نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ویژه ۲ ، سال ۱۴۰۰، صفحات ۱۱۵۹ تا ۱۱۷۸
DOI: 10.22060/mej.2020.17013.6495

بررسی ارتعاشات آزاد یک نانو تیر مدرج هدفمند طولی به همراه جرم متمرکز با استفاده از روش عددی جدید توسعه تقریبی و تئوری غیرموضعی گرادیان کرنشی

محمدرضا اقبالی[۱]، سید امیرحسین حسینی[۲*]، امید رحمانی[۱]

[۱] دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران
[۲] دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فنی مهندسی بویین زهرا، بویین زهرا، ایران

خلاصه: در این مقاله هدف، مطالعه ارتعاشات آزاد طولی یک نانو تیر مدرج هدفمند به همراه جرم متمرکز براساس تئوری غیرموضعی گرادیان کرنشی با استفاده از روش عددی توسعه تقریبی می‌باشد. امروزه با توجه به اهمیت و کاربرد روز افزون نانو سازه‌ها، بررسی و شناخت خصوصیات مکانیکی و ارتعاشی آن‌ها ضروری به نظر می‌رسد. به دلیل ابعاد کوچک سازه و رفتار وابسته به اندازه آن و عدم توانایی تئوری‌های کلاسیک در پیش‌بینی رفتارهای مکانیکی وابسته به اندازه، از تئوری‌های غیرکلاسیک استفاده گردیده است. معادلات حاکم و روابط شرایط مرزی با استفاده از اصل همیلتون استخراج گردیده و برای نانو تیر مدرج هدفمند با پنج شرط مرزی لولا-لولا، گیردار-آزاد، گیردار-گیردار، گیردار-لولا و گیردار-جرم متمرکز ارائه شده است. سپس، معادله دیفرانسیل به صورت تحلیلی حل گردیده است تا معادله‌های فرکانس برای پنج شرط مرزی به دست آیند. در ادامه با استفاده از روش عددی توسعه تقریبی و با حل مرتبه صفر و مرتبه یک، فرکانس‌های بی‌بعد استخراج گردیده است. مزایای استفاده از این روش سادگی روابط و زمان اجرا مناسب در کدنویسی می‌باشد. در نهایت تاثیر پارامترهایی مانند پارامتر غیرموضعی، مقیاس طول ماده، تاثیر نوع تغییر ماده و نسبت طول به ضخامت بر روی ارتعاشات آزاد نانو تیر بررسی شده است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۸/۰۶/۱۵
بازنگری: ۱۳۹۸/۰۹/۰۴
پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۶
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۱۲/۰۴

کلمات کلیدی:
نانو تیر
تئوری گرادیان کرنشی غیرمحلی
مدرج هدفمند طولی
فرکانس‌های طبیعی
روش توسعه تقریبی

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی یک نوع جدید از مواد هستند که تغییرات مداومی در خواص مواد از یک جزء به جزء دیگر دارند. به‌دلیل خواص مکانیکی و حرارتی آن‌ها، این مواد معمولا در انواع سازه‌های مهندسی با هندسه تیر، صفحه و پوسته به‌طور گسترده درمحیط‌های مهندسی، به‌ویژه برای توربین گاز و مهندسی هوافضا مورد استفاده قرار می‌گیرند. از سوی دیگر مطالعه ارتعاشات این سازه‌ها اهمیت زیادی دارد. همچنین به‌دلیل مقاومت حرارتی عالی و تمرکز تنش پایین‌تر، امروزه مفهوم مواد مدرج تابعی در سیستم‌های مقیاس کوچک مانند سیستم‌های میکرو/ نانو الکترومکانیکی به کار می‌رود.

به سبب پیشرفت‌های اخیر حاصل شده در علوم مهندسی و صنایع ساخت و تولید، سازه‌های با ابعاد میکرومتری راه خود را در این صنایع گشوده‌اند. در میان این سازه‌ها، تیرهای با ابعاد میکرو، به‌سبب کاربردهای گسترده‌ای که در میکروسکوپ‌های نیروی اتمی، حسگرهای زیستی، میکرومحرک‌ها و میکروکاوشگرها دارند، مورد توجه ویژه‌ای قرار گرفته‌اند. در این کاربردها، معمولاً به‌سبب ابعاد کوچک، خواص فیزیکی متفاوت و جدیدی در تیر مشاهده می‌شود.

تشدیدگر میکروالکترومکانیکی[۱] دستگاهی میکروالکترومکانیکی و بسیار کوچک است که به‌عنوان دستگاهی برای سنجش دقیق زمان مورد استفاده می‌گیرد. تشدیدگر میکروالکترومکانیکی از یک میکروتیر دوسرگیردار تشکیل شده است که با فرکانسی بسیار بالا ارتعاش می‌کند. علاوه بر این، چندین میکروحسگر و مدار تحریک نیز

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: hosseini@bzte.ac.ir

1 Micro Electro Mechanic Resonator

سایر بخش‌های تشدیدگر را تشکیل می‌دهند. میکروتشدیدگرها در سال‌های آینده به عنوان دستگاه‌های سنجش زمان در دستگاه‌هایی نظیر گوشی‌های تلفن همراه یا رایانه‌ها به‌کار خواهند رفت. در تشدیدگرهای میکروالکترومکانیکی، فرکانس ارتعاشی میکروتیر به‌عنوان مرجعی برای سنجش گذر زمان مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌منظور سنجش دقیق زمان، فرکانس ارتعاش میکروتیر می‌بایست به‌طور دقیق تعیین شود، چراکه کوچکترین خطا یا انحراف ممکن است به ایجاد اختلاف فاحش و غیرقابل‌قبول بین زمان اعلام شده توسط میکروتشدیدگر و زمان واقعی بینجامد. به‌همین جهت رسیدن به یک مدل‌سازی دقیق که بتواند ارتعاش سیستم را با بیشترین دقت محاسبه کند به موضوع تحقیقاتی مهمی تبدیل شده است [۱-۵].

به منظور مطالعـه رفتار نانو ساختارها، روش‌های متعددی استفاده شده است. شبیه‌سازی دینامیک مولکولی ازجمله روش‌های مورد اسـتفاده در مدلسـازی نانوسـاختارها می‌باشد. با این حال، این روش‌ها بسیار وقت‌گیر است به نحوی که مدل‌سازی عملکرد ساختارهای پیچیده با تعداد اتم بالا تقریبا غیرممکن است. برای غلبه بر این مشکل تئوری‌های مرتبط با اثرات اندازه توسعه یافته است. فرض بنیادین در تئوری‌های کلاسیک الاستیسیته، پیوستگی محیط مادی و میدان‌های تانسوری تنش و کرنش در این محیط‌ها است. در نانوسازه‌ها، فضای خالی بین اتم‌ها نسبت به ابعاد نانوسازه قابل‌توجه بوده و نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد. عدم توجه به این موضوع می‌تواند باعث انحراف زیاد از رفتار واقعی آنان گردد. همچنین، در نانوساختارها، فرضیات پیوستگی محیط مادی دیگر اعتبار نخواهد داشت. بنابراین استفاده از تئوری‌های مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته‌ی کلاسیک، که براساس فرض پیوستگی محیط مادی استوار است، برای مدل‌سازی نانو سازه‌ها صحیح نمی‌باشد.

تئوری الاستیسیته غیرمحلی توسط ارینگن [۶] ارائه شده است. در این تئوری تنش در یک نقطه به کرنش در تمام نقاط وابسته می‌باشد. درنهایت برای اجسام همگن و ایزوتروپیک، تئوری خطی منجر به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل برای میدان جابجایی می‌شود که به‌طور کلی حل آن دشوار است. این تئوری به وسیله بسیاری از اشخاص مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است [۷-۱۲]. تئوری گرادیان کرنشی اولین بار توسط میندلین ارائه شده است [۱۳]. در تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی برای بیان اثر اندازه از چهار پارامتر مقیاس اندازه استفاده می‌شود. تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده توسط لام و همکاران [۱۴]، ارائه شده است. در این تئوری برای بیان اثر اندازه از سه پارامتر مقیاس طول استفاده می‌شود. تئوری تنش کوپل توسط توپین [۱۵] ارائه شده است. در این تئوری برای بیان اثر اندازه از دو پارامتر مقیاس طول استفاده می‌شود. تئوری تنش کوپل در بسیاری از مراجع تحت عنوان تئوری تنش کوپل کلاسیک شناخته می‌شود. تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده توسط یانگ [۱۶]، ارائه شده است. او در این پژوهش با بیان معادله دیگری به نام کوپل ممان (علاوه بر تعادل نیرو تعادل ممان) متقارن بودن تانسور کوپل تنش را اثبات نمود و تعداد پارامتر مقیاس طول برای بیان اثر اندازه را، از دو به یک کاهش داد. کاهش تعداد پارامترهای مقیاس طول در تئوری تنش کوپل منجر به سودمندبودن و کاربرد بیشتر این تئوری نسبت به تئوری تنش کوپل کلاسیک گردیده است. تئوری تنش کوپل اصلاح شده حالت ساده شده تئوری گرادیان کرنش است که در آن از چرخش به‌جای کرنش برای بدست‌آوردن تانسور انحنا استفاده شده است.

لی و همکاران[۱۷] یک روش ماتریس انتقال دقیق را برای تجزیه و تحلیل ویژگی‌های ارتعاشات آزاد مواد مدرج تابعی ارائه دادنـد. در ایـن مقاله خواص مواد در راستای ضخامت تیر تغییر می‌کند. در ادامه روابط با استفاده از اصل همیلتـون اسـتخراج گردیـد و نتـایج بـا اسـتفاده از تئـوری کلاسیک تیر برای شرایط مرزی مختلف محاسبه شده است. ابراهیمی و همکاران [۱۸] به بررسی آنالیز ارتعاشات یک نانو تیر پیزو مگنتیک مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک پرداختند. روابط با اسـتفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن و همچنین با کمک روش همیلتون استخراج شد و نتایج عددی براساس تئوری مرتبـه سـوم تیـر محاسـبه گردیدند. لی و همکاران [۱۹] به بررسی کمانش و ارتعاشات آزاد یک نانو تیر مدرج تابعی محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرمحلـی براسـاس روش مربع سازی تفاضلی تعمیم یافته[1] پرداختند. با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت و شرایط مرزی به دست آمد و در ادامـه تـاثیر اثر اندازه بر روی پارامترهای کمانش و فرکانس‌های طبیعی بررسی گردید.

ژانگ و همکاران [۲۰] مدل‌سازی عدم قطعیت را برای رفتار ارتعاشات و کمانش یک نانوتیر مدرج تابعی در محیط گرمایی مورد

1 Generalized Differential Quadrature Method(GDQM)

بررسی قرار دادند. سپس روابط بـا استفاده از روش همیلتون و تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن استخراج گردید. درادامه با استفاده از روش تجزیه و تحلیـل فاصـله زمـانی مبتنـی بـر حساسیت نتایج محاسبه شد. لیو و همکاران [۲۱] ارتعاشات یک نانوتیر مگنتو-الکترو-ویسکوالاستیک مدرج تابعی بر بستر ویسکو الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. روابط با استفاده از روش انرژی و تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن برای یک تیر تیموشینکو استخراج گردید. سپس نتایج استخراج‌شده با نتایج مقاله دیگر بـه ازای پارامترهای مختلف اثر اندازه وهمچنین شرایط مرزی مختلف مقایسه گردید.کائو و همکاران [۲۲] با استفاده از روش توسعه تقریبی به بررسی ارتعاشات آزاد تیر مدرج تابعی محوری با شرایط مرزی مختلف پرداختند و نتایج به‌دست آمده را با نتایج المان محدود و نتایج مقالات دیگر مقایسه نمودند همچنین، در این مقاله تاثیر پارامتر گرادیان در سه فرکانس طبیعی مورد بحث قرار گرفته است.

