدود برای تخمین که در آن تحلیل سلول‌های مرزی در توزیع دما استفاده شده معرض جابجایی به کمک معادله مونت کارلوی حجم محدود ارایه شده در رابطه (۱۳) انجام شده است. با توجه به پیچیدگی شرایط مرزی و فیزیکی و عدم وجود حل تحلیلی برای این مساله از روش دینامیک سیالات محاسباتی مبتنی بر تکنیک تفاضل محدود برای محاسبه دما و مقایسه با توزیع دمای پیش‌بینی شده استفاده گردیده است. توزیع دمای به دست آمده از روش مونت کارلوی حجم محدود بر روی خط حاصل از تقاطع دو صفحه $z=0.5m$ و $x=0.5m$ در شکل ۱۵ با نتایج روش دینامیک سیالات محاسباتی دهد که پیش‌بینی مقایسه شده است و این نمودار نشان می نتایج به خوبی صورت گرفته است و حداکثر خطای نسبی 0.85% درصد محاسبه گردید. در دو شکل ۱۶-الف و ۱۶-ب به ترتیب روند تغییرات دما در داخل صفحه $z=0.5m$ حاصل از دو روش



شکل ۱۷. توزیع دما بر روی صفحه $y=0.5m$ در مساله آزمون سوم، (الف) روش مونت کارلوی حجم محدود (ب) روش دینامیک سیالات محاسباتی
 Fig. 17. Temperature distribution on the $y = 0.5m$ plane of the third test case, (a) FVMC, (b) CFD

۴- نتیجه گیری

در این پژوهش، روش مونت کارلوی حجم محدود برای حل معادله پخش گرمای همسانگرد در حالت کلی معرفی گردید. به منظور نشان دادن عمومیت روش مونت کارلوی حجم محدود از این روش در سه مساله متفاوت با سطوح دشواری گوناگون استفاده گردید. خطای نسبی جذر میانگین مربعات، e_{rms} ، برای هر سه مساله به ازای $N=5000$ محاسبه گردید که نتایج در جدول ۵ ارایه شده‌اند. با توجه به این جدول می‌توان روش مونت کارلوی حجم محدود را به عنوان یک تخمین‌گر دقیق در مسایل انتقال گرما رسانی به حساب آورد.

بر مبنای نتایج حاصل از تحلیل سه مساله آزمون بررسی شده در این پژوهش نتایج زیر به دست آمدند:

- روش مونت کارلوی حجم محدود در پیش‌بینی توزیع دما در مسایل آزمون مورد بررسی در مقایسه با نتایج تحلیلی و داده‌های حاصل از روش دینامیک سیالات محاسباتی عملکرد بسیار مناسبی داشت.

جدول ۵. خطای نسبی جذر میانگین مربعات روش مونت کارلوی حجم محدود (درصد)

Table 5. Root mean square error of the FVMC method (%)

مساله آزمون سوم	مساله آزمون دوم	مساله آزمون اول
۰/۹۱	۰/۸۲	۰/۶۳

- علی‌رغم وابستگی دقت روش مونت کارلوی حجم محدود به تعداد ذرات مورد بررسی از دیدگاه تئوری که می‌تواند سبب افزایش چشمگیر هزینه محاسباتی شود، نشان داده شد که پس از بررسی تعداد نسبتاً کمی ذره می‌توان به دقت قابل قبولی در پیش‌بینی نتایج دست یافت.

- به کارگیری روش مونت کارلوی حجم محدود بسیار آسان است. این روش متکی بر عملیات بسیار سنگین ریاضی نظیر محاسبه معکوس یک ماتریس بزرگ، حل دستگاه معادلات یا روندهای تکراری مبتنی بر سعی و خطا نبوده و نیازی به تخصص ویژه ندارد.

- روش مونت کارلوی حجم محدود کاملاً مناسب مسایلی است که نیاز به محاسبه مستقیم دما در یک یا چند نقطه دلخواه باشد بدون

