



## بررسی ضریب کیفیت در ارتعاشات خطی میکروصفحه مستطیلی با در نظر گرفتن اثر میرایی ترموالاستیک

علی اصغر یلدایی، حسین رحمانی\*، فرامرز سرحدی، محمد رضا صالحی کلاهی

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۲۰

بازنگری: ۱۳۹۸/۰۹/۰۴

پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۰۸

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۱۰/۱۴

### کلمات کلیدی:

ارتعاشات خطی

میکروالکترومکانیک

میکروصفحه

میرایی ترموالاستیک

ضریب کیفیت

**خلاصه:** با توجه به لزوم دستیابی به تشدیدگرهای با ضریب کیفیت بالا در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، شناخت و بررسی عوامل موثر بر ضریب کیفیت امری ضروری و اجتناب ناپذیر می‌باشد. در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی از میکروصفحات مرتعش به عنوان تشدیدگر و فیلترهای رادیویی استفاده می‌شود. در این پژوهش به بررسی اثر میرایی ترموالاستیک که از مهم‌ترین عوامل تاثیر گذار بر ضریب کیفیت میکروساختارها می‌باشد، برای ارتعاشات عرضی میکروصفحه مستطیلی شکل در دو حالت آزاد و اجباری پرداخته شده است. ارتعاشات اجباری میکروصفحه در پژوهش حاضر ناشی از اعمال نیروی الکترواستاتیک در نظر گرفته می‌شود. جهت ساده‌سازی و حل معادلات از روش گالرکین استفاده شده است. نتیجه یک معادله جبری غیرخطی می‌باشد که می‌تواند برای محاسبه ضریب کیفیت میکروصفحات مستطیلی با شرایط مرزی مختلف مورد استفاده قرار گیرد. بر خلاف پژوهش‌های پیشین، مدل ارائه شده به‌طور مستقیم می‌تواند ضریب کیفیت را محاسبه کند و نیازی به محاسبه فرکانس طبیعی در حالت بدون در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک ندارد. برای شبیه‌سازی اجزای محدود از نرم‌افزار کامسول مولتی‌فیزیکس استفاده شده است. در پایان پس از اطمینان از صحت نتایج، تاثیر پارامترهای مختلف بر ضریب کیفیت میکروصفحه مورد بررسی قرار گرفته است. مدل ارائه شده جهت محاسبه ولتاژ ناپایداری کششی نیز می‌تواند موثر واقع شود.

### ۱- مقدمه

و گسسته قابل تفکیک هستند. میکروتیرها و میکروصفحات مرتعش از نوع سیستم‌های پیوسته می‌باشند [۳]. در حالی که قطعات الکترونیکی با استفاده از روال ساخت مدار مجتمع<sup>۲</sup> ساخته می‌شوند، عناصر سیستم‌های میکروالکترومکانیکی از طریق فرایندهای میکروماشین کاری تولید می‌شوند [۴].

در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی از میکروصفحات مرتعش به عنوان تشدیدگر و فیلترهای فرکانس رادیویی استفاده می‌شود. برای این کاربردها بسیار اهمیت دارد که میکروسازه از ضریب کیفیت بالایی برخوردار باشد. مکانیزم‌هایی متعددی وجود دارد که باعث کاهش ضریب کیفیت سازه می‌شوند [۵]. اثر بسیاری از این

در سال‌های اخیر سیستم‌های میکروالکترومکانیکی<sup>۱</sup> با ویژگی‌های منحصر به فرد خود نظیر اندازه کوچک و دقت بالا موضوع بسیاری از پژوهش‌ها را به خود اختصاص داده‌اند [۱]. سیلیکون به دلیل داشتن خواص فیزیکی و مکانیکی مناسب به عنوان عنصر اصلی در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی به شکل میکروتیر و میکروصفحه مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲]. اخیراً نیز پلیمرهای الکترواکتیو برای استفاده در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی پیشنهاد شده‌اند. سیستم‌های میکروالکترومکانیکی از لحاظ ساختاری به دو نوع پیوسته

1 Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h\_rahmani@eng.usb.ac.ir

2 Integrated Circuit



به بررسی ضریب کیفیت با در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک در ارتعاشات عرضی میکروصفحات مستطیلی پرداختند. آن‌ها از آنالیز اغتشاش جهت حل معادلات حاکم بهره گرفتند. ضریب کیفیت با در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک در ارتعاشات صفحه‌ای توسط دولتی و همکاران [۱۴] بررسی شده است.

هدف از پژوهش حاضر بررسی ضریب کیفیت میکروصفحات مستطیلی با در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک در دو حالت ارتعاشات عرضی آزاد و اجباری می‌باشد. جهت ساده‌سازی و حل معادلات حاکم، روش گالرکین مورد استفاده قرار می‌گیرد. برخلاف پژوهش‌های پیشین مدل ارائه شده در این پژوهش جهت محاسبه ضریب کیفیت نیازی به محاسبه فرکانس طبیعی در حالت عادی (بدون در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک) ندارد و به‌طور مستقیم ضریب کیفیت محاسبه می‌گردد. جهت شبیه‌سازی اجزای محدود از نرم‌افزار کامسول مولتی‌فیزیکس استفاده می‌شود. با توجه به مطالعات نگارندگان تاکنون جهت شبیه‌سازی میرایی ترموالاستیک در میکروصفحات از نرم‌افزار کامسول استفاده نشده است. نرم‌افزار کامسول ابزاری قوی جهت شبیه‌سازی و تحلیل مسائل چند فیزیکی می‌باشد. نتایج این پژوهش می‌تواند جهت طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی مورد استفاده قرار گیرد.

## ۲- مدل‌سازی

شکل ۱ به‌طور شماتیک یک میکروصفحه مستطیلی به طول  $L$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  را با شرایط مرزی کاملاً درگیر نشان می‌دهد. همچنین محورهای مختصات کارتزین برای مطالعه صفحه بر روی شکل نشان داده شده است.

### ۲-۱- ضریب کیفیت در ارتعاشات آزاد

با فرض کرنش‌های کوچک معادله ترموالاستیک خطی حاکم بر جابه‌جایی عرضی میکروصفحه به‌صورت رابطه (۱) در نظر گرفته می‌شود [۱۵ و ۱۶].

