



توسعه مدل رتبه‌کاسته پارامتری و وابسته به زمان برای مسائل نفوذ و نفوذ-جابجایی بر مبنای روش تجزیه متعامد بهینه

محمد کاظم مؤیدی*، فرشاد صباغ‌زادگان

آزمایشگاه پژوهشی توربولانس، دینامیک سیالات محاسباتی و احتراق، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۶/۰۳
بازنگری: ۱۳۹۸/۰۹/۰۱
پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۶
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۱۲/۱۸

کلمات کلیدی:

تجزیه متعامد بهینه
معادله نفوذ
معادله نفوذ-جابجایی
مدل رتبه‌کاسته
مدل جایگزین

خلاصه: مدل‌سازی و شبیه‌سازی عددی به عنوان یک ابزار مناسب جهت تحلیل رفتار دینامیکی سیستم‌های مهندسی به‌شمار می‌رود. استفاده از این روش‌ها، به ویژه برای مسائل ناپایا، معمولاً نیازمند صرف زمان زیادی است. به همین دلیل، توسعه روش‌هایی با سرعت بالاتر و افزایش راندمان محاسباتی همواره به عنوان یک موضوع مهم مورد توجه پژوهشگران بوده‌است. روش کاهش مرتبه روشی است که در سال‌های اخیر برای کاهش زمان محاسبات به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌است. در این روش، با کاستن از قیود سیستم، بدون تغییر در ویژگی‌های ذاتی مسئله، سرعت محاسبات به طرز چشم‌گیری افزایش می‌یابد. در این پژوهش، با بهره‌گیری از مفاهیم پایه‌ای سیستم‌های دینامیکی، دو مسئله نفوذ حرارتی و نفوذ-جابجایی به صورت مستقل مورد بررسی قرار گرفته و با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه، الگوی رتبه‌کاسته برای معادلات حاکم بر این پدیده‌ها ایجاد شده‌است. بر همین اساس، برای هر یک از مسائل، مبتنی بر تصویرسازی معادله حاکم در فضای برداری موده‌های میدان، با استفاده از موده‌های پرنرژتری، مدل رتبه‌کاسته با توجه به ویژگی پایه‌های متعامد به دست می‌آید. مدل به‌دست‌آمده به منظور شبیه‌سازی تغییرات زمانی فرآیند، به درستی می‌تواند جایگزین معادله اصلی شده و با دقت بسیار مناسبی رفتار سیستم مورد نظر را پیش‌بینی کند.

۱- مقدمه

محاسبات را کاهش دهد. ولی، علاقه محققان به بررسی جزئیات بیشتر یک پدیده فیزیکی، باعث افزایش پیچیدگی‌های معادلات حاکم بر مسئله می‌گردد. لذا، لزوم دستیابی به یک الگوی سریع و دقیق که قادر به مدل‌سازی مسئله (با هر درجه از پیچیدگی) باشد، همچنان وجود دارد. این مشکلات باعث شده‌است تا در تحقیق حاضر برای کاهش هزینه‌های محاسباتی مسائل نفوذ و نفوذ-جابجایی از الگوهای رتبه‌کاسته استفاده گردد.

در اغلب مسائل کاهش مرتبه، در صورت انتقال معادلات حاکم به فضای برداری تشکیل‌شده از بردارهای پایه، می‌توان دینامیک حاکم بر مسئله را با تعداد ابعاد کمتر بازسازی نمود. با این شرط که ضمن کاستن از درجات آزادی و پیچیدگی‌های مسئله، ویژگی‌های فیزیکی مسئله حفظ شود. روش‌های متفاوتی برای به‌دست‌آوردن

به طور کلی پدیده‌های نفوذ و نفوذ-جابجایی از جمله بنیادی‌ترین مسائل مکانیک سیالات و انتقال حرارت می‌باشند. شبیه‌سازی و تحلیل عددی این پدیده‌ها، به دلیل وابستگی الگوهای عددی به سخت افزارهای کامپیوتری به منظور افزایش تعداد گره‌های محاسباتی، از مهمترین و قابل تأمل‌ترین ویژگی‌های آنها می‌باشد. این امر باعث افزایش تعداد محاسبات و در نتیجه افزایش هزینه‌های محاسباتی می‌گردد. در دهه‌های اخیر، به‌دست‌آوردن یک روش محاسباتی سریع و دقیق، همواره یکی از دغدغه‌های پژوهشگران در حوزه دینامیک سیالات محاسباتی بوده‌است. پیشرفت‌های اخیر در زمینه سخت‌افزارهای محاسباتی توانسته تا حدود زیادی زمان

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: moayyedi@qom.ac.ir



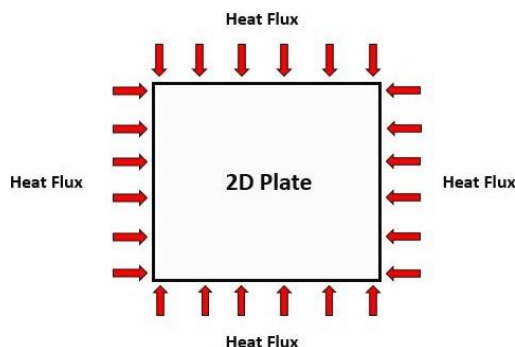
سیستم کاهش مرتبه‌یافته مورد استفاده قرار گرفته‌است. به عنوان مثال می‌توان به استفاده از تقریب بسط تیلور یا روش آرنولد اشاره نمود [۲،۱]. روشی که بیشتر از سایر روش‌ها توسط پژوهشگران این حوزه برای بررسی رفتار سیالات مورد استفاده واقع شده‌است، روش «تجزیه متعامد بهینه»^۱ است. این روش یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای کاهش مرتبه مسئله به شمار می‌رود [۳].

این روش که توانایی استخراج ساختارهای پرنرزی میدان را داشته و در نتیجه می‌تواند حجم محاسبات را با حفظ دقت و کیفیت آن کاهش دهد، می‌تواند به عنوان یک الگوی کارآ بسیار مناسب باشد. روش تجزیه متعامد بهینه کاربردهای گسترده‌ای شامل کنترل جریان سیال، بازسازی داده‌ها و ساختارها، توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته، آنالیز سیگنال^۲، پردازش تصاویر^۳، شناخت الگو^۴ و بازسازی داده‌های استخراج‌شده از جریان جوی و اقیانوسی و ... دارد. در این روش، ابتدا یک مجموعه از بردارهای پایه برای استخراج ساختارهای پرنرزی سیستم دینامیکی محاسبه می‌شود. سپس، با انتقال معادلات حاکم به فضای برداری تشکیل‌شده از این بردارهای پایه، می‌توان دینامیک حاکم بر میدان را با ابعاد کمتری و با دقتی مناسب بازسازی نمود.

روش تجزیه متعامد بهینه ابتدا توسط کارهونن در سال ۱۹۴۶ و لووی در همان سال به صورت مستقل از هم مورد مطالعه قرار گرفته و به همین دلیل با نام بسط کارهونن-لووی نیز شناخته می‌شود [۴]. برای نخستین بار در سال ۱۹۶۷ میلادی لاملی پیشنهاد کرد که از تجزیه متعامد بهینه می‌توان برای استخراج ساختارهای بزرگ ظاهر شده در جریان‌های آشفته و انتشار امواج رادیویی استفاده نمود [۵]. پس از آن با توجه به محدودیت کامپیوترها و الگوهای عددی، این روش برای مدت‌ها بدون کاربرد باقی ماند. در اواخر دهه ۸۰ میلادی و با مطرح‌شدن روش نمایه‌ها^۵ توسط سیرویش، تجزیه متعامد بهینه به عنوان ابزاری کارآمد برای توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته برای سیستم‌های دینامیکی و مسائل دینامیک سیالات مطرح گردید [۶]. طبیعی و همکاران از این روش به منظور تحلیل میدان جریان تراکم‌پذیر و محاسبه ضرایب آیرودینامیکی استفاده کردند [۷]. استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه به منظور بازسازی ساختارهای

