Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(3) (2021) 359-362
DOI: 10.22060/mej.2020.17180.6528

Analysis of Density Wave Oscillations in a Boiling Channel by a New Analytical Model

M. R. Shahnazari* , A. Amjadigolpayegani, A. Saberi

Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

ABSTRACT: Two-phase flow instabilities are observed in many areas of industrial applications such as turbomachinery, refrigeration systems, water boiling reactors and similar systems. Predicting fluid flow parameters such as pressure drop, stability region during boiling and oscillation characteristics are the determining factors in the design of two-phase flow equipment. In this paper, density wave oscillations type instability in boiling process is analyzed. By introducing appropriate dimensionless variables, an integrated model for the process is presented. The model is solved for steady state response of the system by using numerical analysis of a developed numerical method based on weighted residual method. Stability region is determined in reaction frequency versus ratio of reaction frequency to inlet mass flow plane. In addition, friction number effect on stability threshold is assessed. The effect of mass flow rate, inlet subcooling, system pressure and other important process parameters on the oscillation characteristics as well as the instability boundary are investigated. The results show that with increasing mass flow, the system becomes more stable for density wave oscillations occurrence. The critical quality of the exhaust vapor also decreases with increasing mass flow. On the other hand, the period of oscillations and its amplitude increases with increasing mass flow.

Review History:

Received: Oct. 10, 2019
Revised: Jan. 05, 2020
Accepted: Jan. 26, 2020
Available Online: Jan. 30, 2020

Keywords:

Two phase flow
Instability
Density wave oscillations
Boiling
Nonlinear dynamic

1. Introduction

In order to reduce equipment volume and control temperature in high capacity heat transfer in industrial processes, two-phase flow is greatly used. In many industries such as boiling water reactors, steam boilers, evaporators and air conditioning equipment heat transfer to operating fluid causes phase change. This phase change affects the thermohydraulic of flow and can lead to undesirable instabilities [1-3].

Wallis and Heasley's [4] article is the first in a series of studies on two-phase flow systems. The analytical works has mainly focused on finding the sustainability limit, which includes much of the early research. Numerical studies have mainly attempted to estimate instabilities along the amplitude and period of oscillations. With the development of the analysis formulation, important similarity groups were proposed for the similarity of two-phase systems, including phase change, subcooling, Froude, and Reynolds number [9]. Flow stability maps are thus obtained on the subcooling number diagram in terms of phase change number. In recent years, the study of flow in small channels has also been considered, with most results consistent with classic results [6]. In a different work using the high speed camera and investigating the motion of high-density and low-density fronts, O'Neill et al. [7] have identified the instability of Density Wave Oscillations (DWO).

In this paper, for pressure drop variations in terms of mass velocity, a close and analytical answer has been presented. The stability region and the effect of the parameters are analyzed. The variation of the density wave oscillations, their amplitude and their period are also discussed.

2. Theory and Modelling

Fig. 1 shows a horizontal boiling channel in which subcooled liquid is heated up until evaporates at boiling boundary. The continuity and energy equations for each of the two zones are written separately, while the momentum equation is expressed for the whole heated channel. A thermodynamic equilibrium between phases, two-phase homogenous model and be one dimensional flow is assumed. The pressure drop of the channel is held constant.

Fig. 1. Schematic representation of the problem

*Corresponding author's email: Shahnazari@kntu.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

Governing equation can be described in dimensionless form:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\frac{\partial}{\partial z}(Gh)=1 \tag{2}$$

$$\int_0^1 \frac{\partial G(z,t)}{\partial t}dz=\Delta P_{tot}-\Delta P(t) \tag{3}$$

Homogenous density and reaction frequency can be expressed as:

$$\rho_H=\frac{1}{1+xv_{fg}} \tag{4}$$

$$\Omega=\frac{v_{fg}}{h_{fg}} \tag{5}$$

In order to solve the equation system, a method based on the residual weighted method is used. Since the equations are nonlinear, the equations are linearized in the first step in terms of the predicted initial values. The predicted values for this purpose are obtained by solving the equation using the modified implicit Range Kutta method. This method has been reduced computational cost and controlled instability induced by errors [8].

3. Result and Discussion

Fig. 2 depicts pressure drop characteristic curve for R134a by assuming averaged friction number for whole channel.

Also, in Figs. 3 to 5 mass velocity oscillations are demonstrated for converged oscillations, limit cycle oscillations and diverged oscillations respectively. Exit vapor quality and boiling boundary is also shown in Fig. 5.

As the boundary conditions approach instability point, mass velocity begins to oscillate, due to the difference of propagation speed between single-phase and two-phase region. Any change in flow or volume fraction in the two-phase region results in a change in pressure drop. As the disturbance propagates slowly over the two-phase region, a significant delay in the onset of the disturbances in the two-phase region will occur and oscillations are started. These oscillations decrease and the system again stabilizes after a certain time (Fig. 3). These oscillations turn into limit cycle oscillations as they approach the instability region (Fig. 4) and eventually diverge (Fig. 5).

Fig. 2. Pressure drop characteristic curve in term of mass velocity

Fig. 3. Converged oscillations mass velocity oscillations

Fig. 4. Limit cycle mass velocity oscillations

Fig. 5. Diverged oscillations mass velocity, exit vapor quality and boiling boundary

Fig. 6. Variation of period to time residence of fluid ratio versus reaction frequency

Fluid residence time in the heated channel has been used as a characteristic time to investigate the period of oscillation. As shown in Fig. 6, Variation of period to time residence of fluid ratio versus reaction frequency is plotted. Although oscillation period increases with increasing , for this increasing rate declines.

4. Conclusions

In this paper, by using a new analytical model, analysis of density wave oscillations in a boiling channel is performed. By integrating the equations in the steady state, an analytical relationship is found between pressure drop and mass velocity. In addition, the nonlinear equations are generally solved. This solution specifies the possibility of checking oscillations in terms of input parameters and quantities. In other words, the proposed model allows the linear analysis of density wave instability over a wide range of parameter changes for different fluids.

The system pressure does not have a significant effect on the period of DWO, however, with increasing pressure, the amplitude of the oscillations slightly decreases and the period of the oscillations increases.

The period of the oscillations is approximately twice that of the fluid residence time in the channel, although it decreases with decreasing subcooling value and tends to be less than 1/2 for low subcooling values.

References

[1] L.C. Ruspini, C.P. Marcel, A. Clausse, Two-phase flow instabilities: A review, International Journal of Heat and Mass Transfer, 71(0) (2014) 521-548.

[2] L. Tadrist, Review on two-phase flow instabilities in narrow spaces, International Journal of Heat and Fluid Flow, 28(1) (2007) 54-62.

[3] J.A. Boure, A.E. Bergles, L.S. Tong, Review of two-phase flow instability, Nuclear Engineering and Design, 25(2) (1973) 165-192.

[4] G.B. Wallis, J.H. Heasley, Oscillations in Two-Phase Flow Systems, Journal of Heat Transfer, 83(3) (1961) 363-369.

[5] S. Kakaç, L. Cao, Analysis of convective two-phase flow instabilities in vertical and horizontal in-tube boiling systems, International Journal of Heat and Mass Transfer, 52(17) (2009) 3984-3993.

[6] L. Chen, P. Zhou, R. Huang, X. Han, S. Hua, Z. Li, L. Gao, Experimental investigation on the suppression factor in subcooled boiling flow, Applied Thermal Engineering, 135 (2018) 549-558.

[7] L.E. O'Neill, I. Mudawar, M.M. Hasan, H.K. Nahra, R. Balasubramaniam, J.R. Mackey, Experimental investigation of frequency and amplitude of density wave oscillations in vertical upflow boiling, International Journal of Heat and Mass Transfer, 125 (2018) 1240-1263.

[8] P. Muir, M. Adams, Mono-implicit Runge–Kutta–Nyström methods for boundary value ordinary differential equations, Tech. Report 03–2000, Dept. Math. and Comp. Sci., Saint Mary's University …, 2000.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. R. Shahnazari, A. Amjadigolpayegani, A. Saberi, Analysis of Density Wave Oscillations in a Boiling Channel by a New Analytical Model, Amirkabir J. Mech Eng., 53(3) (2021) 359-362.

