نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک، دوره ۵۳، شماره ویژه ۱، سال ۱۴۰۰، صفحات ۵۵۳ تا ۵۷۲
DOI: 10.22060/mej.2019.16538.6383

تحلیل انتقال حرارت گذرا غیرخطی با استفاده از دو روش انتگرال‌گیری با توزیع متفاوت نقاط انتگرال‌گیری در دامنه در یک فرمولاسیون بدون مش

سحر کوشکی[۱]، محمود خداداد سریزدی[۱*]، امیر خسروی‌فرد[۲]

[۱] دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران
[۲] دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۲۱-۰۳-۱۳۹۸
بازنگری: ۰۳-۰۷-۱۳۹۸
پذیرش: ۱۴-۰۸-۱۳۹۸
ارائه آنلاین: ۱۸-۰۹-۱۳۹۸

کلمات کلیدی:
شرط مرزی همرفتی و تابشی
روش بدون مش
انتقال حرارت گذرای غیرخطی
روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین
سلول پس‌زمینه

خلاصه: در این مقاله، مسئله انتقال حرارت گذرای غیرخطی، با هر دو شرط مرزی همرفتی و تابشی، مطالعه شده است. فرمولاسیون بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی در ترکیب با دو روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین و روش مربعی گاوس که از سلول پس‌زمینه استفاده می‌کند؛ برای محاسبه انتگرال‌های دامنه‌ای، به‌کار رفته است. ابتدا دمای حاصل از حل تحلیلی مسئله انتقال حرارت گذرا با شرایط مرزی همرفتی و تابشی در یک دامنه همگن، با نتایج حل بدون مش مقایسه و همخوانی آن‌ها تایید شده است. سپس، مسئله انتقال حرارت گذرا با هر دو نوع شرط مرزی در نمونه‌های کامپوزیت لایه‌ای و مدرج تابعی، با استفاده از هر دو روش انتگرال‌گیری ذکر شده در فرمولاسیون بدون مش، حل شده است و دماهای به‌دست آمده با دمای حاصل از حل مسئله مشابه با نرم‌افزار آباکوس، مقایسه شده‌اند. مطابق نتایج حاصله، استفاده از روش تبدیل کارتزین در مقایسه با روش سلول پس‌زمینه، در مسائل با شرایط مرزی همرفتی حداقل خطا را به نصف و در مسائل با شرایط مرزی تشعشعی، خطا را تا یک چهارم کاهش می‌دهد. همچنین، این روش عددی یک روش بدون مش است که به هیچ مش‌بندی نیاز ندارد. میزان خطا با استفاده از روش سلول پس‌زمینه در مسائل دارای شرایط مرزی تشعشعی در مقایسه با شرایط مرزی همرفتی، بیشتر است. همین موضوع، مزیت استفاده از روش تبدیل کارتزین را در مسائل با شرط مرزی تشعشعی، که به دلیل وابسته بودن شرایط مرزی به دما، میزان غیرخطی بودن مسئله در آن‌ها بیشتر است؛ نشان می‌دهد.

۱- مقدمه

امروزه مواد جدیدی مانند مواد کامپوزیت لایه‌ای و مدرج تابعی، به دلیل مزایای اقتصادی و زیست‌محیطی آن‌ها، کاربردهای متعددی به‌ویژه در صنایع با دماهای بالاتر پیدا کرده‌اند [۱]. برای مثال، در مواد مدرج تابعی، به دلیل داشتن یک میکروساختار پیوسته، تغییر پیوسته خواص ماکروسکوپی مانند رسانایی حرارتی و گرمای ویژه، رخ می‌دهد. درنتیجه، این مواد به کاندیدای مناسبی برای استفاده در صنایع با گرادیان دمایی بالا، مانند پوشش‌های حفاظت حرارتی، محفظه‌های احتراق سوخت، پره توربین‌های گاز و غیره، تبدیل شده‌اند [۲-۵] .

با توجه به کاربردهای متعدد مواد مدرج تابعی در صنایع مختلف، ارائه روش‌هایی که بتواند رفتار حرارتی این مواد را بررسی کند، کار ارزشمندی است. به دلیل طبیعت غیرهمگن مواد مدرج تابعی، حل مسئله انتقال حرارت گذرا در این مواد، نیازمند استفاده از یک ابزار عددی قدرتمند است؛ زیرا، حل‌های تحلیلی برای مسئله انتقال حرارت گذرا تنها در دامنه‌هایی با مواد همگن و ایزوتروپیک و همچنین هندسه‌ها و شرایط مرزی ساده در دسترس می‌باشند [۶]. از طرف دیگر، با در دست داشتن روش‌های عددی کارآمد، و با به‌کار بردن یک الگوریتم حل معکوس مناسب، می‌توان از این روش‌های عددی، برای شناسایی خواص یا عیوب مواد ناهمگن و به‌ویژه، برای مانیتور کردن سلامت سازه‌ها در صنایع مختلف، استفاده کرد [۷]. بعلاوه، در

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: khodadad@yazd.ac.ir

کاربردهای با دمای بالاتر از ۶۰۰ درجه سانتی‌گراد، پدیده تشعشع در تحلیل مسائل انتقال حرارت اهمیت پیدا می‌کند. اما، بررسی مسئله رسانایی حرارتی همراه با تشعشع، کمتر مورد توجه قرار گرفته است [۸]. به همین دلیل، بررسی روش‌هایی که قادر به تحلیل این دسته از مسائل باشند، یک کار مهندسی با ارزش است.

در طول چند دهه گذشته، مطالعات زیادی بر روی گسترش روش‌های عددی، مانند روش اجزا محدود، روش اجزا مرزی، و روش‌های بدون المان، به منظور تحلیل رفتار حرارتی مواد مدرج تابعی صورت گرفته است. در بین این روش‌های عددی، روش‌های بدون مش به دلیل عدم وابستگی به مش‌بندی (برخلاف روش اجزای محدود) و عدم نیاز به محاسبه حل تکین اساسی (برخلاف روش اجزای مرزی)، که در حالت کلی برای مسائل غیرهمگن در دسترس نیست؛ مزایای بیشتری دارند. برای مثال، این روش‌ها به راحتی قابل اعمال‌اند، سرعت محاسبه بالایی دارند، به فضای کمتری برای ذخیره اطلاعات نیاز دارند و سرعت همگرایی بالاتری در مقایسه با روش‌های کلاسیک مش‌بندی دامنه یا مرز دارند [۹]. روش عددی مورد نظر در این مقاله، جهت تحلیل مسئله گذرای انتقال حرارت در مواد ناهمگن، بر اساس روش بدون‌مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی[1] است. روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، برای اولین بار برای تحلیل مسائل مکانیک جامدات توسط ونگ و لیو ارائه شد [۱۰ و ۱۱]. این روش، بعد از آن برای حل مسائل مختلفی مانند، تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه‌های پیزوالکتریک [۱۲]، ارتعاشات آزاد صفحات مدرج تابعی [۱۳]، رسانایی حرارتی صفحات مدرج تابعی در حضور منابع حرارتی [۶] و غیره، به‌کار برده شده است.

روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، بر اساس فرمولاسیون ضعیف کلی است. بنابراین، نیازمند محاسبه انتگرال‌های دامنه‌ای است. روش انتگرال‌گیری مورد استفاده در این فرمولاسیون بدون مش، در این مقاله مطالعه شده است. روش انتگرال‌گیری مرسوم در فرمولاسیون درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، استفاده از مش پس‌زمینه و محاسبه انتگرال‌ها با استفاده از روش مربعی گاوس[2] است. از جمله دیگر روش‌های انتگرال‌گیری، روش تبدیل کارتزین[3] است که توسط خسروی‌فرد و همکاران [۶]، با فرمولاسیون بدون مش درون‌یابی

1 Radial Point Interpolation Method (RPIM)
2 Gaussian Quadrature (GQ)
3 Cartesian Transformation Method (CTM)

نقطه‌ای شعاعی ترکیب شده است. ابتدا، برای صحت‌سنجی حل با روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، مسئله انتقال حرارت گذرا با هر دو نوع شرط مرزی همرفتی و تابشی در یک صفحه بزرگ از جنس فولاد ضدزنگ (ماده همگن و ایزوتروپیک) در نظر گرفته شده است و حل تحلیلی این مسئله از مراجع استخراج شده است. سپس، همین مسئله با روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی و استفاده از روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین، حل شده و نتایج در راستای عمق نمونه در لحظه ۴۲۰ ثانیه با هم مقایسه شده است؛ که از همخوانی بسیار خوبی برخوردار هستند. در ادامه، نمونه‌های کامپوزیت لایه‌ای و مدرج تابعی از جنس آلومنیوم اکساید و زیرکونیوم اکساید در نظر گرفته شده‌اند و ابتدا خواص این مواد از مراجع استخراج شده است. سپس، مسئله انتقال حرارت گذرا با هر دو شرط مرزی همرفتی و تابشی، و با به‌کارگیری روش بدون مش پیشنهاد شده، در ترکیب با هر دو روش انتگرال‌گیری ذکر شده، برای هر دو نمونه، حل شده و نتایج با حل اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه و صحه‌گذاری شده‌اند.

۲-روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی

روش‌های بدون‌مش فرم کلی، مانند روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، در حقیقت تنها از نظر عامل درون‌یاب متغیر میدان، از نوع بدون‌مش هستند و لازم است که یک مش پس‌زمینه برای انتگرال‌گیری فرم ضعیف، در تمام دامنه مسئله، مورد استفاده قرار بگیرد. در فرمولاسیون اصلی درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، انتگرال‌های دامنه‌ای با استفاده از مش‌های پس‌زمینه و روش مربعی گاوس مقداریابی می‌شوند. اما، استفاده از مش‌های پس‌زمینه برای محاسبه انتگرال‌های دامنه‌ای، مزیت اصلی روش‌های بدون‌مش که همان عدم نیاز به مش‌بندی است را، از بین می‌برد. از طرف دیگر، استفاده از روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی در ترکیب با روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین، موجب می‌شود که انتگرال‌های دامنه‌ای بدون نیاز به مش‌بندی پس‌زمینه محاسبه شوند. بنابراین، این روش، یک روش بدون مش و بدون نیاز به مش پس‌زمینه است، که به عنوان روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی شناخته می‌شود. بعلاوه، عدم نیاز به پیوستگی المان‌ها، آسانی حذف یا اضافه کردن گره‌ها به دامنه مسئله و هموار بودن نتایج به دست آمده، از دیگر ویژگی‌های

مثبت این روش است [۶]. در ادامه، ابتدا فرمولاسیون روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، شرح داده می‌شود و سپس، محاسبات عددی مربوط به مقداریابی انتگرال‌های دامنه‌ای، با استفاده از هر یک از روش‌های انتگرال‌گیری مورد بررسی در این کار، بیان می‌شود.

۲-۱- محاسبه توابع شکلدر روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی

برای تقریب زدن جواب در هر نقطه دلخواه، از تعدادی گره در اطراف آن نقطه، که اصطلاحاً در ناحیه پشتیبانی مربوط به آن نقطه قرار دارند؛ مطابق رابطه (۱) استفاده می‌شود. زیرا، برای داشتن جواب در هر نقطه، تنها داشتن اطلاعات مربوط به گره‌های اطراف آن نقطه، که در ناحیه پشتیبانی مربوط به آن نقطه قرار دارند، کفایت می‌کند و نیازی به داشتن اطلاعات مربوط به گره‌های دورتر نیست.

$$u(\vec{X})=\sum_{i=1}^{n}u_i\varphi_i(x_j,y_j)=\{\vec{\varphi}\}^T\{\vec{u}_s\} \tag{۱}$$

در رابطه (۱)، $\varphi_i(x_j,y_j)$ تابع شکل مربوط به گره iام، در محل نقطه $X=(x_j,y_j)$ است، که متغیر میدانی u در آن مجهول است. n تعداد کل گره‌ها در ناحیه پشتیبانی، و u_i مقدار متغیر میدانی در محل نقاط گره‌ای است. مقدار تابع شکل در هر نقطه برای گره‌هایی که خارج از ناحیه پشتیبانی مربوط به آن نقطه قرار می‌گیرند؛ صفر است. دقت درون‌یابی در هر نقطه، به شکل و اندازه ناحیه پشتیبانی در آن نقطه بستگی دارد [۱۴]. در اینجا روش لیو و گائو [۱۵] برای محاسبه ابعاد ناحیه پشتیبانی، استفاده شده است. در این روش، ناحیه پشتیبانی به شکل دایره در نظر گرفته می‌شود و شعاع ناحیه پشتیبانی عبارت است از $d_s=\alpha_s d_c$ که در آن α_s یک ثابت است که معمولاً بین ۱/۵ تا ۳ در نظر گرفته می‌شود و d_c فاصله متوسط بین گره‌ها در ناحیه پشتیبانی است.