یانگ و همکاران [۲۳] ارتعاشات آزاد غیرخطی یک نانوتیر مدرج تابعی برروی بستر الاستیک را مورد مطالعه قراردادند. سپس با استفاده از روش همیلتون و تئوری گرادیان کرنش غیرمحلی معادلات و شرایط مرزی استخراج گردید در ادامه با استفاده از روش تجزیه و تحلیل فاصله زمانی مبتنی بر حساسیت و روش تجزیه و تحلیل زمانبندی مبتنی بر الگوریتم تطبیقی فرکانس‌های بی‌بعد استخراج گردید. کمانش و ارتعاشات یک نانوتیر مدرج تابعی توسط ایمانی آریا و همکاران [۲۴] براساس یک مدل المان محدود غیرمحلی مطالعه گردید. سپس با استفاده از روش همیلتون و تئوری الاستیسیته غیرمحلی روابط استخراج شد. المان تیر پیشنهادی شامل پنج نقطه و ده گره می‌باشد، درادامه نتایج با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای شرایط مرزی مختلف محاسبه گردید. ترابلسی و همکاران [۲۵] ارتعاشات آزاد و اجباری یک نانوتیر تیموشینکو مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک را مورد بررسی قراردادند. سـپس معادلات با استفاده از اصل همیلتون و تئوری ارینگن استخراج گردید. درنتیجه نتایج حاصل به ازای پارامترهای مختلف اثر انـدازه و بـا روش مقیـاس اندازه، روش مجذور هارمونیک و روش مجذور تفاضلی مقایسه گردیدند.

ایمانی آریا و همکاران[۲۶] یک مدل المان محدود برای آنالیز ترموالاستیک یک نانوتیر مدرج تابعی ارائه نمودند. سپس روابط با استفاده از اصل همیلتون و تئوری الاستیسیته غیر محلی برای یک تیر تیموشینکو استخراج گردید. در ادامه ارتعاشات گرمایی و کمـانش گرمـایی بـرای شـرایط مـرزی مختلف با استفاده از روش المان محدود و روش مربع سازی تفاضلی تعمیم یافته به‌دست آمد، به ازای پارامترهـای مختلـف اثـر اندازه با یکدیگر مقایسه گردید. بخشی خانیکی [۲۷] ارتعاشات نانوتیر مدرج تابعی را مورد مطالعه قرار داد. سپس معادلات بـا اسـتفاده از تئـوری اریـنگن و همچنـین اصـل همیلتون استخراج شد و با استفاده از روش مربع‌سازی تفاضلی تعمیم‌یافته فرکانس‌های نانو تیر برای شرایط مرزی مختلف محاسبه گردید. لیو و همکاران [۲۸] ارتعاشات آزاد غیرخطی یک نانو تیر مدرج تابعی ساندویچی را مورد بررسی قراردادند. سپس معادلات با اسـتفاده از روش همیلتون و تئوری گرادیان کرنش غیرمحلی استخراج شد. در ادامه فرکانس‌های طبیعی به ازای پارامترهای مختلف اثر اندازه برای تمامی شـرایط مـرزی محاسبه گردید.

قدیری و همکاران [۲۹] آنالیز ارتعاشات عرضی یک نانوتیر مدرج تابعی به همراه جرم متمرکز با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول غیرمحلی مورد بررسی قرار دادند. در ادامه معادلات نانوتیر برمبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلی و و نظریه تیر تیموشینکو و همچنین روش همیلتون استخراج می‌گردد. سپس با اعمال روش تحلیلی برای شرط مرزی فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آید. در نهایت به مطالعه تاثیر پارامترهای اثر اندازه، جرم انتهای تیر، ضخامت تیر و شاخص توانی بر روی فرکانس‌های طبیعی پرداخته شده است. تولگا و همکاران [۳۰] ارتعاشات آزاد یک تیر کامپوزیتی دوار با جرم نقطه‌ای متصل به آن را مورد بررسی قرار دادند. سپس معادلات تیر برای شرط مرزی بسته- آزاد با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم استخراج گردید. در ادامه با استفاده از روش ریتز فرکانس‌های طبیعی به دست آمد. در نهایت به مطالعه تاثیر پارامترهای سرعت چرخش، نسبت جرم متصل به جرم تیر و نسبت طول به ضخامت بر روی فرکانس‌های طبیعی پرداخته شده است.

هدف از این پژوهش بررسی ارتعاشات آزاد یک نانو تیر مدرج هدفمند طولی به همراه جرم متمرکز با استفاده از تئوری غیرموضعی گرادیان کرنشی می‌باشد. حل مساله حاضر در این مقاله با استفاده از روش جدید توسعه تقریبی انجام خواهد شد. مبنای کار این روش بدین صورت می‌باشد که بعد از استخراج معادلات دیفرانسیل تیر

و سپس بی‌بعدسازی، ابتدا فرکانس‌های اولیه بـرای شـرایط مرزی مورد نظر از حل معادله فرکانس استخراج می‌گردد. در ادامه معادله جابجایی به صورت یک سری که در یک پارامتر کوچک اغتشاش ضرب‌شده بسط داده می‌شود. معمولا برای به‌دست‌آوردن فرکانس‌ها تا دو جمله بسط داده می‌شوند. این روش شـامل دو مرتبـه حل (مرتبـه صـفر و مرتبـه یـک) می‌باشد که در حل مرتبه صفر فرکانس‌ها تا یک جمله بسط داده شده است و در حل مرتبه یک تا دو جمله بسط داده می‌شود. درنهایت با حـل معادلـه دیفرانسیل فرکانس‌های بی‌بعد شده استخراج می‌شود. در این مقاله یک معیار جدید بر مبنای کاهش پارامترهای ضریب کرنش که در تئوری الاستیسیته غیرمحلی بیان شد ارائه گردیده است. همچنین به این موضوع اشاره گردید که مقیاس‌های طولی موجود در تئوری الاستیسیته غیرمحلی و گرادیان کرنش باعث سردرگمی میان محققان شده و در ادامه با استفاده از دو تابع کرنل پایه به بیان تئوری گرادیان کرنش و الاستیسیته غیرمحلی مرتبه بالا پرداخته شده است.

از ویژگی‌های روش توسعه تقریبی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

این روش جدید یک روش ساده به لحاظ روابط ریاضی می‌باشد. برای نمونه روش توسعه تقریبی در مقایسه با روش بدون المان که انتخاب ناحیه تاثیر و تابع وزن مناسب (زنگوله‌ای، پله‌ای و غیره) از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد یا روش المان محدود که دارای پیچیدگی در المان‌بندی‌ها و فراخوانی ماتریس‌های سفتی دارند، به مراتب از روابط ساده‌تری برخوردار می‌باشد. همین ساده بودن روابط باعث می‌شود که درکدنویسی سرعت حل مسأله درمقایسه با روش های عددی دیگر سریع‌تر باشد. با توجه به درصد خطای پایین این روش در عین سادگی روابط ریاضی، روش توسعه تقریبی برای حل مسائل مختلف مکانیک با هندسه‌های گوناگون مناسب می‌باشد. در مطالعه پژوهش‌های پیشین تاکنون از این روش عددی در نانوتیرها استفاده نشده است.

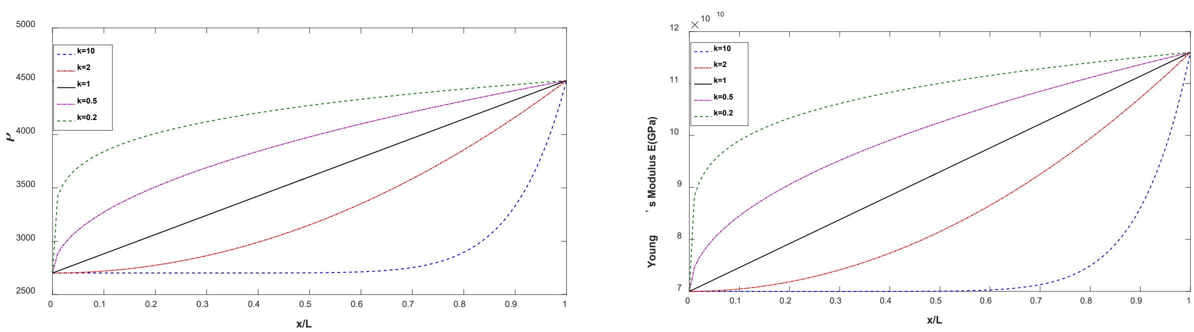
۲- فرمول‌بندی مساله

این پژوهش، تیری با مقطع عرضی یکنواخت و ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی برای شرایط مرزی مختلف همچنین تاثیر جرم متمرکز

(الف) (ب)

Fig. 1. The geometry and coordinate system of a FG nano beam (a) with attached mass (b) without attached mass.

شکل ۱: هندسه و سیستم مختصات یک نانوتیر (الف) به همراه جرم متمرکز (ب) بدون جرم متمرکز



(a) Young's Modulus **(b) Mass Density**

(الف) مدول یانگ **(ب) چگالی جرمی**

Fig. 2. The plots of variation of material properties of the functionally graded nano beam.

شکل ۲: نمودار تغییرات خواص مواد نانوتیر مدرج تابعی

بروی فرکانس‌های طبیعی را مورد بررسی قرار می‌دهد. طول تیر، عرض، ارتفاع و جرم متمرکز به ترتیب L، B، H و m_0 در شکل ۱ نشان داده شده است.

۲-۱- ماده مدرج تابعی

در این مقاله خواص ماده تیر به‌طور پیوسته در جهت محوری با فرض گرادیان توانی تغییر می‌کند، بنابراین خواص مواد مانند مدول یانگ و چگالی جرمی در امتداد محور تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$E(x)=(E_R-E_L)\left(\frac{x}{L}\right)^k+E_L \qquad (۱)$$

$$\rho(x)=(\rho_R-\rho_L)\left(\frac{x}{L}\right)^k+\rho_L \qquad (۲)$$

در روابط (۱) و (۲)، k پارامتر غیرمنفی شاخص توانی است. در $x=L$، $E=E_R$ و $\rho=\rho_R$؛ و در $x=0$، $E=E_L$ و $\rho=\rho_L$ می‌باشند. در شکل ۲ تغییر خواص مواد تعریف شده در روابط (۱) و (۲) نشان داده می‌شود.