DOI: 10.22060/mej.2020.17180.6528

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳، شماره ۳، سال ۱۴۰۰، صفحات ۱۵۰۵ تا ۱۵۲۰
DOI: 10.22060/mej.2020.17180.6528

تحلیل غیر خطی ناپایداری نوسانات موج چگالی در فرایند جوشش درون یک کانال با استفاده از یک مدل تحلیلی جدید

محمدرضا شاه‌نظری*، اشکان امجدی گلپایگانی، علی صابری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

خلاصه: ناپایداری جریان دوفاز در بسیاری از حوزه‌های صنعتی نظیر توربوماشین، سیستم‌های تبرید، راکتور آب جوشان مشاهده می‌شود. پیش‌بینی پارامترهای جریان مانند افت فشار، محدوده پایداری و مشخصات نوسانات، عوامل تعیین کننده‌ای در طراحی و شرایط ایمنی کارکرد تجهیزات است. در این مقاله ناپایداری نوسانات موج چگالی جریان سیال دوفاز در فرایند جوششی مورد تحلیل قرار گرفته است. با معرفی متغیرهای بدون بعد، یک مدل یکپارچه برای فرایند ارائه شده است. با آنالیز عددی مدل، به وسیله کاربرد یک روش توسعه یافته مبتنی بر روش عددی "وزن دادن به مانده‌ها"، مدل جهت دست‌یابی به پاسخ سیستم برای شرایط پایا حل شده‌است. محدوده ناپایداری بر روی صفحه با مختصات فرکانس واکنش و نسبت فرکانس واکنش به سرعت جرمی ورودی با استفاده از تحلیل انجام شده مشخص شده است و همچنین تاثیر عدد اصطکاکی بر آن مورد بررسی قرار گرفته است. تاثیر افزایش سرعت جرمی، میزان مادون سرد بودن، تغییرات فشار و سایر پارامترهای مهم فرایند بر مشخصات نوسانات و همینطور محدوده ناپایداری بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش سرعت جرمی، سیستم نسبت به رخداد نوسانات موج چگالی پایدارتر می‌گردد. کیفیت بحرانی بخار خروجی نیز با افزایش سرعت جرمی کاهش می‌یابد و دروه تناوب نوسانات موج چگالی و دامنه آن با افزایش سرعت جرمی افزایش می‌یابد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۱۸
بازنگری: ۱۳۹۸/۱۰/۱۵
پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۶
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۱۱/۱۰

کلمات کلیدی:
جریان دوفاز
ناپایداری
نوسانات موج چگالی
جوشش
دینامیک غیرخطی

۱- مقدمه

با هدف کاهش حجم تجهیزات و اطمینان از کنترل دما در فرایندهای انتقال حرارت با ظرفیت بالا در صنعت، از جریان دوفازی بهره زیادی برده می‌شود. در صنایع مختلفی از جمله رآکتورهای آب‌جوشان، بویلرهای بخار، اواپراتورها و تجهیزات تهویه مطبوع انتقال حرارت به سیال عامل، موجب تغییر فاز می‌گردد. این تغییر فاز بر ترموهیدرولیک جریان تاثیر می‌گذارد و می‌تواند ناپایداری‌های نامطلوبی را به همراه داشته باشد. به علت نتایج مهلک این ناپایداری‌ها، مطالعات زیادی در این حوزه صورت گرفته‌است [۴-۱].

از آنجا که مطالعه هر کدام از ناپایداری‌های جریان دوفازی، با توجه به مکانیزم عمل آن، استراتژی ویژه‌ای را می‌طلبد، لازم است این ناپایداری‌ها به درستی دسته‌بندی شوند. اولین وجه تمایز بین انواع ناپایداری را می‌توان به اختلاف ناپایداری‌های میکروسکوپی و ماکروسکوپی نسبت داد. عبارت میکروسکوپی برای پدیده‌هایی به کار می‌رود که در مرز مشترک گاز-مایع رخ می‌دهند. تئوری ناپایداری‌های میکروسکوپی هیدرودینامیکی به دنبال تعریف شرایطی است که لازم است تا سطح مشترک گاز-مایع در مواجهه با اغتشاشات کوچک پایدار بماند [۵]. از ناپایداری‌های میکروسکوپی می‌توان به ناپایداری‌های کلوین-هلمهولتز[1]، رایلی-تیلور[2] و ترکیدن حباب اشاره کرد. در مقابل ناپایداری‌های ماکروسکوپی مربوط به کل جریان دوفاز هستند و روی کل دوفاز تاثیر می‌گذارند. ناپایداری‌های ترموهیدرولیک ماکروسکوپی در جریان دوفازی به دو دسته کلی استاتیک و دینامیک تقسیم می‌شوند. ناپایداری‌های استاتیکی از مشخصه افت فشار برحسب نرخ جریان کانال حرارتی حاصل می‌گردند و با استفاده از معادلات بقاء جریان پایا تحلیل می‌شوند. ناپایداری لدینگ (گردش جریان[3])، بحران جوشش[4] و تغییر الگوی جریان از انواع ناپایداری استاتیکی هستند [۱ و ۲]. بسته به خصوصیات پمپ، چنانچه جریان در بخش شیب منفی نمودار باشد می‌تواند در حالت ناپایدار قرار بگیرد. اگر نرخ جریان جرمی در کانال کمتر از مینیمم موضعی منحنی باشد،

1 Kelvin-Helmholtz
2 Rayleigh-Taylor
3 Ledinegg
4 Flow excursion

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: Shahnazari@kntu.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

یک گردش جریان همراه با کاهش قابل ملاحظه جریان در کانال رخ می‌دهد که می‌تواند منجر به خشکیدگی[1] لوله شود [۶ و ۷]. ناپایداری‌های دینامیکی در ارتباط با دینامیک اینرسی گذرا و تاثیرات بازخوردی سیستم می‌باشند که منجر به جریان‌های نوسانی می‌شوند. برای تحلیل این ناپایداری‌ها معادلات بقاء گذرای جریان به کار گرفته می‌شوند. مدل‌سازی رفتار سیستم در نوسانات دینامیکی، نیازمند حل عددی معادلات بقاء غیرخطی با اعمال اغتشاش می‌باشد [۸]. ناپایداری‌های دینامیکی در گستره زیادی از شرایط رخ می‌دهند و برای دامنه نوسان بزرگ، به مشکلات ایمنی وخیمی تبدیل می‌شوند. نوسانات موج چگالی[2]، نوسانات افت فشار[3]، نوسانات صوتی و نوسانات حرارتی از مهم‌ترین ناپایداری‌های دینامیک می‌باشند که از این بین دو مورد اول نقش اصلی در ناپایداری‌ها را ایفا می‌کنند [۹]. طبقه‌بندی کلاسیک ارائه شده در مرجع [۴] در بین محققین زیادی پذیرفته شده است. یادیگاروگلو[4] [۱۰] در تقسیم‌بندی خود مکانیزم راه اندازی ناپایداری را مبنا قرار داد که تا حدی متفاوت از تقسیم‌بندی کلاسیک می‌باشد.

ناپایداری نوسانات موج چگالی به دلیل مشاهده زیاد در صنایع، بیشترین سهم مطالعات در حوزه ناپایداری را به خود اختصاص داده است. در اثر این ناپایداری، نوسانات پیوسته در نرخ جریان، دمای سیال، دمای دیواره و سایر پارامترهای عملکرد به وجود می‌آید که به ارتعاشات مکانیکی و خستگی حرارتی سازه می‌انجامد و مشکلاتی را در سیستم کنترلی ایجاد می‌کند. این ناپایداری دارای فرکانس بالا و دامنه نوسان کوچک می‌باشد. مکانیزم این ناپایداری بر تاخیر بین حرکت موج چگالی و انتشار اطلاعات قرار دارد. دوره نوسان در مرتبه زمان عبور ذره سیال از مجرا (در مرتبه چند ثانیه) می‌باشد و عموما به طور خالص در بخش شیب مثبت منحنی مشخصه در بخش دوفاز رخ می‌دهد، هرچند که در کارهای تجربی در اندرکنش با ناپایداری نوسانات افت فشار نیز گزارش شده است [۱۳-۱۱].

مقاله والیس[5] و هسلی[6] [۱۴] در رده اولین تحقیقات بر روی نوسانات سیستم‌های جریان دوفاز محسوب می‌شود. دو دیدگاه عموما بر تحقیقات حاکم بوده است. در کارهای تحلیلی عمدتا تکیه بر پیدا کردن حد پایداری بوده که بیشتر تحقیقات اولیه را شامل می‌گردد. در پژوهش‌های عددی عمدتا سعی شده تا بتوان ناپایداری‌ها به همراه دامنه و دوره نوسانات را ارزیابی نمود. با گسترش فرمولاسیون تحلیل، گروه‌های تشابهی مهمی برای تشابه سیستم‌های دوفاز ارائه گردید که این گروه‌ها عبارتند از: اعداد بی‌بعد مادون سرد، تغییر فاز، دریفت، چگالی، فرود و رینولدز [۹]. نقشه‌های پایداری جریان بدین طریق روی نمودار عدد مادون سرد برحسب عدد تغییر فاز به‌دست آمده است. در ادامه نشان داده شده است تاثیر ظرفیت حرارتی [۱۵]، گرانش [۱۶] و مدل حل [۱۷] بر حد ناپایداری زیاد نیست. لاهی[7] و پودوسکی[8] [۱۸] روش استفاده از ابزارهای دامنه-فرکانسی مانند نمودار نایکویست را در مطالعه چنین سیستم‌هایی بسط دادند. کلاوس[9] و لاهی [۱۹] با استفاده از یک مدل همگن یک‌بعدی، تغییرات چگالی مایع در اثر افزایش دما را نیز درنظر گرفتند. آن‌ها نشان دادند که در این سیستم‌ها پاسخ آشفته تناوبی نیز رخ می‌دهد. در این مقاله استفاده از روش گره متحرک شرح داده شده‌است. چین-جانگ[10] و لاهی [۲۰] با تمرکز بر ایمنی راکتورها ناپایداری را بررسی کردند. آن‌ها نیز مشاهده کردند که پدیده آشوب در بویلرهایی که یک بخش بدون حرارت در پایین دست دارند، رخ می‌دهد. رضوان‌الدین [۲۱] طی یک مقاله باورهایی که در مورد نوسانات موج چگالی وجود داشت را زیر سوال برد. افت فشار سیستم در این تحقیق عمدتا به شکل متمرکز در منطقه‌های مختلف در نظر گرفته شده است. آمبروسینی[11] و همکاران [۲۲] تحقیقاتی انجام دادند که هم با نتایج کلاسیک و هم با نتایج رضوان‌الدین هم‌خوانی داشت. آن‌ها بیان کردند که تفاوت دیدگاه در میزان مادون سرد بودن است. توصیفات کلاسیک براساس سیستم‌های با مادون سرد پایین است در حالی‌که رضوان‌الدین درجه‌های بالاتری را درنظر گرفته است. نتایج آن‌ها بیان می‌کند که با توجه به میزان مادون سرد بودن وزن مکانیزم (از چگالی مخلوط به سرعت) تغییر می‌کند و نمی‌توان تنها یک عامل را درنظر گرفت.