بنابر رابطه (۱)، میدان دمایی تقریب زده شده در مسئله انتقال حرارت می‌تواند به شکل رابطه (۲) نوشته شود که در آن $\boldsymbol{T}(t)$ بردار دربرگیرنده مقدار دما در نقاط گره‌ای و $\boldsymbol{\varphi}^T(\boldsymbol{X})$ بردار دربرگیرنده تابع شکل است.

$$T(\vec{X},t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_j,y_j)T_i(t)=\boldsymbol{\varphi}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}(t) \tag{۲}$$

در این فرمولاسیون بدون مش، برای ساختن توابع شکلو تقریب میدان دمایی در هر نقطه دلخواه، از یک سری تابع پایه شعاعی و یک سری تابع پایه تک جمله‌ای، مطابق رابطه (۳) استفاده می‌شود [۱۱ و ۱۴]:

$$T(\vec{X},t)=\sum_{i=1}^{n}R_i(\vec{X})a_i(t)+\sum_{k=1}^{m}P_k(\vec{X})b_k(t) \tag{۳}$$

در رابطه (۳)، $R_i(\mathbf{X})$ همان توابع پایه شعاعی و $P_k(\mathbf{X})$ همان توابع پایه تک‌جمله‌ای هستند. n در این رابطه، تعداد گره‌های پراکنده در دامنه پشتیبانی نقطه مورد نظر، m تعداد توابع پایه شعاعی و $a_i(t)$ و $b_k(t)$، مجهولات زمانی مسئله هستند. در اینجا توابع پایه خطی با$m=3$ مورد استفاده قرار می‌گیرند:

$$P^T(\vec{X})=[1,x_j,y_j] \tag{۴}$$

فهرست توابع پایه شعاعی که در روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی مرسوم هستند، در مرجع [۶] آمده است. در این مقاله، تابع تی‌پی‌اِس[1] استفاده شده است. این تابع پایه شعاعی، از رابطه (۵) به‌دست می‌آید. همچنین، مقدار ۳/۰۰۱ برای پارامتر η انتخاب شده است. r_i در این رابطه، فاصله اقلیدسی بین نقطه درون‌یابی X و گره واقع در (x_i,y_i) در ناحیه پشتیبانی این نقطه، است.

$$R_i=(\sqrt{((x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2)})^{\eta} \tag{۵}$$

با اعمال خاصیت تابع دلتای کرانکر، n معادله برای گره‌های موجود در دامنه به شکل رابطه (۶)، خواهیم داشت:

$$u^h(\vec{X}_i)=u_i \tag{۶}$$

مطابق رابطه (۶)، مقدار دمای تقریب زده شده در محل گره واقع در نقطه $X=(x_i,y_i)$، برابر با مقدار دمای گره iام است. همین شرط، دستگاهی شامل nمعادله برای n نقطه گره‌ای در دامنه مسئله به‌دست می‌دهد که شکل ماتریسی این دستگاه معادلات مطابق رابطه

1 Thin Plane Spline (TPS)

(۷) است:

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{R}_o\boldsymbol{a} + \boldsymbol{P}_m\boldsymbol{b} \qquad (۷)$$

در رابطه (۷)، $\boldsymbol{u}_i^T=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ بردار دربرگیرنده مقدار دما در محل گره‌ها است و $\boldsymbol{R}_0$ ماتریس ممان توابع پایه شعاعی به شکل رابطه (۸) است:

$$\boldsymbol{R}_o = \begin{bmatrix} R_1(\mathrm{r}_1) & R_2(\mathrm{r}_1) & \ldots & R_n(\mathrm{r}_1) \\ R_1(\mathrm{r}_2) & R_2(\mathrm{r}_2) & \ldots & R_n(\mathrm{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(\mathrm{r}_n) & R_1(\mathrm{r}_n) & \ldots & R_n(\mathrm{r}_n) \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

همچنین، ضرایب مجهول a_i باید در معادلات قید مطابق رابطه (۹) صدق کنند. این معادلات، شرط لازم برای اطمینان از یکتایی ضرایب مجهول به دست آمده هستند [۶]:

$$\sum_{i=1}^{n} P_j(\vec{X}_i)a_i(t) = \boldsymbol{P}_m^T\boldsymbol{a} = 0; \; j = 1,2,\ldots,m. \qquad (۹)$$

در رابطه (۹)، $\boldsymbol{P}_m{}^T$ ماتریس ممان تک‌جمله‌ای است که برابر است با:

$$\boldsymbol{P}_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x1 & x2 & \ldots & xn \\ y1 & y2 & \ldots & yn \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \ldots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

با در نظر گرفتن معادلات (۷) و (۹)، در مجموع $n+m$ معادله، برای به‌دست آوردن تمام مجهولات، در دست خواهد بود. این دستگاه معادلات می‌تواند به شکل ماتریسی مطابق رابطه (۱۱) نوشته شود:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

که $\boldsymbol{G}$ ماتریس ممان مطابق رابطه (۱۲) است:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_0 & \boldsymbol{P}_m \\ \boldsymbol{P}_m^T & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

با جاگذاری معادله (۱۲) در معادله (۱۱)، و با توجه به معادله (۲)، رابطه (۱۳) برای محاسبه توابع شکل به دست می‌آید:

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = [\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{P}^T]\boldsymbol{G}^{-1} \qquad (۱۳)$$

۳-فرمولاسیون مسئله انتقال حرارت گذرا

در این مقاله، مسئله انتقال حرارت هدایت گذرای غیرخطی در محیطی با خواص غیرهمگن و وابسته به دما در نظر گرفته می‌شود. فرض بر آن است که انتقال حرارت گذرا در یک محیط ایزوتروپیک رخ می‌دهد. معادله انتقال حرارت گذرا، در محیط ایزوتروپیک و بدون وجود منبع حرارتی، به فرم معادله (۱۴) است:

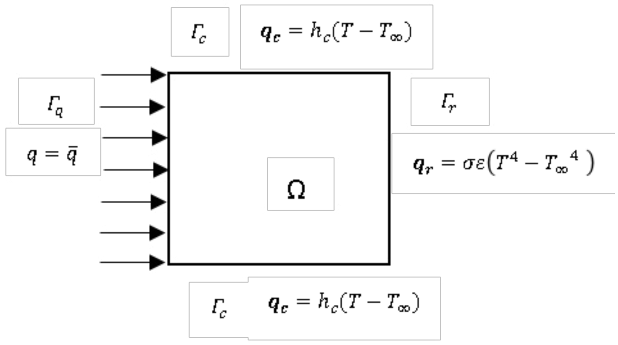
$$\nabla.(k\nabla \boldsymbol{T}) = \rho \times c \times \partial \boldsymbol{T} / \partial t \qquad (۱۴)$$

که در این رابطه، $\rho(\mathbf{x})$ چگالی ماده، $c(\mathbf{x},T)$ گرمای ویژه و $k(\mathbf{x},T)$ ضریب رسانایی حرارتی است. با قرار دادن معادله (۲) در فرم ضعیف شده از معادله (۱۴)، دستگاه معادلات (۱۵) به دست می‌آید:

$$[\boldsymbol{M}]\{\dot{\boldsymbol{T}}\} + [\boldsymbol{K}(T)]\{\boldsymbol{T}\} = \{\boldsymbol{F}(t,T)\} \qquad (۱۵)$$

در رابطه (۱۵)، $\{\boldsymbol{T}\}$ بردار دما در محل گره‌ها، $[\boldsymbol{M}]$ ماتریس جرم، $[(\boldsymbol{K}(T)]$ ماتریس سختی، و $\{(\boldsymbol{F}(t,T)\}$ بردار نیرو است. از آنجا که در مسئله انتقال حرارت، هر گره دارای یک درجه آزادی است، ابعاد ماتریس دما و نیرو $1\times N$ و ابعاد ماتریس جرم و سختی $N\times N$ می‌باشد؛ که N تعداد کل گره‌های مسئله است. ماتریس جرم از رابطه (۱۶) به‌دست می‌آید [۱۶ و ۱۷] و مقدار آن مستقل از شرایط مرزی اعمال شده به مسئله است. اما، ماتریس‌های سختی و نیرو، وابسته به شرایط مرزی مسئله هستند.

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x,T)c(x,T)\varphi_{\mathrm{i}}\varphi_{\mathrm{j}}\,\mathrm{d}\Omega \qquad (۱۶)$$



شکل ۱. انواع شرایط مرزی اعمال شده در دامنه مسئله.
Fig. 1. Different boundary conditions in the domain problem.

معادله (۱۵)، شامل مجهولات دمایی و مشتق‌های زمانی آن‌ها است؛ که در اینجا برای حل مسئله در دامنه زمانی، از روش کرنک-نیکلسون استفاده می‌شود [۱۸]. به این ترتیب، با در نظر گرفتن حل مسئله بین دو گام زمانی s و $s+1$، معادله (۱۵) به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به شکل معادلات (۱۷) تا (۲۰) تبدیل می‌شود:

$$\{T\}_{s+1} = [\hat{K}_{s+1}]^{-1}(\bar{K}_s T_s + \hat{F}_{s,s+1}) \qquad (۱۷)$$

$$\hat{K}_{s+1} = M_{s+1} + 0.5 \times \Delta t_{s+1} K_{s+1} \qquad (۱۸)$$

$$\bar{K}_s = M_{s+1} - 0.5 \times \Delta t_{s+1} K_s \qquad (۱۹)$$

$$\hat{F}_{s,s+1} = 0.5 \times \Delta t_{s+1}\left[F_s + F_{s+1}\right] \qquad (۲۰)$$

از آنجا که خواص ماده، تابعی از دما در نظر گرفته می‌شوند، ماتریس‌های جرم، سختی و نیرو در هر گام زمانی با استفاده از یک روش تکرار و توزیع دما در گام زمانی قبلی، به‌دست می‌آیند. سپس، این ماتریس‌ها در یک حلقه تکرار تا همگرایی به حل با دقت مناسب، به روز می‌شوند.