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nabla^2 M^T = 0 \quad (1)$$

که  $w$  جابه‌جایی عرضی میکروصفحه،  $\rho$  چگالی،  $h$  ضخامت

مکانیزم‌ها را با طراحی مناسب می‌توان از میان برداشت. به‌طور مثال اثر میرایی فیلم نازک<sup>۱</sup> را می‌توان با افزایش طول گپ و کاهش فشار روی میکروسازه را به حداقل رساند [۶]. در این میان کنترل اثر میرایی ذاتی میکروسازه بسیار مشکل می‌باشد. میرایی ترموالاستیک<sup>۲</sup> و میرایی ویسکوالاستیک<sup>۳</sup> مهم‌ترین میرایی‌های ذاتی می‌باشند. میرایی ویسکوالاستیک تنها در مواد ویسکوالاستیک مانند پلیمرها مشاهده می‌شود اما میرایی ترموالاستیک در تمامی مواد وجود دارد [۷-۹].

وقتی یک سازه در یکی از شکل مودهای خود نوسان می‌کند، قسمت‌هایی از سازه تحت کشش و قسمت‌هایی تحت فشار قرار می‌گیرند. قسمت‌های تحت فشار با افزایش دما و قسمت‌های تحت کشش با کاهش دما روبه‌رو می‌شوند. این اختلاف دمای ایجاد شده باعث بوجود آمدن یک شار گرمایی درون سازه می‌شود. از آنجا که انتقال گرما یک فرآیند برگشت ناپذیر می‌باشد، این شار گرمایی با اتلاف انرژی ارتعاشات در ارتباط می‌باشد. بنابراین می‌توان این اتلاف انرژی را به عنوان یک عامل میرایی به نام میرایی ترموالاستیک در نظر گرفت. میرایی ترموالاستیک در ابعاد میکرو از اهمیت بالایی برخوردار است، چرا که نواحی تحت کشش و فشار بسیار به یکدیگر نزدیک بوده و از اثر شار گرمایی ایجاد شده نمی‌توان صرف‌نظر کرد [۱۰].

زنر [۱۱] اولین کسی بود که اهمیت میرایی ترموالاستیک را تشخیص داد و به صورتی تحلیلی عبارتی را برای ضریب بررسی کیفیت تیرها ارائه داد. لیفشیتز و روکس [۷] تیری با سطح مقطع مستطیلی را با در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک مدل کردند و اقدام به محاسبه ضریب کیفیت نمودند. مدل آن‌ها دقیق‌تر از مدل زنر بود. روسزارت به صورت آزمایشی نشان داد که میرایی ترموالاستیک می‌تواند ضریب کیفیت را برای ابعاد میکرو محدود کند. روسزارت [۱۲] از مدل زنر برای محاسبه ضریب کیفیت رزوناتورهای حالت جامد استفاده نمود و تطابق خوبی را بین نتایج آزمایشگاهی خود و مدل زنر مشاهده نمود. سوتیبیدو و همکاران [۱۳] با در نظر گرفتن یک تحریک الکترواستاتیکی دلخواه مدل میرایی ترموالاستیک را بهبود بخشیدند. در ادامه پژوهش‌های گذشته نایفه و یونس [۱۰]

1 Squeeze Film Damping

2 Thermoelastic

3 Viscoelastic

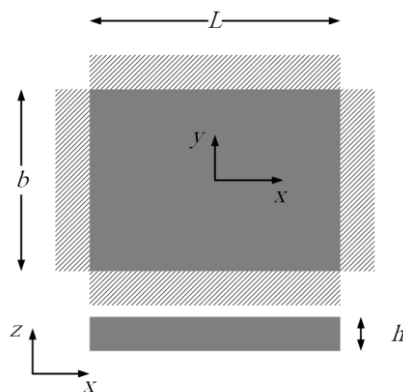


Fig. 1. Schematic model of rectangular micro-plate with fully clamped boundary conditions

شکل ۱: شماتیک میکروصفحه مستطیلی با شرایط مرزی کاملاً درگیر

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) + \alpha(T - T_0) \quad (6)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha(T - T_0) \quad (7)$$

با استفاده از روابط (۵) و (۶) می‌توانیم رابطه (۷) را به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{1-\nu}(-\nu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (1+\nu)\alpha(T - T_0)) \quad (8)$$

با استفاده از رابطه کرنش با جابه‌جایی نیز داریم:

$$\varepsilon_{11} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{22} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

با جایگذاری روابط (۸) و (۹) در رابطه (۴)، رابطه (۱۰) به دست می‌آید.

$$e = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} z \nabla^2 w + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha(T - T_0) \quad (10)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۳) و همچنین جهت خطی‌سازی با جایگزینی  $T$  با  $T_0$  در سمت راست رابطه (۳) صورت نهایی و خطی شده معادله گرما به صورت رابطه (۱۱) حاصل می‌شود.

میکروصفحه و  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  صلبیت میکروصفحه،  $\nu$  نسبت پواسون،  $E$  مدول یانگ و  $M^T$  گشتاور خمشی گرمایی می‌باشند که به صورت رابطه (۲) به دست می‌آید.

$$M^T = \frac{E\alpha_t}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\theta dz \quad (2)$$

که  $\alpha_t$  ضریب انبساط طولی و  $\theta = T - T_0$  می‌باشد. لازم به ذکر است  $T(x, y, z, t)$  توزیع دمای صفحه و  $T_0$  دمای اولیه می‌باشد. برای محاسبه توزیع دما در صفحه از معادله هدایت حرارتی که در رابطه (۳) آورده شده است، استفاده می‌کنیم [۱۶].

$$K \nabla^2 \theta + q = \rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{E\alpha_t T_0}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (3)$$

که  $C_p$  ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت،  $q$  شار گرمایی و  $e$  کرنش با در نظر گرفتن انبساط گرمایی و اثرات مکانیکی می‌باشد، که به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود.

$$e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (4)$$

برای  $\varepsilon$  داریم:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) + \alpha(T - T_0) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_{mn}}{\partial z^2} = i \Omega_{mn} \rho C_P \Theta_{mn} - i \Omega_{mn} \frac{E \alpha_t T_0}{1-\nu} z \nabla^2 \varphi_{mn} \quad (16)$$

برای حل رابطه (۱۶) از شرایط مرزی شار گرمایی صفر استفاده می‌کنیم. زیرا که سطح رویه‌ها ایزوله در نظر گرفته می‌شود و هیچ شار گرمایی از آن‌ها عبور نمی‌کند [۱۱].

$$\frac{\partial \Theta_{mn}}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm \frac{h}{2} \quad (17)$$