۳- تئوری غیرموضعی گرادیان کرنشی

نظریه گرادیان کرنش غیرموضعی مرتبه بالا نشان می‌دهد [۳۱] که تنش شامل میدان تنش الاستیک غیر محلی و میدان تنش گرادیان کرنش می‌شود.

$$t_{xx}=\sigma_{xx}-\frac{d\sigma_{xx}^{(1)}}{dx} \qquad (۳)$$

در رابطه (۳)، σ_{xx} و $\sigma_{xx}^{(1)}$ به‌ترتیب تنش کلاسیک و تنش مرتبه بالا می‌باشند که به‌صورت رابطه (۴) نشان داده می‌شوند [۳۱]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\int_0^L E(x)\alpha_0(x,x',e_0a)\varepsilon'_{xx}(x')dx'\\ \sigma_{xx}^{(1)}&=l^2\int_0^L E(x)\alpha_1(x,x',e_1a)\varepsilon'_{xx,x}(x')dx'\end{aligned} \qquad (۴)$$

برای بررسی اهمیت میدان تنش الاستیسیته غیرمحلی، پارامترهای e_0a و e_1a (که در رابطه (۴)، e_0a و e_1a بیانگر پارامترهای غیرمحلی می‌باشند، در این مقاله فرض می‌شود $e=e_0=e_1$) و پارامتر مشخصه مواد l (که به عنوان پارامتر مقیاس طول ماده نیز شناخته می‌شود) ارائه می‌گردد تا اهمیت میدان تنش گرادیان کرنش در نظر گرفته شود [۱۴, ۳۱]. در رابطه (۴)، $\alpha(x,x',ea)$ تابع کرنل غیرمحلی می‌باشد [۶]. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$(1-(ea)^2\nabla^2)\sigma_{xx}=E(x)\varepsilon_{xx} \qquad (۵)$$

$$(1-(ea)^2\nabla^2)\sigma_{xx}^{(1)}=l^2E(x)\varepsilon_{xx,x} \qquad (۶)$$

در روابط (۵) و (۶)، $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}$ می‌باشد. با استفاده از روابط (۳)، (۵) و (۶) داریم:

$$\left[1-(ea)^2\nabla^2\right]t_{xx}=E(x)\varepsilon_{xx}-l^2\nabla.(E(x)\nabla\varepsilon_{xx}) \qquad (۷)$$

- تئوری پیوسته غیرمحلی: در معادله (۷)، اگر $l=0$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\left[1-(ea)^2\nabla^2\right]t_{xx}=E(x)\varepsilon_{xx} \qquad (۸)$$

- تئوری گرادیان کرنشی: در معادله (۷)، اگر $ea=0$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$t_{xx}=E(x)\varepsilon_{xx}-l^2\nabla.(E(x)\nabla\varepsilon_{xx}) \qquad (۹)$$

۴- معادله حاکم برای تیرهای مدرج تابعی وابسته به اندازه

فرمول‌بندی کرنش خطی تیر اویلر برنولی به‌صورت زیر استخراج می‌شود که در آن جابجایی طولی صفحه میانی تیر (u) به‌دلیل کوچک‌بودن صرف‌نظر شده است.

$$\varepsilon_{xx}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yz}=0 \qquad (۱۰)$$

۴-۲- محاسبه معادلات تعادل به کمک اصل همیلتون

انرژی کرنش مجازی تیر مدرج تابعی وابسته به اندازه به‌صورت رابطه (۱۱) می‌باشد [۳۱]:

$$\begin{aligned}\delta U&=\int_V(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{xx}^{(1)}\nabla\delta\varepsilon_{xx})dV\\ &=\int_V(\sigma_{xx}-\nabla\sigma_{xx}^{(1)})\delta\varepsilon_{xx}dV+\left[\int_A\sigma_{xx}^{(1)}\delta\varepsilon_{xx}dA\right]_0^L\\ &=\int_V t_{xx}\delta\varepsilon_{xx}dV+\left[\int_A\sigma_{xx}^{(1)}\delta\varepsilon_{xx}dA\right]_0^L\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

منتجه‌های تنش به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

$$M=\int_A z\,t_{xx}\,dA\,;\ M^{(1)}=\int_A z\,\sigma_{xx}^{(1)}\,dA \qquad (۱۲)$$

که M ممان کلاسیک و $M^{(1)}$ ممان غیرکلاسیک می‌باشد. با توجه به روابط بالا انرژی مجازی پتانسیل و جنبشی به صورت رابطه (۱۳) می‌باشند:

$$\begin{aligned}&\delta U=-\int_0^L M\,\delta W_{,xx}\,dx-\left[M^{(1)}\delta W_{,xx}\right]_0^L\\&\delta K=\int_0^L \rho(x)A\,\dot W\,\delta\dot W\,dx\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

برای ممان اینرسی داریم:

$$I=b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^2\,dA \qquad (۱۴)$$

۳-۴- روش همیلتون

در این مقاله برای به‌دست‌آوردن معادله تیر از روش همیلتون استفاده شده است که به‌صورت رابطه (۱۵) ارائه شده است:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta K-\delta U)\,dt=0 \qquad (۱۵)$$

با استفاده از معادله (۱۳) و (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\begin{array}{l}-M\,\delta W_{,x}\Big|_0^L+M_{,x}\,\delta W\Big|_0^L-\\ \int_0^L M_{,xx}\,\delta W-M^{(1)}\delta W_{,xx}\Big|_0^L\end{array}\right]dt=0 \qquad (۱۶)$$

با حل معادله (۱۶) و فاکتورگیری، معادله تعادل به صورت رابطه (۱۷) استخراج می‌شود:

$$\delta w: M_{,xx}-\rho(x)A\,\ddot w=0 \qquad (۱۷)$$

که شرایط مرزی به صورت زیر به‌دست‌می‌آیند:

$$M_{,xx}\,\delta W\Big|_0^L=0;\ M\,\delta W_{,x}\Big|_0^L=0;\ M^{(1)}\delta W_{,xx}\Big|_0^L=0 \qquad (۱۸)$$

با استفاده از روابط (۷)، (۱۰) و (۱۲) معادله ممان به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned}&M=(ea)^2M_{,xx}-E(x)I\,w_{,xx}\\&+l^2I\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۹) معادله نهایی ممان به‌صورت رابطه (۲۱) ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned}&M=(ea)^2\left[\rho(x)A\,\ddot W\right]-E(x)I\,W_{,xx}\\&+l^2\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)I\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

با ترکیب معادلات (۱۷) و (۲۰) معادله یک نانوتیر مدرج تابعی اویلر برنولی به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)I\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)\\&+\left(1-(ea)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\rho(x)A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]=0\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

۵- بی‌بعدسازی

در تیرهای مدرج تابعی مقادیر $E(x)I$ و $\rho(x)A$ هر دو متغیر هستند، که حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر را دشوار می‌سازد. در اینجا با فرض:

$$\begin{aligned}&E(x)=E_0I+\overline{E(x)I}\\&\rho(x)A=\rho_0A+\overline{\rho(x)A}\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

$\overline{E(x)I}$ و $\overline{\rho(x)A}$ به ترتیب قسمت متغیر سفتی خمشی و چگالی جسم در واحد طول می‌باشند و E_0I و ρ_0A در بخش ۶-۳ محاسبه می‌گردد. زمان، متغیر فضایی و پارامترهای غیرمحلی بی‌بعد به صورت زیر فرض شده است:

$$\tau=\frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{E_0I}{\rho_0A}};\ \xi=\frac{x}{L};\ \alpha_1=\frac{ea}{L};\ \alpha_2=\frac{l}{L} \qquad (۲۳)$$

با استفاده از معادلات (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) فرم بی‌بعدشده معادله نانوتیر مدرج تابعی اویلر برنولی به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial\varsigma^2}(1+f_1(\xi))\frac{\partial^2 w}{\partial\varsigma^2}-\alpha_2^2\frac{\partial^2}{\partial\varsigma^2}(1+f_1(\xi))\frac{\partial^4 w}{\partial\varsigma^4}\\&+(1+f_2(\xi))\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}-\alpha_1^2\frac{\partial^2}{\partial\varsigma^2}(1+f_2(\xi))\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}=0\\&\quad 0\le\xi\le 1\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

که در رابطه بالا:

$$f_1(\xi)=\frac{\overline{E(\xi)I}}{E_0I};f_2(\xi)=\frac{\overline{\rho(\xi)A}}{\rho_0A} \qquad (۲۵)$$

برای بررسی ارتعاشات آزاد فرض شده است:

$$w(\xi,\tau)=W(\xi)\sin\omega\tau \tag{۲۶}$$

پبا جایگذاری (۲۶) در (۲۴) رابطه (۲۷) استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{d\varsigma^2}(1+f_1(\xi))\frac{d^2W}{d\varsigma^2}-\alpha_2^2\frac{d^2}{d\varsigma^2}(1+f_1(\xi))\frac{d^4W}{d\varsigma^4}\\&-\omega^2(1+f_2(\xi))W+\omega^2\alpha_1^2\frac{d^2}{d\varsigma^2}(1+f_2(\xi))W=0\\&0\le\xi\le1\end{aligned}\tag{۲۷}$$

۶- تعیین فرکانس طبیعی

۱-۶- روش توسعه تقریبی

در این بخش، با فرض رابطه (۲۸)، روش توسعه تقریبی برای به دست آوردن یک راه‌حل تفاضلی حول نقطه مرجع یک تیر همگن معرفی می‌شود [۲۲]:

$$f_1(\xi)=\varepsilon f_1(\xi),\; f_2(\xi)=\varepsilon f_2(\xi) \tag{۲۸}$$

در رابطه (۲۸)، ε پارامتر اغتشاش کوچک می‌باشد. بسط برای ω و $W(\xi)$ با استفاده از روش به‌کاررفته در مرجع [۲۲]، در رابطه (۳-۳۵) فرض می‌شود [۲۲]:

$$\begin{aligned}&\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\dots\\&W(\xi)=W_0(\xi)+\varepsilon W_1(\xi)+\varepsilon^2W_2(\xi)+\dots\end{aligned}\tag{۲۹}$$

با جایگذاری (۲۸) و (۲۹) در (۲۷)، رابطه (۳۰) استخراج شده است:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{d\varsigma^2}(1+\varepsilon f_1(\xi))\frac{d^2(W_0+\varepsilon W_1)}{d\varsigma^2}\\&-\alpha_2^2\frac{d^2}{d\varsigma^2}(1+\varepsilon f_1(\xi))\frac{d^4(W_0+\varepsilon W_1)}{d\varsigma^4}\\&-(\omega_0+\varepsilon\omega_1)^2(1+\varepsilon f_2(\xi))(W_0+\varepsilon W_1)\\&+(\omega_0+\varepsilon\omega_1)^2\alpha_1^2\frac{d^2}{d\varsigma^2}(1+\varepsilon f_2(\xi))(W_0+\varepsilon W_1)=0\end{aligned}\tag{۳۰}$$

در رابطه (۳۰) به‌ازای بسط اول فرضیات (به‌ازای یک جمله از رابطه (۲۹) یعنی $\omega=\omega_0$ و $W=W_0$ یا $\varepsilon=0$ در رابطه (۳۰))، رابطه (۳۱) به دست می‌آید:

$$-\alpha_2^2\frac{d^6W_0}{d\xi^6}+\frac{d^4W_0}{d\xi^4}-\omega_0^2W_0+(\alpha_1\omega_0)^2\frac{d^2W_0}{d\xi^2}=0 \tag{۳۱}$$

در رابطه (۳۰) به‌ازای بسط دوم (یعنی در رابطه (۲۹)، $\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1$ و $W=W_0+\varepsilon W_1$)، رابطه (۳۲) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{d^2W_0}{d\xi^2}+\varepsilon\frac{d^2}{d\xi^2}f_1\frac{d^2W_0}{d\xi^2}+\varepsilon\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{d^2W_1}{d\xi^2}\\&+\varepsilon^2\frac{d^2}{d\xi^2}f_1\frac{d^2W_1}{d\xi^2}-\alpha_2^2\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{d^4W_0}{d\xi^4}-\varepsilon\alpha_2^2\frac{d^2}{d\xi^2}f_1\frac{d^4W_0}{d\xi^4}\\&-\varepsilon\alpha_2^2\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{d^4W_1}{d\xi^4}-\varepsilon^2\alpha_2^2\frac{d^2}{d\xi^2}f_1\frac{d^4W_1}{d\xi^4}\\&-(\omega_0^2W_0+\varepsilon\omega_0^2W_1+\varepsilon\omega_0^2W_0f_2+\varepsilon^2\omega_0^2W_1f_2)\\&-(\varepsilon^2\omega_1^2W_0+\varepsilon^3\omega_1^2W_1+\varepsilon^3\omega_1^2W_0f_2+\varepsilon^4\omega_1^2W_1f_2)\\&-(2\varepsilon\omega_0\omega_1W_0+2\varepsilon^2\omega_0\omega_1W_1+2\varepsilon^2\omega_0\omega_1W_0f_2+2\varepsilon^3\omega_0\omega_1W_1f_2)\\&+\alpha_1^2(\omega_0^2\frac{d^2}{d\xi^2}W_0+\varepsilon\omega_0^2\frac{d^2}{d\xi^2}W_1+\varepsilon\omega_0^2\frac{d^2}{d\xi^2}(W_0f_2)\\&+\varepsilon\omega_0^2\frac{d^2}{d\xi^2}(W_1f_2))+\alpha_1^2(\varepsilon^2\omega_1^2\frac{d^2}{d\xi^2}W_0+\varepsilon^3\omega_1^2\frac{d^2}{d\xi^2}W_1\\&+\varepsilon^3\omega_1^2\frac{d^2}{d\xi^2}(W_0f_2)+\varepsilon^4\omega_1^2\frac{d^2}{d\xi^2}(W_1f_2))+\alpha_1^2(2\varepsilon\omega_0\omega_1\frac{d^2}{d\xi^2}W_0\\&+2\varepsilon^2\omega_0\omega_1\frac{d^2}{d\xi^2}W_1\\&+2\varepsilon^2\omega_0\omega_1\frac{d^2}{d\xi^2}(W_0f_2)+2\varepsilon^3\omega_0\omega_1\frac{d^2}{d\xi^2}(W_1f_2))\end{aligned}\tag{۳۲}$$