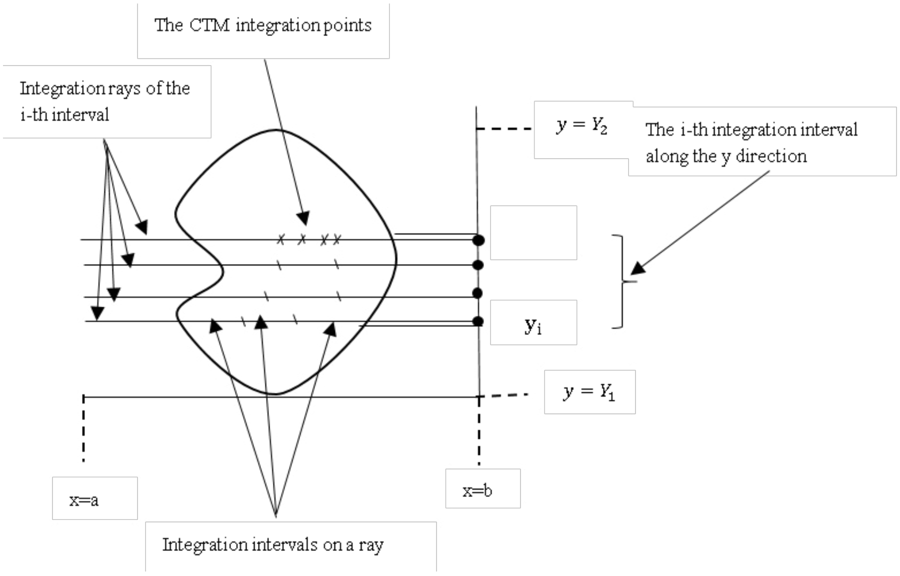
در این مقاله، مسئله انتقال حرارت با هر دو نوع شرط مرزی همرفت و تشعشع، با در نظر گرفتن شار حرارتی ثابت در یک مرز جسم، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. اگر یک جسم با هندسه ساده‌ای مطابق شکل ۱ را در حالت کلی در نظر بگیریم، به‌طوری‌که در مرز Γ_q، شار حرارتی ثابت $\bar{q}$، در مرز Γ_c انتقال حرارت همرفت و در مرز Γ_r، تشعشع داشته باشیم، شرایط مرزی در هر یک از این مرزها مطابق روابط (۲۱) تا (۲۳) خواهد بود. در رابطه (۲۱)، $\boldsymbol{n}$ بردار یکه عمود بر مرز به سمت خارج است. در روابط (۲۲) و (۲۳)، T_∞ دمای سیال اطراف و h_c ضریب انتقال حرارت همرفت و $\boldsymbol{q}_c$ و $\boldsymbol{q}_r$ نیز، به ترتیب حرارت منتقل شده از طریق همرفت و تشعشع، در مرز جسم هستند. همچنین، σ=۵/۷۶۰۳×۱۰ $^{-۸}$ W/(m²·K⁴) ثابت استفان-بولتزمن و ε ضریب تشعشع سطح، بین صفر تا ۱ است.

(۲۱) روی مرز Γ_q با شار حرارتی ثابت $$-k(\nabla T.\boldsymbol{n}) = \bar{q}$$

(۲۲) روی مرز Γ_c با شرایط مرزی همرفت $$\boldsymbol{q}_c = h_c(T - T_\infty)$$

(۲۳) روی مرز Γ_r با شرایط مرزی تشعشع $$\boldsymbol{q}_r = \sigma\varepsilon(T^4 - T_\infty{}^4)$$

اتریس‌های سختی و نیرو روی این مرزها نیز از روابط (۲۴) و (۲۵) به دست می‌آیند [۱۶ و ۱۷]. در مسئله با شرایط مرزی تابشی، اگر چه تشعشع تنها از طریق شرایط مرزی روی انتقال حرارت اثر می‌گذارد، اما، از آنجا که حرارت منتقل شده از مرز دارای تشعشع، شامل ترم‌های غیرخطی با توان چهارم از دما است، تاثیر آن بر روی دمای جسم قابل توجه است. در این حالت ضریب انتقال حرارت تشعشعی موثر مطابق رابطه (۲۶) تعریف می‌شود [۱۹] و از آنجا که این ضریب خود شدیداً تابع دما است، باعث تشدید غیرخطی بودن



شکل ۲ . دامنه انتگرال‌گیری و نقاط انتگرال‌گیری در روش مختصات کارتزین [۲۰].
Fig. 2. Domain of integration and integration points in the CTM [20].

مسئله می‌شود.

$$K_{ij} = \int_{\Omega} K(\boldsymbol{x},T)\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\right]d\Omega + \int_{\Gamma_c} h_c\varphi_i\varphi_j d\Gamma_c + \int_{\Gamma r} h_r\varphi_i\varphi_j d\Gamma_r \qquad (۲۴)$$

$$F_i = -\int_{\Gamma_q} \bar{q}\varphi i d\Gamma_q + \int_{\Gamma_c} h_c T_\infty \varphi_i d\Gamma_c + \int_{\Gamma_r} h_r T_\infty \varphi_i d\Gamma_r \qquad (۲۵)$$

$$h_r = \sigma\varepsilon[(T+T_\infty)(T^2+T_\infty^2)] \qquad (۲۶)$$

۴-روش انتگرال‌گیری

مطابق معادلات (۱۶) و (۲۴)، ماتریس‌های جرم و سختی باید از طریق محاسبه انتگرال‌های دامنه‌ای به‌دست آیند. در این مقاله، فرمولاسیون بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی در دو حالت: الف) استفاده از روش انتگرال‌گیری دوبعدی تبدیل کارتزین و ب) استفاده از سلول پس‌زمینه و روش انتگرال‌گیری مربعی گاوس [۱۴]، برای محاسبه این انتگرال‌های دامنه‌ای، بررسی شده است. روش مرسوم انتگرال‌گیری در روش‌های بدون مش، روش مربعی گاوس است. اما، استفاده از این روش دارای مشکلاتی است. از جمله آن‌که استفاده از روش مربعی گاوس، نیازمند به‌کارگیری سلول پس‌زمینه است، که کارآیی روش‌های بدون مش را کاهش می‌دهد. در ادامه، تاثیر استفاده از روش تبدیل کارتزین و روش مربعی گاوس در مسائل غیرخطی انتقال حرارت با هم مقایسه می‌شود. در ابتدا، گام‌های اصلی در هر یک از این روش‌های انتگرال‌گیری به اختصار بررسی می‌شود.

۴-۱- گام‌های اصلی روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین

یک انتگرال روی یک دامنه دو بعدی را به شکل رابطه (۲۷) در نظر بگیرید، که در آن $h(x,y)$ یک تابع دلخواه و Ω دامنه ناحیه انتگرال‌گیری، مطابق با شکل ۲ است.

$$I = \int_{\Omega} h(x,y)d\Omega \qquad (۲۷)$$

برای رسیدن به یک روش بدون مش، انتگرال دامنه‌ای، توسط قضیه گرین به یک انتگرال مرزی و یک انتگرال یک‌بعدی، تبدیل می‌شود [۲۰]:

$$I = \oint_{\Gamma}\int_{a}^{x} h(x,y)d\xi dy \qquad (۲۸)$$

با در نظر گرفتن یک ناحیه کمکی مستطیلی که ناحیه اصلی را در بر بگیرد، و انجام یک سری محاسبات ریاضی، انتگرال معادله بالا

به دو انتگرال یک‌بعدی تبدیل می‌شود:

$$I = \int_{y_1}^{y_2} g(y)dy \tag{۲۹}$$

به‌طوری‌که:

$$g(y) = \int_{a}^{b} h(x,y)dx \tag{۳۰}$$

انتگرال یک‌بعدی در معادلات (۲۹) و (۳۰)، می‌تواند با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری عددی، مانند روش گاوس کامپوزیتی داده شده در مرجع [۲۰] محاسبه شود:

$$\sum_{i=1}^{u}\sum_{j=1}^{v} JW_j G(\eta_j) \tag{۳۱}$$

که در آن، $G(\eta)=g(y(\eta))$ و $J=\mathrm{d}y/\mathrm{d}\eta=(y_{i+1}-y_i)/2$ است. $g(y_i)$ نیز مطابق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$g(y_i) = \sum_{j=1}^{I} \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j}} h(x,y_i)dx \tag{۳۲}$$

$$\int_{x_{2j-1}}^{x_j} h(x,y_i)dx = \sum_{r=1}^{p}\sum_{s=1}^{q} \hat{J}W_s H(\xi_s) \tag{۳۳}$$

به‌طوری‌که $H(\xi)=h(x(\xi),y_i)$ و $J=(x_{2j}-x_{2j-1})/2p$. محدوده انتگرال در معادله (۳۲) نیز، بر اساس روندی که در مرجع [۲۰] توضیح داده شده است، تعیین می‌شود. بعد از کمی ساده‌سازی، انتگرال معادله (۲۷)، مطابق مرجع [۲۰]، می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$I = \sum_{i=1}^{M} W^{2D}(x_i)\times h(x_i) = \boldsymbol{W}^{2D}.\boldsymbol{H} \tag{۳۴}$$

به‌طوری‌که $\boldsymbol{W}^{2D}(x_i)$ وزن انتگرال‌گیری مربوط به iامین نقطه انتگرال‌گیری، و M تعداد نقاط انتگرال‌گیری در روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین است.

۲-۴- محاسبات عددی روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین

در روش تبدیل کارتزین، معادله (۳۴) برای محاسبه انتگرال‌های دامنه‌ای (معادلات (۱۶) و (۲۴)) به‌کار می‌رود. انتگرال‌های مرزی در محاسبات ماتریس سختی و بردار نیرو نیز، با استفاده از روش انتگرال‌گیری گاوس محاسبه می‌شوند. به این ترتیب، ماتریس‌های جرم و سختی و بردار نیرو، از روابط (۳۵) تا (۳۷) به‌دست می‌آیند، که در آن‌ها، M تعداد نقاط انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین در دامنه مسئله، G_q و G_c و G_r نیز، به ترتیب تعداد نقاط انتگرال‌گیری گاوسی روی مرز Γ_q و Γ_c و Γ_r هستند. W_p^{2D} نیز وزن مربوط به نقاط انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین، در رابطه مربوطه است. اما در انتگرال‌های یک‌بعدی (روی مرز جسم)، که شامل ترم‌های دوم و سوم در معادله (۳۶) و تمام ترم‌های معادله (۳۷) است، W_p^{1D} وزن مربوط به نقاط انتگرال‌گیری گاوسی است.

$$M_{ij} = \sum_{p=1}^{M} W_p^{2D}(R_p \times C_p \times S_{p,i} \times S_{p,j}) \tag{۳۵}$$

$$\begin{aligned} K_{ij} = &\sum_{p=1}^{M} W_p^{2D}[A_p(S_{p,i}^x \times S_{p,j}^x + S_{p,i}^y \times S_{p,j}^y)] + \\ &\sum_{p=1}^{G_c} W_p^{1D}(h_c \times S_{p,i} \times S_{p,j}) + \sum_{p=1}^{G_r} W_p^{1D}(h_r(G_4) \times S_{p,i} \times S_{p,j}) \end{aligned} \tag{۳۶}$$

$$\begin{aligned} F_i = &-\sum_{p=1}^{G_q} W_p^{1D}(\overline{q} \times S_{p,i}) + \\ &\sum_{p=1}^{G_c} W_p^{1D}(h_c \times T_\infty \times S_{p,i}) + \sum_{p=1}^{G_r} W_p^{1D}(h_r \times T_\infty \times S_{p,i}) \end{aligned} \tag{۳۷}$$

دیگر بردارها و ماتریس‌ها در روابط (۳۵) تا (۳۷) نیز، مطابق با روابط (۳۸) تا (۴۱) تعریف می‌شوند:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} \rho(x_1,T) \\ \rho(x_2,T) \\ \vdots \\ \rho(x_M,T) \end{Bmatrix}; \{A\} = \begin{Bmatrix} k(x_1,T) \\ k(x_2,T) \\ \vdots \\ k(x_M,T) \end{Bmatrix}; \{C\} = \begin{Bmatrix} c(x_1,T) \\ c(x_2,T) \\ \vdots \\ c(x_M,T) \end{Bmatrix} \tag{۳۸}$$

$$S = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_M) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_2(x_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_N(x_1) & \varphi_N(x_2) & \cdots & \varphi_N(x_M) \end{bmatrix} \tag{۳۹}$$

$$S^x = \begin{bmatrix} \frac{\varphi_1(x_1)}{\partial x} & \frac{\varphi_1(x_2)}{\partial x} & \cdots & \frac{\varphi_1(x_M)}{\partial x} \\ \frac{\varphi_2(x_1)}{\partial x} & \frac{\varphi_2(x_2)}{\partial x} & \cdots & \frac{\varphi_2(x_M)}{\partial x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varphi_N(x_1)}{\partial x} & \frac{\varphi_N(x_2)}{\partial x} & \cdots & \frac{\varphi_N(x_M)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (۴۰)$$

$$S^y = \begin{bmatrix} \frac{\varphi_1(x_1)}{\partial y} & \frac{\varphi_1(x_2)}{\partial y} & \cdots & \frac{\varphi_1(x_M)}{\partial y} \\ \frac{\varphi_2(x_1)}{\partial y} & \frac{\varphi_2(x_2)}{\partial y} & \cdots & \frac{\varphi_2(x_M)}{\partial y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varphi_N(x_1)}{\partial y} & \frac{\varphi_N(x_2)}{\partial y} & \cdots & \frac{\varphi_N(x_M)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (۴۱)$$

۳-۴-محاسبات عددی در استفاده از روش انتگرال‌گیری گاوس و سلول پس‌زمینه

در محاسبه مختصات نقاط انتگرال‌گیری با استفاده از سلول پس‌زمینه، کافی است یک سلول‌بندی پس‌زمینه، که در برگیرنده تمام دامنه مسئله است؛ در نظر گرفته شود و با یک تقسیم‌بندی منظم در راستای عمودی و افقی، این نقاط تولید شوند. برای محاسبه انتگرال‌های دامنه‌ای در این حالت نیر، از روش گاوس کامپوزیتی داده شده در رابطه (۳۱) استفاده می‌شود. برای محاسبه انتگرال‌های روی مرز در معادلات (۳۶) و (۳۷) نیز، مجدداً از روش گاوس یک‌بعدی استفاده می‌شود.