با استفاده از شرایط مرزی (۱۷) حل رابطه (۱۶) به صورت رابطه (۱۸) می‌باشد.

$$\Theta_{mn}(x, y, z) = \frac{E \alpha_t T_0}{(1-\nu) \rho C_P} \nabla^2 \varphi_{mn} \left( z - \frac{\sin(K_P z)}{K_P \cos\left(\frac{K_P h}{2}\right)} \right), \quad (18)$$

$$K_P = (1-i) \sqrt{\frac{\Omega_{mn} \rho C_P}{2K}}$$

با جایگزین کردن رابطه (۱۸) در رابطه (۱۵) به رابطه (۱۹) دست می‌یابیم.

$$\bar{M}_{mn}^T = \frac{E \alpha_t^2 T_0}{(1-\nu)} \left( \frac{h^3}{12} + \frac{h}{K_P^2} - \frac{2 \tan\left(\frac{K_P h}{2}\right)}{K_P^3} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial y^2} \right) \quad (19)$$

حال با قرار دادن رابطه (۱۹) در رابطه (۱۴)، معادله نهایی به صورت رابطه (۲۰) حاصل می‌شود.

$$(D + \tilde{D}) \nabla^4 \varphi_{mn} - \rho h \Omega_{mn}^2 \varphi_{mn} = 0 \quad (20)$$

که در آن:

$$\tilde{D} = \frac{E^2 \alpha_t^2 T_0}{(1-\nu)^2 \rho C_P} \left( \frac{h^3}{12} + \frac{h}{K_P^2} - \frac{2 \tan\left(\frac{K_P h}{2}\right)}{K_P^3} \right) \quad (21)$$

برای حل رابطه (۲۰) از روش گالرکین استفاده می‌کنیم. با در نظر

$$K \nabla^2 \theta + q = \rho C_P \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{E \alpha_t T_0}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial t} (z \nabla^2 w) \quad (11)$$

لازم به ذکر است که روابط (۱) و (۱۱) با یکدیگر کوپل بوده و باید هم‌زمان مورد حل قرار بگیرند. با فرض هارمونیک بودن ارتعاشات پاسخ معادلات (۱) و (۱۱) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}(x, y) e^{i \Omega_{mn} t} \quad (12)$$

$$\theta(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{mn}(x, y, z) e^{i \Omega_{mn} t}$$

که  $\Theta_{mn}$  و  $\varphi_{mn}$  به ترتیب شکل موده‌های ارتعاشی صفحه و دما می‌باشند.  $\Omega_{mn}$  فرکانس طبیعی مختلط ارتعاشات میکروصفحه می‌باشد.

$$\Omega_{mn} = \omega_{mn} + i \lambda_{mn} \quad (13)$$

در رابطه (۱۳) قسمت حقیقی آن به اثر کوپلینگ ترموالاستیکی و قسمت موهومی آن به میرایی ارتعاشات صفحه مربوط می‌شود. با جایگزین کردن رابطه (۱۲) در روابط (۱) و (۱۱) و حذف  $q$  و همچنین در نظر گرفتن این نکته که گرادینان دما در راستای ضخامت  $z$  بسیار بزرگ‌تر از دو راستای دیگر می‌باشد به روابط (۱۴) تا (۱۶) دست می‌یابیم.

$$\frac{\partial^4 \varphi_{mn}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_{mn}}{\partial y^4} - \Omega_{mn}^2 \varphi_{mn} + \left( \frac{\partial^2 \bar{M}_{mn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{M}_{mn}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (14)$$

که در آن:

$$\bar{M}_{mn}^T = \frac{E \alpha_t}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \Theta_{mn} dz \quad (15)$$

معادله گرما نیز به صورت رابطه (۱۶) حاصل می‌شود.

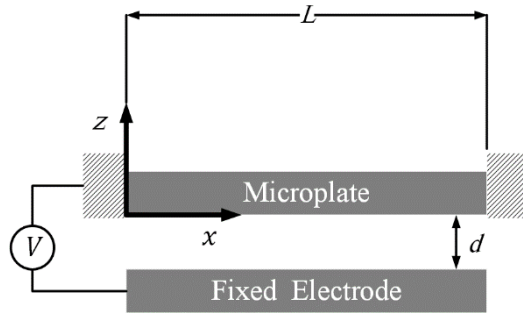


Fig. 2. Schematic model of micro-plate under electrostatic actuation

شکل ۲: شماتیک میکروصفحه تحت تحریک الکترواستاتیک

میکروصفحه تحت تحریک الکترواستاتیک خواهیم پرداخت. در حالتی که میکروصفحه تحت تحریک الکترواستاتیک باشد، معادله حاکم به صورت رابطه (۲۵) می‌باشد.

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^T \nabla^2 w + \nabla^2 M^T = F_e \quad (26)$$

که  $F_e$  نیروی الکترواستاتیک بر واحد سطح می‌باشد و به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد [۱۸].

$$F_e(x, y, t) = \frac{\epsilon_0 V^2}{2[d - w(x, y, t)]^2} \quad (27)$$

در رابطه (۲۷) ولتاژ اعمالی،  $\epsilon_0$  ضریب گذردهی الکتریکی خلا و  $d$  فاصله بین میکروصفحه و الکترود ثابت (طول گپ) می‌باشد. شکل ۲ به صورت شماتیک میکروصفحه تحت تحریک الکترواستاتیک را نشان می‌دهد. ولتاژ اعمالی را می‌توان ترکیبی از ولتاژ مستقیم  $V_{DC}$  و  $V_{AC}$  متناوب در نظر گرفت.

$$V(t) = V_{DC} + V_{AC}(t) \quad (28)$$

با جایگذاری روابط (۲۷) و (۲۸) در رابطه (۲۶) و همچنین استفاده از بسط تیلور رابطه (۲۷) حول نقطه  $w=0$  به رابطه (۲۹) دست می‌یابیم.