دلماسترو[12] و همکاران [۲۳] ناپایداری نوسانات موج چگالی

1 Dry out
2 Density wave oscillations
3 Pressure drop oscillations
4 Yadigaroglu
5 Wallis
6 Heasley
7 Lahey
8 Podowski
9 Clausse
10 Chin-Jang
11 Ambrosini
12 Delmastro

را بر اساس روابط تاخیر استنتاجی از مدل همگن بررسی کردند. مشخصه‌های ناپایداری را از روش‌های اغتشاش هاف به دست آوردند. مارسل[1] و همکاران [۲۴] از مدل تحلیلی پارامتر فشرده بر اساس فرمولاسیون مدل همگن نوسانات موج چگالی نوع اول را بررسی نمودند. آن‌ها یک رابطه صریح برای پیش‌بینی حد پایداری ارائه کردند که با نتایج تجربی ایشان تطابق دارد.

پارویا[2] و همکاران [۲۵] ناپایداری نوسانات موج چگالی را در طول‌های مختلف کانال (اعداد فرود متفاوت) بررسی کرده‌اند. دو روش گره ثابت و گره متحرک به کار گرفته شده است. کارایی این دو روش مورد ارزیابی قرار گرفته است و بیان شده روش گره متحرک کارایی محاسباتی بالاتری دارد و در مقایسه با روش گره ثابت و تفاضل محدود همگرایی خیلی خوبی دارد. در این مقاله تاثیر پارامترهای مختلف بر نوسانات موج چگالی بررسی شده است اما هزینه محاسباتی بسیار افزایش می‌یابد. راسپینی[3] و همکاران [۲۶] ناپایداری نوسانات موج چگالی و لدینگ را در فرایند جوشش و چگالش بررسی کردند. مقایسه‌ای بین معیارهای پایداری قبلی شده است. مشاهده می‌شود که تنها معیار ساده شده ایشی با دقت خوبی حد پایداری نوسانات موج چگالی را مشخص می‌کند. راسپینی [۲۷] اثر اینرسی و حجم تراکم‌پذیر در بالادست و پایین‌دست بر پایداری نوسانات موج چگالی را بررسی کرد. مشخص شده است که اینرسی ورودی پایداری سیستم را بالا می‌برد. در مقابل افزایش اینرسی خروجی نه تنها موجب کاهش پایداری می‌شود بلکه نوسانات مرتبه بالاتر نوسانات موج چگالی را نیز سبب می‌شود. همچنین وجود یک حجم تراکم‌پذیر در بالادست سیستم موجب کاهش پایداری نوسانات موج چگالی و لدینگ می‌شود. در مقابل قرارگرفتن یک حجم تراکم‌پذیر در پایین‌دست سیستم، پایداری سیستم را در رابطه با نوسانات موج چگالی افزایش می‌دهد. پاپینی[4] و همکاران [۱۱] با استفاده از مدل پارامتر فشرده سعی بر واضح نمودن مختصات این نوع ناپایداری پرداختند. آن‌ها نتایج خود را با نتایج تجربی لوله مارپیچی و کدهای نرم‌افزاری مقایسه نمودند. پاول[5] و سینگ[6] [۲۸] از مدل شار توده‌ای برای بررسی ناپایداری نوسانات موج چگالی استفاده کردند. آن‌ها با استفاده از روش باقیمانده‌های وزنی و تحلیل ناپایداری خطی بررسی‌های خود را انجام دادند و تغییر چگالی در فاز مایع را نیز درنظر گرفتند که این تغییر چگالی تاثیر زیادی در نتایج نداشته است. روش باقی‌مانده‌های وزنی برای تبدیل معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی به کار برده شده است. با استفاده از تحلیل خطی، مرز پایداری مشخص شده و سپس در نقاط نزدیک به مرز شبیه‌سازی کرده‌اند تا رفتار سیستم مشخص شود. در این مقاله سعی شده تاثیر پارامترهای مختلف بر پایداری نیز دیده شود. نشان داده شده که افت فشار موضعی در ورودی نقش پایدارکننده و در خروج موجب کاهش پایداری می‌گردد. همچنین روش حل نیز در به دست آوردن حد پایداری تاثیر دارد و روش همگن (سرعت برابر دو فاز)، نتایج محتاطانه‌تری را نتیجه می‌دهد.

پاندی[7] و سینگ [۲۹] حد پایداری لدینگ و نوسانات موج چگالی را بررسی نموده‌اند. تحلیل آن‌ها قائل به اندرکنش بین ناپایداری لدینگ و نوسانات موج چگالی می‌باشد که در گذشته کمتر گزارش شده است. سه منطقه برای ناپایداری بیان شده است. منطقه اول که فقط شامل نوسانات موج چگالی می‌باشد و بیانگر انشعاب هاف است، منطقه دوم شامل ناپایداری لدینگ و نوسانات موج چگالی که بیانگر وجود هم‌زمان انشعاب هاف و انشعاب زین‌اسبی است و منطقه سوم که فقط می‌تواند ناپایداری لدینگ را شامل شود.

در سال‌های اخیر بررسی جریان در مجراهای کوچک نیز مورد توجه قرار گرفته است که اغلب نتایج با نتایج کلاسیک هم‌خوانی دارد. چن[8] و همکاران [۳۰] جریان دوفاز نیتروژن در میکرو لوله را با تحلیل عددی مورد ارزیابی قرار داده‌اند. علاوه بر نوسانات موج چگالی، ناپایداری لدینگ و نوسانات افت فشار بررسی شده و نتایج با سیستم تجربی مشابه مقایسه شده‌اند. طبق بررسی آن‌ها ناپایداری نوسانات موج چگالی در بخش دوفاز شیب مثبت و ناپایداری نوسانات افت فشار در بخش دوفاز شیب منفی منحنی مشخصه سیستم رخ می‌دهد. لی[9] و همکاران [۳۱] با استفاده از نرم‌افزار سی‌اف‌ایکس[10] به بررسی سه بعدی شرایط نزدیکی مرز پایداری پرداخته‌اند. آن‌ها نتایج خود را با کارهای تجربی و تحلیل یک بعدی مقایسه کرده‌اند. مشاهده گردیده

1 Marcel
2 Paruya
3 Ruspini
4 Papini
5 Paul
6 Singh
7 Pandey
8 Chen
9 Li
10 CFX

گام زمانی تاثیر به سزایی در روند حل دارد و همچنین اعلام نموده‌اند تحلیل سه بعدی به خوبی نمی‌تواند مرز پایداری را به دست آورد. اونیل[1] و همکاران [۳۲] در یک کار متفاوت با استفاده از دوربین فوق سریع و بررسی حرکت جبهه‌های چگالی بالا[2] و چگالی پایین[3]، ناپایداری نوسانات موج چگالی را شناسایی نموده‌اند. در این تحقیق مکانیزم ناپایداری نوسانات موج چگالی در یک اواپراتور رو به بالا با توجه به حرکت جبهه‌های چگالی بالا و پایین توصیف شده است.

در این مقاله با معرفی مشخصه های بدون بعد مناسب؛ و به‌دست آوردن یک فرم جدید برای معادلات بدون بعد، امکان به‌دست آوردن پاسخ تحلیلی برای شرایط پایا فراهم شده است. پاسخ به‌دست آمده به صورت بسته و تحلیلی به‌منظور ارائه تغییرات افت فشار برحسب تغییرات جرم و همچنین بحث در فرم‌های مختلف آن به کار گرفته شده است. همچنین با معرفی یک روش تلفیقی ؛ معادلات بخش ناپایا به‌صورت غیر خطی حل شده‌اند. نحوه بدون بعد کردن کمیات امکان بررسی فرایند ناپایداری را برای گستره بزرگتری از تغییرات کمیات و همچنین بررسی تاثیر مستقیم دمای مادون سرد فراهم کرده است. محدوده پایداری وتاثیر تغییر کمیات موثر بر آن‌ها تحلیل شده است. تغییر فرم نوسانات موج چگالی، دامنه نوسان و دوره تناوب آن‌ها و چگونگی تاثیر تغییرات کمیات موثر بر آن‌ها نیز مورد بحث وبررسی قرار گرفته است.