۵-صحت‌سنجی با حل تحلیلی

مسئله انتقال حرارت گذرا با شرایط مرزی همرفتی، در دامنه همگن، دارای حل تحلیلی با استفاده از سری فوریه است [۲۱]. این حل تحلیلی برای انتقال حرارت یک‌بعدی در راستای محور x و برای یک صفحه مستطیلی بزرگ عبارت است از:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin\lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n x / L) \quad (۴۲)$$

که در رابطه (۴۲)، $\theta = T(x,t) - T_\infty / T_i - T_\infty$ دمای بدون بعد، T_i دمای اولیه، L طول کل جسم در راستای محور x، $\tau = \alpha t / L^2$ زمان بدون بعد، معروف به عدد فوریه است. همچنین، $\alpha = k/(\rho c)$ همان دیفیوزیویتی حرارتی ماده است.

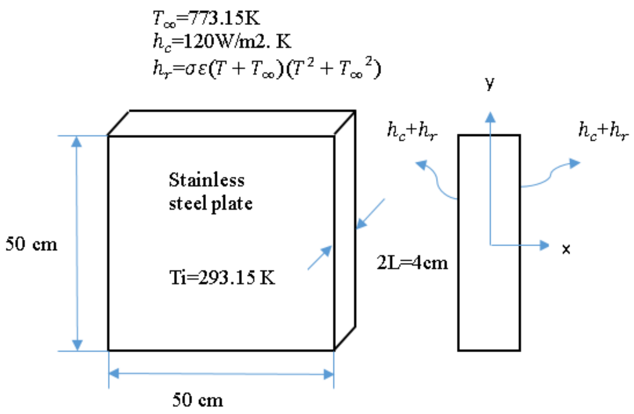
در حالتی که انتقال حرارت تشعشعی نیز در مرز جسم در حال رخ دادن است، با محاسبه ضریب انتقال حرارت همرفتی معادل با استفاده از رابطه (۲۶)، می‌توان ضریب انتقال حرارت همرفتی کل در مرز را از رابطه $h_t = h_c + h_r$ به‌دست آورد. در رابطه (۴۲)، λ_n مقادیر ویژه معادله زیر هستند:

$$\lambda_n \tan\lambda_n = Bi \quad (۴۳)$$

که در رابطه (۴۳)، $Bi = h_t L / k$ عدد بایو است. درمحاسبه دما با استفاده از رابطه (۴۲)، به دلیل سرعت میرایی بالای ترم نمایی، نیازی به در نظر گرفتن تعداد بینهایت ترم نیست، بلکه برای $\tau > ۰/۲$ می‌توان تنها ترم اول را برای تقریب‌زدن حل استفاده کرد و در این حالت خطایی کمتر از ۲ درصد داریم [۲۱].

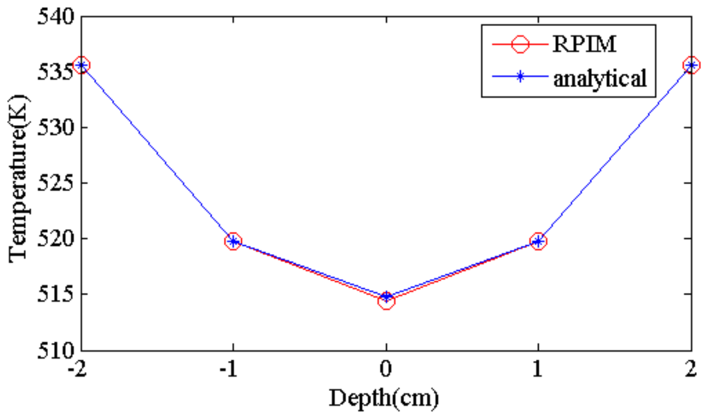
برای بررسی صحت حل با استفاده از روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، یک صفحه بزرگ از جنس فولاد ضدزنگ و با خواص همگن و مستقل از دما و شرایط مرزی و اولیه مطابق شکل۳، در نظر گرفته می‌شود. رسانایی حرارتی ماده برابر ۱۶ وات بر مترمربع در کلوین، چگالی آن برابر با ۸۳۱۴ کیلوگرم بر مترمکعب، گرمای ویژه آن ۵۰۲/۱ ژول بر کیلوگرم در کلوین است [۲۱].

این مسئله با استفاده از معادله (۴۲) در زمان ۴۲۰ ثانیه، با استفاده از گام زمانی ۵ ثانیه‌ای برای محاسبه ضریب همرفتی معادل برای حالت تشعشعی حل شده است. برای محاسبه این ضریب، در هر گام زمانی، دمای جسم در مرز آن محاسبه شده و ضریب h_r که تابعی از دما است، برای آن محاسبه شده است و ضریب همرفت کل به‌دست آمده است. از این ضریب برای محاسبه دما در گام بعدی استفاده می‌شود و به همین ترتیب ضریب همرفتی کل در مرز، در هر گام زمانی تا همگرایی به حل با دقت مناسب، به روز رسانی می‌شود. همچنین، برای محاسبه دمای تحلیلی با استفاده از معادله (۴۲)، از تقریب ترم اول استفاده شده است زیرا همواره شرط $\tau > ۰/۲$ برقرار



شکل ۳ . دامنه و شرایط مرزی و اولیه برای مسئله همگن با حل تحلیلی.

Fig. 3. Domain, boundary and initial conditions for homogenouse problem with analytical solution.



شکل ۴ . مقایسه دمای تحلیلی و دمای به‌دست آمده از حل بدون مش در طول عمق نمونه همگن.

Fig. 4. Comparsion of temperature depth profiles obtained from analytical and meshless solution in the homogenouse sample

است. همچنین، مسئله معادل انتقال حرارت یک‌بعدی در صفحه x-y با استفاده از ۲۵۵ گره در دامنه و گام زمانی ۵ ثانیه، با استفاده از روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی و استفاده از روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین، حل شده است. نمودار تغییر دما در نمونه در راستای محور x در زمان ۴۲۰ ثانیه با استفاده از حل تحلیلی و مدل کردن همین مسئله با استفاده از روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی در شکل ۴ مقایسه شده است که هم‌خوانی بالایی با هم دارند.

به این ترتیب دقت بالای حل با استفاده از روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی با استفاده از روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین در مقایسه با استفاده از فرمولاسیون حل تحلیلی در مسئله‌ای با شرایط مرزی همرفتی و تابشی تایید می‌شود. در ادامه، روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی برای حل مسئله انتقال حرارت گذرا در نمونه‌های کامپوزیت لایه‌ای و مدرج تابعی به‌کار گرفته می‌شود.

۶-خواص فیزیکی و مشخصات نمونه‌های غیرهمگن

در هر یک از مثال‌های زیر، دو نمونه در نظر گرفته شده است. نمونه اول، یک نمونه کامپوزیت لایه‌ای با یک حفره دایره‌ای در وسط نمونه، و نمونه دوم، یک نمونه مدرج تابعی است. هر مثال با شرایط مرزی مشابه، برای هر دو نمونه حل شده است. مواد سازنده این نمونه‌ها از دو پودر آلومنیوم اکساید و زیرکونیوم اکساید ۳ درصد مولی، در نظر گرفته شده‌اند. نمونه لایه‌ای، شامل چهار لایه است که لایه اول زیرکونیوم اکساید خالص، لایه دوم ۲۵ درصد حجمی آلومنیوم

اکساید و ۷۵ درصد حجمی زیرکونیوم اکساید است. در لایه‌های بعد، در هر لایه کسر حجمی آلومنیوم اکساید ۲۵ درصد افزایش می‌یابد طوری که در لایه سوم کسر حجمی هر پودر ۵۰ درصد و در لایه آخر کسر حجمی آلومنیوم اکساید و زیرکونیوم اکساید به ترتیب ۷۵ و ۲۵ درصد است. ضخامت هر لایه ۲/۵ میلی‌متر، و طول کل جسم ۱۰ میلی‌متر است. همچنین یک حفره دایره‌ای به شعاع ۲/۵ میلی‌متر، در مرکز این نمونه ایجاد شده است.

در نمونه مدرج تابعی، مجدداً طول کل نمونه ۱۰ میلی‌متر است و ۲ میلی‌متر اول و آخر نمونه، شامل ده لایه با ضخامت ۰/۲ میلی‌متر است، طوری که لایه سطحی در هر دو سمت نمونه آلومنیوم اکساید خالص است و از لایه دوم به بعد، در هر دو سمت کسر حجمی زیرکونیوم اکساید ۱۰ درصد افزایش می‌یابد، تا در لایه ۱۰ام از هر دو سمت، ۹۰ درصد زیرکونیوم اکساید و ۱۰ درصد آلومنیوم اکساید داریم. ۶ میلی‌متر وسط نمونه نیز زیرکونیوم اکساید خالص است.

برای محاسبه خواص موثر در یک نقطه از نمونه‌های لایه‌ای یا تابعی، تکنیک‌های همگن‌سازی مانند قانون مخلوط‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. این قانون به دلیل سادگی آن، به شکل گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد [۶]. خواص موثر در هر نقطه با استفاده از معادله (۴۴) به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$p = p_1 v_1 + p_2 v_2 \tag{۴۴}$$

رسانایی حرارتی و گرمای ویژه آلومنیوم اکساید [۲۲ و ۲۳] و زیرکونیوم اکساید [۲۴ و ۲۵] مطابق روابط (۴۵) تا (۴۸) وابسته به دما می‌باشد. همچنین، چگالی آلومنیوم اکساید و چگالی زیرکونیوم اکساید به ترتیب برابر با ۳۸۰۰ و ۵۹۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب است [۲۴ و ۲۵] (از تغییر چگالی با دما صرف‌نظر شده است).

$$k_{Al_2O_3} = 5.5 + 34\times\exp\{-0.0033\times(T-273)\}; \quad (\text{in}(\text{W/ m}\times\text{K}), 298-1573\text{K}) \tag{۴۵}$$

$$c_{Al_2O_3} = 1.04 + 1.74\times10^{-4}\times T - 2.79\times10^{4}\times T^{-2}(in(\text{J}\times\text{kg}^{-1}\times\text{K}^{-1}), 298 to 1737\text{K}) \tag{۴۶}$$

$$k_{ZrO_2} = 2.276 + 0.0056\times T - 1.2621\times10^{-5}\times T^2 + 9.9895\times10^{-9}T^3 - 2.7527\times10^{-12}\times T^4; (\text{W / m}\times\text{K}) \tag{۴۷}$$

$$c_{ZrO_2} = 239.34022 + 1.05269\times T - 0.00112\times T^2 + 5.62217\times10^{-7}\times T^3 - 1.07881\times10^{-10}\times T^4; (\text{J}\times\text{kg}^{-1}\times\text{K}^{-1}) \tag{۴۸}$$

در مثال‌های حل شده، دمای محیط اطراف T_∞=۲۹۹/۶۵ K دمای اولیه جسم T_0=۲۹۹/۱۵ K است.