1 Proper Orthogonal Decomposition (POD)
2 Signal Analysis
3 Image Processing
4 Pattern Recognition
5 Snapshots Method

از دست‌رفته یا نمایه‌های مفقودشده با بهره‌گیری از مودهای پرنرزی میدان در پژوهش‌های دیگری توسط بویی‌تا انجام شد [۸]. ویلکس از این روش به منظور یافتن موقعیت سنسورهایی به منظور کنترل جریان سیال در پایین دست یک سیلندر بهره برد [۹]. ثابت قدم و همکاران به منظور بازسازی نمایه‌های از دست‌رفته و نقاط مفقودشده میدان جریان ناپایا حول سیلندر مربعی شکل استفاده کردند [۱۰]. لیگرسلی و همکاران یک مدل رتبه‌کاسته بر مبنای روش تجزیه متعامد بهینه و به منظور طراحی ایرفویل استفاده کرده و با بهینه‌سازی آن را توسعه دادند. در این پژوهش یک مدل غیرخطی براساس توابع پایه خطی‌سازی‌شده محاسبه و با بهره‌گیری از کمینه‌سازی تابع هدف تعریف‌شده برای فشار سطحی ایرفویل، شکل هندسی بهینه ایرفویل محاسبه شد [۱۱]. مویدی و همکاران از روش تجزیه متعامد بهینه جهت تخمین سریع میدان جریان، محاسبه ضرایب آیرودینامیکی و طراحی معکوس آیرودینامیکی در جریان تراکم‌پذیر غیرلزج در رژیم‌های جریان متفاوت استفاده کردند [۱۲]. لیو و همکاران در پژوهشی از روش تجزیه متعامد بهینه به منظور مدل‌سازی آئروالاستیکی هواپیما اف-۱۶ به منظور تخمین و بازسازی میدان جریان در شرایط مختلف پروازی بهره‌بردند و از داده‌های حاصل برای تحلیل آئروالاستیکی استفاده کردند [۱۳]. ماندر و همکاران با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها^۵، پژوهشی پیرامون ساختارهای غالب و دینامیک جریان در شش دستگاه صنعتی انجام دادند [۱۴]. فیلیپه و همکاران پس از اندازه‌گیری میدان سرعت درون یک سیلندر با استفاده از روش سرعت سنجی تصویر ذرات، با به‌کارگیری روش تجزیه متعامد بهینه میدان سرعت لحظه‌ای سه‌بعدی را بازسازی کردند [۱۵]. هیلبرگ و همکاران نیز با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها به بررسی لایه برشی اغتشاشی با ساختارهای تکرارشونده پرداختند [۱۶]. پاستور و همکاران با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها، اطلاعات مربوط به جریان درون یک کانال باز را در دو بعد مورد بررسی قرار دادند [۱۷]. رمپفر و همکارش با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها، ساختار یک لایه مرزی سه‌بعدی ایجادشده بر روی صفحه تخت را بر اساس مودهای مکانی و زمانی که حاوی تمام اطلاعات لایه مرزی می‌باشد، بازسازی کردند [۱۸]. راوندران از روش تجزیه متعامد بهینه برای کنترل بهینه سیستم‌های



شکل ۱. شماتیک صفحه مورد بررسی
Fig. 1. Schematic of Case Study

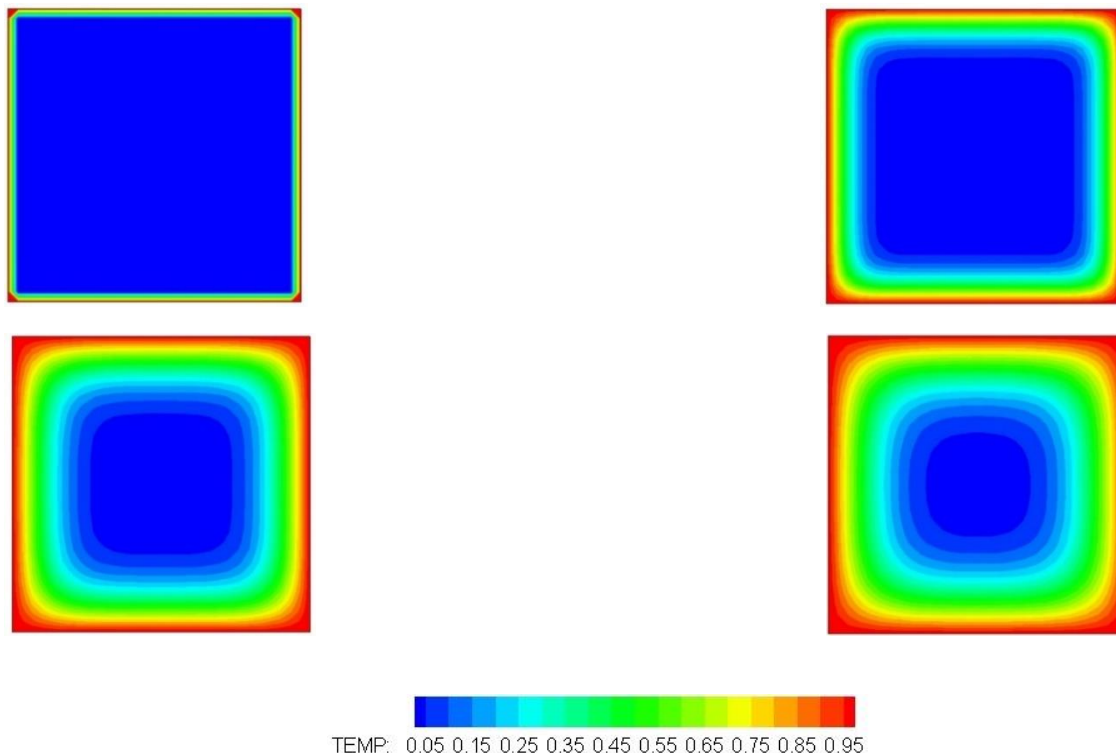
در بازه‌های زمانی مشخصی حل شده‌اند. سپس، ساختارهای میدان تعیین شده و ساختارهای اصلی و حائز اهمیت درون میدان استخراج و از ساختارهای کم انرژی و فاقد اهمیت چشم‌پوشی می‌شود. با این کار، ضمن حفظ شاخصه‌ها و ویژگی‌های اصلی و ذاتی مسائل مورد بررسی، پیچیدگی آن‌ها کاهش می‌یابد. در نتیجه با استفاده از روش تصویرسازی گالرکین، معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌است. در نهایت، دستگاه معادلات کاهش مرتبه‌یافته با استفاده از روش رانگ-کوتای مرتبه چهار حل و تغییرات زمانی سیستم (ضرایب سیستم دینامیکی) به دست خواهد آمد. در نتیجه با استفاده از ترکیب خطی ساختارهای پرنرزی (مودهای غالب) سیستم، می‌توان میدان را بازسازی کرد. در کار حاضر، مدل رتبه‌کاسته مربوط به مسئله نفوذ حرارتی قادر به بازسازی میدان به‌ازای تغییر در ضریب نفوذ، و مدل مربوط به مسئله نفوذ-جابجایی توانایی بازسازی میدان در بازه‌های زمانی مختلف به‌ازای عدد رینولدز ۱۰۰ را دارا می‌باشد. روشن است استفاده از این مدل‌ها به منظور بازسازی میدان در هر یک از مسائل، موجب کاهش هزینه‌های محاسباتی از جمله کاهش حجم و زمان محاسبات می‌شود. نتایج به دست آمده نشان‌دهنده دقت و سرعت بالای الگوی رتبه‌کاسته در شبیه‌سازی مسئله نفوذ و مسئله نفوذ-جابجایی می‌باشد.

۲- حل عددی معادله نفوذ دو بعدی و ناپای

در این پژوهش، توسعه مدلی رتبه‌کاسته به منظور حل معادله نفوذ حرارتی درون صفحه‌ای دوبعدی و مربعی‌شکل، مطابق شکل ۱، مورد بررسی قرار می‌گیرد:

برای این امر نیز ابتدا لازم است تا دنباله‌ای از داده‌هایی که

دینامیک سیالات استفاده نمود. وی با استفاده از این روش، کنترل جریان را در حالت غیردائم در سیستم‌های میکروالکترو-مکانیکی مطالعه کرد [۱۹]. اوستراوسکی و همکاران پیشرفت‌های جدیدی در کاربرد روش تجزیه متعامد بهینه برای تحلیل مسئله معکوس انتقال حرارت هدایت پایا را بررسی نمودند [۲۰]. ویلاس و همکاران با بررسی لرزش‌های ناشی از وجود گردابه درون یک سیلندر مستطیلی شکل، با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه موفق به توسعه مدل رتبه‌کاسته برای برهم‌کنش ساختارهای سیال به‌ازای عدد رینولدز ۱۰۰ شدند [۲۱]. بلانک و همکاران از تجزیه متعامد بهینه همراه با روش‌های درون‌یابی برای مدل‌سازی انتقال حرارت مزدوج استفاده نمودند [۲۲]. فاگیانو و گاتی از مدل رتبه‌کاسته برای شبیه‌سازی قوس پلازما در دستگاه‌های توزیع‌کننده استفاده کردند [۲۳]. کالبرگ و همکاران روش جدیدی موسوم به حداقل مربعات پتروف-گالرکین را برای افزایش دقت روش تصویرسازی گالرکین، به منظور شبیه‌سازی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی همراه با پیچیدگی ارائه کردند [۲۴]. چوی و کالبرگ نیز با مطالعه بر روی روش حداقل مربعات پتروف-گالرکین، این روش را بیشتر توسعه دادند [۲۵]. انصاری و همکاران نیز با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه موفق به توسعه مدل رتبه‌کاسته‌ای با هدف شبیه‌سازی الکتروشیمیایی باتری سرب-اسید شدند. آن‌ها تغییرات غلظت اسید و ولتاژ باطری را در طی سه مرحله تخلیه، استراحت و شارژ به روش رتبه‌کاسته شبیه‌سازی کردند [۲۶]. در این پژوهش، از روش تجزیه متعامد بهینه جهت ایجاد الگوی رتبه‌کاسته برای مسائل نفوذ دو بعدی و مسئله نفوذ-جابجایی یک‌بعدی استفاده شده‌است. مسائل در حالت گذرا شبیه‌سازی شده‌اند. برای ایجاد ماتریس نمایه‌ها، هر دو مسئله با استفاده از روش تفاضل محدود