در رابطه (۳۲) با حذف مقادیر تکراری از بسط اول و توان‌های مرتبه دوم به بعد ε (به دلیل کوچک‌بودن) رابطه (۳۳) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{d\xi^2}f_1\frac{d^2W_0}{d\xi^2}+\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{d^2W_1}{d\xi^2}-\alpha_2^2\frac{d^2}{d\xi^2}f_1\frac{d^4W_0}{d\xi^4}\\&-\alpha_2^2\frac{d^6W_1}{d\xi^6}-\omega_0^2W_1-\omega_0^2W_0f_2-2\omega_0\omega_1W_0\\&+\alpha_1^2\omega_0^2\frac{d^2W_1}{d\xi^2}+\alpha_1^2\omega_0^2\frac{d^2}{d\xi^2}(W_0f_2)+2\alpha_1^2\omega_0\omega_1\frac{d^2W_0}{d\xi^2}\end{aligned}\tag{۳۳}$$

با مشتق‌گیری و مرتب‌سازی رابطه (۳۳) معادله دیفرانسیل به دست آمده از بسط دوم به‌صورت رابطه (۳۴) استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned}&-\alpha_2^2\frac{d^6W_1}{d\xi^6}+\frac{d^4W_1}{d\xi^4}-\omega_0^2W_1+(\alpha_1\omega_0)^2\frac{d^2W_1}{d\xi^2}\\&+h_1(\xi)-2\omega_0\omega_1W_0+2\alpha_1^2\omega_0\omega_1\frac{d^2W_0}{d\xi^2}=0\end{aligned}\tag{۳۴}$$

که در رابطه (۳۲)، $h_1(\xi)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}h_1(\xi)=\;&2\frac{df_1}{d\xi}\frac{d^3W_0}{d\xi^3}+\frac{d^2f_1}{d\xi^2}\frac{d^2W_0}{d\xi^2}-\alpha_2^2\frac{d^2f_1}{d\xi^2}\frac{d^4W_0}{d\xi^4}\\&-2\alpha_2^2\frac{df_1}{d\xi}\frac{d^5W_0}{d\xi^5}+\omega_0^2(-W_0f_2+\alpha_1^2\frac{d^2W_0}{d\xi^2}f_2\\&+2\alpha_1^2\frac{dW_0}{d\xi}\frac{df_2}{d\xi}+\alpha_1^2W_0\frac{d^2f_2}{d\xi^2})\end{aligned}\tag{۳۵}$$

۲-۶- حل مرتبه صفر

در این بخش با حل مرتبه صفر فرکانس‌های اولیه برای شرایط مرزی مختلف استخراج می‌گردد که برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی مورد نیاز است. برای حل معادله (۳۱) از رابطه (۳۶) استفاده شده است [۳۲]:

$$W_0 = c_1(\cos(\beta\xi)+\cosh(\beta\xi)) \\ +c_2(\cos(\beta\xi)-\cosh(\beta\xi))+c_3(\sin(\beta\xi) \\ +\sinh(\beta\xi))+c_4(\sin(\beta\xi)-\sinh(\beta\xi)) \qquad (۳۶)$$

در معادله (۳۶)، $\beta=\sqrt{\omega_0}$ می‌باشد. شرایط مرزی برای حالت گیردار-جرم متمرکز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\xi=0 \rightarrow W_0=0 \\ \xi=0 \rightarrow \frac{dW_0}{d\xi}=0 \qquad (۳۷)$$

$$\xi=1 \rightarrow EI\frac{d^2W_0}{d\xi^2}=0 \Rightarrow \frac{d^2W_0}{d\xi^2}=0 \\ \xi=1 \rightarrow \frac{d}{d\xi}(EI\frac{d^2W_0}{d\xi^2})=m_0\frac{d^2W_0}{d\tau^2} \\ \Rightarrow \frac{d}{d\xi}(EI\frac{d^2W_0}{d\xi^2})=-m_0\omega^2W_0 \qquad (۳۸)$$

جدول ۱: فرکانس های اولیه به ازای جرم متمرکزهای گوناگون

Table 1. The first dimensionless frequencies for various attached masses.

R	۰/۰۱	۰/۱	۱
β_1	۱/۸۵۲	۱/۷۲۳	۱/۲۴۸
β_2	۴/۶۵۰	۴/۳۹۹	۴/۰۳۱

با قراردادن شرط مرزی (۳۷) در معادله (۳۶)، رابطه (۳۹) استخراج می‌شود:

$$c_1=c_3=0 \Rightarrow W_0=c_2(\cos(\beta\xi)-\cosh(\beta\xi))+c_4(\sin(\beta\xi)\sinh(\beta\xi)) \qquad (۳۹)$$

با استفاده از رابطه (۳۹) و شرط مرزی (۳۸)، رابطه (۴۰) به‌دست می‌آید:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\beta)+\cosh(\beta) & \sin(\beta L)+\sinh(\beta) \\ (-EI\beta^3)(\sin(\beta)-\sinh(\beta))- & (EI\beta^3)(\cos(\beta)+\cosh(\beta))- \\ m_0\omega^2(\cos(\beta)-\cosh(\beta)) & m_0\omega^2(\sin(\beta)-\sinh(\beta)) \end{bmatrix}}_{[K]}\begin{Bmatrix} c_2 \\ c_4 \end{Bmatrix}=0 \qquad (۴۰)$$

با صفر قراردادن دترمینان ماتریس $[K]$ در رابطه (۴۰) معادله فرکانس به دست می‌آید:

$$1+\frac{1}{\cos\beta\cosh\beta}-R\beta L(\tan\beta-\tanh\beta)=0 \qquad (۴۱)$$

در معادله (۴۱)، $R=\frac{m_0}{\rho AL}$ می‌باشد. شکل حالت فضایی برای یک نانوتیر با شرط مرزی گیردار- جرم متمرکز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W_0=c_2\begin{bmatrix} (\cos\beta\xi-\cosh\beta\xi) \\ -\dfrac{\cos(\beta)+\cosh(\beta)}{\sin(\beta)+\sinh(\beta)}(\sin\beta\xi\sinh\beta\xi) \end{bmatrix} \qquad (۴۲)$$

با حل معادله (۴۱)، فرکانس‌های اولیه به‌ازای جرم‌های متمرکز گوناگون محاسبه می‌گردد که در جدول ۱ آورده شده است.

در جدول ۲ معادله‌های فرکانس تیر و شکل مدهای استخراج گردیده برای شرایط مرزی مختلف آورده شده است.

جدول ۲: معادله‌های فرکانس و شکل مدها برای تیر با شرایط مرزی مختلف

Table 2. Frequency equations and mode shapes for various boundary conditions.

شرط مرزی	معادله فرکانس	شکل مد
گیردار- آزاد	$\cos k\cosh k+1=0$	$W_0=\cosh(k\xi)-\cos(k\xi)+\frac{\sin k-\sinh k}{\cos k+\cosh k}[\sinh(k\xi)-\sin(k\xi)]$
لولا- لولا	$\sin k=0$	$W_0=\sin(k\xi)$
گیردار- گیردار	$\cos k\cosh k-1=0$	$W_0=\cosh(k\xi)-\cos(k\xi)+\frac{\sin(k)+\sinh(k)}{\cos(k)-\cosh(k)}[\sinh(k\xi)-\sin(k\xi)]$
گیردار- لولا	$\tan k-\tanh k=0$	$W_0=\cosh(k\xi)-\cos(k\xi)-\frac{\cosh k-\cos k}{\sinh k-\sin k}[\sinh(k\xi)-\sin(k\xi)]$

۶-۳- حل مرتبه یک

در این بخش با ترکیب حل مرتبه صفر و حل مرتبه یک، مقادیر E_0I و ρ_0A که در بخش ۵ به آن اشاره گردید استخراج می‌شود. در معادله (۳۴)، $h_1(\xi)$ و W_1 وابستگی خطی با W_0 دارند. معادله (۳۴) درصورتی قابل‌حل می‌باشد که شرط (۴۳) برقرار باشد [۲۲].

$$\int_0^1 \left[h_1(\xi) - 2\omega_0\omega_1 W_0 + 2\alpha_1^2\omega_0\omega_1 \frac{d^2W_0}{d\xi^2} \right] W_0 \, d\xi = 0 \tag{۴۳}$$

در نتیجه:

$$\omega_1 = \frac{\int_0^1 h_1(\xi) W_0 \, d\xi}{2\omega_0 \left(\int_0^1 (W_0)^2 d\xi - \alpha_1^2 \int_0^1 W_0 \frac{d^2W_0}{d\xi^2} d\xi \right)} \tag{۴۴}$$

با ادغام بخش‌های قبل مقادیر نهایی E_0I و ρ_0A استخراج می‌شود.

$$E_0I = \frac{\left. \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\left[E(\xi)I\right]}{d\xi} \frac{d^2W_0}{d\xi^2} W_0 + E(\xi)I \frac{d^3W_0}{d\xi^3} W_0 \\ -E(\xi)I \frac{d^2W_0}{d\xi^2} \frac{dW_0}{d\xi} - \alpha_2^2 \frac{d\left[E(\xi)I\right]}{d\xi} \frac{d^4W_0}{d\xi^4} W_0 \\ +3\alpha_2^2 E(\xi)I \frac{d^4W_0}{d\xi^4} \frac{dW_0}{d\xi} \end{array} \right\} \right|_0^1}{\left. \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3W_0}{d\xi^3} W - \frac{d^2W_0}{d\xi^2} \frac{dW_0}{d\xi} + 3\alpha_2^2 \frac{d^4W_0}{d\xi^4} \frac{dW_0}{d\xi} \\ -3\alpha_2^2 \frac{d^3W_0}{d\xi^3} \frac{d^2W_0}{d\xi^2} - 2\alpha_2^2 E(\xi)I \frac{d^5W_0}{d\xi^5} W_0 \end{array} \right\} \right|_0^1}.$$

$$\cdots \frac{+\left. \left\{ -3\alpha_2^2 E(\xi)I \frac{d^3W_0}{d\xi^3} \frac{d^2W_0}{d\xi^2} - 2\alpha_2^2 E(\xi)I \frac{d^5W_0}{d\xi^5} W_0 \right\} \right|_0^1 + \int_0^1 E(\xi)I \left(\frac{d^2W_0}{d\xi^2} \right)^2 d\xi + 3\alpha_2^2 \int_0^1 E(\xi)I \left(\frac{d^3W_0}{d\xi^3} \right)^2 d\xi}{+\int_0^1 \left(\frac{d^2W_0}{d\xi^2} \right)^2 d\xi + 3\alpha_2^2 \int_0^1 \left(\frac{d^3W_0}{d\xi^3} \right)^2 d\xi} \tag{۴۵}$$