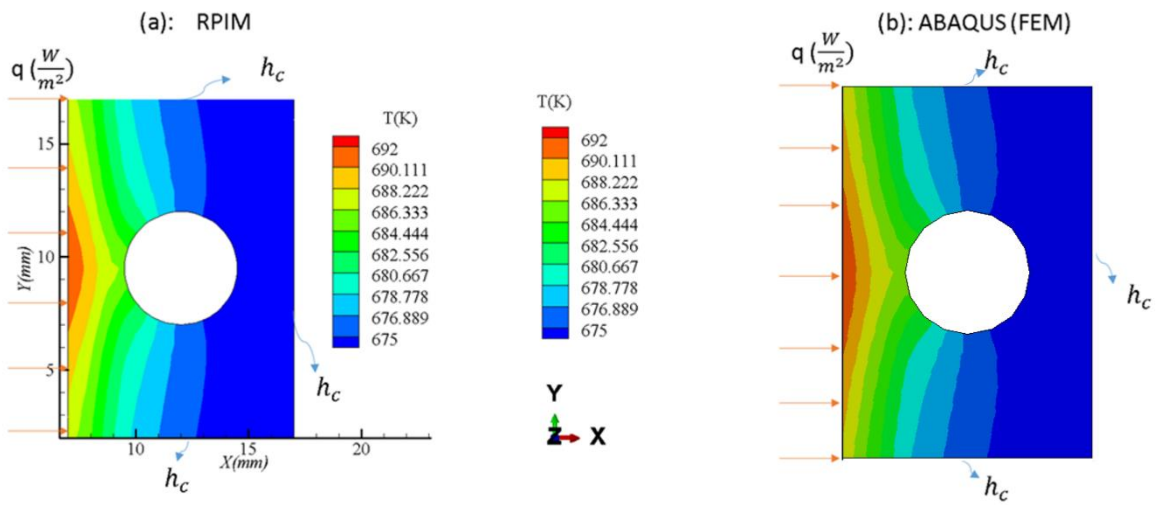
۷-مثال‌های عددی و بررسی نتایج

۷-۱-مسئله با مرز دارای انتقال حرارت همرفت

در این مثال، شار حرارتی ثابت ۱ kW/m^2 به مرز قایم Γ_q مطابق شکل۱ اعمال می‌شود، و سه مرز دیگر دارای انتقال حرارت همرفت با ضریب انتقال حرارت همرفت h_c=۳/۱ $\text{kW/(m}^2\cdot\text{K)}$ در نظر گرفته شده‌اند. مسئله انتقال حرارت گذرا در آباکوس با المان خطی DC2D4 و گام زمانی ۳۰ ثانیه حل شده (با استفاده از ۲۰۴ گره و ۱۷۲ المان برای نمونه لایه‌ای و ۲۷۵ گره و ۲۴۰ المان برای نمونه مدرج تابعی) و سپس نتایج با حل بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، با همین گام زمانی در حل کرنک-نیکلسون، و همین تعداد گره، مقایسه شده است. برای مقایسه تاثیر استفاده از روش تبدیل کارتزین با استفاده از مش پس‌زمینه، هر مثال با استفاده از هر کدام از این روش‌ها در ترکیب با روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی به شکل جداگانه‌ای حل شده است و نتایج مقایسه شده‌اند.

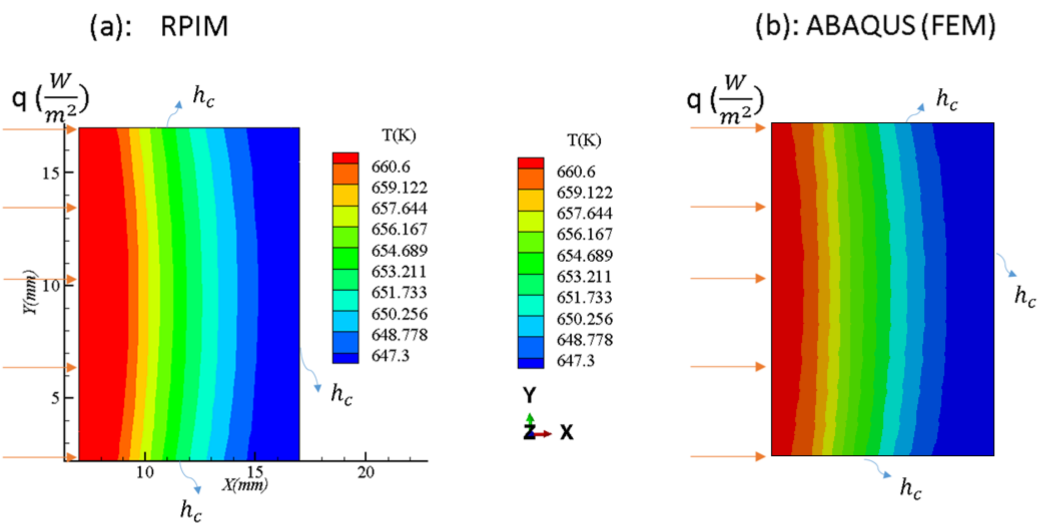
۷-۱-۱- مقایسه کانتورهای دمایی در نمونه با شرایط مرزی همرفتی

کانتور دمایی در زمان ۱۲۰۰ ثانیه حاصل از حل اجزای محدود با نرم‌افزار آباکوس، برای نمونه لایه‌ای در شکل۵، آمده است. همچنین، کانتور دمایی به دست آمده از حل بدون مش با استفاده از روش تبدیل کارتزین، در نرم‌افزار تک‌پلات در همین زمان رسم شده است و همان‌طور که در شکل۵ (الف) مشاهده می‌شود؛ مطابقت قابل توجهی با حل آباکوس دارد. وجود حفره در دامنه نمونه لایه‌ای، منجر به ایجاد یک هندسه نامنظم می‌شود؛ با این وجود، همان‌طور که در شکل۵ مشاهده می‌شود، حتی در نزدیکی حفره، کانتور دمایی حاصل از حل آباکوس و بدون مش بسیار شبیه به هم هستند؛ که نشان از دقت بالای پاسخ دمایی به‌دست آمده با این روش بدون مش دارد.کانتور دمایی در زمان ۱۲۰۰ ثانیه، حاصل از حل



شکل ۵ . توزیع دما در نمونه لایه‌ای با شرایط مرزی همرفت در زمان ۱۲۰۰ ثانیه به دست آمده از. (الف). حل بدون مش با روش تبدیل کارتزین. (ب). حل اجزای محدود آباکوس.

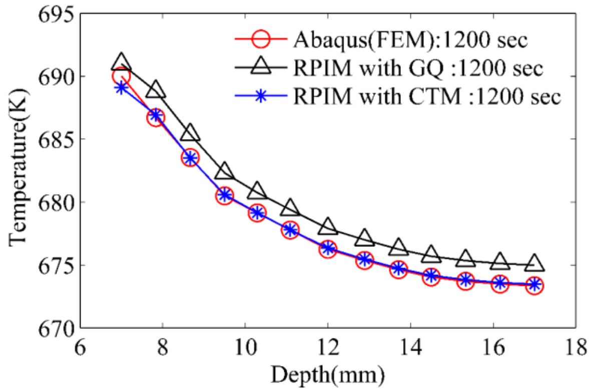
Fig. 5. Temperature distribution in the layered sample with convection boundary condition at t=1200 sec obtained from. (a). Meshless method with CTM. (b). FEM (ABAQUS).



شکل ۶ . توزیع دما در نمونه تابعی با شرایط مرزی همرفت در زمان ۱۲۰۰ ثانیه به دست آمده از. (الف). حل بدون مش با روش تبدیل کارتزین. (ب). حل اجزای محدود آباکوس.

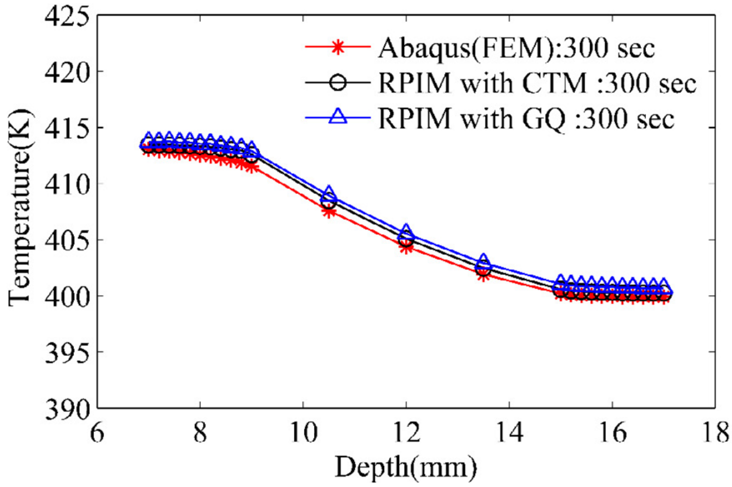
Fig. 6. Temperature distribution in the FGM sample with convection boundary condition at t=1200 sec obtained from. (a). Meshless method with CTM. (b). FEM (ABAQUS).

اجزای محدود با نرم‌افزار آباکوس، برای نمونه مدرج تابعی در شکل۶ آمده است. مقایسه توزیع دما در نمونه لایه‌ای و نمونه مدرج تابعی، نشان می‌دهد که کانتور توزیع دما در نمونه مدرج تابعی یکنواخت‌تر است. به عبارت دیگر، طراحی نمونه با تغییر خواص یکنواخت‌تر در نمونه تابعی، نسبت به نمونه کامپوزیت لایه‌ای، منجر به داشتن توزیع دمای یکنواخت‌تر شده است؛ به‌طوری‌که در ابتدا و انتها نمونه تابعی، که به شکل مدرج مدل شده‌اند، تنها یک بازه در کانتور توزیع دما دیده می‌شود. بعلاوه، با مقایسه .شکل‌های ۵ و ۶، دیده می‌شود که بازه تغییر دما در طول کل نمونه درلحظه ۱۲۰۰ ثانیه، برای نمونه کامپوزیت لایه‌ای حدود ۲۳ درجه کلوین و برای نمونه مدرج تابعی حدود ۱۳ درجه کلوین است. بنابراین، تغییر یکنواخت خواص در نمونه تابعی، باعث کمتر شدن اختلاف دما در طول نمونه و در نتیجه



شکل ۷ . مقایسه توزیع دما در راستای یک مسیر افقی در نمونه لایه‌ای با شرایط مرزی همرفت.

Fig. 7. Comparsion of the temperature depth profile in the layered sample with convection boundary condition.



شکل ۸ . مقایسه توزیع دما در راستای یک مسیر افقی در نمونه تابعی با شرایط مرزی همرفت.

Fig. 8. Comparsion of the temperature depth profile in the FGM sample with convection boundary condition.

کمتر شدن گرادیان دمایی و تنش‌های حرارتی ناشی از آن می‌شود، که به روشنی مزیت استفاده از مواد تابعی در دماهای بالا را نشان می‌دهد.

۲-۱-۷-مقایسه نتایج در راستای یک مسیر افقی در مسئله با شرایط مرزی همرفتی

نمودار تغییر دما در در راستای خط y =۱۴ mm برای نمونه لایه‌ای و در راستای خط y =۹/۵ mm برای نمونه تابعی (در وسط نمونه)، با استفاده از هر دو تکنیک انتگرال‌گیری ذکر شده، در .شکل‌های ۷ و ۸ آمده است. همان‌طور که در .شکل‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌شود، در هر دو نمونه لایه‌ای و تابعی، میزان خطا با استفاده از روش تبدیل کارتزین در مقایسه با استفاده از روش مربعی گاوس و مش پس‌زمینه، کاهش می‌یابد.