۲- تئوری و مدل‌سازی

۲-۱- معادلات حاکم

جهت بررسی ناپایداری نوسانات موج چگالی در فرایند جوشش درون یک لوله افقی، از معادلات حاکم در سیستم یکپارچه استفاده شده است. ناحیه دوفاز جریان مطابق شکل ۱ به وسیله یک مرز فرضی، که توسط منطقه آغاز جوشش مشخص می‌شود، از ناحیه ورودی و تک‌فاز جدا شده است. معادلات پیوستگی و انرژی برای هر یک از دو ناحیه، به صورت مجزا نوشته می‌شود، در حالی‌که معادله مومنتوم به صورت یکپارچه برای کل کانال حرارتی بیان می‌گردد. میزان افت فشار برای کانال حرارتی (P_i-P) ثابت در نظر گرفته شده است. سیال به صورت مادون سرد با سرعت جرمی $G_{in}(t)$ وارد کانال

1 O'Neill
2 High Density Fronts (HDF)
3 Low Density Fronts (LDF)

Fig. 1. Schematic representation of the problem

شکل ۱. شماتیک مسئله مورد بررسی

می‌گردد. جریان به صورت یک‌بعدی در نظر گرفته شده و خواص سیال با فرض فشار ثابت ($\Delta P << P_e$) تعیین شده‌اند.

برای جریان دوفاز از مدل همگن استفاده شده است. توزیع حرارت به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده و از دینامیک حرارتی لوله صرف‌نظر شده‌است ($Q^*=cte$). بر اساس این فرضیات معادلات حاکم را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

و با انتگراسیون موازنه فشار در طول کانال معادله مومنتوم را

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*}+\frac{\partial G^*}{\partial z^*}=0 \quad (۱)$$

$$\frac{\partial\left(\rho^* h^*\right)}{\partial t^*}+\frac{\partial\left(G^* h^*\right)}{\partial z^*}=Q^* \quad (۲)$$

می‌توان به شکل زیر نوشت:

که در آن ΔP^*_{tot} افت فشار اعمال شده به سیستم و $\Delta P^*(t)$

$$\int_0^{H^*}\frac{\partial G^*\left(z^*,t^*\right)}{\partial t^*}dz^*=\Delta P^*_{tot}-\Delta P^*\left(t\right) \quad (۳)$$

مجموع افت فشار دینامیک اصطکاکی و شتابی سیستم است.

با توجه به فرض $z^*=z^*_b$ به عنوان مرز دوفاز و تسهیل بیان کمیات در سیستم، کمیات بدون بعد بر حسب مقادیر مشخصه به صورت زیر معرفی می‌گردند:

که در آن $G^*_{(l,min)}$، کمترین سرعت جرمی ورودی است که به

$$G=\frac{G^*}{G^*_{l,\min}} \quad (۴)$$

$$t=\frac{t^*}{\rho^*_f L_t / G^*_{l,\min}} \quad (۵)$$

$$P=\frac{P^*}{G^{*2}_{l,min}/\rho^*_f} \quad (۶)$$

$$z=\frac{z^*}{L_t} \quad (۷)$$

)

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_f^*} \tag{۸}$$

$$h = \frac{h^*}{h_f^* - h_{in}^*} \tag{۹}$$

ازای آن سیال در طول کانال به صورت تک‌فاز (مایع) باقی خواهد ماند. همچنین L^*_t طول کانال حرارتی و h^*_f و h^*_{in} به ترتیب آنتالپی مایع اشباع و آنتالپی جریان سیال ورودی است.

با استفاده از کمیات بدون بعد تعریف شده، رابطه (۱) تا (۳) به

$$G_{l,\min}^* = \frac{Q^* L_t}{\delta h_f^*} = \frac{Q^* L_t}{h_f^* - h_{in}^*}$$

شکل زیر بازنویسی می‌شوند.

و همچنین دانسیته همگن ρ^*_H و فرکانس واکنش Ω^* به صورت

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \tag{۱۰}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial z}(Gh) = 1 \tag{۱۱}$$

$$\int_0^1 \frac{\partial G(z,t)}{\partial t} dz = \Delta P_{tot} - \Delta P(t) \tag{۱۲}$$

بدون بعد زیر قابل نمایش خواهند بود.

با انتگراسیون رابطه (۱۵) در ناحیه دوفاز از مرز (z_b) تا هر نقطه

$$\rho_H = \frac{1}{1 + x v_{fg}} \tag{۱۳}$$

$$\Omega = \frac{v_{fg}}{h_{fg}} \tag{۱۴}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{G}{\rho}\right) = \Omega \tag{۱۵}$$

دلخواه z می‌توان نوشت:

۲-۲- گسترش معادلات (دستگاه معادلات ناپایداری)

$$G_{tp}(z,t) = \frac{\Omega(z - z_b) + G_{in}}{1 + x(z,t) v_{fg}} \tag{۱۶}$$

جهت دست‌یابی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی به منظور تحلیل ناپایداری هر یک از معادلات پیوستگی، انرژی و مومنتوم، انتگرالگیری شده‌اند. با در نظر گرفتن معادله پیوستگی و استفاده از قاعده لایب‌نیتز[1]، می‌توان نوشت:

که در اینجا G_e نشانگر سرعت جرمی در خروجی کانال حرارتی

$$\frac{d}{dt}\int_{z_b}^1 \rho dz = G_{in} - G_e - \dot{z}_b \tag{۱۷}$$

است و ($\dot{z}_b$) نرخ تغییرات مرز بین دو ناحیه را بر حسب زمان نشان می‌دهد.

با استفاده از رابطه (۱۳)، انتگرال سمت چپ رابطه (۱۷) را

$$G_e(z,t) = \frac{\Omega(1 - z_b) + G_{in}}{1 + x_e v_{fg}}$$

می‌توان چنین نوشت:

که با فرض خطی بودن تغییرات درصد جرمی بخار بر حسب طول

$$\int_{z_b}^1 \frac{dz}{1 + \frac{z - z_b}{1 - z} x_e v_{fg}} \tag{۱۸}$$

کانال، رابطه x بر حسب x_e (درصد جرمی بخار خروجی) جایگزین شده است و در نتیجه داریم:

و در نهایت

$$\int_{z_b}^1 \rho dz = \frac{1 - z_b}{x_e v_{fg}} \ln\left(1 + x_e v_{fg}\right) \tag{۱۹}$$

رابطه (۲۰) ارتباط بین نرخ تغییرات درصد جرمی بخار خروجی

$$(1 - z_b)\left[\frac{v_{fg}}{x_e v_{fg}(1 + x_e v_{fg})} - \frac{\ln(1 + x_e v_{fg})}{x_e(x_e v_{fg})}\right]\dot{x} = G_{in} - G_e + \dot{z}_b\left(\frac{\ln(1 + x_e v_{fg})}{x_e v_{fg}} - 1\right) \tag{۲۰}$$

را بر حسب نقطه شروع جوشش تعیین می‌کند. مجددا با استفاده از قاعده لایب‌نیتز، می‌توان معادله انرژی را در ناحیه تک‌فاز (مایع) به

1 Leibniz

شکل زیر بازنویسی کرد.

و یا در نهایت

$$\frac{d}{dt}\int_0^{z_b}(\rho h)\,dz = -\dot{G}_{in} + z_b + h_f \dot{z}_b \tag{۲۱}$$

جهت گسترش معادله مومنتوم، نیاز به برآورد عبارت دینامیک

$$\dot{z}_b = 2\left(G_{in} - z_b\right) \tag{۲۲}$$

است. فشار (اصطکاکی و شتابی) و همچنین انتگرال سمت چپ معادله است. با در نظر گرفتن افت فشار اصطکاکی به صورت مجموع افت فشار ناحیه تک‌فاز و ناحیه دوفاز می‌توان نوشت

$$\left(\Delta P(t)\right)_f = N_{fl} G^2 z_b + N_{ftp}\left(\int_{z_b}^{1}\frac{G_{tp}^2}{\rho_H}dz\right) \tag{۲۳}$$

و با جایگذاری G_{tp} از رابطه (۱۶) و ρ_H از رابطه (۱۳)

پس از انجام انتگرال‌گیری و چند عملیات مقدماتی (ضمیمه الف)

$$\frac{d}{dt}\int_{z_b}^{1} G_{tp}\,dz = \Delta P\left(G_0\right) - N_{fl}G^2 z_b - N_{ftp}\left(\int_{z_b}^{1}\frac{G_{tp}^2}{1+xv_{fg}}dz\right) - z_b\dot{G}_{in} - \dot{z}_b G_{in} \tag{۲۴}$$

رابطه زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

که در آن

$$K_G\dot{G} = \Delta P\left(G_0\right) - \Delta P\left(G(t), x_e(t), z_b(t)\right) - K_{x_e}\dot{x}_e - K_{z_b}\dot{z}_b \tag{۲۵}$$