جدول ۳: مشخصات ماده نانوتیر [۲۲, ۳۳]

Table 3. Material properties of the FG nano beam[22,33]

مشخصات	واحد	آلومینیوم	تیتانیوم
E	GPa	۷۰	۱۱۶
ρ	Kg/m^3	۲۷۰۲	۴۵۰۶

$$\rho_0A = \frac{\left. \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha_1^2 \rho(\xi)A \frac{dW_0}{d\xi} W_0 + \alpha_1 \frac{d\left[\rho(\xi)A\right]}{d\xi} W_0^2 \\ -\alpha_1^2 \rho(\xi)A \frac{dW_0^2}{d\xi} \end{array} \right\} \right|_0^1 - \int_0^1 \rho(\xi)A W_0^2 d\xi - 3\alpha_1^2 \int_0^1 \rho(\xi)A \left(\frac{dW_0}{d\xi} \right)^2 d\xi}{\left. \left\{ 3\alpha_1^2 \frac{dW_0}{d\xi} W_0 - \alpha_1^2 \frac{dW_0^2}{d\xi} \right\} \right|_0^1 - \int_0^1 W_0 d\xi - 3\alpha_1^2 \int_0^1 \left(\frac{dW_0}{d\xi} \right)^2 d\xi}.$$

$$\cdots\cdots \frac{+\alpha_1^2 \int_0^1 \rho(\xi)A \frac{d^2W_0^2}{d\xi^2} d\xi}{+\alpha_1^2 \int_0^1 \frac{d^2W_0^2}{d\xi^2} d\xi} \tag{۴۶}$$

با ترکیب حل مرتبه صفر و مرتبه یک، فرکانس‌های طبیعی تیر به دست می‌آیند:

$$\lambda_n = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{E_0I}{\rho_0A}} \omega_0 \tag{۴۷}$$

که در رابطه (۴۷)، E_0I و ρ_0A از حل مرتبه یک و ω_0 از حل مرتبه صفر استخراج شده‌اند. درنهایت یک فرمول تقریبی از فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برای یک نانوتیر یکنواخت به‌صورت رابطه (۴۸) می‌باشد:

$$\Omega_n = \lambda_n L^2 \sqrt{\frac{\rho_L A}{E_L I}} \tag{۴۸}$$

در رابطه (۴۸) ρ_L و E_L به‌ترتیب چگالی و مدول یانگ سمت چپ نانوتیر می‌باشند که در جدول ۳ داده شده است.

۷-نتایج و بحث

در این بخش، از روش پیشنهادی برای تجزیه و تحلیل ارتعاشات آزاد یک نانوتیر مدرج تابعی با شرایط مرزی متفاوت استفاده می‌شود. در این مقاله جنس نانوتیر در نظرگرفته‌شده از آلومینیوم و تیتانیوم می‌باشد. سمت راست تیتانیوم خالص و سمت چپ آلومینیوم خالص است. خواص مواد برای نانوتیر مدرج تابعی در جدول ۳ ارائه شده است.

ابعاد نانوتیر عبارتند از:

$$\frac{L}{H}=۱۰, B=۲H$$

برای اعتبارسنجی روش معرفی‌شده در بخش ۶-۱، فرکانس‌های طبیعی یک نانوتیر با شرایط مرزی لولا (S-S) به‌ازای پارامترهای مختلف غیرمحلی (e_0a مختلف و $l=0$) و $L=۱۰, E=۳۰MPa, \rho=۱, \upsilon=۰/۳$ مورد ارزیابی قرار گرفته است که در جدول ۴ آورده شده است.

با توجه به فرکانس‌های به‌دست‌آمده در جدول ۴ مشاهده می‌شود که روش توسعه تقریبی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی از دقت خوبی برخوردار می‌باشد. با توجه به سادگی روش عددی توسعه تقریبی در مقایسه با روش‌های عددی دیگر، در این مقاله از روش توسعه تقریبی استفاده شده است. در مطالعه پژوهش‌های پیشین

جدول ۴: فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برای شرط مرزی لولا به ازای ($\frac{L}{H}=۱۰$)

Table 4. The dimensionless natural frequencies for simply supported with $\frac{L}{H}=10$

e_0a	روش توسعه تقریبی	مرجع [۳۴]
۰	۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۶
۰/۵	۹/۶۳۴۷	۹/۶۳۴۷
۱	۹/۴۱۵۹	۹/۴۱۵۹
۱/۵	۹/۲۱۱۳	۹/۲۱۱۳
۲	۹/۰۱۹۵	۹/۰۱۹۵

تاکنون از این روش عددی در نانوتیرها استفاده نشده است.

در پژوهشی دیگر ویژگی‌های نانوتیر به شرح زیر می‌باشد [۱۹]:

$$E_{st}=۲۱۰GPa, \rho_{st}=۷۸۰۰Kg/m^۳$$
$$E_{Al_2O_3}=۳۹۰GPa, \rho_{Al_2O_3}=۳۹۶۰Kg/m^۳$$

ابعاد نانوتیر استفاده‌شده در این پژوهش به شرح زیر می‌باشد [۱۹]:

$$h=۱۷.۶*۱۰^{-۶}m,\ b=۲h,\ L=۳۰h$$

در این پژوهش در سال ۲۰۱۷ لی و همکاران [۱۹] به بررسی کمانش و ارتعاشات آزاد یک نانو تیر مدرج تابعی محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرمحلی براساس روش مربع‌سازی تفاضلی تعمیم‌یافته پرداختند. با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت و شرایط مرزی به دست آمد و در ادامه تاثیر اثر اندازه بر روی پارامترهای کمانش و فرکانس‌های طبیعی بررسی گردید. در ادامه به تاثیرات شاخص توانی(تغییر جنس ماده مدرج تابعی) بر روی مقادیر فرکانس‌های طبیعی و همچنین تاثیرات اثر اندازه بر روی کمانش بحرانی و فرکانس‌های طبیعی می‌پردازد. در شکل‌های ۳ تا ۶، فرکانس اول و دوم بی‌بعد تیرمدرج تابعی به ازای پارامترهای مختلف غیرمحلی و شاخص توانی $k=۱$ برای شرط مرزی گیردار- گیردار آورده شده است.

در شکل‌های ۳ تا ۶، درصد خطا کمتر از ۲ درصد می‌باشند که از دقت قابل‌قبولی برخوردار می‌باشند. همان گونه که مشاهده می‌شود

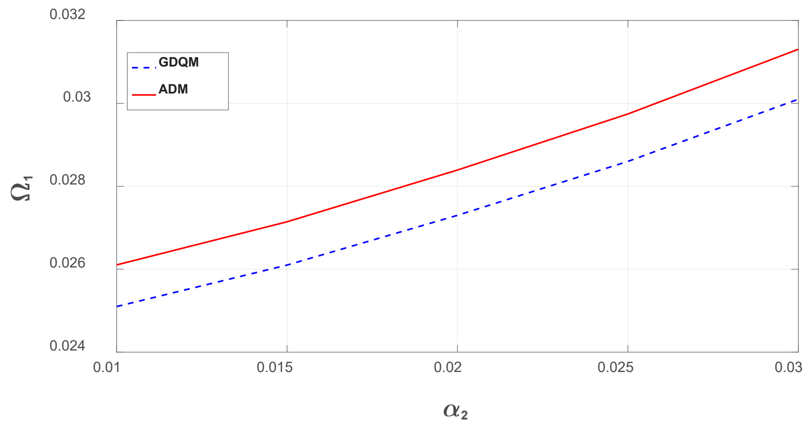


Fig. 3. The fundamental dimensionless natural frequencies of clamped–clamped FG beams varying with the nonlocal parameter ($\alpha_1=0.01$ and k =1)

شکل ۳: فرکانس بی‌بعد اول تیرمدرج تابعی با درنظرگرفتن $\alpha_1=۰/۰۱$ و شاخص توانی $k=۱$ برای شرط مرزی گیردار- گیردار

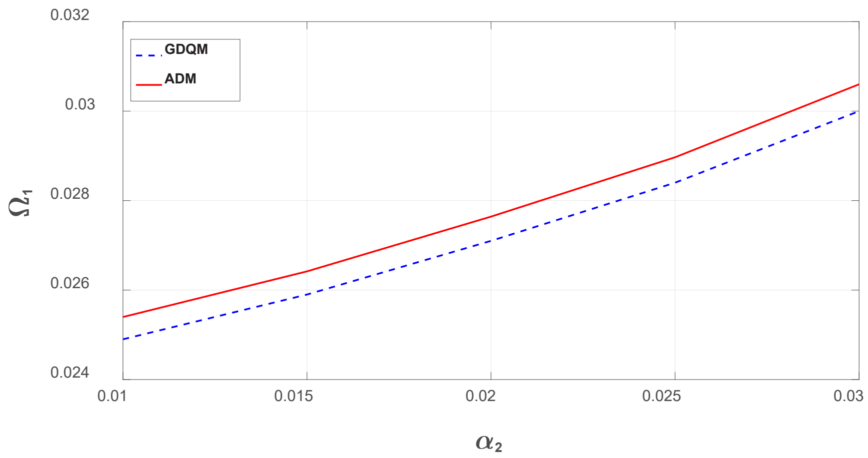


Fig. 4. The fundamental dimensionless natural frequencies of clamped–clamped FG beams varying with the nonlocal parameter ($\alpha_1 = 0.03$ and k =1)

شکل ۴: فرکانس بی‌بعد اول تیرمدرج تابعی با در نظر گرفتن $\alpha_1 = ۰/۰۳$ و شاخص توانی $k = ۱$ برای شرط مرزیگیردار- گیردار

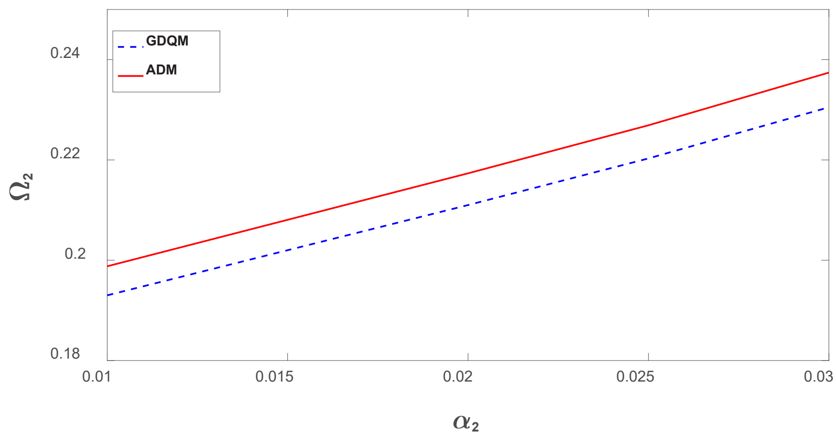


Fig. 5. The second dimensionless natural frequencies of clamped–clamped FG beams varying with the non local parameter ($\alpha_1 = 0.01$ and k =1)

شکل ۵: فرکانس بی‌بعد دوم گیرمدرج تابعی با در نظر گرفتن $\alpha_1 = ۰/۰۱$ و شاخص توانی $k = ۱$ برای شرط مرزی گیردار- گیردار