شکل ۲. خطوط همتراز دما برای دسته نمایه‌های شماره ۱ (بالا چپ)، شماره ۲۰ (بالا راست)، شماره ۵۰ (پایین چپ) و شماره ۷۵ (پایین راست)
Fig. 2. Contours of Temperature Snapshots Ensemble, Members No. 1 (Left-Up), No. 20 (Right-Up), No. 50 (Left-Bot-tom), No. 75 (Right-Bottom)

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (2)$$

و شرایط مرزی:

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 1 \quad (3)$$

استفاده شده‌است. ضریب نفوذ 0.0044 بوده و مسئله در بازه زمانی $0/75$ واحد مورد بررسی قرار گرفته‌است. با حل معادلهٔ حاکم، یک دسته با 75 عضو (از حل میدان) در یک بازه زمانی خاص و با گام‌های زمانی مساوی و متوالی در نظر گرفته خواهد شد. در شکل ۲، به ترتیب خطوط همتراز دمای درون صفحه مورد بررسی برای نمایه‌های ۱، ۲۰، ۵۰ و ۷۵ نمایش داده شده‌است:

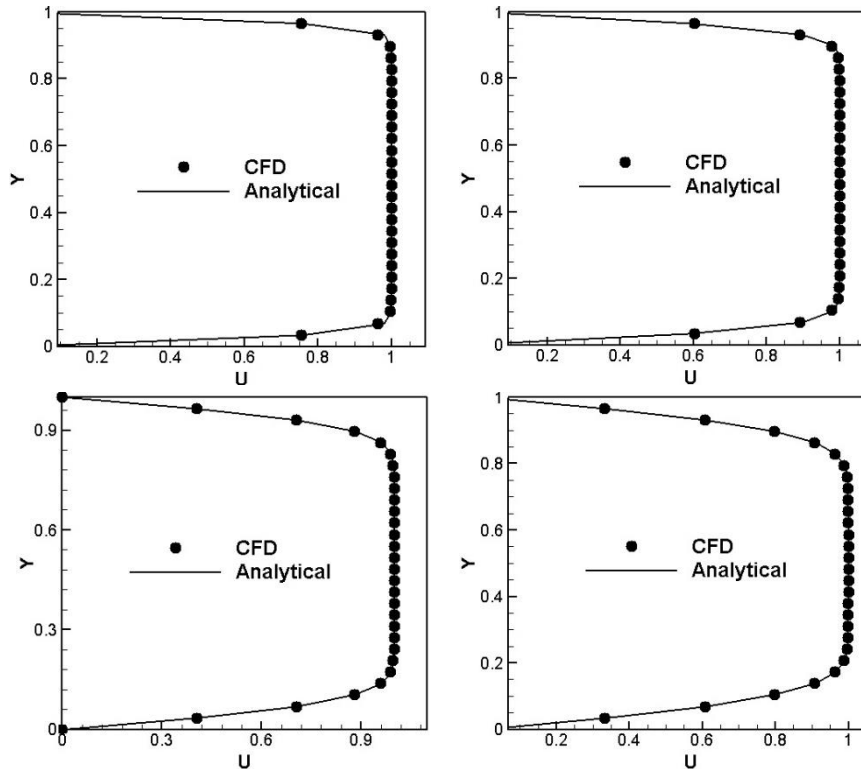
۲-۱- صحت‌سنجی نتایج حاصل از حل عددی معادله نفوذ حرارتی دو بعدی و ناپایا

به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل از حل عددی معادله نفوذ

به صورت شبیه‌سازی عددی مستقیم جمع‌آوری شده‌اند، به صورت مجموعه‌ای از نمایه‌ها یا همان میدان‌های لحظه‌ای مرتب گردند. بدین منظور در شبیه‌سازی‌های ارائه‌شده و برای ایجاد دسته نمایه‌ها، از کد حل عددی معادله نفوذ حرارتی دو بعدی و ناپایا مطابق با معادله ۱ استفاده شده‌است. از آنجایی که معادله نفوذ ذاتاً یک معادله بیضوی است، در حل مستقیم عددی از تفاضل محدود مرکزی با دقت مرتبه دوم برای ترم‌های مکانی و روش رانگ-کوتا با دقت مرتبه چهارم برای عبارت مشتق زمانی بهره گرفته شده‌است. شکل گسسته‌سازی شده این معادله به صورت زیر است:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{dt} = \alpha \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{dx^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{dy^2} \right) \quad (1)$$

همچنین برای تحلیل عددی این مسئله از شرط اولیه:



شکل ۳. مقایسه بین توزیع درجه حرارت برای شبیه‌سازی عددی مستقیم و حل تحلیلی در راستای خط تقارن افقی برای دسته‌نامه شماره ۱۰ (بالا چپ)، شماره ۲۰ (بالا راست)، شماره ۵۰ (پائین چپ) و شماره ۷۵ (پائین راست)

Fig. 3. Comparison between Temperature Distribution for Direct Numerical Simulation and Analytical Solution in Horizontal Center line for Snapshots Ensemble Members No. 10 (Left-Up), No. 20 (Right-Up), No. 50 (Left-Bottom), (No. 75 (Right-Bottom)

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4 \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) e^{\frac{-11 t \pi^2 (n^2 + m^2)}{2500}} + (-1)^{n+m} + (-1)^m + (-1)^n - 1}{\pi^2 nm} \quad (6)$$

سپس با حل عددی معادله ۶ به‌ازای بازه ۰/۷۵ واحد زمانی، به مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با نتایج حاصل از عددی حل معادله نفوذ پرداخته خواهد شد. بدین منظور در شکل ۳ و ۴ به ترتیب مقایسه توزیع درجه حرارت بر روی خط مرکزی تقارن افقی و عمودی برای نمایه‌های ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۷۵ حاصل از حل عددی معادله نفوذ حرارتی و حل عددی معادله ۶ به‌دست‌آمده از حل تحلیلی نمایش داده شده است:

همانطور که از نتایج نشان داده شده در شکل‌های ۳ و ۴ مشخص است، حل عددی معادله نفوذ دوبعدی و ناپایا کاملاً منطبق بر نتایج حاصل از حل عددی معادله ۶ بوده و این امر نشان‌دهنده دقت بالای حل عددی معادله نفوذ حرارتی دوبعدی و دسته‌نامه‌های ورودی

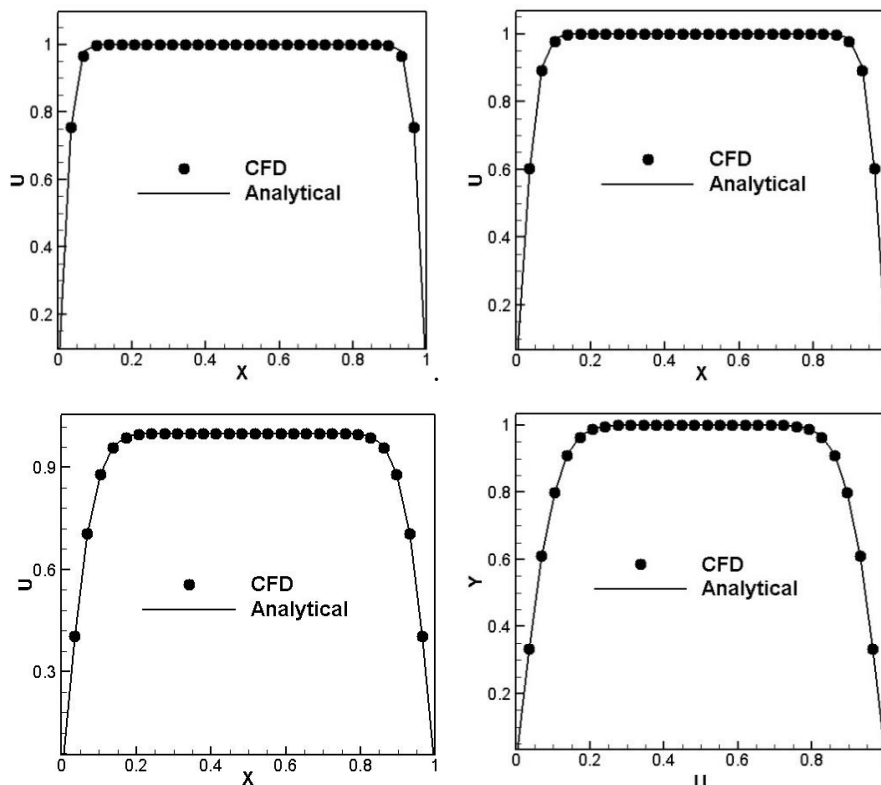
حرارتی دو بعدی و ناپایا، به مقایسه این نتایج با پاسخ تحلیلی معادله پرداخته شده است. برای محاسبه پاسخ تحلیلی این معادله از نرم‌افزار میپل استفاده می‌شود. به منظور وجود پاسخ تحلیلی و سهولت در استخراج آن توسط این نرم‌افزار، از شرط اولیه:

$$u(x, y, 0) = 1, \quad (4)$$

و شرایط مرزی همگن:

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0 \quad (5)$$

استفاده شده است. ضریب نفوذ نیز ۰/۰۰۴۴ در نظر گرفته می‌شود. در اینصورت پاسخ تحلیلی معادله نفوذ حرارتی دو بعدی و ناپایا به‌دست‌آمده توسط نرم‌افزار میپل به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۴. مقایسه بین توزیع درجه حرارت برای شبیه‌سازی عددی مستقیم و حل تحلیلی در راستای خط تقارن عمودی برای دسته نمایه شماره ۱۰ (بالا چپ)، شماره ۲۰ (بالا راست)، شماره ۵۰ (پایین چپ) و شماره ۷۵ (پایین راست)

Fig. 4. Comparison between Temperature Distribution for Direct Numerical Simulation and Analytical Solution in Horizontal Central line for Snapshots Ensemble, Members No. 10 (Left-Up), No. 20 (Right-Up), No. 50 (Left-Bottom), (No. 75 (Right-Bottom)

گسسته‌سازی شده این معادله به صورت زیر است:

مدل رتبه کاسته تولید شده از این معادله می‌باشد.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - (A_p U_n + A_n U_p) \quad (7)$$

$$A_p = \max(u_i, 0) \quad , \quad A_n = \min(u_i, 0) \quad (8)$$

$$U_p = \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2\Delta x} \quad , \quad (9)$$

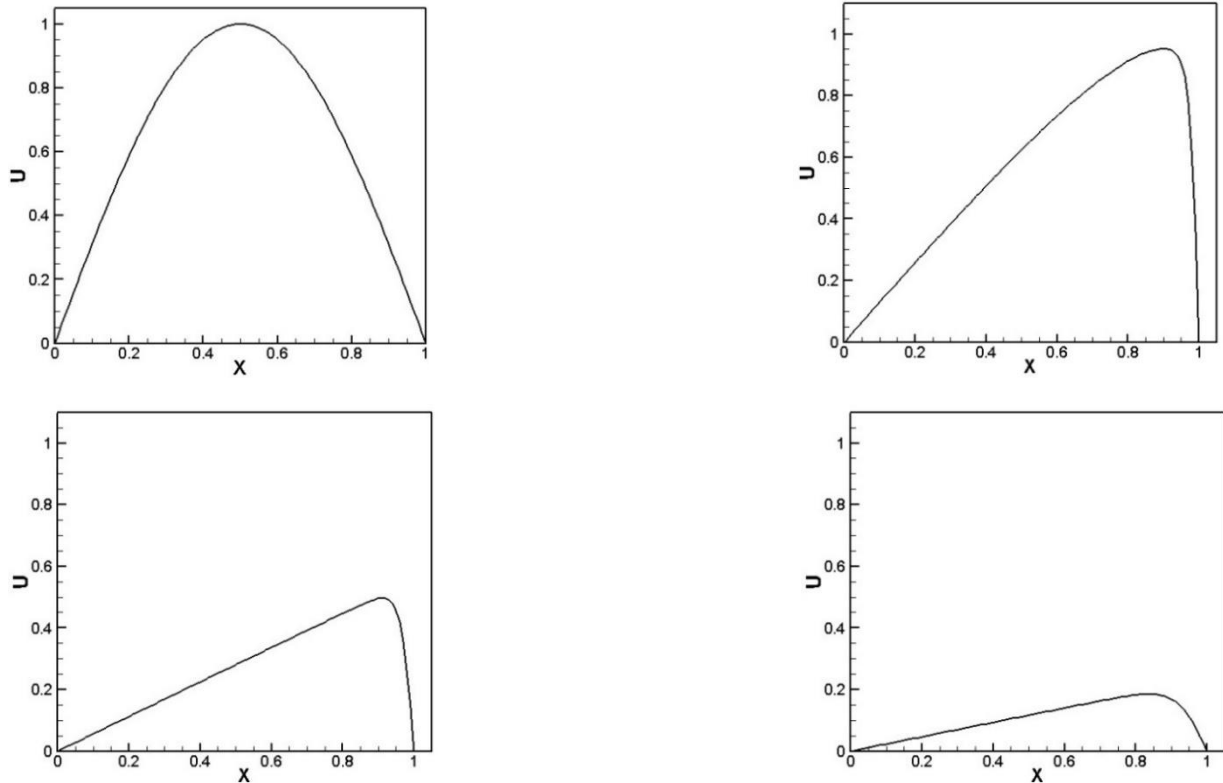
$$U_n = \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x}$$

همچنین برای تحلیل عددی این مسئله از شرط اولیه:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad (10)$$

۳- حل عددی معادله برگرز لزج و یک بعدی

دیگر مسئله موردنظر در این پژوهش، توسعه مدلی رتبه کاسته به منظور حل معادله برگرز یا نفوذ-جابجایی در یک بعد (در راستای طول حجم کنترل) می‌باشد. برای این امر نیز ابتدا لازم است تا دنباله‌ای از داده‌هایی که به صورت شبیه‌سازی عددی مستقیم جمع‌آوری شده‌اند، به صورت مجموعه‌ای از نمایه‌ها یا همان میدان‌های لحظه‌ای مرتب گردند. در شبیه‌سازی‌های ارائه شده و برای ایجاد دسته‌نمایه‌ها، از کد حل عددی معادله برگرز یک بعدی لزج و ناپایا مطابق با معادله ۷ استفاده شده‌است. در حل عددی مستقیم برای جمله غیرخطی جابجایی از روش بالادست با دقت مرتبه دو و برای جمله خطی نفوذ از روش تفاضل مرکزی با دقت مرتبه دو و از روش رانگ-کوتا با دقت مرتبه چهارم برای عبارت مشتق زمانی بهره گرفته شده‌است. شکل



شکل ۵. پاسخ معادله نفوذ-جابجایی (برگرز) برای شرایط اولیه مشابه با یک موج سینوسی در عدد رینولدز ۱۰۰ برای دسته نمایه‌های شماره ۱ (بالا چپ)، شماره ۱۰ (بالا راست)، شماره ۳۰ (پایین چپ) و شماره ۸۰ (پایین راست)

Fig. 5. Response of Convection-Diffusion (Burgers) Equation for Initial Condition Similar to a Sine Wave at Re=100 for (Snapshots Ensemble, Membrs No. 1 (Left-Up), No. 10 (Right-Up), No. 30 (Left-Bottom), No. 80 (Right-Bottom))

عددی معادله برگرز لزج و یک‌بعدی، به مقایسه این نتایج با نتایج حاصل از حل تحلیلی پرداخته خواهد شد. بدین منظور از معادله حاصل از حل تحلیلی معادله برگرز نمایش داده شده در مرجع [۲۷] استفاده شده است:

$$u(x, t) = \frac{4\pi}{\text{Re}} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{\text{Re}}\right) I_n \left(\frac{\text{Re}}{2\pi}\right) n \sin(n\pi x)}{I_0\left(\frac{\text{Re}}{2\pi}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{\text{Re}}\right) I_n\left(\frac{\text{Re}}{2\pi}\right) \cos(n\pi x)} \quad (12)$$

همچنین در این پژوهش برای حل تحلیلی معادله برگرز از شرط

اولیه:

و شرایط مرزی:

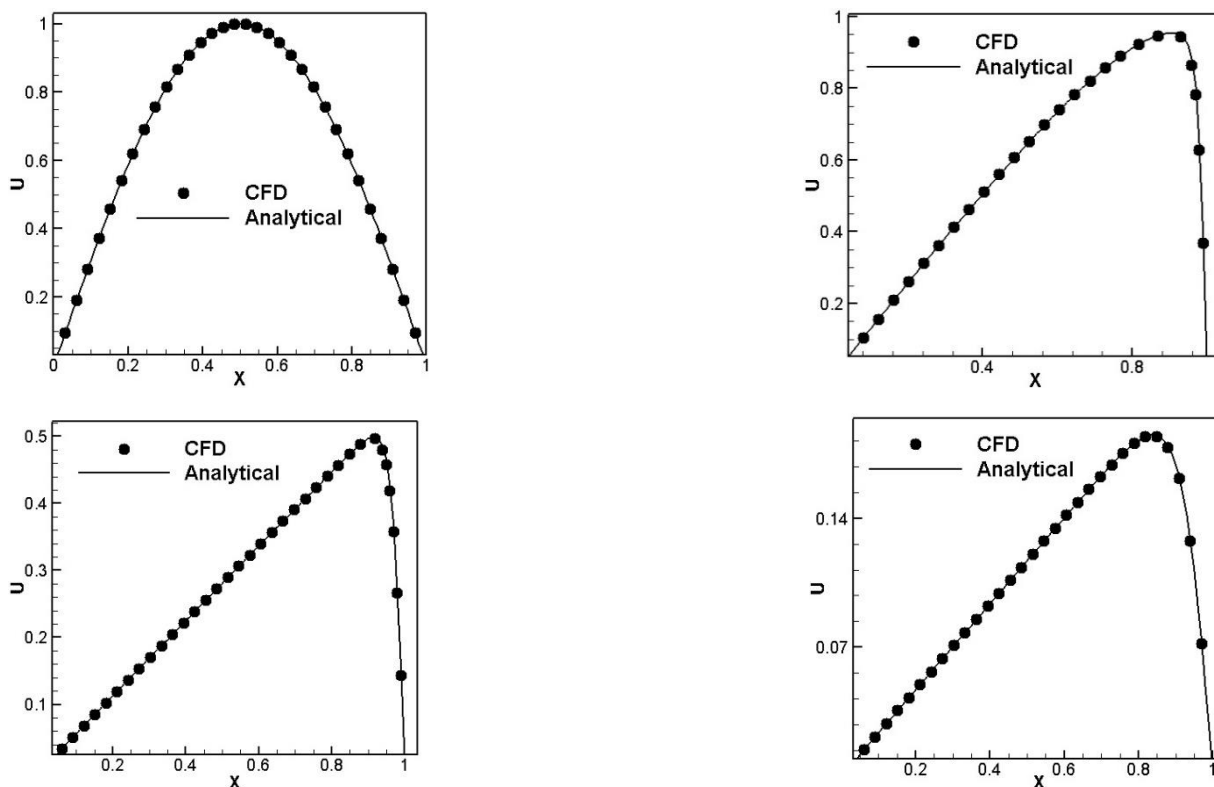
$$u(0, t) = u(x, t) = 0 \quad (11)$$

استفاده شده است. عدد رینولدز ۱۰۰ در نظر گرفته شده و مسئله در یک بازه زمانی معادل ۴ واحد مورد بررسی قرار گرفته است. با حل معادله حاکم، یک دسته با ۸۰ عضو (از حل میدان) در یک بازه زمانی خاص و با گام‌های زمانی مساوی و متوالی در نظر گرفته خواهد شد. در شکل ۵، به ترتیب نمودار پاسخ سیستم برای شرایط اولیه مشابه با یک موج سینوسی برای نمایه‌های ۱، ۱۰، ۳۰ و ۸۰ نمایش داده شده است.

۳-۱- صحت‌سنجی نتایج حاصل از حل عددی معادله برگرز لزج و

یک‌بعدی

در این بخش نیز به منظور صحت‌سنجی نتایج به دست آمده از حل



شکل ۶. مقایسه نتایج حاصل از حل عددی و حل تحلیلی معادله برگرز برای شرایط اولیه مشابه با یک موج سینوسی در عدد رینولدز ۱۰۰ برای دسته نمایه‌های شماره ۱ (بالا چپ)، شماره ۱۰ (بالا راست)، شماره ۳۰ (پایین چپ) و شماره ۸۰ (پایین راست)

Fig. 6. Comparison between the Results of Numerical Solution and Analytical Solution Burgers Equation for Initial Condition Similar to a Sine Wave at Re=100 for Snapshots Ensemble, Membres No. 1 (Left-Up), No. 10 (Right-Up), No. 30 (Left-Bottom), No. 80 (Right-Bottom)

۴- روش تجزیه متعامد بهینه

روش تجزیه متعامد بهینه در واقع راه حلی برای استخراج ویژگی‌هایی از سیستم دینامیکی خطی و غیرخطی بوده که علاوه بر دارا بودن خاصیت تعامد، از لحاظ سطح انرژی نیز بهینه می‌باشند. مهم‌ترین خاصیت این روش این است که تنها با تعداد محدودی از پایه‌ها می‌توان بخش مهمی (معمولاً بیش از ۹۹ درصد) از انرژی جنبشی میدان را استخراج کرد. همانطور که اشاره شد، ایده اصلی در روش تجزیه متعامد بهینه، یافتن پایه‌های متعامد بوده به طوری که بتوان هر بردار در فضای مورد بررسی را به صورت ترکیب خطی از این پایه‌ها نوشت. اگر U یک بردار دلخواه در فضای \mathbb{R}^m باشد و مجموعه $\{\phi_i\}_{i=1}^m$ پایه‌های متعامد برای این فضا باشند، در این صورت، می‌توان بردار U را بر حسب ترکیب خطی از آن‌ها به صورت زیر بیان کرد:

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad (13)$$

و شرایط مرزی:

$$u(0,t) = u(x,t) = 0 \quad (14)$$

استفاده شده‌است. حال با حل عددی معادله ۱۲ در بازه ۴ واحد زمانی و به‌ازای عدد رینولدز ۱۰۰، نتایج حاصل با نتایج به‌دست‌آمده از حل عددی معادله برگرز برای نمایه‌های ۱، ۱۰، ۳۰ و ۸۰ در شکل ۶ مقایسه شده‌است.

همانطور که از نتایج نشان‌داده‌شده در شکل ۶ مشخص است، حل عددی معادله برگرز لزج و یک بعدی کاملاً منطبق بر نتایج حاصل از حل عددی معادله ۱۲ بوده و این امر نشان‌دهنده دقت بالای حل عددی معادله برگرز لزج و دسته نمایه‌های ورودی مدل رتبه‌کاسته تولیدشده از این معادله می‌باشد.

در صورتیکه حرکت ذرات سیال در میدان جریان بصورت آشفته باشد، جریان دارای رفتارهای نامنظم و بی‌قاعده است. در اینصورت حرکات توده‌های سیال شدیداً وابسته به زمان و مکان می‌باشد. وسعت این بی‌نظمی چنان زیاد است که مانع از بررسی کامل (لحظه‌ای) حرکت همه ذرات سیال و تعیین مقادیر صریح متغیرهای جریانی (سرعت، دما، فشار، چگالی، غلظت جرمی) در میدان می‌شود. با اینکه جزئیات آشفتگی را نمی‌توان برحسب زمان و مکان پیش‌بینی کرد لیکن خواص آماری آن را می‌توان بازتولید نمود. بنابراین بررسی مقادیر متوسط و توزیع‌های احتمالی کمیت‌های جریان می‌تواند مفید باشد. به همین دلیل می‌توان به منظور بررسی متغیرهای اصلی میدان، هر متغیر را بر اساس تجزیه رینولدز^۲ به دو بخش متوسط و اغتشاشی تقسیم نموده و بیان کرد:

$$U(\vec{x}, t^i) = \bar{U}(\vec{x}) + U'(\vec{x}, t^i) \quad (18)$$

به طور کلی کمیت متوسط را به دو روش متوسط‌گیری زمانی و متوسط‌گیری جمعی می‌توان محاسبه نمود. مطابق با مفهوم متوسط‌گیری جمعی، هرگاه یک آزمایش را در بازه زمانی T به تعداد N بار انجام داده به طوری که مقادیر میدان $U_i(\vec{x})$ در هر گام زمانی (t_s) اندازه‌گیری شود، مجموعه‌ای از N عدد مقادیر لحظه‌ای $U_i(\vec{x})$ به صورت مستقل از زمان به دست خواهد آمد. بنابراین بخش متوسط به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{U}(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_1^N U_i(\vec{x}) \quad (19)$$

هر المان i متناظر با یک نمایه مشاهده‌شده در یک فرآیند است. فاصله بین نمایه‌ها در دنباله بالا ثابت می‌باشد. تنها شرط لازم برای نمایه‌ها این است که مستقل خطی باشند. هر نمایه معادل ماتریس‌هایی با i سطر و j ستون می‌باشد. حال می‌توان بخش اغتشاشی هر یک از نمایه‌ها را در قالب یک ماتریس به ابعاد $(i \times j) = M$ سطر و N ستون به صورت زیر مرتب کرد:

$$U = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i = \Phi A \quad (15)$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} a_1, a_2, \\ \dots, a_N \end{bmatrix}^T ; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_1, \phi_2, \dots \\ \phi_N \end{bmatrix}$$

و بالانویس T به معنای ترانپوز ماتریس است. بر این اساس روش تجزیه متعامد بهینه، این قابلیت را به وجود می‌آورد که با یافتن پایه‌های پراورزی‌تر، بتوان با بهره‌گیری از l پایه اول ($l \ll N$) بردار پاسخ سیستم را با دقت بالایی تقریب زد:

$$\min_{\phi_i} \varepsilon^2(l) = E \left\{ (X - X(l))^2 \right\} \quad (16)$$

$$\phi_i^T \phi_j = \delta_{i,j} \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

که $E\{\cdot\}$ بیانگر میانگین موزون است.