مقدار حداکثر و متوسط خطا در نمونه لایه‌ای و تابعی در طول مسیر افقی، در جدول ۱ نشان داده شده است. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود، مقدار خطا همواره کمتر از ۱ درصد می‌باشد، که نشان‌دهنده دقت بالای حل بدون مش و توافق آن با حل

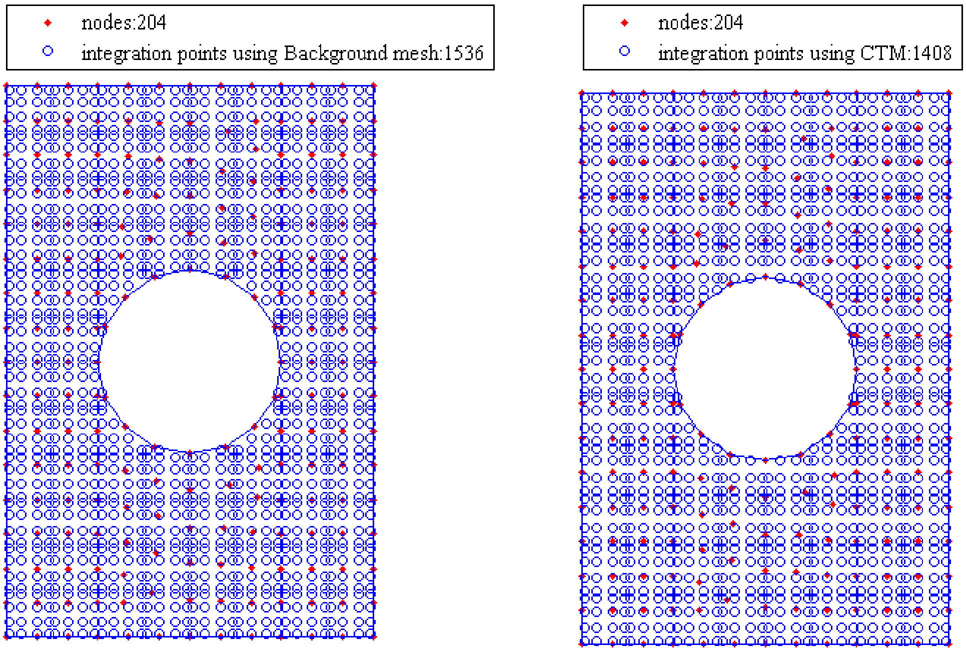
اجزای محدود است. همچنین، مقایسه دقت حل بدون مش با استفاده از هر دو روش انتگرال‌گیری، نشان می‌دهد که استفاده از مش پس‌زمینه همواره باعث افزایش میزان خطا در دمای محاسبه شده در مقایسه با حل آباکوس می‌شود.

در نمونه لایه‌ای، در حل با استفاده از روش تبدیل کارتزین، در مجموع از ۱۴۰۸ نقطه انتگرال‌گیری استفاده شده است، در حالی‌که

جدول ۱. میزان خطا درمسئله با شرایط مرزی همرفتی در مقایسه با حل آباکوس در طول مسیر افقی.

Table 1. Error value in the problem with convection boundary condition compared with ABAQUS solution along the depth.

	متوسط درصد خطا				حداکثر درصد خطا			
	در ۶۰۰ ثانیه		در ۳۰۰ ثانیه		در ۶۰۰ ثانیه		در ۳۰۰ ثانیه	
روش انتگرال‌گیری	تبدیل کارتزین	سلول پس‌زمینه	تبدیل کارتزین	سلول پس‌زمینه	تبدیل کارتزین	سلول پس‌زمینه	تبدیل کارتزین	سلول پس‌زمینه
نمونه کامپوزیت لایه‌ای	۰/۰۱۶	۰/۵۵	۰/۰۱۹	۰/۳۲	۰/۰۲۵	۰/۴۷	۰/۰۲۸	۰/۲۶
نمونه تابعی	۰/۱۳	۰/۲۳	۰/۲۰	۰/۲۶	۰/۲۶	۰/۳۳	۰/۳۲	۰/۳۵



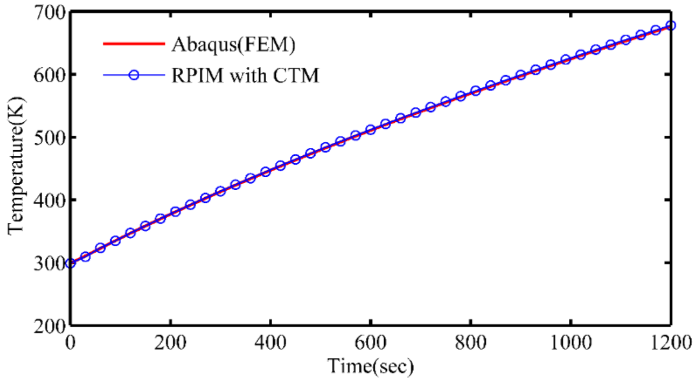
شکل ۹ مقایسه توزیع نقاط انتگرال‌گیری در روش مختصات کارتزین و روش مش پس‌زمینه.

Fig. 9. Comparsion of integration points distribution in the CTM and background cell method.

در روش مش پس‌زمینه، در مجموع ۱۵۳۶ نقطه انتگرال‌گیری به‌کار برده شده است. جهت مقایسه، چیدمان نقاط انتگرال‌گیری با استفاده از هر دو روش، در شکل۹ آمده است. در واقع، روش تبدیل کارتزین با وجود آن‌که از تعداد نقاط انتگرال‌گیری کمتری استفاده می‌کند، از دقت بالاتری برخوردار است؛ که این یک مزیت برای این روش محسوب می‌شود. با مقایسه توزیع نقاط انتگرال‌گیری در طول دامنه در این دو روش، دیده می‌شود که تعداد نقاط روی مرز حفره داخلی، در روش تبدیل کارتزین، بیشتر از روش سلول پس‌زمینه است. همین موضوع باعث محاسبه دقیق‌تر انتگرال‌های دامنه‌ای در مرز نامنظم، با استفاده از روش تبدیل کارتزین می‌شود.

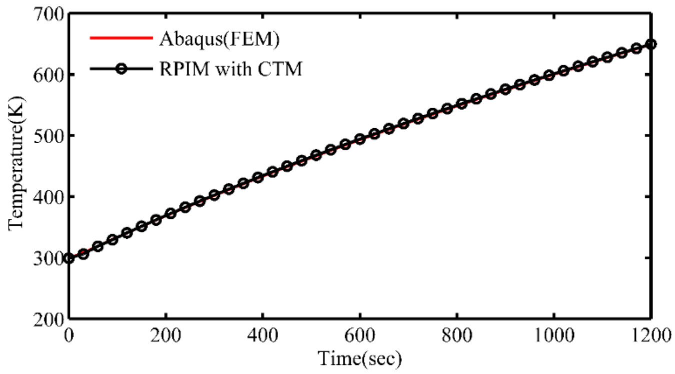
۳-۱-۷-تاریخچه دمایی در مسئله با شرایط مرزی همرفتی

در هر مسئله، یک گره از دامنه انتخاب شده است و در آن، تاریخچه زمانی مربوط به پاسخ دمایی، حاصل از حل با روش حقیقتاً بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی با استفاده از تبدیل کارتزین، با تاریخچه زمانی حاصل از حل با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه



شکل ۱۰ . تاریخچه دمایی در نمونه لایه‌ای با شرایط مرزی همرفت در گره واقع در x=۱۲ mm و y=۱۴ mm.

Fig. 10. Temperature history in the layered sample with convection boundary condition at x=12 mm and y=14 mm.



شکل ۱۱ . تاریخچه دمایی در نمونه مدرج تابعی با شرایط مرزی همرفت در گره واقع در x= ۱۳/۵ mm و y= ۹/۵ mm.

Fig. 11. Temperature history in the FGM sample with convection boundary condition at x= 13.5 mm and y= 9.5 mm.

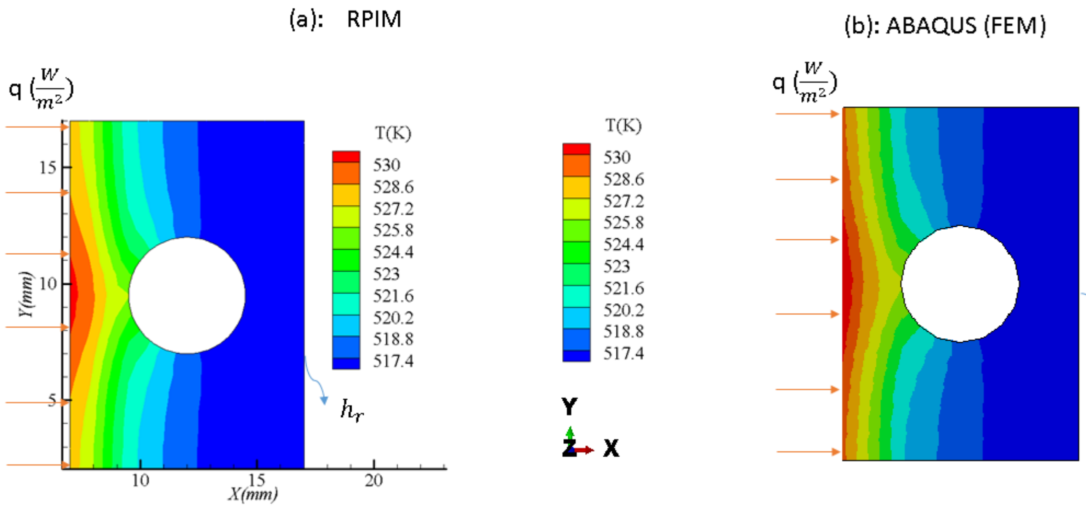
جدول ۲. میزان خطا در محاسبه تاریخچه دمایی درمسئله با شرایط مرزی همرفتی در مقایسه با حل آباکوس.

Table 2. Error value in the temperature history calculation in problem with convection boundary condition compared with ABAQUS.

	متوسط درصد خطا		حداکثر درصد خطا		مختصات بر حسب میلی‌متر
روش‌انتگرال‌گیری	تبدیل کارتزین	سلول پس‌زمینه	تبدیل کارتزین	سلول پس‌زمینه	
نمونه کامپوزیت لایه‌ای	۰/۰۳	۰/۱۸	۰/۳۳	۰/۳۶	(۱۲و۱۴)
نمونه تابعی	۰/۱۷	۰/۵۲	۰/۳۴	۰/۳۷	(۱۳/۵و۹/۵)

شده است. تاریخچه دمایی برای نمونه لایه‌ای در شکل ۱۰ و برای نمونه تابعی در شکل ۱۱ آمده است.

مختصات نقاط مورد بررسی در هر نمونه، و مقدار خطای متوسط و حداکثر در هر مسئله در جدول ۲ آمده است. مطابق جدول ۲، میزان خطا در مقایسه تاریخچه دمایی ناشی از دو روش اجزای محدود و روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، نشان می‌دهد که حل به‌دست آمده از روش بدون مش پیشنهادی کاملاً پایدار است. علاوه بر این، تاریخچه دمایی حل در هر دو نمونه با گام زمانی ۳۰ ثانیه، نشان می‌دهد که در مسئله با انتقال حرارت همرفت با گام زمانی ۳۰ ثانیه نیز، همگرایی بالایی برای حل بدون مش در مقایسه با حل اجزای محدود در نرم‌افزار آباکوس، وجود دارد.



شکل ۱۲ . توزیع دما در نمونه لایه‌ای با شرایط مرزی تشعشعی در زمان ۶۰۰ ثانیه با استفاده از. (الف). حل بدون مش با روش تبدیل کارتزین. (ب) . حل اجزای محدود آباکوس.