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^T \nabla^2 w + \nabla^2 M^T = \frac{\epsilon_0 V_{DC}^2}{2d^2} + \frac{\epsilon_0 V_{DC}^2}{d^3} w + \frac{\epsilon_0 V_{DC} V_{AC}}{d^2} + \frac{3\epsilon_0 V_{DC}^2}{2d^4} w^2 + \frac{2\epsilon_0 V_{DC} V_{AC}}{d^3} w + \frac{\epsilon_0 V_{DC}}{2d^2} V_{AC}^2 + \dots \quad (29)$$

گرفتن اولین مود ارتعاشی داریم:

$$\iint_A ((D + \tilde{D}) \nabla^4 \phi_{11} - \rho h \Omega_{11}^2 \phi_{11}) \phi_{11} = 0 \quad (22)$$

رابطه (۲۲) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت.

$$(D + \tilde{D})(a_1 + a_2 + a_3) - \rho h \Omega_{11}^2 a_4 = 0 \quad (23)$$

و برای ضرایب  $a_1$  تا  $a_4$  داریم:

$$\begin{aligned} a_1 &= \iint_A \frac{\partial^4 \phi_{11}}{\partial x^4} \phi_{11} dx dy \\ a_2 &= \iint_A \frac{\partial^4 \phi_{11}}{\partial x^2 \partial y^2} \phi_{11} dx dy \\ a_3 &= \iint_A \frac{\partial^4 \phi_{11}}{\partial y^4} \phi_{11} dx dy \\ a_4 &= \iint_A \phi_{11}^2 dx dy \end{aligned} \quad (24)$$

با حل رابطه (۲۳) و محاسبه فرکانس طبیعی و تفکیک قسمت‌های حقیقی و موهومی آن می‌توان با استفاده از رابطه (۲۴) ضریب کیفیت را محاسبه کرد [۱۷].

$$Q = \frac{1}{2} \left| \frac{\omega_{11}}{\lambda_{11}} \right| \quad (25)$$

۲-۲- ضریب کیفیت در ارتعاشات اجباری

در این قسمت به استخراج رابطه‌ای برای ضریب کیفیت

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \varphi_{mn}(x, y) q_{mn}(t) \quad (۳۴-الف)$$

$$\theta(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \Theta_{ij}(x, y, z) \zeta_{ij}(t) \quad (۳۴-ب)$$

با جایگذاری رابطه (۳۴) در رابطه (۳۳) و با استفاده از روش باقی‌مانده وزنی گارکین و با در نظر گرفتن اولین مود ارتعاشی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر دست می‌یابیم.

$$D(a_1 + a_2 + a_3)q_{11}(t) + a_4 \rho h \ddot{q}_{11}(t) + (a_5 + a_6)\zeta_{11}(t) - \frac{\varepsilon_0 V^2(t)}{2} \iint_A \frac{\varphi_{11}}{[d - \varphi_{11} q_{11}(t)]^2} dA = 0 \quad (۳۵-الف)$$

$$K a_7 \zeta_{11}(t) - \rho C_p a_8 \dot{\zeta}_{11}(t) + \frac{E \alpha_t T_0}{1 - \nu} (a_9 + a_{10}) \dot{q}_{11}(t) = 0 \quad (۳۵-ب)$$

و برای ضرایب  $a_5$  تا  $a_{10}$  داریم:

$$\begin{aligned} a_5 &= \iiint_V z \frac{\partial^2 \Theta_{11}}{\partial x^2} \varphi_{11} dV \\ a_6 &= \iiint_V z \frac{\partial^2 \Theta_{11}}{\partial y^2} \varphi_{11} dV \\ a_7 &= \iiint_V \frac{\partial^2 \Theta_{11}}{\partial z^2} \Theta_{11} dV \\ a_8 &= \iiint_V \Theta_{11}^2 dV \\ a_9 &= \iiint_V z \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x^2} \Theta_{11} dV \\ a_{10} &= \iiint_V z \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y^2} \Theta_{11} dV \end{aligned} \quad (۳۶)$$

### ۳- نتایج

در این قسمت نتایج حاصل از حل عددی روابط (۲۳)، (۳۲) و (۳۵) به همراه نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود برای مطالعه موردی یک میکروصفحه از جنس سیلیکون ارائه می‌شود. جدول ۱ نشان دهنده ابعاد میکروصفحه مورد بررسی می‌باشد.

برای تغییر شکل‌های کوچک مقدار ولتاژ متناوب  $V_{AC}$  بسیار کوچک‌تر از ولتاژ  $V_{DC}$  می‌باشد. این بدان معنی است که  $V_{AC} \ll V_{DC}$ . با حذف جملات مرتبه بالا در رابطه (۲۹) معادله حرکت دینامیکی به صورت زیر ساده می‌شود.

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^T \nabla^2 w + \nabla^2 M^T = \frac{\varepsilon_0 V_{DC}^2}{2d^2} + \frac{\varepsilon_0 V_{DC}^2}{d^3} w + \frac{\varepsilon_0 V_{DC}}{d^2} V_{AC} \quad (۳۰)$$

جهت دستیابی به معادله مقدار ویژه، مقدار  $V_{AC}$  و اولین جمله سمت راست در رابطه (۳۰) برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^T \nabla^2 w + \nabla^2 M^T = \frac{\varepsilon_0 V_{DC}^2}{d^3} w \quad (۳۱)$$

رابطه (۳۱) معادله مقدار ویژه می‌باشد. با استفاده از رابطه (۱۲) و تکرار روندی مشابه روابط (۱۳) تا (۲۲)، به معادله (۳۲) جهت محاسبه فرکانس طبیعی مختلط دست می‌یابیم.

$$(D + \tilde{D})(a_1 + a_2 + a_3) - \left( \rho h \Omega_{11}^2 + \frac{\varepsilon_0 V_{DC}^2}{d^3} \right) a_4 = 0 \quad (۳)$$

۳-۲- تغییر شکل دینامیکی با در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک در این قسمت به بررسی جابه‌جایی میکروصفحه با در نظر گرفتن اثر میرایی ترموالاستیک پرداخته می‌شود. در این حالت معادلات حاکم بر مسئله با فرض‌های پیشین به صورت رابطه (۳۳) می‌باشد.

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nabla^2 M^T = \frac{\varepsilon_0 V^2}{2[d - w(x, y, t)]^2} \quad (۳۳-الف)$$

$$K \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + q = \rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{E \alpha_t T_0}{1 - \nu} \frac{\partial}{\partial t} (z \nabla^2 w) \quad (۳۳-ب)$$

در این حالت پاسخ مسئله به صورت ترکیب خطی از توابع شکلی<sup>۱</sup> که شرایط مرزی را برقرار سازند و ضرایب وابسته به زمان در نظر گرفته می‌شود.