دستگاه معادلات شامل رابطه‌های (۲۰) و (۲۲) و (۲۵)، همراه

$$K_G = \left(1-z_b\right)\log\left(1+x_e v_{fg}\right)/x_e v_{fg} + z_b \tag{۲۶}$$

$$\Delta P\left(G(t), x_e(t), z_b(t)\right) = \Delta P_{fr} + \Delta P_{acc} \tag{۲۷}$$

$$\Delta P_{fr} = N_{fl}G^2 z_b + N_{ftp}\Omega\left(1-z_b\right)/x_e h_{fg}\left(\frac{\left(1-z_b\right)^2}{2}\left(1-\frac{2}{x_e v_{fg}}\right) + \frac{2}{\Omega}\left(G_{in}-\frac{\left(1-z_b\right)\Omega}{x_e v_{fg}}\right)\left(1-z_b\right) + \frac{4}{\Omega^2}\left(G_{in}-\frac{\left(1-z_b\right)\Omega}{x_e v_{fg}}\right)^2\log\left(1+x_e v_{fg}\right)\right) \tag{۲۸}$$

$$\Delta P_{acc} = G_e^2\left(1+x_e v_{fg}\right) - G_{in}^2 \tag{۲۹}$$

$$K_{x_e} = -\frac{\left(1-z_b\right)^2}{x_e^2 h_{fg}} - \frac{\left(1-z_b\right)}{x_e^2 h_{fg}}\log\left(1+x_e v_{fg}\right)\left(G_{in}-\frac{\left(1-z_b\right)\Omega}{x_e v_{fg}}\right) + \frac{\left(1-z_b\right)}{1+x_e v_{fg}}\frac{\left(G_{in}-\frac{\left(1-z_b\right)\Omega}{x_e v_{fg}}\right)}{x_e} \tag{۳۰}$$

$$K_{z_b} = G_{in} - \frac{2\Omega\left(1-z_b\right)}{x_e v_{fg}} + \log\left(1+x_e v_{fg}\right)\frac{1}{x_e v_{fg}}\left(\frac{2\Omega\left(1-z_b\right)}{x_e v_{fg}} - G_{in}\right) \tag{۳۱}$$

با شرایط مرزی یک نقطه کارکرد پایای سیستم، دینامیک فرایند مورد بررسی را مشخص می‌کند. موضوع معادلات به شدت غیرخطی و پیچیده هستند و با توجه به وابستگی آن‌ها به تغییرات کمیات فیزیکی مسئله به شدت به درجه خطاهای محتمل روش حل حساس می‌باشند. جهت احتزاز از ناپایدار شدن حل به واسطه انباشت خطای روش، در این مقاله از یک روش تلفیقی مناسب جهت خطی‌سازی و بهبود دقت حل مسئله استفاده شده‌است.

۲-۳- شرایط اولیه (شرایط پایای سیستم)

جهت تعیین شرایط اولیه سیستم، بایستی ارتباط بین x_e و z_b با G_o در شرایط پایا، همچنین مقدار $\Delta P(G_o)$ به عنوان افت فشار اعمال شده به سیستم تعیین گردد. با توجه به تعریف $G^*_{(l,min)}$، مشخص است که

و همچنین با یک موازنه ساده انرژی

$$G_{st.st.} = \frac{G^*_{st.st.}}{G^*_{l,\min}} = z_{b,st.st.} \tag{۳۲}$$

با جایگذاری $G_{(st.st)}$ و $z_{(b,st.st)}$ و $x_{(st.st)}$ در رابطه‌های (۲۸) و

$$x_{e,st.st.} = \frac{1-G_{st.st.}}{G_{st.st.}h_{fg}} \tag{۳۳}$$

(۲۹) می‌توان افت فشار شرایط پایا را در کانال به دست آورد.

۳- روش حل

$$\Delta P_{fr,st.st.} = N_{fl}G_{in}^3 + N_{ftp}\Omega\left(\frac{G^3-2G^2+G}{2}\right) + N_{ftp}\left(G^2-G^3\right) \tag{۳۴}$$

$$\Delta P_{acc,st.st.} = \Omega G\left(1-G\right) \tag{۳۵}$$

به منظور حل دستگاه معادلات مورد نظر، از یک روش توسعه یافته بر مبنای روش وزن دادن به باقیمانده استفاده شده است.

با توجه به غیرخطی بودن معادلات، در گام اول معادلات بر حسب مقادیر پیش‌بینی شده اولیه خطی می‌گردند. مقادیر پیش‌بینی شده برای این منظور با استفاده از حل دستگاه به روش رانگ کوتای ضمنی اصلاح شده[1] حاصل می‌شوند. از این روش به منظور برآورد هر دو هدف کنترل ناپایداری ناشی از خطا و کاهش حجم محاسبات استفاده شده است [۳۳]. در این روش برای حل مرحله بعد دستگاه معادلات، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

که Y_r به صورت ضمنی بر حسب سایر مجهولات از رابطه زیر

$$Y_{n+1} = Y_n + h\sum_{r=1}^{3} b_r F\left(Y_r\right) \qquad (۳۶)$$

تعیین می‌شود:

بنابراین در این روش در هر مرحله معادلات تنها بر حسب Y_{n+1} به

$$Y_r = \left(1-v_r\right)Y_n + v_r Y_{n+1} + h\sum_{j=1}^{r-1} x_{r,j} F\left(Y_j\right), \qquad r = 1,2,3. \qquad (۳۷)$$

صورت ضمنی تعریف شده‌اند. ضرایب رانگ کوتای ضمنی اصلاح شده معمولا به وسیله جدول راهنما تعیین می‌شوند که در آن c=v+Xe و X ماتریس ۳ در ۳ است که درایه‌های آن به صورت $x_{i,j}$ تعریف می‌شوند. می‌توان اثبات کرد انتخاب ضرائب جدول ۱ روشی دارای پایداری مناسب می‌باشد [۳۴]. در جدول ۱، ستون اول درایه‌های بردار c، ستون دوم از سمت چپ درایه‌های بردار v و سه ستون بعدی درایه‌های ماتریس X را نشان می‌دهند. همچنین سطر آخر درایه‌های بردار b به صورت ترانهاده هستند. این فرم نمایش کلاسیک این روش می‌باشد.

در گام بعدی، با درنظر گرفتن هر یک از کمیات G_i، P_s و G_o به صورت توابع زیر از متغیر زمان و استفاده از روش همپوشانی[2]، ضرایب مجهول تعیین می‌گردند.

جدول ۱: ضرائب روش رانگ کوتای ضمنی اصلاح شده

Table 1. MIRK Coefficients

c	v	X		
۱	۱	۰	۰	۰
۵/۲۴	۲۱۵/۵۷۶	-۹۵/۵۷۶	۰	۰
۷/۹	۲۴۱/۸۱	-۱۴۱۹/۱۵۳۹	-۶۵۶/۵۱۳	۰
b^T		۱/۱۶	۳۸۴/۷۷۹	۸۱/۱۸۴

1 MIRK
2 collocation

$$P_{sa}\left(t\right) = \sum_{m=0}^{N_t} \alpha_{mP_s} e^{-mt} L_m\left(t\right)$$
$$G_{ia}\left(t\right) = \sum_{m=0}^{N_t} \alpha_{mG_i} e^{-mt} L_m\left(t\right) \qquad (۳۸)$$
$$G_{0a}\left(t\right) = \sum_{m=0}^{N_t} \alpha_{mG_0} e^{-mt} L_m\left(t\right)$$

که در آن $L_m(t)$ها توابع لاگور[3] از درجه m و نقاط منتخب به صورت ریشه‌های چبیشف در بازه $\left[0, N_L\right]$ در نظر گرفته شده‌اند. با در نظر گرفتن فرم کلی معادلات به صورت:

$$\mathrm{L}\left(u\right) = g, \qquad t \in \left[0, N_s\right] \qquad (۳۹)$$

معادلات حدسی از روش زیر حاصل شده‌اند.

$$R\left(u\right) = \int_0^{N_t} \left(\mathrm{L}\left(u_a\right) - g\right)\delta\left(t - t_i\right)dt \quad \rightarrow \quad min \qquad (۴۰)$$

با انتخاب M ضریب مجهول برای هر یک از کمیات، با توجه به وجود شرایط اولیه، از M-۱ نقطه منتخب، معادلات نوشته می‌شوند و تعداد ۳M ضرایب مجهول از حل دستگاه حدسی $3M \times 3M$ حاصل می‌شوند.

۴- نتایج و بحث

شکل ۲ منحنی مشخصه افت فشار بر حسب سرعت جرمی را برای سیال R۱۳۴a ؛ با استفاده از رابطه‌های (۳۴) و(۳۵) نشان می‌دهد.

با بررسی رابطه افت فشار در هر میزانی از G، می‌توان دریافت

Fig. 2. Pressure drop characteristic curve in term of mass velocity

شکل ۲: منحنی مشخصه افت فشار بر حسب سرعت جرمی

3 Laguerre

که مقادیر اکستریمم موضعی تنها زمانی رخ می‌دهند که جریان خروجی از لوله به صورت دوفاز باشد. به منظور سهولت در یافتن تحلیلی مقادیر اکستریمم فرض می‌شود $N_f = N_{fI} = N_{fII}$ و لذا با مشتق‌گیری از رابطه می‌توان نوشت:

$$G^2 + \frac{4}{3}\left[\frac{1-\Omega}{\Omega} - \frac{1}{N_f}\right]G + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{N_f}\right] = 0 \qquad (۴۱)$$

$$G_{1,2} = -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{\Omega} - 1 - \frac{1}{N_f}\right] \pm \sqrt{\frac{4}{9}\left[\frac{1-\Omega}{\Omega} - \frac{1}{N_f}\right]^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{N_f}\right]} \qquad (۴۲)$$

که شرط زیر برقرار است:

$$\left|\frac{1}{N_f} + \frac{\Omega - 1}{\Omega}\right| \geq \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N_f}\right) \qquad (۴۳)$$

با توجه به اینکه مقادیر افت فشار اکستریمم به‌دست آمده به ازای بازه $1/\delta h_v < G < 1$ حاصل شده‌اند، شرط اینکه $P\Delta$ حداقلی (که به ازای پاسخ بزرگتر رابطه (۴۱) رخ می‌دهد) در منحنی مشخصه افت فشار جریان درون لوله باشد، این است که:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{N_f} + \frac{\Omega - 1}{\Omega}\right) + \frac{4}{9}\left[\frac{1-\Omega}{\Omega} - \frac{1}{N_f}\right]^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{N_f}\right] < 1 \qquad (۴۴)$$

به عبارت دیگر در صورتیکه $\frac{1-\Omega}{\Omega} > (\frac{1}{3} + \frac{1}{2N_f})$ باشد، همواره حداقل افت فشار در G_1 = (سرعت جرمی برابر G_(1,min)) رخ خواهد داد.