Fig. 12. Temperature distribution in the layered sample with radiation boundary condition at t=600 sec obtained from. (a). Meshless method using CTM. (b). FEM (ABAQUS).

۲-۷- مسئله با مرز دارای انتقال حرارت تشعشعی

در این مثال، شار حرارتی ثابت $\mathrm{kW/m^2}$ ۱به مرز قائم Γ_q مطابق شکل۱ اعمال می‌شود و دو مرز افقی بالا و پایین در شرایط عایق حرارتی در نظر گرفته شده‌اند. مرز قائم دوم نیز، دارای انتقال حرارت تشعشعی است. ضریب تشعشع سطح برابر با ۰/۳ در نظر گرفته شده است. در این مسئله نیز، مانند مسئله قبلی که با شرایط مرزی همرفتی بررسی شد، مسئله انتقال حرارت گذرا در نرم‌افزار آباکوس با المان خطی DC2D4 و گام زمانی ۳۰ ثانیه حل شده، و سپس نتایج با حل بدون مش با همین گام زمانی در حل کرنک-نیکلسون، مقایسه شده‌است. برای نمونه لایه‌ای، حل تا زمان ۶۰۰ ثانیه، و برای نمونه تابعی تا زمان ۳۰۰ ثانیه، انجام شده است. تعداد گره و المان‌های به‌کار رفته برای حل در هر نمونه، مانند قبل است.

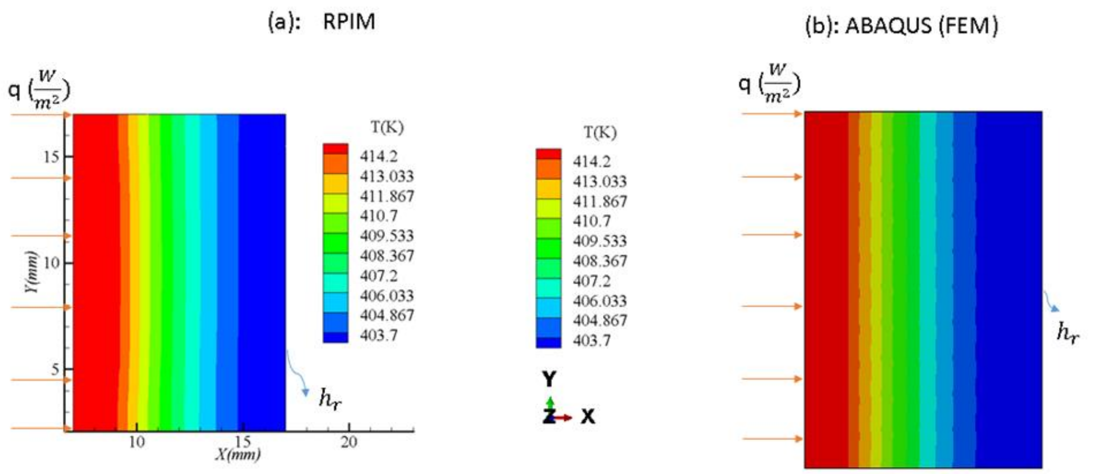
۷-۲-۱-مقایسه کانتورهای دمایی با شرایط مرزی تابشی

کانتور دمایی به‌دست آمده از حل بدون مش با استفاده از روش تبدیل کارتزین، با کمک نرم‌افزار تک‌پلات در نمونه لایه‌ای در زمان ۶۰۰ ثانیه در شکل۱۲(الف) رسم شده است. همچنین، کانتور دمایی حاصل از حل اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار آباکوس در زمان ۶۰۰ ثانیه در شکل۱۲(ب) آمده است. از آنجا که حرارت منتقل شده از مرز دارای تشعشع، تابعی از دما از مرتبه چهارم است، این شرط مرزی، باعث افزایش میزان غیرخطی بودن مسئله می‌شود. با این وجود، با توجه به شکل۱۲، همچنان تطابق بالایی میان دو حل اجزای محدود و بدون مش وجود دارد، که توانایی روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی را، در حل مسائل غیرخطی و در هندسه‌های نامنظم نشان می‌دهد.

در نمونه تابعی، کانتور دمایی به‌دست آمده از حل مسئله انتقال حرارت گذرا با شرایط مرزی تشعشعی، با استفاده از روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی و روش تبدیل کارتزین، در زمان ۳۰۰ با استفاده از نرم‌افزار تک‌پلات در شکل۱۳(الف) رسم شده است. کانتور دمایی حاصل از حل اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار آباکوس نیز، در شکل۱۳(ب) آمده است. وجود تقارن در شرایط مرزی و طراحی نمونه، در جهت محور قایم، موجب ایجاد یک توزیع دمای متقارن در جهت محور قایم شده است. بعلاوه، مطابق طراحی نمونه، دو میلی‌متر اول و آخر نمونه، به‌صورت مدرج تابعی هستند. مجدداً، تغییر دما در این نواحی تابعی بسیار ناچیز است، که توانایی مواد مدرج تابعی در ایجاد یک تغییر دمای تدریجی حتی در تغییر دماهای بالاتر را در مقایسه با نمونه لایه‌ای نشان می‌دهد.

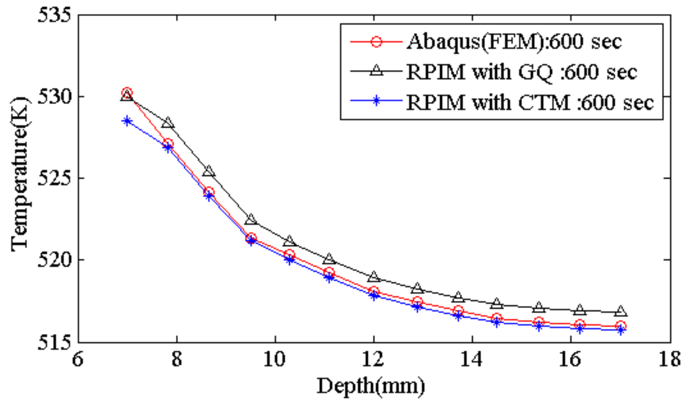
۷-۲-۲-مقایسه نتایج در راستای یک مسیر افقی در شرایط مرزی تابشی

نمودار تغییر دمای به‌دست آمده از حل بدون مش با استفاده از هر



شکل ۱۳ . توزیع دما در نمونه تابعی با شرایط مرزی تشعشعی در زمان ۳۰۰ ثانیه با استفاده از. (الف). حل بدون مش با روش تبدیل کارتزین. (ب). حل اجزای محدود آباکوس.

Fig. 13. Temperature distribution in the FGM sample with radiation boundary condition at t=300 sec obtained from. (a). Meshless method using CTM. (b). FEM (ABAQUS).

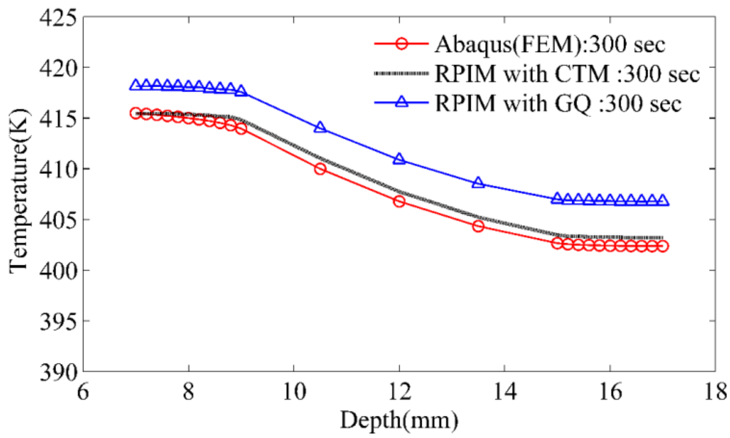


شکل ۱۴ . توزیع دما در راستای مسیر افقی y=۱۴ mm در نمونه لایه‌ای با شرایط مرزی تشعشعی.

Fig. 14. Temperature depth profile at y=14 mm in the layered sample with radiation boundary condition.

دو روش انتگرال‌گیری، با دمای به‌دست آمده از حل اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار آباکوس، در راستای خط افقی $y=۱۴$ mm نمونه لایه‌ای، در شکل۱۴ مقایسه شده است. همانطور که در این شکل دیده می‌شود؛ استفاده از روش تبدیل کارتزین، در مقایسه با استفاده از روش انتگرال‌گیری گاوس از تطابق بیشتری با حل اجزای محدود برخوردار است. در ضمن، با توجه به ثابت بودن هندسه نمونه لایه‌ای در مقایسه با مسئله حل شده با شرایط مرزی همرفتی، توزیع نقاط انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین و گاوسی در دامنه مسئله، همچنان مطابق شکل۹ است.

در نمونه مدرج تابعی، مسیر افقی $y=۹/۵$ mm در نظر گرفته شده است و نمودار توزیع دمای به‌دست آمده با استفاده از روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی با به کارگیری هر دو روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین و روش گاوس، در شکل۱۵، با دمای حاصل از حل اجزای محدود مقایسه شده است. مجدداً، مطابق شکل۱۵ استفاده از روش تبدیل کارتزین از تطابق بیشتری با حل اجزای محدود برخوردار است. در ضمن، به روشنی مشاهده می‌شود



شکل ۱۵. توزیع دما در راستای مسیر افقی y=۹/۵ mm در وسط نمونه تابعی با شرایط مرزی تشعشعی.

Fig. 15. Temperature depth profile at y=9.5 mm in the FGM sample with radiation boundary condition.

جدول ۳. مقایسه میزان خطا درمسئله با شرایط مرزی تشعشعی در مقایسه با حل آباکوس.

Table 3. Comparsion of error values in problem with radiation boundary condition compared with ABAQUS solution.

	متوسط درصد خطا				حداکثر درصد خطا			
	در ۶۰۰ ثانیه		در ۳۰۰ ثانیه		در ۶۰۰ ثانیه		در ۳۰۰ ثانیه	
روش انتگرال‌گیری	تبدیل کارتزین	سلول پس‌زمینه	تبدیل کارتزین	سلول پس‌زمینه	تبدیل کارتزین	سلول پس‌زمینه	تبدیل کارتزین	سلول پس‌زمینه
نمونه کامپوزیت لایه‌ای	۰/۰۹	۰/۱۱	۰/۰۷	۰/۱۶	۰/۵۳	۰/۳۱	۰/۳۲	۰/۲۳
نمونه تابعی	۰/۱۶	۰/۹۲	۱/۲۲	۴/۰۵	۰/۲۵	۱/۰۹	۱/۳	۴/۳۵

که در دو میلی‌متر اول و آخر نمونه که تغییر خواص به شکل تابعی بوده است، تغییر دما بسیار تدریجی و هموار است.

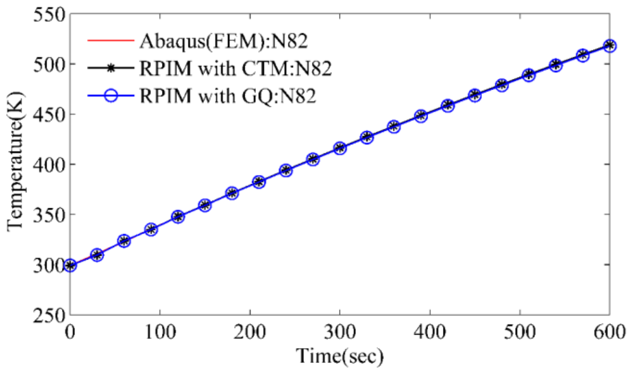
مقدار حداکثر و متوسط خطا در طول مسیر افقی، در جدول ۳ نشان داده شده است. مطابق این جدول، اختلاف دمای محاسبه شده از حل اجزای محدود و حل بدون مش با استفاده از تبدیل کارتزین، همواره کمتر از ۲ درصد می‌باشد که نشان‌دهنده دقت بالای حل بدون مش و توافق آن با حل اجزای محدود است. مطابق این جدول، در مسئله با شرط مرزی تابشی، استفاده از مش پس‌زمینه، به‌ویژه در نمونه تابعی که میزان غیرهمگن بودن خواص در آن بیشتر است، خطا را سه تا چهار برابر بیشتر می‌کند. همچنین، در مقایسه مسئله با شرایط مرزی همرفتی و تشعشعی، با وجود آن‌که در مسئله با انتقال حرارت همرفت، سه مرز جسم دارای انتقال حرارت همرفت در نظر گرفته شده است و در مسئله با تبادل حرارتی تابشی، تنها یک مرز جسم دارای تشعشع است، مقدار خطا در مسئله تابشی همواره بزرگتر است. این امر کاملاً منطقی به نظر می‌رسد، زیرا با توجه به آن‌که حرارت تابشی تابع درجه چهارم دما است، وجود این ترم غیرخطی موجب وابستگی شدیدتر مسئله به دما می‌شود و میزان خطا را افزایش می‌دهد.