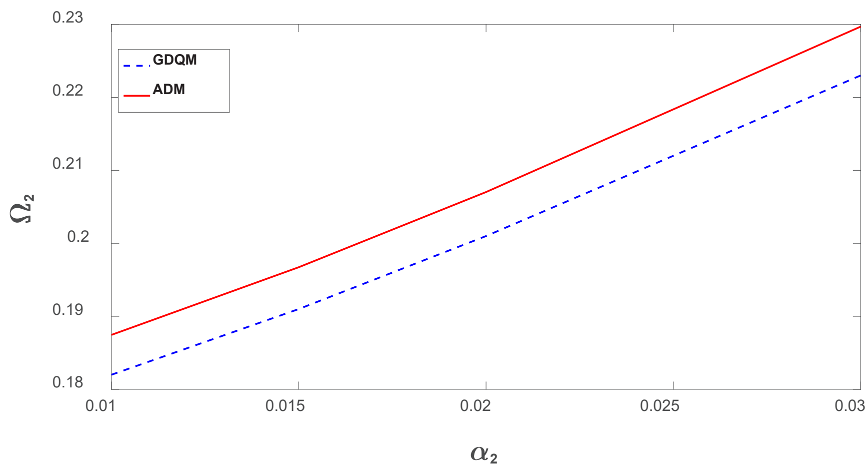
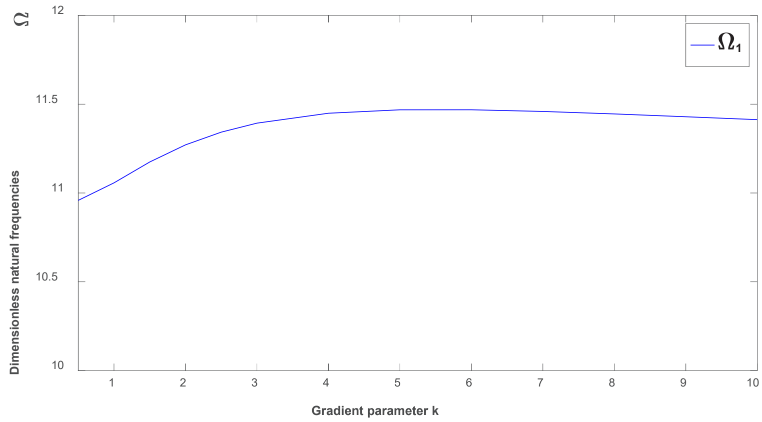


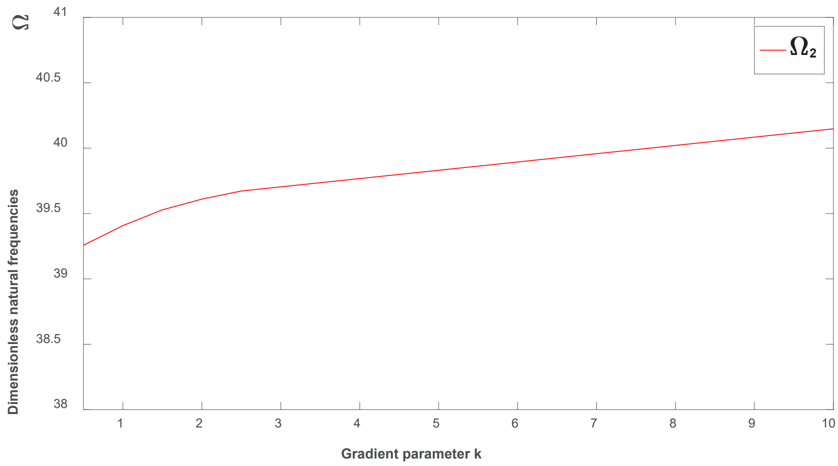
Fig. 6. The second dimensionless natural frequencies of clamped–clamped FG beams varying with the nonlocal parameter ($\alpha_1 = 0.03$ and k =1)

شکل ۶: فرکانس بی‌بعد دوم گیرمدرج تابعی با درنظرگرفتن $\alpha_1 = ۰/۰۳$ و شاخص توانی $k = ۱$ برای شرط مرزی گیردار- گیردار



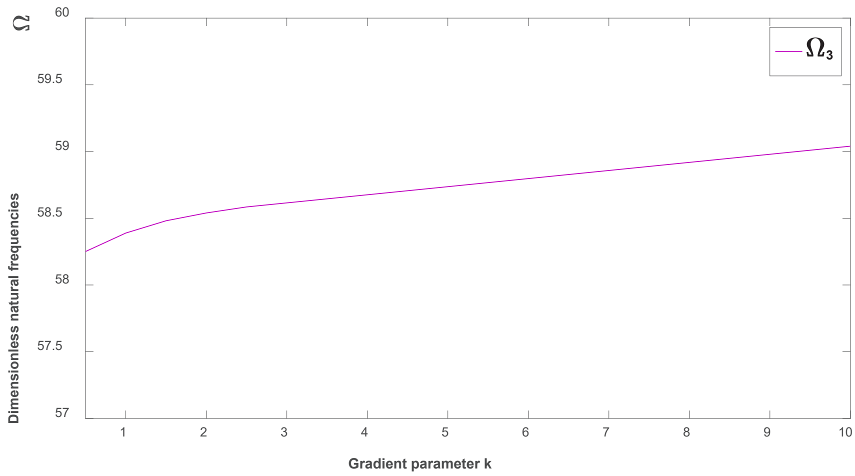
(a) first dimensionless natural frequencies

(الف) فرکانس بی‌بعد اول



(b) second dimensionless natural frequencies

(ب) فرکانس بی‌بعد دوم



(c) third dimensionless natural frequencies

(ج) فرکانس بی‌بعد سوم

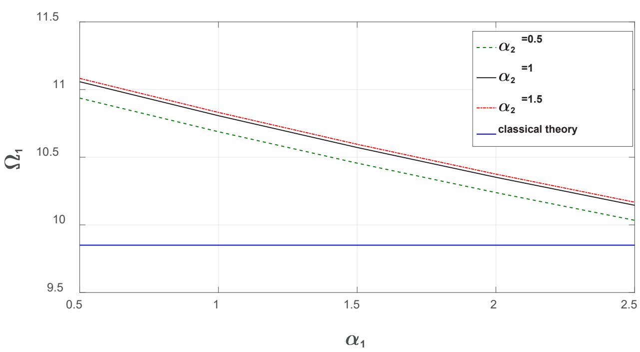
Fig. 7. The first three natural frequencies versus power-law index k for a simply supported nano beam ($\alpha_1 = 0.5$ and $\alpha_2 = 1$)

شکل ۷: تاثیر پارامتر شاخص توانی برروی فرکانس طبیعی بی‌بعد اول تا سوم نانوتیر به ازای $\alpha_1 = ۰/۵$ و $\alpha_2 = ۱$ برای شرط مرزی لولا (S-S)

روش توسعه تقریبی یک روش حد بالا می‌باشد.

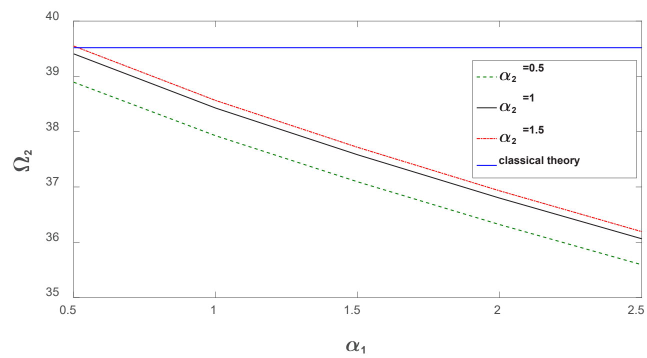
شکل ۷ تاثیر پارامتر شاخص توانی، برروی فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم بی‌بعد نانوتیر برای شرایط مرزی لولا به‌ازای $\alpha_1=$ ۰/۵ و $\alpha_2=$ ۱ را نشان می‌دهد.

در شکل ۷ تاثیر پارامتر شاخص توانی بر نمودار پاسخ فرکانسی نانوتیر رسم شده است. همان‌گونه که در شکل ۷ دیده می‌شود، با افزایش پارامتر شاخص توانی، فرکانس‌های طبیعی به مقادیر بزرگتر منتقل می‌شود. این نشان از سفتی تیر با افزایش پارامتر شاخص توانی دارد به عبارت دیگر با تغییر جنس نانوتیر، مدول یانگ افزایش می‌یابد و چگالی جرمی مطابق با شکل ۲ کاهش می‌یابد، که این خود علاوه بر افزایش فرکانس طبیعی منجر می‌شود که اثرات غیرموضعی نیز در پاسخ فرکانسی تاثیرگذار باشد. با توجه به اینکه افزایش پارامتر



(a) first dimensionless natural frequencies

(الف) فرکانس بی‌بعد اول



(b) second dimensionless natural frequencies

(ب) فرکانس بی‌بعد دوم

Fig. 8. The first two dimensionless natural frequencies varying with the size dependent parameters α_1 and α_2 for simply supported FG beams (k =1)

شکل ۸: فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم تیر مدرج تابعی با درنظرگرفتن پارامترهای اثر اندازه α_1 و α_2 و شاخص توانی $k=$ ۱ برای شرط مرزی لولا (S-S)

شاخص توانی برروی فرکانس‌های طبیعی تاثیرگذار است، می‌توان با انتخاب یک مقدار مناسب از پارامتر شاخص توانی رفتار ارتعاشی را کنترل کرد.

در شکل ۸ تاثیر پارامترهای اثراندازه برروی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم یک نانوتیر مدرج تابعی برای شرط مرزی لولا رسم شده است.

شکل ۸ تاثیر پارامترهای اثر اندازه برروی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم یک نانوتیر مدرج تابعی برای شرط مرزی لولا را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، با افزایش پارامتر غیرمحلی بی‌بعد α_1 فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد کاهش یافته، همچنین با افزایش پارامتر طولی بی‌بعد α_2 مقادیر فرکانس‌ها افزایش می‌یابد که این رفتار ناشی از تغییرات سفتی نانوتیر به علت اعمال اثر اندازه در نانوتیر می‌باشد. همچنین در شکل ۸ مشاهده می‌شود که، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد، با توجه به مقدارهای مختلف پارامتر غیرمحلی α_1 و پارامتر مقیاس طولی ماده α_2 می‌تواند بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از مدل کلاسیک باشد. تئوری‌های کلاسیک برای مدل‌سازی نانوتیرها مناسب نمی‌باشد و باید اثرات غیرمحلی در تحلیل استاتیکی و دینامیکی این ساختارها درنظر گرفته شود. تاثیر پارامتر مقیاس کوچک نانوتیرها باعث می‌شود که رفتار نانوتیر به نانوتیر نرم‌تر نزدیک شود.

در ارتعاشات عرضی نانوتیر هم همین رفتار مشاهده می‌شود با این تفاوت که تغییرات در نمودارها به‌صورت غیرخطی می‌باشند.

نتایج فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برای سایر شرایط مرزی در جدول ۵ الی ۸ آورده شده است.

همان‌گونه که در جدول ۵ الی ۸ مشاهده می‌شود به‌دلیل رفتار صلبیت نانوتیر متناسب با شرایط مرزی گوناگون، برای تیر با شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار دامنه ارتعاشی از تیر با شرایط مرزی گیردار- آزاد و گیردار- لولا بیشتر است. فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد دوم نانوتیر مدرج تابعی نیز با افزایش پارامتر غیرمحلی α_1 کاهش یافته همچنین با افزایش پارامتر طولی α_2 مقادیر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد.

با صفر قراردادن پارامترهای غیرموضعی نمودار پاسخ فرکانسی به نمودار حاصل از تئوری کلاسیک نزدیک می‌شود.