به منظور تشکیل نوسانات موج چگالی، دستگاه معادلات غیرخطی (رابطه‌های (۲۰) و (۲۲) و (۲۵)) همراه با شرایط مرزی پایدار تحلیل شده است. با نزدیک شدن شرایط مرزی به نقطه ناپایداری فرایند، در آغاز سرعت جرمی شروع به نوسان می‌کند، علت این پدیده سرعت انتشار متفاوت اختلالات جریان در ناحیه تک فاز و در ناحیه دو فاز است. هرگونه تغییر در جریان یا کسر حجمی در منطقه دو فاز منجر به تغییر افت فشار می‌شود. از آنجا که انتشار اختلال در طول ناحیه دو فاز به کندی صورت می‌گیرد، یک تاخیر قابل توجه در شروع اختلالات در منطقه دو فاز رخ خواهد داد، از این رو نوسانات درجریان شروع می شود. اگرچه این نوسانات رو به زوال می‌رود و مجددا سیستم بعد از گذشت زمان معینی پایدار می‌گردد (شکل ۳(الف)). این نوسانات با نزدیک شدن به محدوده ناپایداری تبدیل به نوسانات با سیکل محدود (شکل ۴(الف)) می‌شود و نهایتا نوسانات واگرا می‌گردد (شکل ۵(الف)). این محدوده گذرا از شرایط پایا به نوسانات واگرا به ازای ثابت بودن کلیه کمیات فرایند به ازای محدوده نسبتا کوچکی از سرعت جرمی می‌دهد که این محدوده تابعی از سایر شرایط مساله است. جهت مشاهده بهتر تغییرات در فرایند، مرز جوششی (z_b) بر حسب سرعت جرمی ورودی (G_{in}) برای هر حالت در بخش ب شکل‌های ۳ تا ۵ ارائه شده است. شکل ۵(الف) علاوه بر نوسانات سرعت جرمی، نوسانات مرز جوشش و کیفیت بخار خروجی را نیز نشان می‌دهد. همچنین شکل ۶ مرز ناپایداری خنثی در این تحقیق را در مقایسه با نتایج راسپینی [۲۷] نشان می‌دهد. لازم به توجه است که اطلاعات ورودی شکل‌های ۳ تا ۵ در جدول ۲. آمده است.

با توجه به رابطه (۳۳) می‌توان نوشت:

$$\Omega = \frac{\Omega}{G} - x_e v_{fg} \qquad (۴۵)$$

Fig. 3. Converged oscillations a) mass velocity, b) phase portrait

شکل ۳. الف) نوسانات همگرا شده سرعت جرمی ب) پرتره فضای فازی برای نوسان همگرا

Fig. 4. Limit cycle a) mass velocity oscillations, b) phase portrait

شکل ۴: الف) نوسانات سیکل محدود سرعت جرمی ب) پرتره فضای فازی برای نوسانات سیکل محدود

Fig. 5. Diverged oscillations a) mass velocity, exit vapor quality and boiling boundary, b) phase portrait

شکل ۵: الف) نوسانات واگرای سرعت جرمی همراه با کیفیت خروجی مرز جوششی ب) پرتره فضای فازی برای برای نوسانات واگرا

Fig. 6. Comparison of stability boundary with Ruspini [27] (Density Wave Oscillations (DWO)

شکل ۶: مقایسه مرز ناپایداری خنثی با نتایج راسپینی [۲۷]

جدول ۲: داده‌های ورودی برای شکل‌های ۳ تا ۵
Table 2. Input data for Figs. 3 to 5

کمیت	P_e	Q	v_f	v_g	v_{fg}	T_{sat}	T_{in}	h_{in}
واحد	kPa	W	m^3/kg	m^3/kg	m^3/kg	K	K	J/kg
مقدار	۸۰۰	۱۰۰۰	۰/۰۰۰۸۴۵	۰/۰۲۵۶۲	۰/۰۲۴۷۷	۳۰۴/۴۸	۲۵۰/۴۵	۱۶۹۹۸۳/۴۰
کمیت	h_f	dh_f	dh_v	hf_g	Nf_l	N_{ftp}	N_{fv}	L/D
واحد	J/kg	J/kg	J/kg	J/kg	-	-	-	-
مقدار	۲۴۳۶۴۵/۴۱۸	۷۳۶۶۲/۰۲۲	۲۴۵۴۷۶/۱۴	۱۷۱۸۱۴/۱۲	۳/۰۱۸۶	۲/۴۵۶۵	۲/۱۷۶	۲۰۰

شکل ۶ مرز ناپایداری حاصل از این بررسی را در مقایسه با نتایج مرجع [۲۷] نشان می‌دهد؛ به خوبی تطابق نتایج بین دو بررسی مشاهده می‌شود و بیشینه اختلاف بین آن‌ها حدود ۵٪ می‌باشد. در این شکل خطوط x_e ثابت به صورت خطوط موازی رسم شده‌اند. مرز ناپایداری نشان می‌دهد که برای بخش غالب تغییرات Ω (N_{sub}) نقطه شروع ناپایداری دارای کیفیت ثابتی است. به عبارت دیگر برای سیال ورودی با درجات مادون سرد بیشتر از یک مقدار مشخص، امکان رسیدن پایدار به جریان با درصد بخار بالا وجود ندارد. برای نمونه برای سیال R۱۳۴a و فشار ۸۰۰ کیلوپاسکال برای جریان ورودی با عدد مادون سرد بیشتر از ۲ فرایند برای خروجی با درصد جرمی بخار بیشتر از ۰/۵ ناپایدار خواهد بود.

با کاهش Ω و نزدیک شدن آن به مقادیر نزدیک صفر، مرز ناپایداری شامل نقاطی با درصد جرمی بخار بیشتر می‌گردد. به عبارت دیگر برای جریان ورودی با دمای نزدیک به نقطه جوش، کیفیت بخار خروجی کانال در نقطه شروع ناپایداری با یک نرخ سریع بر حسب افزایش سرعت جرمی ورودی کاهش می‌یابد و پس از آن با افزایش Ω تغییر چندانی نمی‌کند. این نکته را بر روی منحنی مقاومت داخلی کانال حرارتی (شکل ۲) اینگونه می‌توان در نظر گرفت که با افزایش Ω نقطه شروع ناپایداری به نقطه با بیشترین میزان افت فشار (P_{max} Δ) نزدیک می‌گردد و در نتیجه محدوده ناپایداری گسترش می‌یابد.

پیچیدگی تاثیر عدد مادون سردی برکیفیت ناپایداری را می‌توان در شکل ۷ مشاهده کرد. شکل۷(الف) نشان می‌دهد که مطابق آنچه قابل پیش‌بینی است میانگین موقعیت شروع نقطه جوشش ($\overline{z_b}$) با افزایش میزان مادون سردی Ω افزایش می‌یابد، ولی دامنه نوسانات این کمیت برحسب Ω رفتار غیر خطی نشان می‌دهد، به ویژه در نزدیکی میزان مادون سردی بحرانی که به ازای مقادیر کمتر و بیشتر از آن، رفتار متضاد دارد (شکل ۷(ب)).

شکل ۸ تاثیر ضریب اصطکاک افت فشار (N_f) را بر مرز ناپایداری نشان می‌دهد. جهت تسهیل میانگین N_f تعریف شده برای ناحیه تک‌فاز و دوفاز بر حسب طول کلی کانال در ترسیم این منحنی مورد استفاده قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که با افزایش N_f محدوده پایداری افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر افزایش نسبت طول به قطر

شکل ۷(الف): نقطه شروع جوشش بر حسب میزان مادون سردی
Fig. 7(a). Boiling boundary versus subcooling extent

شکل ۷(ب): دامنه تغییرات محل نقطه جوشش بر حسب میزان مادون سردی
Fig. 7(b). Amplitude of boiling boundary versus subcooling extent

Fig. 8. Stability boundary for different values of friction number

شکل ۸: مرز ناپایداری به ازای مقادیر مختلف ضریب اصطکاک افت فشار (N_f)

لوله و یا زبری سطح سبب پایدارتر شدن سیستم می‌شود.

همچنین مشخصات نوسانات (دوره تناوب و دامنه) بر عنوان مشخصه‌های اصلی موج ناپایداری مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۹ محدوده تغییرات دامنه نوسانات را بر حسب انحراف Ω/G از میزان آن در ناپایداری خنثی نشان می‌دهد. به طور مشخص در این حالت برای میزان مادون سرد مشخص با کاهش سرعت جرمی ورودی و ناپایدار شدن سیستم دامنه نوسانات افزایش می‌یابد.