۵- روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها

در اواخر دهه ۸۰ میلادی، سیرویش روش نمایه را به عنوان یک راه موثر برای استفاده گسترده‌تری از روش تجزیه متعامد بهینه معرفی کرد. مهم‌ترین دستاورد روش نمایه توسعه روش تجزیه متعامد بهینه در میان روش‌هایی است که به صورت مستقیم از داده‌های تولیدشده در الگوهای تجربی و یا عددی استفاده می‌کنند. به منظور استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها، دنباله‌ای از داده‌هایی که به صورت آزمایشگاهی یا از شبیه‌سازی عددی مستقیم جمع‌آوری شده‌اند، به صورت مجموعه‌ای از نمایه‌ها یا همان میدان‌های لحظه‌ای^۱ مرتب خواهند شد:

$$U_i(\vec{x}) = U(\vec{x}, t^i) ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

$$VV^T = V^T V = I \quad (23)$$

$$F = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ U'_1 & \dots & U'_N \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \quad (20)$$

و ماتریس Σ ماتریسی قطری بوده که عناصر قطر اصلی آن شامل مقادیر تکین غیرمنفی $S_{i,j}$ می‌باشد. نحوه قرارگیری مقادیر تکین طوری است که این مقادیر به طور نزولی بر قطر اصلی ماتریس Σ قرار گرفته‌اند. به عبارت دیگر قطر اصلی ماتریس مقادیر تکین به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$S_{1,1} \geq S_{2,2} \geq \dots \geq S_{n,n} \geq 0 \quad (24)$$

در این صورت ماتریس غیرمربعی U همان توابع متعامد بهینه $(\phi(\vec{x}))$ و ماتریس مربعی ΣV^T همان مودهای زمانی می‌باشند. بنابراین می‌توان به جای بخش اغتشاشی دسته N تایی از نمایه‌های اولیه، عبارتی گسسته‌سازی شده مبتنی بر توابع پایه تجزیه متعامد بهینه و مودهای زمانی را معادل قرار داد:

$$U'(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N A^i(t) \times \phi_i(\vec{x}) \quad (25)$$

۶- تصویرسازی گالرکین و معادله سیستم دینامیکی

پس از محاسبه توابع متعامد بهینه، به منظور توسعه مدل رتبه‌کاسته، از تصویرسازی گالرکین معادله حاکم در فضای برداری مودها استفاده می‌شود. با تصویرسازی معادلات حاکم بر مسئله در زیرفضای مودهای تجزیه متعامد بهینه، یک دسته معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به منظور محاسبه تغییرات زمانی ضرایب مودال^۲ جهت بازسازی میدان به دست آمده، که سیستم دینامیکی نامیده می‌شود. برای هر یک از مسائل مورد بحث، مسئله نفوذ حرارتی و مسئله نفوذ-جابجایی، به ترتیب معادله سیستم دینامیکی مذکور به صورت زیر می‌باشد:

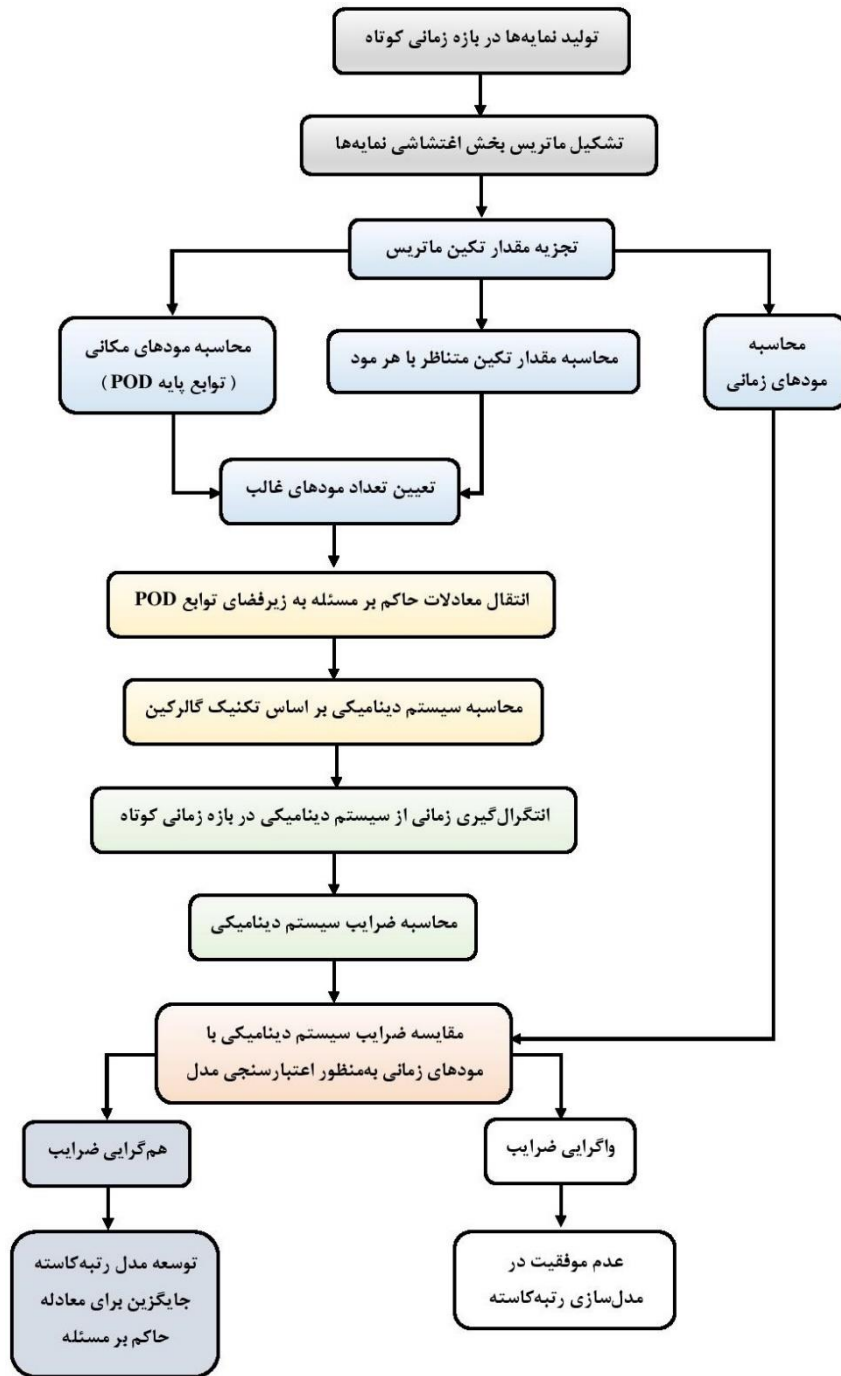
$$\frac{da^k(t)}{dt} = B_i^k \times a^i(t) + C^k \quad (26)$$

ماتریس به‌دست‌آمده می‌تواند یک ماتریس غیرمربعی باشد. لازم به ذکر است که غیرمربعی شدن ماتریس به دلیل بیشتر بودن تعداد نقاط شبکه محاسباتی نسبت به تعداد نمایه‌های ثبت شده ($M > N$) می‌باشد. در صورت استفاده از تعداد کثیری نمایه و برابر شدن آنها با تعداد نقاط شبکه، علاوه بر افزایش زمان محاسبات که یک عیب محسوب می‌شود، توسعه مدل رتبه کاسته جهت پیش‌بینی رفتار سیستم در بازه زمانی بلند بی‌معنا خواهد بود. در ادامه برای محاسبه توابع پایه، می‌توان از روش‌های متفاوتی از جمله روش ماتریس همبستگی و روش تجزیه مقادیر تکین استفاده کرد. در هر دو مسئله مطرح در این پژوهش، از روش دوم استفاده می‌شود. بدین ترتیب که با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین^۱ ماتریس مقادیر اغتشاشی حاصل از تصاویر لحظه‌ای تجزیه خواهد شد. تجزیه مقدار تکین یک روش ریاضی بر پایه جبر خطی و با استفاده از خواص ماتریس‌ها است. این نگاشت به عنوان یک روش کاهنده، یک ماتریس را به حاصلضرب سه ماتریس و در حقیقت به تصاویر مشخصه سازنده‌اش تجزیه می‌کند. بر این اساس ماتریس بخش اغتشاشی حاصل از تصاویر لحظه‌ای، با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین به صورت زیر تجزیه خواهد شد:

$$F_{(m \times n)} = U_{(m \times m)} \Sigma_{(m \times n)} V^T_{(n \times n)} \quad (21)$$

که ماتریس U و V ماتریس‌هایی متعامد بوده و به ترتیب ماتریس بردار ویژه سمت چپ و ماتریس بردار ویژه سمت راست نامیده می‌شوند. هر دو ماتریس دارای بردارهایی با اندازه واحد بوده و در هر ماتریس، هر بردار بر تمامی بردارهای دیگر آن ماتریس عمود است. در واقع U و V یک چرخش مختصات ساده را نمایش می‌دهند، لذا می‌توان نوشت:

$$UU^T = U^T U = I \quad (22)$$



شکل ۷. فلوجارت مدل رتبه کاسته بر مبنای روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها
 Fig. 7. Flowchart of Reduced Order Model Based on POD-Snapshots Method

بیش از ۹۹ درصد باشد، N_r حاصل، تعداد مودهای مورد نیاز برای توسعه مدل رتبه‌کاسته با دقت کافی را نشان می‌دهد. فلوجارت روش در شکل ۷ آورده شده‌است.