1 Shape Functions

جدول ۱: ابعاد میکروصفحه ( $\mu\text{m}$ )

Table 1. Dimensions of the micro-plate ( $\mu\text{m}$ )

مقدار	کمیت
۲۰۰	طول ( $L$ )
۱۰۰	عرض ( $b$ )
۱/۵	ضخامت ( $h$ )

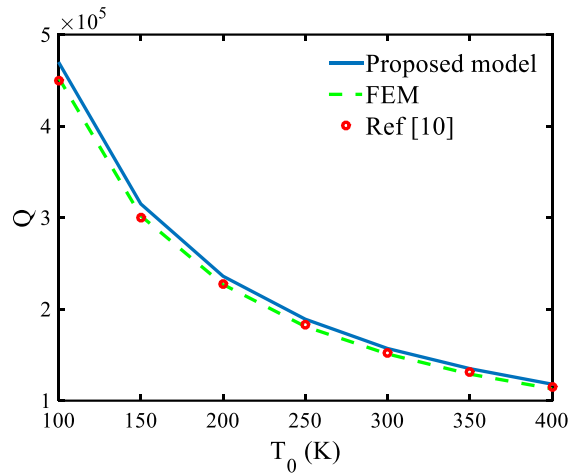


Fig. 3. Variation of quality factor of the first mode with the temperature

شکل ۳: تغییرات ضریب کیفیت متناظر با اولین شکل مود نسبت به دما

مکانیکی سیلیکون می‌باشد. در شکل ۴ اولین شکل مود ارتعاشی میکروصفحه برای شرایط مرزی کاملاً درگیر با در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک و دمای اولیه  $T_0 = 300 \text{ K}$  نشان داده شده است. توزیع دمای متناظر نیز در شکل ۵ نشان داده شده است.

ماژول‌های ترموالاستیسیته<sup>۱</sup> و الکترومکانیک<sup>۲</sup> در نرم‌افزار کامسول مولتی‌فیزیکس به ترتیب جهت محاسبه ضریب کیفیت و اعمال نیروی الکترواستاتیک مورد استفاده قرار می‌گیرند. ماژول ترموالاستیسیته صورت خطی شده رابطه (۳) و معادله الاستیسیته را به صورت کوپل حل می‌کند. از ماژول الکترومکانیک جهت اعمال ولتاژ الکتریکی به میکروصفحه استفاده می‌شود. این دو ماژول از زیرشاخه‌های فیزیک مکانیک ساختاری<sup>۳</sup> می‌باشند. مدل‌سازی به صورت سه‌بعدی و شرایط مرزی گرمایی اعمال شده در نرم‌افزار نیز همان شار گرمایی صفر بر سطح رویین و زیرین میکروصفحه می‌باشد. جهت محاسبه ضریب

در شکل ۳ تغییرات ضریب کیفیت متناظر با اولین شکل مود نسبت به تغییرات دما در حالت ارتعاشات آزاد برای میکروصفحه مذکور نشان داده شده است. به منظور اطمینان از صحت نتایج، نتایج حاصل با پژوهش آقایان نایفه و یونس [۱۰] مقایسه شده است. لازم به ذکر است که نتایج مرجع [۱۰] با استفاده از آنالیز اغتشاش محاسبه شده است. مزیت روش ارائه شده در پژوهش حاضر نسبت به آنالیز اغتشاش در این است که به‌طور مستقیم امکان محاسبه ضریب کیفیت و فرکانس طبیعی مختلط وجود دارد. در حالی که در آنالیز اغتشاش ابتدا می‌بایست فرکانس طبیعی میکروصفحه بدون در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک محاسبه شده و سپس با استفاده از آن اقدام به محاسبه ضریب کیفیت و فرکانس طبیعی مختلط نمود. همان گونه که در شکل ۳ مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج وجود دارد. میزان خطا برای روش تئوری ۳ درصد و برای شبیه‌سازی اجزای محدود ۱ درصد می‌باشد. لازم به ذکر است که میکروصفحه از جنس سیلیکون می‌باشد. جدول ۲ نشان‌دهنده خواص فیزیکی و

1 Thermoelasticity (TE)  
2 Electromechanics (EMI)  
3 Structural Mechanics

جدول ۲: خواص فیزیکی و مکانیکی سیلیکون

Table 2. Physical and mechanical properties of silicon

مقدار	کمیت
۱۷۰	$E$ (GPa)
۲۳۲۹	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
۰/۲۵	$\nu$
۷۰۰	$C_p$ (J/m <sup>3</sup> K)
۱۳۰	$K$ (W/mK)
۰/۰۰۰۰۰۰۲۶	$\alpha$ (1/K)

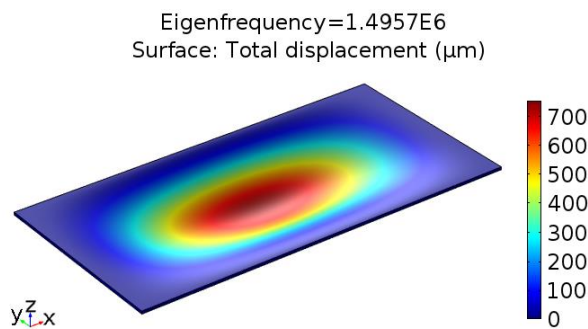


Fig. 4. First mode shape of fully clamped rectangular micro-plate considering thermoelastic damping

شکل ۴: اولین شکل مود میکروصفحه برای شرایط مرزی کاملاً درگیر با در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک

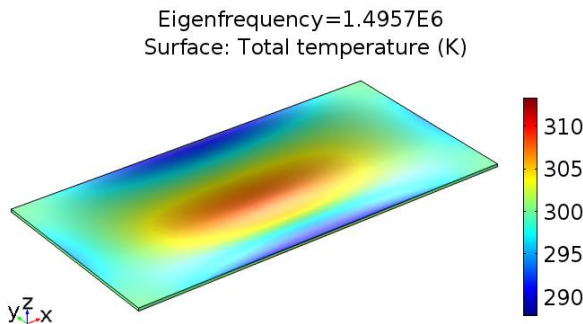


Fig. 5. Temperature distribution in fully clamped rectangular micro-plate for first vibrational mod

شکل ۵: توزیع دما در میکروصفحه برای اولین شکل مود ارتعاشی برای شرایط مرزی کاملاً درگیر

شده است. شکل ۶ نشان‌دهنده تاثیر تعداد مش بر دقت نتایج می‌باشد. در شکل ۷ تغییرات ضریب کیفیت متناظر با اولین شکل مود نسبت به تغییرات ضخامت میکروصفحه (با ثابت بودن طول، عرض و دمای ۳۰۰ کلوین) نشان داده شده است. شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب تغییرات ضریب کیفیت متناظر با اولین شکل مود را نسبت به تغییرات