از زمان اقامت سیال در کانال حرارتی به عنوان زمان مشخصه جهت بررسی زمان متناوب نوسان استفاده شده است. شکل ۱۰ نسبت زمان تناوب به زمان اقامت سیال را بر حسب تغییرات Ω نشان می‌دهد. با افزایش Ω زمان تناوب نوسانات افزایش می‌یابد، اگرچه برای مقادیر $\Omega > ۱۰$، نرخ افزایش کند می‌شود.

Fig. 9. Variation of oscillation amplitude in terms of Ω/G deviation from neutral instability

شکل ۹: تغییرات دامنه نوسانات بر حسب انحراف Ω/G از ناپایداری خنثی

نتیجه‌گیری

در این تحقیق با ارائه و معرفی گروه‌های بدون بعد مقتضی، معادلات حاکم به فرم بدون بعد نوشته شده است. با انتگراسیون معادلات در حالت پایا، رابطه تحلیلی بین افت فشار و سرعت جرمی بر حسب گروه‌های بدون بعد مرتبط به‌دست آمده است که امکان تحلیل کلی شکل آن را ممکن می‌سازد. علاوه براین، معادلات در حالت غیرخطی به‌صورت کلی حل شده‌اند. این حل امکان بررسی نوسانات را برحسب پارامترها و کمیات ورودی مشخص می‌کند. به عبارت دیگر مدل ارائه شده امکان تحلیل خطی ناپایداری موج دانسیته را در محدوده وسیعی از تغییر پارامترها و برای سیالات مختلف فراهم می‌کند. معرفی کمیات بدون بعد مناسب امکان تاثیر تغییر کمیات و

Fig. 10. Variation of period to time residence of fluid ratio versus Ω

شکل ۱۰: تغییرات نسبت زمان تناوب به زمان اقامت سیال بر حسب Ω

پارامترهای متعدد را از طریق بررسی تاثیر تغییر گروه‌های بدون بعد بر محدوده و مشخصات ناپایداری مشخص می‌کند.

فشار سیستم تاثیر محسوسی بر دوره تناوب موج دانسیته ندارد؛ البته با افزایش فشار به میزان کمی دامنه موج کاهش و دوره تناوب موج افزایش می‌یابد. کیفیت بحرانی بخار خروجی با افزایش فشار افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر جهت دسترسی به کیفیت بالاتر بخار در شرایط پایدار و احتراز از ناپایداری می‌توان فشار را افزایش داد.

تاثیر مادون سردی جریان ورودی بر ناپایداری یک تاثیر پیچیده و غیر خطی است. یک مقدار بحرانی برای میزان مادون سردی وجود دارد، برای جریان‌های ورودی گرمتر؛ افزایش میزان مادون سردی باعث کاهش پایداری می‌گردد؛ این در حالی است که برای جریان‌های ورودی سردتر از این جریان با میزان مادون سردی بحرانی؛ افزایش میزان مادون سردی باعث افزایش پایداری می‌گردد.

افزایش میزان مادون سرد بودن سیال ورودی دارای تاثیرات مشهود، غیرخطی و پیچیده بر پدیده نوسانات موج چگالی است. برای یک مقدار مشخص اختلاف دمای مادون سرد (به عنوان نمونه ۱۵ درجه سانتی‌گراد برای سیال R۱۳۴a و فشار ۸۰۰ کیلوپاسکال)، نحوه تاثیر عدد مادون سرد (Ω) یا همان N_{sub} به ازای مقادیر بزرگتر از آن و مقادیر کوچکتر از آن متفاوت است. برای مقادیر کوچکتر از مقدار یاد شده، پایداری سیستم با افزایش عدد مادون سرد افزایش می‌یابد. این درحالی است که برای مقادیر بزرگتر از عدد مادون سرد از میزان بحرانی، پایداری سیستم در ازای افزایش عدد مادون سرد، افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر می‌توان یک اختلاف دمای مادون سرد را به عنوان میزان مادون سرد بحرانی معرفی کرد؛ که افزایش یا کاهش میزان مادون سرد بودن جریان ورودی نسبت به آن سبب افزایش پایداری می‌گردد.

زمان تناوب نوسانات تقریبا دو برابر زمان اقامت سیال در کانال است، اگر چه با کاهش مقدار مادون سرد کاهش می‌یابد و حتی به ازای مقادیر کم مادون سرد به کمتر از $\frac{۱}{۲}$ آن میل می‌کند.

با افزایش سرعت جرمی، سیستم نسبت به رخداد نوسانات موج چگالی پایدارتر می‌گردد. کیفیت بحرانی بخار خروجی نیز با افزایش سرعت جرمی کاهش می‌یابد. از سوی دیگر دوره تناوب ناپایداری و دامنه آن با افزایش سرعت جرمی افزایش می‌یابد.

عدد اصطکاک نیز به‌صورت مستقل بر ناپایداری فرایند موثر است، با افزایش N_f محدوده پایداری افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر افزایش نسبت طول به قطر لوله و یا زبری سطح سبب پایدارتر شدن سیستم می‌شود.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

f	ضریب اصطکاک
G	سرعت جرمی
h	آنتالپی
t	زمان
N	عدد بی‌بعد
N_f	عدد اصطکاک
P	فشار
Q	حرارت
v	حجم مخصوص
x	کیفیت بخار
z	طول کانال

علائم یونانی

ρ	چگالی
Ω	فرکانس واکنش

زیرنویس

acc	شتابی
b	نقطه جوشش
e	خروجی
f	مایع اشباع
fg	اختلاف حالت بخار و مایع اسباع
fr	اصطکاکی
H	همگن
l	مایع
l,min	مربوط به حالت حداقل دبی برای خروجی مایع
In	ورودی
$st.st$	پایا

sub مادون سرد

t کانال حرارتی

tot کلی

tp دوفاز

بالانویس

* شرایط مرجع

مراجع

[1] L.C. Ruspini, C.P. Marcel, A. Clausse, Two-phase flow instabilities: A review, International Journal of Heat and Mass Transfer, 71(0) (2014) 521-548.

[2] L. Tadrist, Review on two-phase flow instabilities in narrow spaces, International Journal of Heat and Fluid Flow, 28(1) (2007) 54-62.

[3] J.H. Lienhard, L.C. Witte, An historical review of the hydrodynamic theory of boiling, Reviews in Chemical Engineering, 3(3-4) (1985) 187-280.

[4] J.A. Boure, A.E. Bergles, L.S. Tong, Review of two-phase flow instability, Nuclear Engineering and Design, 25(2) (1973) 165-192.

[5] S.M. Ghiaasiaan, Two-phase flow, boiling, and condensation: in conventional and miniature systems, Cambridge University Press, 2007.

[6] S.K. Saha, G.P. Celata, Instability in flow boiling in microchannels, Springer, 2016.

[7] L.C. Ruspini, C.A. Dorao, M. Fernandino, Dynamic simulation of Ledinegg instability, Journal of Natural Gas Science and Engineering, 2(5) (2010) 211-216.

[8] H. Gürgenci, T.N. Veziroglu, S. Kakaç, Simplified nonlinear descriptions of two-phase flow instabilities in vertical boiling channel, International Journal of Heat and Mass Transfer, 26(5) (1983) 671-679.

[9] S. Kakac, B. Bon, A Review of two-phase flow dynamic instabilities in tube boiling systems, International Journal of Heat and Mass Transfer, 51(3–4) (2008) 399-433.

[10] G. Yadigaroglu, Two-phase flow instabilities and propagation phenomena, in: J.M. Delhaye (Ed.) Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering, McGraw-Hill, 1981.

[11] D. Papini, M. Colombo, A. Cammi, M.E. Ricotti, Experimental and theoretical studies on density wave instabilities in helically coiled tubes, International Journal of Heat and Mass Transfer, 68(0) (2014) 343-356.

[12] Q. Wang, X.J. Chen, S. Kakaç, Y. Ding, An experimental investigation of density-wave-type oscillations in a convective boiling upflow system, International Journal of Heat and Fluid Flow, 15(3) (1994) 241-246.

[13] L.S. Tong, Y.S. Tang, Boiling heat transfer and two-phase flow, CRC press, 1997.

[14] G.B. Wallis, J.H. Heasley, Oscillations in Two-Phase Flow Systems, Journal of Heat Transfer, 83(3) (1961) 363-369.

[15] M.J. Atkinson, J.C. Friendly, Limitations of simple models in describing two-phase flow oscillations, Department of Chemical Engineering, University of Rochester, Rochester, New York, 1983.

[16] S. Nakanishi, M. Kaji, S. Yamauchi, An approximation method for construction of a stability map of density-wave oscillations, Nuclear Engineering and Design, 95(0) (1986) 55-64.

[17] R.C. Dykhuizen, R.P. Roy, S.P. Kalra, A Linear Time-Domain Two-Fluid Model Analysis of Dynamic Instability in Boiling Flow Systems, Journal of Heat Transfer, 108(1) (1986) 100-108.

[18] R.T. Lahey Jr, M.Z. Podowski, On the analysis of various instabilities in two-phase flows, Multiphase science and technology, 4(1-4) (1989).

[19] A. Clausse, R.T. Lahey Jr, The analysis of periodic and strange attractors during density-wave oscillations in boiling flows, Chaos, Solitons & Fractals, 1(2) (1991) 167-178.

[20] C. Chin-Jang, R.T. Lahey Jr, Analysis of chaotic instabilities in boiling systems, Nuclear Engineering and Design, 167(3) (1997) 307-334.