۳-۲-۷- تاریخچه دمایی در شرایط مرزی تابشی

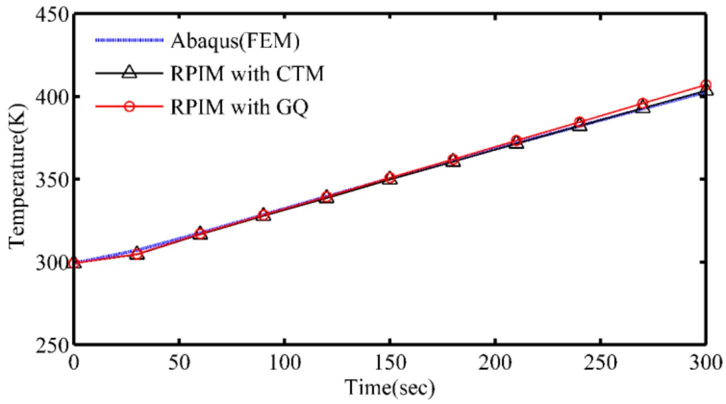
در هر مسئله، یک گره از دامنه انتخاب شده است و تاریخچه زمانی مربوط به پاسخ دمایی حاصل از حل با روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی با استفاده از هرکدام از روش‌های انتگرال‌گیری، با تاریخچه زمانی به‌دست آمده از حل با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده‌اند. مختصات نقاط مورد بررسی در هر مسئله نمونه، و مقدار خطای متوسط و حداکثر در هر مسئله در

جدول ۴ . مقایسه میزان خطا در محاسبه تاریخچه دمایی در مسئله با شرایط مرزی تشعشعی در مقایسه با حل آباکوس.
Table 4. Comparsion of erro values in the problem with radiation boundary condition compared with ABAQUS solution.

	شماره گره	مختصات بر حسب میلی‌متر	متوسط درصد خطا		حداکثر درصد خطا	
روش‌انتگرال‌گیری			تبدیل کارتزین	سلول پس‌زمینه	تبدیل کارتزین	سلول پس‌زمینه
نمونه کامپوزیت لایه‌ای	۸۲	(۱۲و۱۴)	۰/۱۴	۰/۲۱	۰/۳۲	۰/۵۱
نمونه تابعی	۱۴۸	(۱۵و۹/۵)	۰/۵۲	۱/۵۱	۱/۲۶	۴/۳



شکل ۱۶ . تاریخچه دمایی در نمونه لایه‌ای با شرایط مرزی تشعشعی در گره واقع در x=۱۲ mm و y= ۱۴ mm.
Fig. 16. Tmeperature history in the layered sample with radiation boundary condition at x=12 mm and y= 14 mm.



شکل ۱۷ . تاریخچه دمایی در نمونه تابعی با شرایط مرزی تشعشعی در گره واقع در x= ۱۳/۵ mm و y=۹/۵ mm.
Fig. 17. Temperature history in the FGM sample with radiation boundary condition at x= 13.5 mm and y=9.5 mm.

جدول ۴ آمده است.

همانطور که در جدول ۴ مشاهده می‌شود، میزان خطا در مقایسه تاریخچه دمایی ناشی از دو روش اجزای محدود و حل با استفاده از روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، نشان می‌دهد که حل به‌دست آمده از روش بدون مش پیشنهادی کاملاً پایدار است.

همچنین، مقایسه تاریخچه دمایی برای هر دو روش انتگرال‌گیری با حل آباکوس در مسئله با شرایط مرزی تشعشعی نشان‌دهنده دقت بالای حل با استفاده از تبدیل کارتزین در این نوع مسئله می‌باشد. مجدداً دیده می‌شود که دقت حل با استفاده از تبدیل کارتزین بیشتر از روش مش پس‌زمینه است.

۸-نتیجه‌گیری

مقایسه حل تحلیلی انتقال حرارت گذرا با شرایط مرزی همرفتی و تابشی در یک دامنه همگن، با نتیجه به‌دست آمده از حل بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی و روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین، تایید کننده دقت بالای حل این مسئله با این روش عددی است. همچنین، با توجه به مثال‌های حل شده، روش بدون مش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، می‌تواند با دقت بسیار بالا، در مقایسه با روش اجزای محدود، انتقال حرارت گذرا در مواد ناهمگن و با خواص وابسته به دما را حل کند. حتی در مسئله با شرایط مرزی تابشی که در آن حرارت منتقل شده از مرز دارای تشعشع، از مرتبه چهارم دما است و یک مسئله شدیداً غیرخطی است، این روش با خطای کمتر از ۲ درصد (با استفاده از روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین)، قادر به حل مسئله انتقال حرارت غیرخطی است. با توجه به دقت بالای حل بدون مش در ترکیب با روش انتگرال‌گیری تبدیل کارتزین، و با در نظر گرفتن این امر که، استفاده از روش تبدیل کارتزین موجب داشتن یک روش بدون مش و بدون نیاز به مش پس‌زمینه می‌شود، این روش می‌تواند کاندیدای مناسبی برای حل مسائل معکوس انتقال حرارت گذرا در مواد ناهمگن و غیرخطی که نیاز به استفاده از حل مستقیم، در یک حلقه تکرار دارند، باشد.

همچنین، مقایسه نتایج حل با روش تبدیل کارتزین و روش مش پس‌زمینه، نشان می‌دهد، که استفاده از روش تبدیل کارتزین، در مسئله با شرایط مرزی همرفتی حداقل خطا را به نصف و در مسئله با شرایط مرزی تشعشعی خطا را تا یک چهارم کاهش می‌دهد. در حالی‌که، تعداد نقاط انتگرال‌گیری در روش مش پس‌زمینه حتی کمی بیشتر از روش تبدیل کارتزین بوده است. بنابراین، این افزایش دقت با استفاده از روش تبدیل کارتزین، بدون نیاز به افزایش تعداد نقاط انتگرال‌گیری و زمان حل مسئله به‌دست می‌آید، که خود یک امتیاز مثبت برای این روش محسوب می‌شود.

مراجع

[1] R. Joshi, S. Alwarappan, M. Yoshimura, V. Sahajwalla, Y. Nishina, Graphene oxide: the new membrane material, Applied Materials Today, 1(1) (2015) 1-12.

[2] Y. Torres, P. Trueba, J. Pavón, E. Chicardi, P. Kamm, F. García-Moreno, J. Rodríguez-Ortiz, Design, processing and characterization of titanium with radial graded porosity for bone implants, Materials & Design, 110 (2016) 179-187.

[3] S. Naga, M. Awaad, H. El-Maghraby, A. Hassan, M. Elhoriny, A. Killinger, R. Gadow, Effect of La2Zr2O7 coat on the hot corrosion of multi-layer thermal barrier coatings, Materials & Design, 102 (2016) 1-7.

[4] P. Miranzo, M.I. Osendi, Thermal conductivity of a ZrO2–Ni functionally graded coatings, Scripta Materialia, 58(11) (2008) 973-976.

[5] J. Sladek, V. Sladek, J. Krivacek, C. Zhang, Local BIEM for transient heat conduction analysis in 3-D axisymmetric functionally graded solids, Computational mechanics, 32(3) (2003) 169-176.

[6] A. Khosravifard, M. Hematiyan, L. Marin, Nonlinear transient heat conduction analysis of functionally graded materials in the presence of heat sources using an improved meshless radial point interpolation method, Applied Mathematical Modelling, 35(9) (2011) 4157-4174.

[7] M. Dashti Ardakani, M. Khodadad, Identification of thermal conductivity and the shape of an inclusion using the boundary elements method and the particle swarm optimization algorithm, Inverse Problems in Science and Engineering, 17(7) (2009) 855-870.

[8] W. Ge, C. Zhao, B. Wang, Thermal radiation and conduction in functionally graded thermal barrier coatings. Part I: Experimental study on radiative properties, International Journal of Heat and Mass Transfer, 134 (2019) 101-113.

[9] P. Wen, Y. Hon, Y. Xu, Inverse heat conduction problems by using particular solutions, Heat Transfer—Asian Research, 40(2) (2011) 171-186.

[10] J. Wang, G. Liu, On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods, Computer methods in applied mechanics and engineering, 191(23) (2002) 2611-2630.

[11] J. Wang, G. Liu, A point interpolation meshless method based on radial basis functions, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 54(11) (2002) 1623-1648.

[12] G. Liu, K. Dai, K. Lim, Y. Gu, A radial point interpolation method for simulation of two-dimensional piezoelectric

[19] J.N. Reddy, D.K. Gartling, The finite element method in heat transfer and fluid dynamics, CRC press, 2010.

[20] A. Khosravifard, M.R. Hematiyan, A new method for meshless integration in 2D and 3D Galerkin meshfree methods, Engineering Analysis with Boundary Elements, 34(1) (2010) 30-40.

[21] Y. Cengel, Heat and mass transfer: fundamentals and applications, McGraw-Hill Higher Education, 2014.

[22] M. MUNRO, Evaluated material properties for a sintered alpha-alumina, Journal of the American Ceramic Society, 80(8) (1997) 1919-1928.

[23] P. Auerkari, Mechanical and physical properties of engineering alumina ceramics, Technical Research Centre of Finland Espoo, 1996.

[24] K. Schlichting, N. Padture, P. Klemens, Thermal conductivity of dense and porous yttria-stabilized zirconia, Journal of materials science, 36(12) (2001) 3003-3010.

[25] R. Taylor, X. Wang, X. Xu, Thermophysical properties of thermal barrier coatings, Surface and coatings technology, 120 (1999) 89-95.

structures, Smart Materials and Structures, 12(2) (2003) 171.

[13] G.-R. Liu, G. Zhang, Y. Gu, Y. Wang, A meshfree radial point interpolation method (RPIM) for three-dimensional solids, Computational Mechanics, 36(6) (2005) 421-430.

[14] G.-R. Liu, Meshfree methods: moving beyond the finite element method, Taylor & Francis, 2009.

[15] G.-R. Liu, Y.-T. Gu, An introduction to meshfree methods and their programming, Springer Science & Business Media, 2005.

[16] X.-H. Wu, W.-Q. Tao, Meshless method based on the local weak-forms for steady-state heat conduction problems, International Journal of Heat and Mass Transfer, 51(11-12) (2008) 3103-3112.

[17] A. Singh, I.V. Singh, R. Prakash, Meshless element free Galerkin method for unsteady nonlinear heat transfer problems, International Journal of Heat and Mass Transfer, 50(5-6) (2007) 1212-1219.

[18] J.N. Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, (1993) 227–230.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. Kooshki, M. Khodadad, A. Khosravifard, Nonlinear Transient Heat Transfer Analysis Using Two Integration Methods with Different Distributions of Integration Points in the Domain in a Meshless Formulation, Amirkabir J. Mech Eng., 53(Special Issue 1) (2021) 553-572.

DOI: 10.22060/mej.2019.16538.6383