کیفیت از حل گر فرکانس ویژه<sup>۱</sup> نرم‌افزار استفاده می‌شود. لازم به ذکر است با توجه به ابعاد کوچک میکروصفحه نوع و تعداد مش تاثیری در حد ۱ درصد بر دقت نتایج دارد. در پژوهش حاضر از مش‌بندی خودکار نرم‌افزار که از نوع مثلثی و به تعداد ۲۱۰۱۲ می‌باشد، استفاده

1 Eigenfrequency



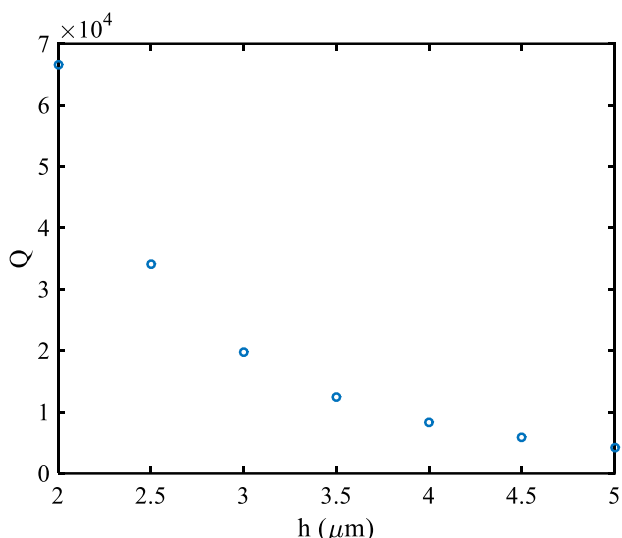


Fig. 7. Variation of quality factor of the first mode with the thickness

شکل ۷: تغییرات ضریب کیفیت متناظر با اولین شکل مود نسبت به ضخامت میکروصفحه

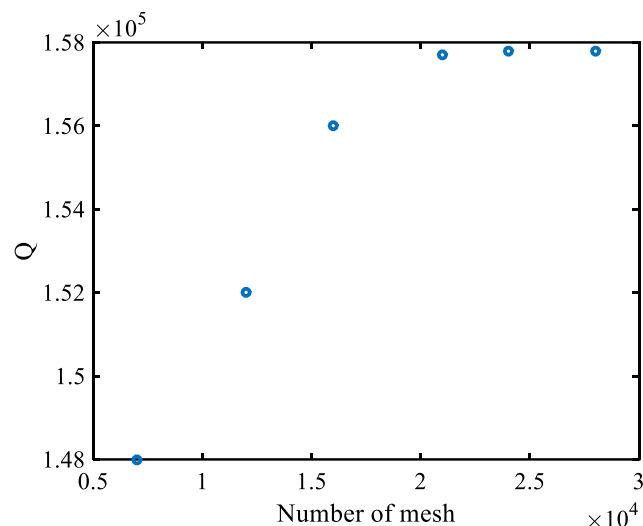


Fig. 6. The effect of mesh size on quality factor

شکل ۶: تاثیر تعداد مش بر دقت محاسبه ضریب کیفیت

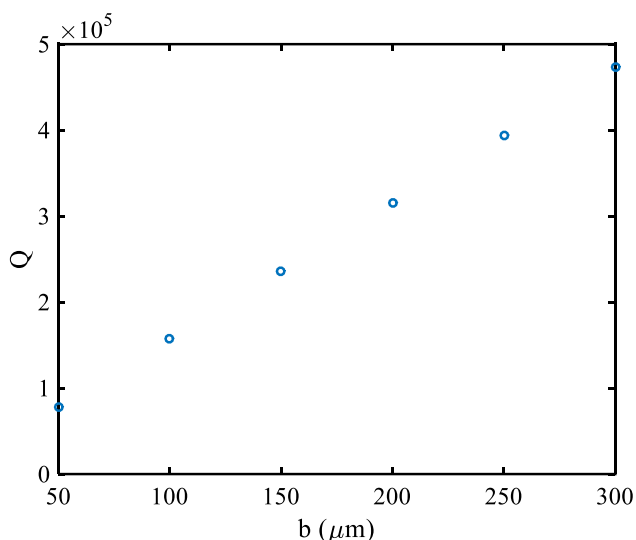


Fig. 9. Variation of quality factor of the first mode with the width

شکل ۹: تغییرات ضریب کیفیت متناظر با اولین شکل مود نسبت به عرض میکروصفحه

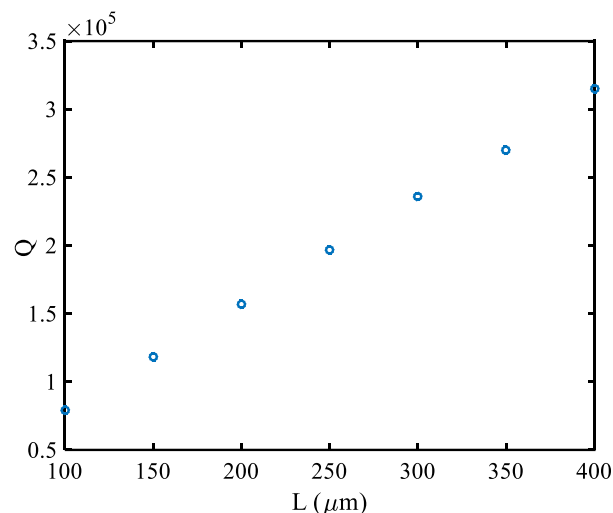


Fig. 8. Variation of quality factor of the first mode with the length

شکل ۸: تغییرات ضریب کیفیت متناظر با اولین شکل مود نسبت به طول میکروصفحه

مقدار ضریب کیفیت برابر صفر می‌گردد. این بدان معنی است که میکروصفحه دچار پدیده ناپایداری کششی<sup>۱</sup> گردیده است. در توضیح پدیده ناپایداری کششی، ذکر این نکته ضروری است که با رسیدن ولتاژ به یک مقدار معین نیروهای داخلی میکروصفحه از تعادل با فشار الکترواستاتیک خارج شده و باعث می‌شوند که میکروصفحه به سمت

طول و عرض (دمای  $T_1 = 300 \text{ K}$ ) میکروصفحه نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که برخلاف ضخامت و دما افزایش طول و عرض میکروصفحه منجر به افزایش ضریب کیفیت می‌گردد.