نتایج فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم به‌ازای جرم‌های

جدول ۵: فرکانس های طبیعی بی بعد اول برای شرایط مرزی مختلف به ازای $\alpha_{1}=۰/۵$ و شاخص توانی $k=۱$

Table 5. The fundamental dimensionless natural frequencies for various boundary conditions ($\alpha_1 = 0.5$ and power-law index k=1)

شرایط مرزی	$\alpha_{2}=۰/۵$	$\alpha_{2}=۱$	$\alpha_{2}=۱/۵$
گیردار- گیردار	۲۵/۷۸۰۹	۲۶/۷۸۱۶	۲۶/۹۸۰۱
گیردار- لولا	۲۱/۱۲۸۹	۲۲/۰۰۲۷	۲۲/۱۷۶۷
گیردار- آزاد	۸/۴۸۵۶	۱۰/۷۰۰۱	۱۱/۵۶۲۳

جدول ۶: فرکانس های طبیعی بی بعد اول برای شرایط مرزی مختلف به ازای $\alpha_{1}=۲/۵$ و شاخص توانی $k=۱$

Table 6. The fundamental dimensionless natural frequencies for various boundary conditions ($\alpha_1 = 2.5$ and power-law index k=1)

شرایط مرزی	$\alpha_{2}=۰/۵$	$\alpha_{2}=۱$	$\alpha_{2}=۱/۵$
گیردار- گیردار	۲۲/۳۲۸۷	۲۳/۳۲۸۵	۲۳/۵۲۷۹
گیردار- لولا	۱۷/۹۷۶۵	۱۸/۷۱۹۹	۱۸/۸۶۸۰
گیردار- آزاد	۲/۸۸۱۲	۵/۲۵۴	۵/۹۵۷۹

جدول ۷: فرکانس های طبیعی بی بعد دوم برای شرایط مرزی مختلف به ازای $\alpha_{1}=۰/۵$ و شاخص توانی $k=۱$

Table 7. The second dimensionless natural frequencies for various boundary conditions ($\alpha_1 = 0.5$ and power-law index k=1)

شرایط مرزی	$\alpha_{2}=۰/۵$	$\alpha_{2}=۱$	$\alpha_{2}=۱/۵$
گیردار- گیردار	۶۰/۹۹۵۵	۶۱/۶۴۹۶	۶۱/۷۷۳۰
گیردار- لولا	۵۸/۰۷۰۴	۵۸/۷۳۸۲	۵۸/۸۶۴۴
گیردار- آزاد	۲۶/۸۰۷۳	۲۷/۸۷۹۱	۲۸/۰۹۲۰

جدول ۸: فرکانس های طبیعی بی بعد دوم برای شرایط مرزی مختلف به ازای $\alpha_{1}=۲/۵$ و شاخص توانی $k=۱$

Table 8. The second dimensionless natural frequencies for various boundary conditions ($\alpha_1 = 2.5$ and power-law index k=1)

شرایط مرزی	$\alpha_{2}=۰/۵$	$\alpha_{2}=۱$	$\alpha_{2}=۱/۵$
گیردار- گیردار	۵۵/۹۰۸۴	۵۶/۵۰۷۹	۵۶/۶۲۱۰
گیردار- لولا	۵۲/۸۳۹۰	۵۳/۴۴۶۷	۵۳/۵۶۱۶
گیردار- آزاد	۲۱/۹۷۶۷	۲۳/۰۴۸۵	۲۳/۲۶۱۴

جدول ۹. فرکانس های طبیعی بی بعد اول و دوم برای شرط مرزی و یردار- جرم متمرکز به‌ازای $\alpha_{1}=۰/۵$ و $R=۰/۰۱$ و شاخص توانی $k=۱$

Table 9. The first two dimensionless natural frequencies for clamped–attached mass boundary conditions ($\alpha_1 = 0.5$, $R = 0.01$ and power-law index k=1)

فرکانس بی‌بعد	$\alpha_{2}=۰/۵$	$\alpha_{2}=۱$	$\alpha_{2}=۱/۵$
Ω_1	۸/۱۶۲۶	۱۰/۲۲۹۶	۱۰/۷۷۸۱
Ω_2	۲۶/۱۱۷۴	۲۶/۷۸۳۵	۲۶/۹۱۲۶

جدول ۱۰: فرکانس های طبیعی بی بعد اول و دوم برای شرط مرزی‌گیردار- جرم متمرکز به ازای $\alpha_{1}=۲/۵$ و $R=۰/۰۱$ و شاخص توانی $k=۱$

Table 10. The first two dimensionless natural frequencies for clamped–attached mass boundary conditions ($\alpha_1 = 2.5$, $R = 0.01$ and power-law index k=1)

فرکانس بی‌بعد	$\alpha_{2}=۰/۵$	$\alpha_{2}=۱$	$\alpha_{2}=۱/۵$
Ω_1	۲/۷۹۶۴	۵/۱۵۳۱	۵/۵۸۰۷
Ω_2	۲۱/۸۸۷۳	۲۲/۴۴۵۶	۲۲/۵۵۳۷

متمرکز مختلف در جدول ۹ الی ۱۴ آورده شده است.

در جدول ۹ الی ۱۴ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد نانوتیر مدرج تابعی برای شرط مرزی گیردار- جرم متمرکز به‌ازای پارامتر غیرمحلی $\alpha_{1}=۰/۵$ و $\alpha_{1}=۲/۵$ همچنین شاخص توانی $k=۱$، $R=۰/۰۱$،

جدول ۱۱: فرکانس‌های طبیعی‌بی‌بعد اول و دوم برای شرط مرزی‌گیردار-جرم متمرکز بەازای $\alpha_1 = ۰/۵$، $R = ۰/۱$ و شاخص توانی $k = ۱$

Table 11. The first two dimensionless natural frequencies for clamped–attached mass boundary conditions ($\alpha_1 = 0.5$, $R = 0.1$ and power-law index k=1)

فرکانس بی‌بعد	$\alpha_2 = ۰/۵$	$\alpha_2 = ۱$	$\alpha_2 = ۱/۵$
Ω_1	۷/۷۴۷۳	۱۰/۱۱۴۰	۱۰/۷۳۷۸
Ω_2	۲۵/۲۵۸۷	۲۶/۰۳۰۸	۲۶/۱۸۱۸

جدول ۱۲: فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم برای شرط مرزی گیردار-جرم متمرکز بەازای $\alpha_1 = ۲/۵$، $R = ۰/۱$ و شاخص توانی $k = ۱$

Table 12. The first two dimensionless natural frequencies for clamped–attached mass boundary conditions ($\alpha_1 = 2.5$, $R = 0.1$ and power-law index k=1)

فرکانس بی‌بعد	$\alpha_2 = ۰/۵$	$\alpha_2 = ۱$	$\alpha_2 = ۱/۵$
Ω_1	۲/۷۱۱۹	۵/۰۷۲۸	۵/۴۸۲۸
Ω_2	۲۱/۶۰۶۲	۲۲/۲۶۶۶	۲۲/۳۹۵۷

جدول ۱۳. فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم برای شرط مرزی گیردار- جرم متمرکز بەازای $\alpha_1 = ۰/۵$، $R = ۱$ و شاخص توانی $k = ۱$

Table 13. The first two dimensionless natural frequencies for clamped–attached mass boundary conditions ($\alpha_1 = 0.5$, $R = 1$ and power-law index k=1)

فرکانس بی‌بعد	$\alpha_2 = ۰/۵$	$\alpha_2 = ۱$	$\alpha_2 = ۱/۵$
Ω_1	۷/۱۷۷۴	۹/۹۰۱۸	۱۰/۲۷۴۹
Ω_2	۲۱/۷۹۲۷	۲۲/۶۴۰۸	۲۲/۸۰۹۰

جدول ۱۴: فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم برای شرط مرزی گیردار-جرم متمرکز بەازای $\alpha_1 = ۲/۵$ ، $R = ۱$ و شاخص توانی $k = ۱$

Table 14. The first two dimensionless natural frequencies for clamped–attached mass boundary conditions ($\alpha_1 = 2.5$, $R = 1$ and power-law index k=1)

فرکانس بی‌بعد	$\alpha_2 = ۰/۵$	$\alpha_2 = ۱$	$\alpha_2 = ۱/۵$
Ω_1	۲/۴۸۳۶	۴/۹۲۶۳	۵/۲۸۲۳
Ω_2	۱۸/۸۱۵۵	۱۹/۵۴۷۶	۱۹/۶۹۲۸

جدول ۱۵: فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول برای شرایط مرزی و نسبت طول به ضخامت‌های مختلف بەازای $\alpha_1 = ۲/۵$، $\alpha_2 = ۱$ و شاخص توانی $k = ۱$

Table 15. The fundamental dimensionless natural frequencies for various boundary conditions and $\frac{L}{H}$ ($\alpha_1 = 2.5$, $\alpha_2 = 1$ and power-law index k=1)

شرایط مرزی	$\frac{L}{H} = ۱۰$	$\frac{L}{H} = ۲۰$	$\frac{L}{H} = ۵۰$
لولا- لولا	۱۰/۱۴۴۸	۱۰/۱۴۴۸	۱۰/۱۴۴۸
گیردار-گیردار	۲۳/۳۲۸۵	۲۳/۳۲۸۵	۲۳/۳۲۸۵
گیردار- لولا	۱۸/۷۱۹۹	۱۸/۷۱۹۹	۱۸/۷۱۹۹
گیردار- آزاد	۵/۲۵۴	۵/۲۵۴	۵/۲۵۴

$R = ۰/۱$ و $R = ۱$ آورده شده است. در جدول ۹ الی ۱۴ نیز با افزایش پارامتر بی‌بعد طولی مقادیر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد، همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر غیرمحلی بی‌بعد فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد کاهش یافته است. با افزایش مقدار جرم متمرکز نیز فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند.

در جدول ۱۵ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول بەازای نسبت‌های طول به ضخامت مختلف برای چهار شرط مرزی گوناگون آورده شده است.

در جدول ۱۵ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول بەازای نسبت طول به ضخامت‌های مختلف برای شرایط مرزی گوناگون آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نسبت مختلف طول به ضخامت‌های مختلف، تاثیری برروی مقادیر فرکانس‌های طبیعی ندارند. افزایش نسبت طول به ضخامت تیر، برروی کرنش‌ها و تنش‌های برشی تیر تاثیرگذار می‌باشد که در تئوری تیر اویلر برنولی این اثر نادیده گرفته می‌شود. با افزایش نسبت طول به ضخامت در تیرتیموشینکو نتایج به

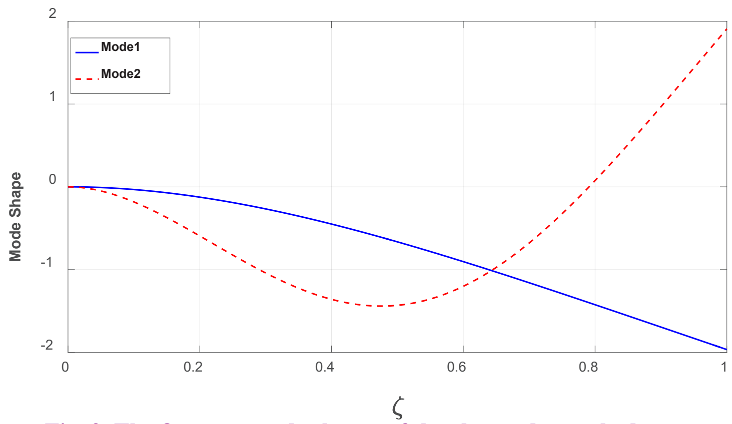


Fig. 9. The first two mode shapes of the clamped–attached mass

شکل ۹: شکل مد اول و دوم برای شرط مرزی گیردار-جرم متمرکز

تئوری تیر اویلر برنولی نزدیک می‌شود.

در شکل ۹، شکل مد اول و دوم برای شرط مرزی گیردار- جرم متمرکز آورده شده است:

در شکل ۹ شکل مدهای اول و دوم برای شرایط مرزی گیردار- جرم متمرکز آورده شده است. یک سازه متناسب با مقدار جرم و سختی آن تحت بارجانبی مرتعش می‌شود. شکل ارتعاشی به مقدار بارجانبی وابسته نمی‌باشد. اگر مقدار بارجانبی زیاد شود دامنه ارتعاش بیشتر می‌گردد ولی شکل آن تغییری نمی‌کند. این ارتعاش به اشکال جداگانه‌ای تقسیم می‌شود که به هرکدام یک مد نوسانی می‌گویند. عموما در سازه‌ها مد اول مد غالب می‌باشد.