- 477-512.
- [4] S.V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [5] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, Oxford Science Publications, 1986.
- [6] F. Wu, W.X. Zhong, A modified stochastic perturbation method for stochastic hyperbolic heat conduction problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 305 (2016) 739-758.
- [7] F.S. Loureiro, W.J. Mansur, V. C.A.B., A hybrid time/Laplace integration method based on numerical Green's functions in conduction heat transfer, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198 (2009) 2662-2672.
- [8] A. Haji-Sheikh, E.M. Sparrow, The Solution of Heat Conduction Problems by Probability Methods, Journal of Heat Transfer, Transaction of ASME, (1967) 121-130.
- [9] F. Kowsary, M. Arabi, Monte Carlo solution of anisotropic heat conduction, International Communications in Heat and Mass Transfer, 26(8) (1999) 1163-1173.
- [10] M. Grigoriu, A Monte Carlo solution of heat conduction and Poisson equations, Journal of Heat Transfer, Transaction of ASME, 122 (2000) 40-45.
- [11] B.T. Wong, M. Francoeur, M. Pinar Mengüç, A Monte Carlo simulation for phonon transport within silicon structures at nanoscales with heat generation, International Journal of Heat and Mass Transfer, 54 (2011) 1825-1838.
- [12] K. Chatterjee, A new Green's function Monte Carlo algorithm for the estimation of the derivative of the solution of Helmholtz equation subject to Neumann and mixed boundary conditions, Journal of Computational Physics, 315 (2016) 264-272.
- [13] Y.F. Zhang, O. Gicquel, J. Taine, Optimized Emission-based Reciprocity Monte Carlo Method to speed up computation in complex systems, International Journal of Heat and Mass Transfer, 55 (2012) 8172-8177.
- [14] K.P. Keadya, M.A. Clevelanda, An Improved Random Walk Algorithm for the Implicit Monte Carlo Method, Journal of Computational Physics, 328(C) (2017) 160-176
- [15] W.J. Yao, R.N. Yang, N. Wang, Monte Carlo simulation of آن که محاسبات برای تمام دامنه حل انجام شود. همچنین به دلیل برقراری قانون بقای انرژی می توان از این روش در شبکه نامنظم نیز استفاده نمود بدون آن که نیاز به تغییر مختصات باشد.
- برخلاف روش های معمول در تحلیل مسایل انتقال گرمای رسانشی نظیر روش تفاضل محدود، در روش مونت کارلوی حجم محدود نیازی به ذخیره ماتریس بزرگ ضرایب دما برای کل شبکه محاسباتی نبوده و حتی در مسایل سه بعدی بزرگ نیز فضای حافظه کمی توسط برنامه رایانه ای اشغال می گردد. آنچه که در این روش مورد نیاز است تنها محاسبه احتمالات گذرا در هر سلول است که به راحتی حین فرایند پیمایش شبکه صورت می گیرد.
- از آنجایی که فرایند حل در روش مونت کارلوی حجم محدود یک فرایند تکراری نیست، مشکل همگرایی حل که اکثر روش های عددی با آن مواجه هستند در این روش وجود ندارد.
- این پژوهش به وضوح نشان داد که روش مونت کارلوی حجم محدود قابلیت پیش بینی دقیق و قابل اعتماد دما را در مسایل رسانش گرمایی عملی نظیر هندسه های پیچیده، ضریب رسانش گرمایی متغیر، شرایط مرزی گوناگون و وجود منبع گرمایی متغیر بدون نیاز به تغییر در شکل گسسته معادله گرما داراست. همچنین این روش بسیار مناسب برای مسایل رسانش گرمایی معکوس خواهد بود که به تخمین خواص مجهول ماده به منظور دستیابی به شار گرما یا توزیع دمای مطلوب در یک یا چند نقطه یا یک ناحیه محدود می پردازند و نیازی به حل کل دامنه محاسباتی نیست.

منابع

- [1] M. Norouzi, H. Rahmani, A.K. Birjandi, A.A. Joneidi, A general exact analytical solution for anisotropic non-axisymmetric heat conduction in composite cylindrical shells, International Journal of Heat and Mass Transfer, 93 (2016) 41-56.
- [2] A. Gallegos-Muñoz, C. Violante-Cruz, B.J.A. Balderas, V.H. Rangel-Hernandez, J.M. Belman-Flores, Analysis of the conjugate heat transfer in a multi-layer wall including an air layer, Applied Thermal Engineering, 30 (2010) 599-604.
- [3] N. Noda, Thermal stresses in functionally Graded materials, Journal of Thermal Stresses, 22(4-5) (1999)

- inverse heat conduction problem, International Journal of Heat and Mass Transfer, 62 (2013) 31–39.
- [19] M. Ohmichi, N. Noda, N. Sumi, Plane heat conduction problems in functionally graded orthotropic materials, Journal of Thermal Stresses, 40(6) (2017) 747-764.
- [20] D.W. Hahn, M. Necati Özişik, Heat conduction, 3rd ed ed., John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2012.
- [21] H. Naeimi, F. Kowsary, Finite Volume Monte Carlo (FVMC) method for the analysis of conduction heat transfer, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 41 (2019) 260.
- thermophysical properties of binary Co–Gd liquid alloys, Journal of Alloys and Compounds, 627 (2015) 410–414.
- [16] A. Karchani, R.S. Myong, Convergence analysis of the direct simulation Monte Carlo based on the physical laws of conservation, Computers and Fluids, 115 (2015) 98-114.
- [17] A. Haji-Sheikh, F.P. Buckingham, Multidimensional inverse heat conduction using the Monte Carlo method, Journal of Heat Transfer, Transaction of ASME, 115 (1993) 26-33.
- [18] K.A. Woodbury, J.V. Beck, Estimation metrics and optimal regularization in a Tikhonov digital filter for the

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

H. Naeimi, F. Kowsari, Solution of the Isotropic Heat Diffusion Equation using the Finite Volume Monte Carlo Method, Amirkabir J. Mech Eng., 53(Special Issue 1) (2021) 467-482.

DOI: 10.22060/mej.2019.16275.6318