[21] Rizwan-Uddin, On density-wave oscillations in two-phase flows, Int. J. Multiphase Flow, 20(4) (1994) 721-737.

[22] W. Ambrosini, P. Di Marco, and J.C. Ferreri.,

Linear and nonlinear analysis of density wave instability phenomena, Heat and Technology, 18(1) (2000) 27-36.

[23] D. Delmastro, L. Juanicó, A. Clausse, A delay theory for boiling flow stability analysis, International journal of multiphase flow, 27(4) (2001) 657-671.

[24] C.P. Marcel, M. Rohde, T. Van der Hagen, Experimental investigations on the ESBWR stability performance, Nuclear Technology, 164(2) (2008) 232-244.

[25] S. Paruya, S. Maiti, A. Karmakar, P. Gupta, J.P. Sarkar, Lumped parameterization of boiling channel—Bifurcations during density wave oscillations, Chemical Engineering Science, 74(0) (2012) 310-326.

[26] L.C. Ruspini, C. Dorao, M. Fernandino, Two-Phase Flow Instabilities in Boiling and Condensing Systems, Journal of Power and Energy Systems, 6(2) (2012) 302-313.

[27] L.C. Ruspini, Inertia and compressibility effects on density waves and Ledinegg phenomena in two-phase flow systems, Nuclear Engineering and Design, 250(0) (2012) 60-67.

[28] S. Paul, S. Singh, A density variant drift flux model for density wave oscillations, International Journal of Heat and Mass Transfer, 69 (2014) 151-163.

[29] V. Pandey, S. Singh, Characterization of stability limits of Ledinegg instability and density wave oscillations for two-phase flow in natural circulation loops, Chemical Engineering Science, 168 (2017) 204-224.

[30] S. Chen, X. Chen, G. Luo, K. Zhu, L. Chen, Y. Hou, Flow boiling instability of liquid nitrogen in horizontal mini channels, Applied Thermal Engineering, 144 (2018) 812-824.

[31] S. Li, V. Chatoorgoon, S. Ormiston, Numerical study of oscillatory flow instability in upward flow of supercritical water in two heated parallel channels, International Journal of Heat and Mass Transfer, 116 (2018) 16-29.

[32] L.E. O'Neill, I. Mudawar, M.M. Hasan, H.K. Nahra, R. Balasubramaniam, J.R. Mackey, Experimental investigation of frequency and amplitude of density wave oscillations in vertical upflow boiling, International Journal of Heat and Mass Transfer, 125 (2018) 1240-1263.

[33] P. Muir, Optimal discrete and continuous mono-implicit Runge–Kutta schemes for BVODEs, Advances in Computational Mathematics, 10(2) (1999) 135-167.

[34] P. Muir, M. Adams, Mono-implicit Runge–Kutta–Nyström methods for boundary value ordinary differential equations, Tech. Report 03–2000, Dept. Math. and Comp. Sci., Saint Mary's University, 2000.

ضمیمه الف

اثبات روابط معادله مومنتوم:

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) dz = \Delta P - (\Delta P)_{acc} - (\Delta P)_{fr} \qquad \text{(الف ۱)}$$

با در نظر گرفتن $\int_0^1 \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) dz = \int_0^{z_b} \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) dz + \int_{z_b}^1 \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) dz$ و استفاده از رابطه لایب‌نیتز می‌توان نوشت:

$$\int_0^{z_b} \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) dz + G_{in}\dot{z}_b = \frac{d}{dt}\int_0^{z_b} G dz \qquad \text{(الف ۲)}$$

$$\int_{z_b}^1 \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) dz - G_{in}\dot{z}_b = \frac{d}{dt}\int_{z_b}^1 G dz \qquad \text{(الف ۳)}$$

و در نتیجه

$$\frac{d}{dt}\left(G_{in} z_b\right) + \frac{d}{dt}\int_{z_b}^1 G dz = \Delta P - (\Delta P)_{acc} - (\Delta P)_{fr} \qquad \text{(الف ۴)}$$

که در آن از این نکته که G_{in} تنها تابعی از زمان است استفاده شده است. بنابراین:

$$\frac{d}{dt}\int_{z_b}^1 G dz = \Delta P - (\Delta P)_{acc} - (\Delta P)_{fr} - G_{in}\dot{z}_b - \dot{G}_{in} z_b \qquad \text{(الف ۵)}$$

از آنجا که

$$G_{tp}\left(z,t\right) = \frac{\Omega\left(z - z_b\right) + G_{in}}{1 + x\left(z,t\right) v_{fg}} \qquad \text{(الف ۶)}$$

و با تعریف

$$GZB\left(G_{in},x_e,z_b\right)=G_{in}-\frac{\left(1-z_b\right)\Omega}{x_e v_{fg}} \quad \text{(الف ۷)}$$

انتگرال سمت چپ معادله را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$\frac{\left(1-z_b\right)\Omega}{x_e v_{fg}}\int_{z_b}^{1}\frac{\left(z-z_b\right)+G_{in}/\Omega}{\left(z-z_b\right)+\frac{\left(1-z_b\right)}{x_e v_{fg}}}dz \quad \text{(الف ۸)}$$

و یا

$$\frac{\left(1-z_b\right)\Omega}{x_e v_{fg}}\int_{z_b}^{1}\frac{\left(z-z_b\right)+\frac{\left(1-z_b\right)}{x_e v_{fg}}+GZB/\Omega}{\left(z-z_b\right)+\frac{\left(1-z_b\right)}{x_e v_{fg}}}dz \quad \text{(الف ۹)}$$

و در نتیجه

$$\frac{d}{dt}\int_{z_b}^{1}Gdz=\frac{d}{dt}\left[\frac{\left(1-z_b\right)}{x_e v_{fg}}\left[\left(1-z_b\right)+\frac{GZB}{\Omega}\ln\left(1+x_e v_{fg}\right)\right]\right] \quad \text{(الف ۱۰)}$$

و یا

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{z_b}^{1}Gdz=&\dot{z}\left(\frac{-2\Omega}{x_e v_{fg}}\left(1-z_b\right)-\frac{GZB}{x_e v_{fg}}\ln\left(1+x_e v_{fg}\right)+\frac{\left(1-z_b\right)\Omega}{\left(x_e v_{fg}\right)^2}\ln\left(1+x_e v_{fg}\right)\right)\\&+\dot{G}_{in}\left(\frac{\left(1-z_b\right)}{x_e v_{fg}}\ln\left(1+x_e v_{fg}\right)\right)+\dot{x}_e\left(-\frac{\left(1-z_b\right)^2\Omega}{x_e^2 v_{fg}}-\frac{\left(1-z_b\right)GZB}{x_e^2 v_{fg}}\ln\left(1+x_e v_{fg}\right)\right.\\&\left.+\frac{\left(1-z_b\right)^2\Omega}{x_e^3\left(v_{fg}\right)^2}\ln(1+x_e v_{fg})+\frac{\left(1-z_b\right)}{x_e}\frac{GZB}{1+x_e v_{fg}}\right)\end{aligned} \quad \text{(الف ۱۱)}$$

همچنین برای محاسبه $(\Delta P)_{fr}$ با توجه به رابطه زیر خواهیم داشت:

$$\left(\Delta P\right)_{fr}=N_{fl}\int_{0}^{z_b}G_{in}^2+N_{ftp}\int_{z_b}^{1}\frac{G_{tp}^2}{\rho_H}dz \quad \text{(الف ۱۲)}$$

و یادآوری این نکته که G_{in} تابعی از z نیست، می‌توان نوشت

$$(\Delta P)_{fr}=N_{fl}G_{in}^2 z_b+N_{ftp}\left[\int_{z_b}^{1}\frac{\left(G_{in}+\Omega\left(z-z_b\right)\right)^2}{1+\frac{z-z_b}{1-z_b}x_e v_{fg}}dz\right] \quad \text{(الف ۱۳)}$$

$$(\Delta P)_{fr}=N_{fl}G_{in}^2 z_b+N_{ftp}\left[\int_{z_b}^{1}\frac{\left(\left(z-z_b\right)+\frac{1-z_b}{x_e v_{fg}}+\frac{GZB}{\Omega}\right)^2}{\left(z-z_b\right)+\frac{1-z_b}{x_e v_{fg}}}dz\right]\frac{\Omega^2\left(1-z_b\right)}{x_e v_{fg}} \quad \text{(الف ۱۴)}$$

ویا

$$\begin{aligned}\left(\Delta P\right)_{fr}=&N_{fl}G_{in}^2 z_b+N_{ftp}\frac{\Omega\left(1-z_b\right)}{x_e v_{fg}}\left(\frac{\left(1-z_b\right)^2}{2}\left(1+\frac{2}{x_e v_{fg}}\right)\right.\\&\left.+2\left(\frac{GZB}{\Omega}\right)\left(1-z_b\right)+\left(\frac{GZB}{\Omega^2}\right)\ln\left(1+x_e v_{fg}\right)\right)\end{aligned} \quad \text{(الف ۱۵)}$$

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

M. R. Shahnazari , A. Amjadigolpayegani, A. Saberi, Analysis of Density Wave Oscillations in a Boiling Channel by a New Analytical Model, Amirkabir J. Mech Eng., 53(3) (2021) 1505-1520.

DOI: 10.22060/mej.2020.17180.6528

این صفحه عمداً خالی است