۸- نتایج

در این قسمت به ارائه و بررسی نتایج پژوهش پرداخته می‌شود. دو مسئله مورد بررسی قرار گرفته که در مسئله اول معادله نفوذ حرارتی در یک حجم کنترل دوبعدی با ابعاد محدود، و در مسئله دوم معادله برگرز لزج در یک حجم کنترل یک‌بعدی مورد نظر بوده‌است. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته، داده‌های حاصل با نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم مقایسه شده‌اند.

۸-۱- مدل رتبه‌کاسته پارامتری معادله نفوذ حرارتی ناپایا

در این بخش، به‌دست‌آوردن مدلی که با دقت مناسب قادر به پیش‌بینی دینامیک میدان به ازای تغییر در مقادیر پارامترهای موثر از جمله ضریب نفوذ حرارتی باشد، مدنظر خواهد بود. بدین منظور، با استفاده از دسته نمایه مقادیر اغتشاشی و با حل مسئله مقدار تکین،

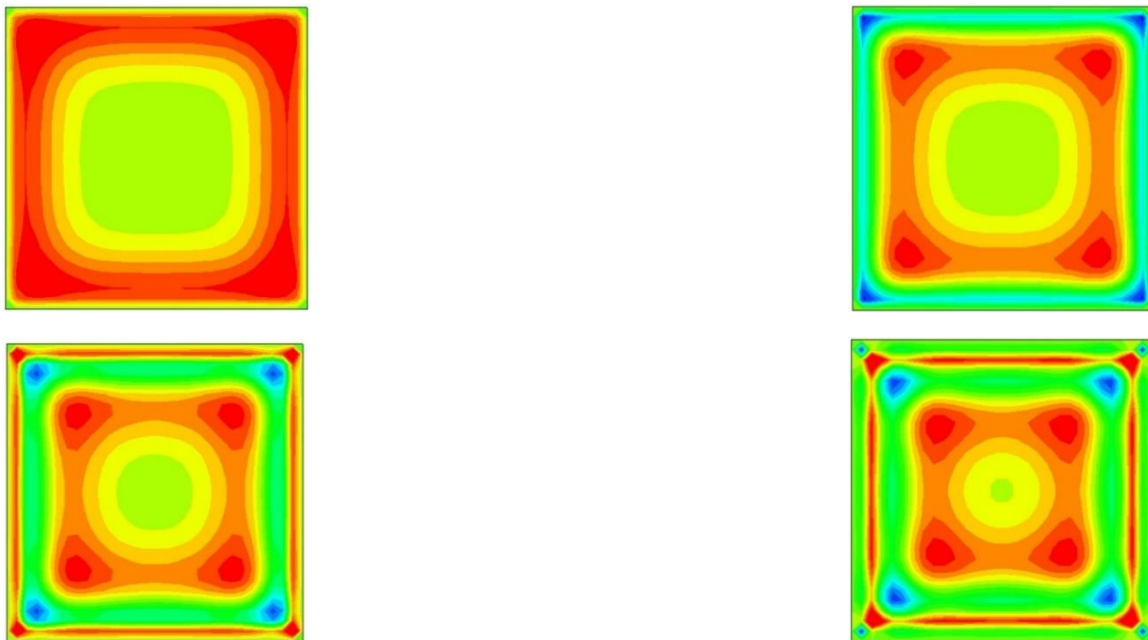
$$\frac{da^k(t)}{dt} = A_{ij}^k \times a^i(t) \times a^j(t) + B_i^k \times a^i(t) + C^k \quad (27)$$

۷- انتخاب تعداد مودها جهت بازسازی میدان

در حل رتبه‌کاسته با افزایش تعداد مودهای میدان، مدل حاصل از دقت نزدیک‌تری به حل دقیق برخوردار می‌شود. بنابراین، با تعداد کمتری از مودهای تولیدشده می‌توان سهم بالایی از انرژی موجود در میدان را تسخیر کرد. بدین ترتیب، برای محاسبه تعداد مودهایی که درصد انرژی بالاتری را دارا می‌باشند، تعداد پایه‌های لازم برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} S_i^2}{\sum_{i=1}^{N_{total}} S_i^2} \quad (28)$$

در رابطه بالا، S_i مقادیر تکین حاصل از حل مسئله مقدار تکین برای ماتریس بخش اغتشاشی داده‌ها می‌باشد. هرگاه مقدار k معمولاً



شکل ۸. خطوط هم‌تراز ۴ مود پارانرژی‌تر برای دسته نمایه‌های حاصل از حل معادله نفوذ حرارتی به ازای ضریب نفوذ ۰/۰۰۴۴ - شماره ۱ (بالا چپ)، شماره ۲ (بالا راست)، شماره ۳ (پایین چپ) و شماره ۴ (پایین راست)

Fig. 8. Contours of Four Strongest Modes for Snapshots Ensemble obtained from Solution of Thermal Diffusion for (Diffusion Coefficient of 0.0044, Mode No. 1 (Left-Up), No. 2 (Right-Up), No. 3 (Left-Bottom), No. 4 (Right-Bottom)

جدول ۱. انرژی نسبی چهار مود پرنرژی‌تر برای دسته نمایه‌های توزیع نفوذ حرارتی

Table 1. Relative Energy of Four Strongest Modes for Snapshots Ensemble of Temperature

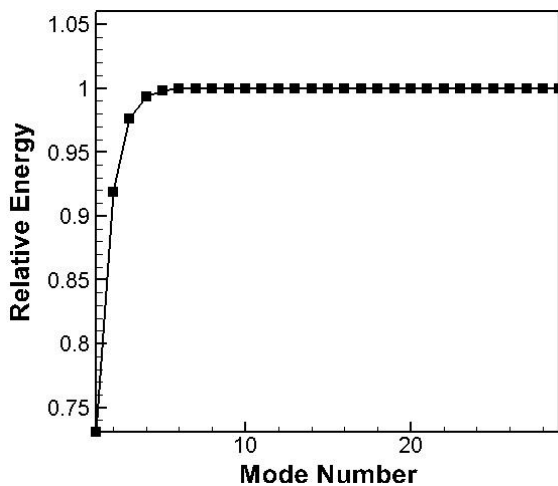
شماره مود	۱	۲	۳	۴
انرژی نسبی	٪۷۳	٪۱۹	٪۶	٪۷

۸-۱-۱-۱- انتگرال‌گیری از معادله سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته در بازه زمانی کوتاه

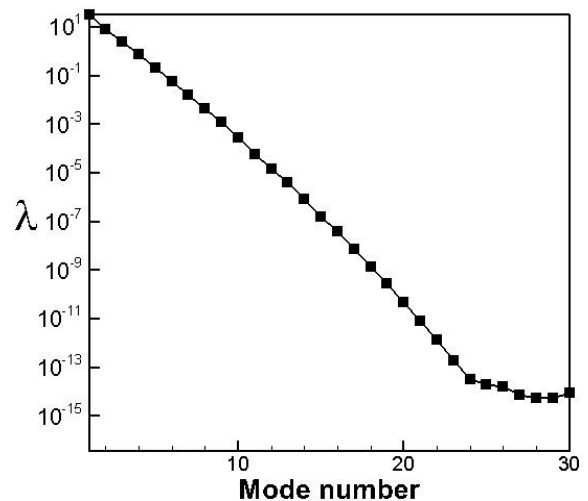
با مشخص‌شدن تعداد مودها برای بازسازی مدل رتبه‌کاسته، ضرایب سمت راست معادله ۲۶، در بازه ۰/۷۵ واحد زمانی همراه با گام زمانی ۰/۰۰۱ به ازای ضریب نفوذ ۰/۰۰۴۴ محاسبه می‌شود. سپس با بهره‌گیری از روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم، مبتنی بر یک پیمایش زمانی، معادله ۲۶ حل شده تا تغییرات ضرایب مودال محاسبه شود. به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته، داده‌های حاصل با نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم مقایسه خواهند شد. در شکل ۱۱ تغییرات زمانی ۴ ضریب مودال اول، مربوط به چهار مود پرنرژی‌تر میدان، حاصل از مدل رتبه‌کاسته و حل عددی مستقیم، نمایش داده شده‌است. همانطور که در نتایج مشخص است دقت

فضای برداری مشتمل بر مودها به دست می‌آید. در شکل ۸ خطوط همتراز چهار مود پرنرژی‌تر نمایش داده شده‌است. جدول ۱، میزان انرژی چهار مود اول را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، سهم عمده‌ای از انرژی نسبی میدان، مربوط به دو مود اول با میزان ۹۲ درصد می‌باشد.