تغییرات ضریب کیفیت متناظر با اولین شکل مود نسبت به ولتاژ برای دمای  $T_1 = 100 \text{ K}$  و طول گپ  $d = 1/2 \mu\text{m}$  در شکل ۱۰ نشان داده شده است. شکل ۱۱ تغییرات ضریب کیفیت را نسبت به طول گپ در دمای  $T_1 = 100 \text{ K}$  و ولتاژ  $10 \text{ V}$  نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که در شکل ۱۰ با افزایش ولتاژ کمی بیش‌تر از  $16 \text{ V}$

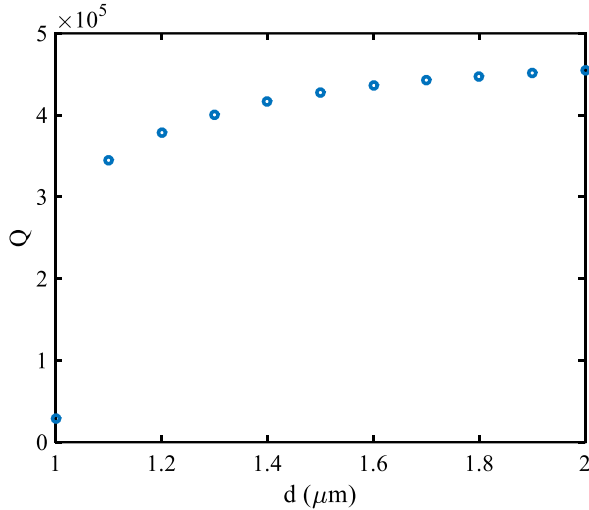


Fig. 11. Variation of quality factor of the first mode with the gap length  
 شکل ۱۱: تغییرات ضریب کیفیت متناظر با اولین شکل مود نسبت به طول گپ

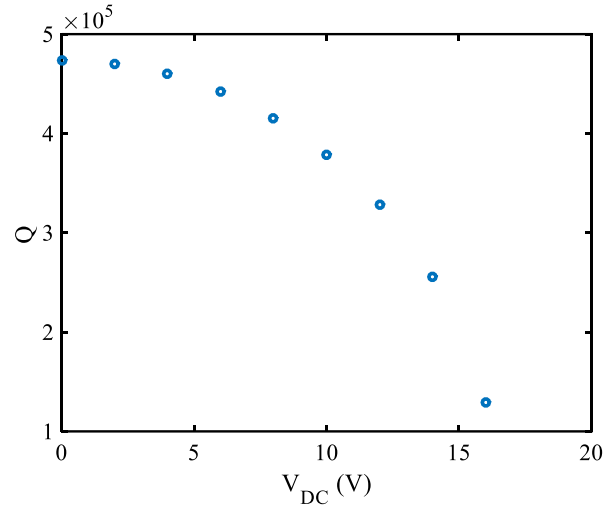


Fig. 10. Variation of quality factor of the first mode with the DC voltage  
 شکل ۱۰: تغییرات ضریب کیفیت متناظر با اولین شکل مود نسبت به ولتاژ

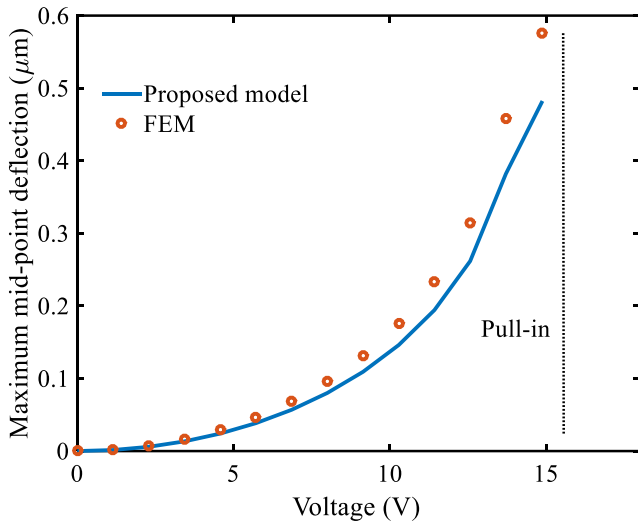


Fig. 13. Deflection of the mid-point to pull-in instability  
 شکل ۱۳: تغییر شکل نقطه میانی میکروتر تا ناپایداری کششی

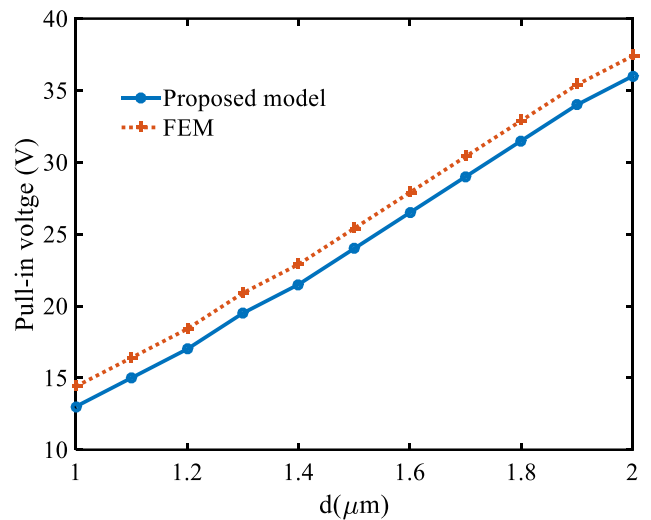


Fig. 12. The effect of gap length on the pull-in voltage  
 شکل ۱۲: تاثیر طول گپ بر ولتاژ ناپایداری کششی

ندارد. شکل ۱۲ تاثیر میزان طول گپ بر ولتاژ ناپایداری کششی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش طول گپ ولتاژ ناپایداری کششی افزایش می‌یابد.