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات آزاد طولی یک نانو تیر مدرج تابعی به همراه جرم متمرکز با استفاده از روش عددی جدید توسعه تقریبی برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از تئوری غیرموضعی گرادیان کرنش مورد مطالعه قرارگرفت. در ادامه با استفاده از روش همیلتون معادلات حرکت و شرایط مرزی برای نانوتیر مدرج تابعی محاسبه گردیده است. سپس یک فرمول تحلیلی تقریبی از فرکانس طبیعی براساس روش عددی توسعه تقریبی استخراج شده است. نمونه‌ای از یک نانو تیر یکنواخت با مواد آلومینیوم و تیتانیوم شبیه‌سازی شده است.

سپس فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول تا سوم به‌ازای شاخص‌های توانی گوناگون برای شرط مرزی لولا محاسبه گردید. در ادامه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم به‌ازای پارامترهای مختلف غیرمحلی برای پنج شرط مرزی استخراج گردید در نهایت نتایج حاصل از نمودارها مورد مطالعه قرار گرفت و شکل مدهای شرایط مرزی مختلف استخراج شد. خلاصه نتایج به شرح زیر است:

۱- با افزایش پارامتر شاخص توانی (k) فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد که این امر تاثیر پارامتر شاخص توانی برروی فرکانس‌های طبیعی را نشان می‌دهد. با تغییر جنس نانوتیر، مدول یانگ افزایش و چگالی جرمی کاهش می‌یابد، همچنین باعث افزایش فرکانس طبیعی و اثرات غیرموضعی در پاسخ فرکانسی می‌شود.

۲- در تحلیل ارتعاشات آزاد طولی مشخص گردید که نسبت‌های مختلف طول به ضخامت تاثیری بر مقادیر فرکانس‌های طبیعی ندارند.

۳- فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد با افزایش پارامتر غیرمحلی (ea) کاهش و با افزایش پارامتر مقیاس طول (l) افزایش یافته است.

۴- فرکانس‌های طبیعی مدل گرادیان کرنش غیرمحلی, با توجه به مقادیر پارامترهای وابسته به اندازه می‌تواند بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از مدل کلاسیک باشد. با افزایش پارامتر مقیاس طولی ماده و همچنین کاهش پارامتر غیرمحلی باعث افزایش رفتار صلبیت نانوتیر مدرج تابعی می‌شود.

۵- استفاده از تئوری غیرموضعی گرادیان کرنشی در ابعاد نانو و میکرو ضروری به‌نظر می‌رسد. با کوچک‌تر شدن اندازه، نسبت فرکانس خطی حاصل از این تئوری‌ها به تئوری کلاسیک بیشتر می‌شود.

۶- به‌دلیل رفتار صلبیت تیر متناسب با شرایط مرزی گوناگون، برای تیر با شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار دامنه ارتعاشی از تیر با شرایط مرزی لولا- لولا، گیردار- آزاد و گیردار- لولا و گیردار- جرم متمرکز بیشتر است.

در این مقاله از معادله تیر اویلر برنولی برای استخراج فرکانس‌های طبیعی استفاده شده است، استفاده از معادله تیر ریلی و تیموشینکو برای دست‌یابی به نتایج دقیق‌تر پیشنهاد می‌شود. همچنین به‌منظور بررسی حالت‌های دیگر، بررسی ارتعاشات عرضی و اجباری نانوتیر خمیده، نانوتیر با سطح مقطع غیریکنواخت و نانوتیر به همراه چندین جرم متمرکز به همراه فنر و دمپر با استفاده از روش عددی توسعه تقریبی پیشنهاد می‌شود.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

A	مساحت، m^2
B	عرض نانوتیر، m
E	مدول الاستیسیته، N/m^2
$\overline{E(x)I}$	قسمت متغیر سفتی خمشی، N/m^2
ea	پارامتر غیرمحلی، m
H	ارتفاع نانوتیر، m
I	ممان اینرسی، m^4
K	انرژی جنبشی، N
k	شاخص توانی
L	طول نانوتیر، m
l	پارامتر مقیاس طول ماده، m
M	ممان کلاسیک، Nm
$M^{(1)}$	ممان غیرکلاسیک، Nm
m_0	جرم متمرکز، gr
t	زمان، S
U	انرژی پتانسیل، N
w	جابجایی، m
w_0	دامنه
x	متغیر فضایی

علائم یونانی

α	تابع کرنل غیرمحلی
α_1	پارامتر غیرمحلی بی‌بعد
α_2	پارامتر مقیاس طول بی‌بعد
ε	پارامتر اغتشاش
ε_{xx}	کرنش طولی
ζ	متغیر فضایی بی‌بعد
λ	فرکانس طبیعی، Hz
υ	ضریب پواسون
ρ	چگالی، kg/m^3
$\overline{\rho(x)A}$	قسمت متغیر چگالی جسم در واحد طول، kg/m^3
σ_{xx}	تنش کلاسیک، Pa
$\sigma_{xx}^{(1)}$	میدان تنش الاستیک غیرمحلی، Pa
τ	زمان بی‌بعد
Ω	فرکانس طبیعی بی‌بعد، Hz
ω_0	فرکانس اولیه، Hz
∇	اپراتور نابلا

مراجع

[1] V.K. Varadan, L. Chen, J. Xie, Nanomedicine: design and applications of magnetic nanomaterials, nanosensors and nanosystems, John Wiley & Sons, 2008.

[2] H. Fan, S. Qin, A piezoelectric sensor embedded in a non-piezoelectric matrix, International Journal of Engineering Science, 33(3) (1995) 379-388.

[3] A. Rasooly, K.E. Herold, K.E. Herold, Biosensors and biodetection, Springer, 2009.

[4] L. Yu, G. Bottai-Santoni, V. Giurgiutiu, Shear lag solution for tuning ultrasonic piezoelectric wafer active sensors with applications to Lamb wave array imaging, International Journal of Engineering Science, 48(10) (2010) 848-861.

[5] N.V. Lavrik, M.J. Sepaniak, P.G. Datskos, Cantilever transducers as a platform for chemical and biological sensors, Review of Scientific Instruments, 75(7) (2004) 2229-2253.

[6] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, Journal of applied physics, 54(9) (1983) 4703-4710.

[7] M. Zarepour, S.A.H. Hosseini, A.H. Akbarzadeh, Geometrically nonlinear analysis of Timoshenko piezoelectric nanobeams with flexoelectricity effect based on Eringen's differential model, Applied Mathematical Modelling, 69 (2019) 563-582.

[8] O. Rahmani, S. Deyhim, S. Hosseini, A. Hossein, Size

analysis of piezo-magnetically actuated heterogeneous nanobeams, Mechanical Systems and Signal Processing, 93 (2017) 445-459.

[19] X. Li, L. Li, Y. Hu, Z. Ding, W. Deng, Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory, Composite Structures, 165 (2017) 250-265.

[20] Z. Lv, H. Liu, Uncertainty modeling for vibration and buckling behaviors of functionally graded nanobeams in thermal environment, Composite Structures, 184 (2018) 1165-1176.

[21] H. Liu, H. Liu, J. Yang, Vibration of FG magneto-electro-viscoelastic porous nanobeams on visco-Pasternak foundation, Composites Part B: Engineering, 155 (2018) 244-256.

[22] D. Cao, Y. Gao, M. Yao, W. Zhang, Free vibration of axially functionally graded beams using the asymptotic development method, Engineering Structures, 173 (2018) 442-448.

[23] Z. Lv, Z. Qiu, J. Zhu, B. Zhu, W. Yang, Nonlinear free vibration analysis of defective FG nanobeams embedded in elastic medium, Composite Structures, 202 (2018) 675-685.

[24] A. Aria, M. Friswell, A nonlocal finite element model for buckling and vibration of functionally graded nanobeams, Composites Part B: Engineering, 166 (2019) 233-246.

[25] M. Trabelssi, S. El-Borgi, R. Fernandes, L.-L. Ke, Nonlocal free and forced vibration of a graded Timoshenko nanobeam resting on a nonlinear elastic foundation, Composites Part B: Engineering, 157 (2019) 331-349.

[26] A.I. Aria, T. Rabczuk, M.I. Friswell, A finite element model for the thermo-elastic analysis of functionally graded porous nanobeams, European Journal of Mechanics-A/Solids, (2019).

[27] H.B. Khaniki, On vibrations of FG nanobeams, International Journal of Engineering Science, 135 (2019) 23-36.

[28] H. Liu, Z. Lv, H. Wu, Nonlinear free vibration of geometrically imperfect functionally graded sandwich nanobeams based on nonlocal strain gradient theory, dependent bending analysis of micro/nano sandwich structures based on a nonlocal high order theory, STEEL AND COMPOSITE STRUCTURES, 27(3) (2018) 371-388.

[9] O. Rahmani, M. Shokrnia, H. Golmohammadi, S. Hosseini, Dynamic response of a single-walled carbon nanotube under a moving harmonic load by considering modified nonlocal elasticity theory, The European Physical Journal Plus, 133(2) (2018) 42.

[10] M. Ghadiri, S. Hosseini, M. Karami, M. Namvar, In-Plane and out of Plane Free Vibration of U-Shaped AFM Probes Based on the Nonlocal Elasticity, Journal of Solid Mechanics Vol, 10(2) (2018) 285-299.

[11] M. Zarepour, S.A. Hosseini, M. Ghadiri, Free vibration investigation of nano mass sensor using differential transformation method, Appl. Phys. A, 123(3) (2017) 181.

[12] O. Rahmani, S. Norouzi, H. Golmohammadi, S. Hosseini, Dynamic response of a double, single-walled carbon nanotube under a moving nanoparticle based on modified nonlocal elasticity theory considering surface effects, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 24(15) (2017) 1274-1291.

[13] R. Mindlin, H. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 11(1) (1962) 415-448.

[14] D.C. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 51(8) (2003) 1477-1508.

[15] R.A. Toupin, Theories of elasticity with couple-stress, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 17(2) (1964) 85-112.

[16] F. Yang, A. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, International Journal of Solids and Structures, 39(10) (2002) 2731-2743.

[17] J.W. Lee, J.Y. Lee, Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression, International Journal of Mechanical Sciences, 122 (2017) 1-17.

[18] F. Ebrahimi, M.R. Barati, Porosity-dependent vibration

Composite Structures, 214 (2019) 47-61.

[29] M. Ghadiri, A. Jafari, A Nonlocal First Order Shear Deformation Theory for Vibration Analysis of Size Dependent Functionally Graded Nano beam with Attached Tip Mass: an Exact Solution, Journal of Solid Mechanics Vol, 10(1) (2018) 23-37.

[30] T. Aksencer, M. Aydogdu, Vibration of a rotating composite beam with an attached point mass, Composite Structures, 190 (2018) 1-9.

[31] C. Lim, G. Zhang, J. Reddy, A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 78 (2015) 298-313.

[32] S.S. Rao, Mechanical Vibrations Laboratory Manual, Year, Edition Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

[33] G. Lütjering, J.C. Williams, Titanium, Springer Science & Business Media, 2007.

[34] J. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, International Journal of Engineering Science, 45(2) (2007) 288-307.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Eghbali, S.A. Hosseini, O. Rahmani, Free vibration of axially functionally graded nanobeam with an attached mass based on nonlocal strain gradient theory via new ADM numerical method. AmirKabir J. Mech Eng., 53(special issue 2) (2021) 1159-1178.

DOI: 10.22060/mej.2020.17013.6495

این صفحه عمداً خالی است