در شکل ۱۳ تغییر شکل میانی میکروصفحه با در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک ترسیم شده است. در محاسبه مقدار ماکسیمم جابه‌جایی نیز تطابق خوبی بین مقادیر روش نیمه تحلیلی و شبیه‌سازی اجزای محدود وجود دارد. شکل ۱۳ برای طول گپ  $d = 1/2 \mu\text{m}$  رسم شده است. از مقایسه دو شکل ۱۲ و ۱۳ مشاهده می‌گردد که

الکتروود ثابت کشیده شده ( پدیده ناپایداری کششی ) و با آن تماس پیدا کند. پدیده ناپایداری کششی یک پدیده مخرب است و می‌بایست از آن اجتناب شود [۱۹]. بنابراین به‌هنگام طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی می‌بایست حد نهایی ولتاژ مشخص شود. به‌عنوان کاربردی دیگر از رابطه (۳۲) نیز می‌توان برای مشخص کردن ولتاژ ناپایداری کششی استفاده نمود. این مقدار برای میکروصفحه مورد نظر در دمای  $T = 100 \text{ K}$  توسط نرم افزار تقریباً برابر  $17 \text{ V}$  محاسبه شد. به‌طور کلی دما تاثیر چندانی بر ولتاژ ناپایداری کششی

- material systems and MEMS: design and development methodologies, John Wiley & Sons, 2006.
- [5] P. Li, Y. Fang, R. Hu, Thermoelastic damping in rectangular and circular microplate resonators, *Journal of Sound and Vibration*, 331(3) (2012) 721-733.
- [6] A.H. Nayfeh, M.I. Younis, A new approach to the modeling and simulation of flexible microstructures under the effect of squeeze-film damping, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 14(2) (2003) 170.
- [7] R. Lifshitz, M.L. Roukes, Thermoelastic damping in micro-and nanomechanical systems, *Physical review B*, 61(8) (2000) 5600.
- [8] M. Amabili, Nonlinear vibrations of viscoelastic rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, 362 (2016) 142-156.
- [9] A. Fareh, S.A. Messaoudi, Energy decay for a porous thermoelastic system with thermoelasticity of second sound and with a non-necessary positive definite energy, *Applied Mathematics and Computation*, 293 (2017) 493-507.
- [10] A.H. Nayfeh, M.I. Younis, Modeling and simulations of thermoelastic damping in microplates, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 14(12) (2004) 1711.
- [11] C. Zener, Internal friction in solids. I. Theory of internal friction in reeds, *Physical review*, 52(3) (1937) 230.
- [12] T.V. Roszhart, The effect of thermoelastic internal friction on the Q of micromachined silicon resonators, in: *IEEE 4th Technical Digest on Solid-State Sensor and Actuator Workshop*, IEEE, 1990, pp. 13-16.
- [13] S.K. De, N.R. Aluru, Theory of thermoelastic damping in electrostatically actuated microstructures, *Physical Review B*, 74(14) (2006) 144305.
- [14] S. Dowlati, S. Azizi, S. Najafi, Quality Factor of Free In-plane Vibration of a Fully Clamped Rectangular Microplate, *International Journal of Engineering*, 31(1) (2018) 96-103.
- [15] A.H. Nayfeh, P.F. Pai, *Linear and nonlinear structural mechanics*, John Wiley & Sons, 2008.
- [16] B.A. Boley, J.H. Weiner, *Theory of thermal stresses*,

ولتاژ ناپایداری کششی از چه از طریق محاسبه ضریب کیفیت و چه از طریق جابه‌جایی مقدار تقریباً یکسانی دارد.

### ۳- نتیجه‌گیری

در این تحقیق مدلی تئوری جهت محاسبه ضریب کیفیت میکروصفحات مستطیلی در ارتعاشات آزاد و اجباری ارائه شد. روش گالرکین جهت حل معادله هدایت حرارتی و معادله جابه‌جایی میکروصفحه به‌کار گرفته شد. نتیجه، یک معادله جبری غیرخطی می‌باشد که با استفاده از روش‌های عددی موجود به راحتی قابل حل می‌باشد. از این مدل می‌توان جهت محاسبه ضریب کیفیت برای شرایط مرزی مختلف استفاده کرد. رابطه‌ای به شکل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی نیز جهت بررسی تغییر شکل میکروصفحه ارائه شد. در ادامه پس از اطمینان از صحت نتایج، تاثیر پارامترهای مختلف بر ضریب کیفیت متناظر با اولین شکل مود ارتعاشی مورد بررسی قرار گرفت. از نرم‌افزار کامسول نیز جهت شبیه‌سازی اجزای محدود استفاده شد. مقایسه نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود با روش نیمه‌تحلیلی، دقت محاسبات نرم‌افزار کامسول را تایید می‌نماید. از نتایج این پژوهش جهت طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. از طرفی با توجه به نتایج حاصل می‌توان از شبیه‌سازی اجزای محدود جهت بررسی پارامترهای طراحی با اطمینان استفاده نمود و با توجه به پیچیدگی‌های محاسبات تئوری این یک مزیت شمرده می‌شود.

### مراجع

- [1] X.L. Jia, J. Yang, S. Kitipornchai, Pull-in instability of geometrically nonlinear micro-switches under electrostatic and Casimir forces, *Acta mechanica*, 218(1-2) (2011) 161-174.
- [2] R. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems, *Smart Materials and Structures*, 16(6) (2007) R23.
- [3] M.I. Younis, F. Alsaleem, D. Jordy, The response of clamped-clamped microbeams under mechanical shock, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42(4) (2007) 643-657.
- [4] V.K. Varadan, K.J. Vinoy, S. Gopalakrishnan, Smart

- analysis of clamped rectangular microplates under distributed electrostatic force, *Sensors and Actuators A: Physical*, 280 (2018) 447-458.
- [19] Y. Hu, J. Yang, S. Kitipornchai, Snap-through and pull-in analysis of an electro-dynamically actuated curved micro-beam using a nonlinear beam model, *Journal of Sound and Vibration*, 332(15) (2013) 3821-3832.
- Courier Corporation, 2012.
- [17] V. Borjalilou, M. Asghari, E. Bagheri, Small-scale thermoelastic damping in micro-beams utilizing the modified couple stress theory and the dual-phase-lag heat conduction model, *Journal of Thermal Stresses*, (2019) 1-14.
- [18] Z. Li, L. Zhao, Z. Jiang, Y. Zhao, J. Li, J. Zhang, Y. Zhao, L. Lin, A closed-form approach for the resonant frequency

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

A. A. Yaldaeï, H. Rahmani, F. Sarhaddi, M. R. Salehi Kolahi, *Investigation of Quality Factor for Linear Vibrations of Rectangular Micro-plates with Thermoelastic Damping*, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(2) (2021) 851-862.

DOI: [10.22060/mej.2020.16524.6380](https://doi.org/10.22060/mej.2020.16524.6380)