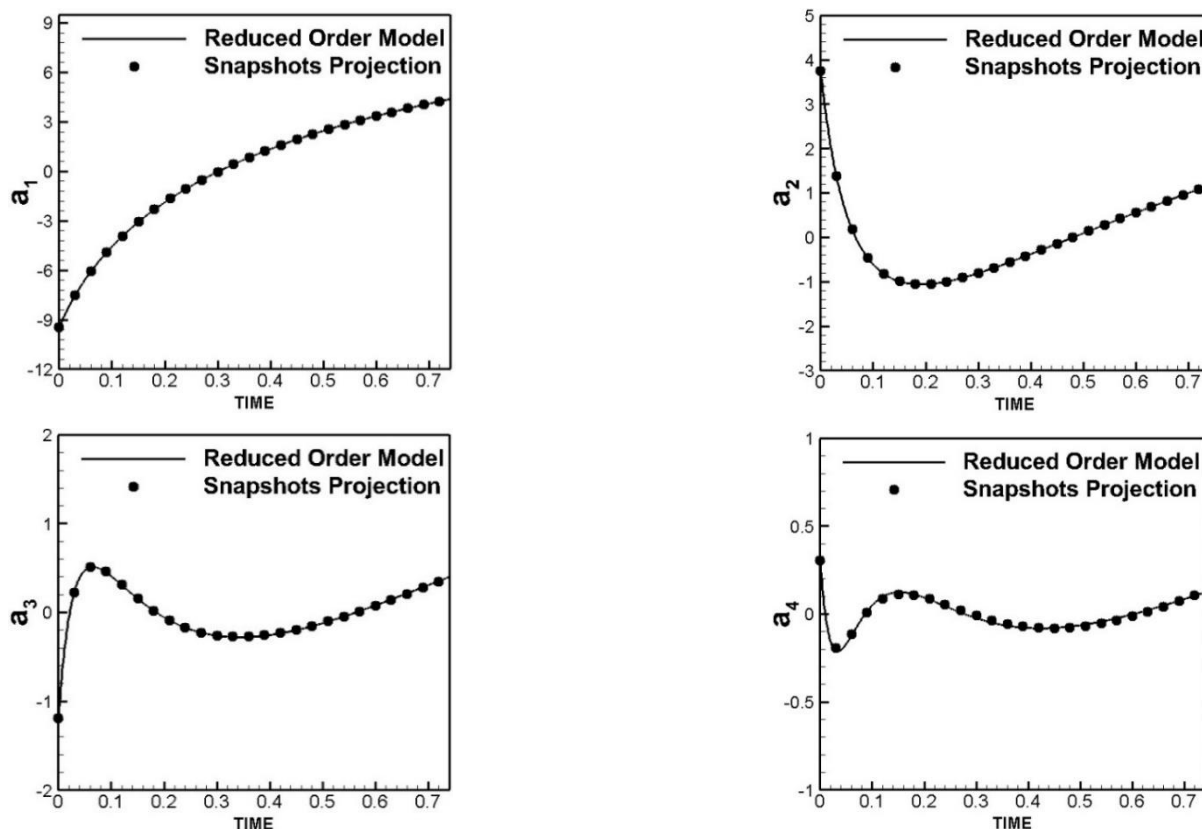
در شکل ۹ و ۱۰ به ترتیب توزیع مقادیر تکین و انرژی نسبی مودها بر حسب شماره مود برای ۳۰ نمایه اول، نمایش داده شده‌است. همانطور که در هر دو شکل مشاهده می‌شود سهم عمده‌ای از انرژی جنبشی موجود در مودها تا مود شماره ۴ استخراج می‌شود. با توجه به توزیع انرژی نسبی میدان، این موضوع به وضوح دیده شده که پس از مود شماره ۴ تغییرات انرژی نسبی میدان بسیار کم شده و به مقدار ثابتی کمتر از ۱ درصد انرژی کل همگرا می‌شود.



شکل ۱۰. انرژی نسبی مودهای میدان برای سی مود اول
Fig. 10. Relative Energy of Field Modes for the First Thirty Modes



شکل ۹. توزیع مقادیر تکین بر حسب شماره مود در مقیاس لگاریتمی
Fig. 9. Distribution of Singular Values versus Modes Number in Logarithmic Scale



شکل ۱۱. مقایسه بین تغییرات زمانی ضرایب مودال حاصل از حل معادله سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته با داده‌های حاصل از تصویرسازی نمایه‌ها
Fig. 11. Comparison Between Time history of Modal coefficients obtained from Reduced Order Dynamical System and Results of Snapshots Projection

نفوذ، ۰/۰۰۲، ۰/۰۰۴، ۰/۰۰۶، و ۰/۰۰۷ نمایش داده شده‌است. به منظور بررسی صحت نتایج، داده‌های حاصل با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم مقایسه شده‌اند.

۸-۲- مدل رتبه‌کاسته وابسته به زمان برای معادله برگرز لژ و یک‌بعدی

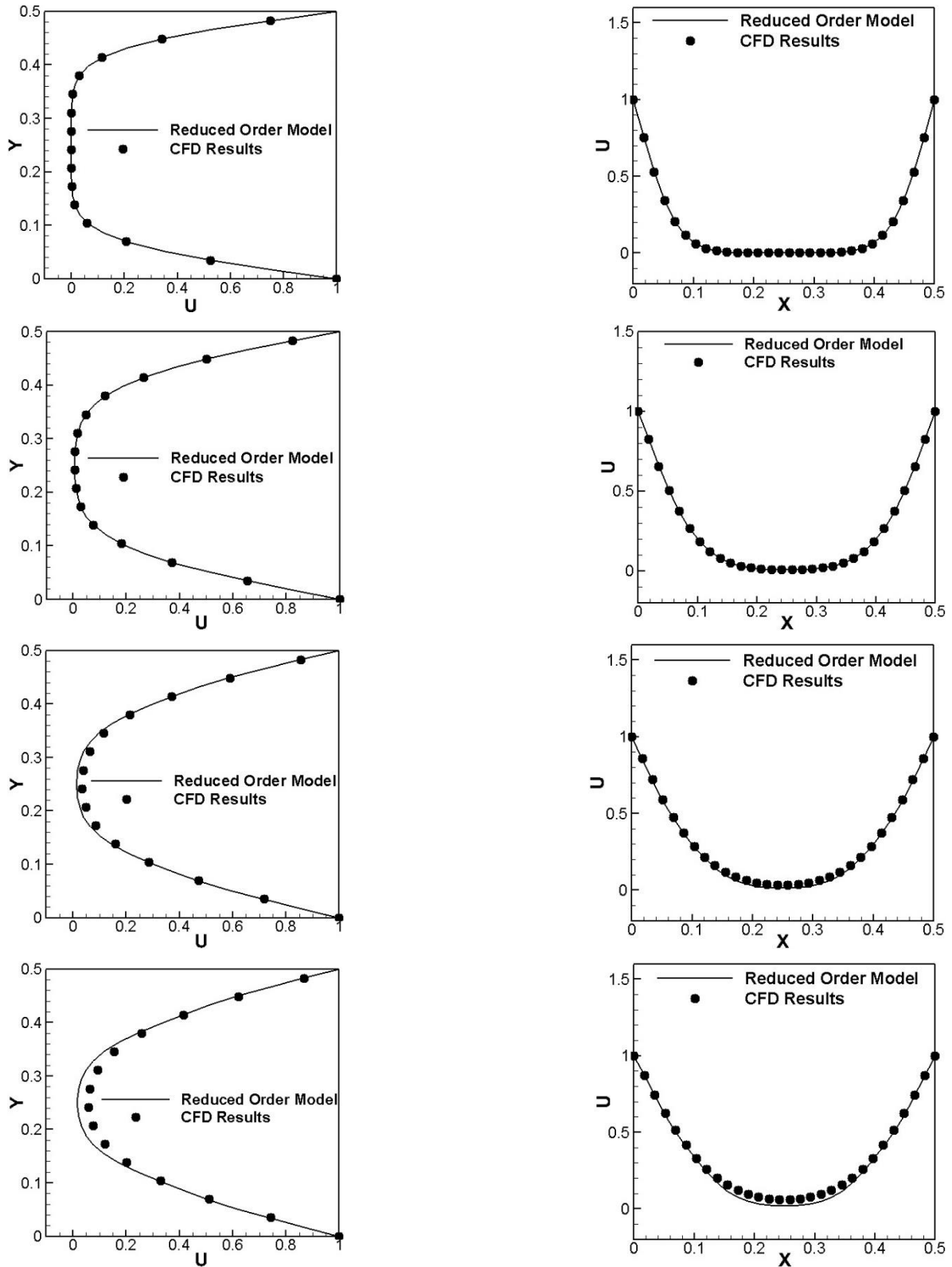
در این بخش، به دست‌آوردن مدلی که با دقت مناسب قادر به پیش‌بینی دینامیک میدان در بازه‌های زمانی مختلف باشد مدنظر خواهد بود. بدین منظور، با استفاده از دسته‌نمایه مقادیر اغتشاشی و با حل مسئله مقدار تکین، فضای برداری مشتمل بر مودها به دست می‌آید. در شکل ۱۳ توزیع ۴ مود پرانرژی‌تر نمایش داده شده‌است. جدول ۲، میزان انرژی چهار مود اول را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، سهم عمده‌ای از انرژی نسبی میدان، مربوط به دو مود اول با میزان ۹۳ درصد می‌باشد.

در شکل ۱۴ و ۱۵ به ترتیب توزیع مقادیر تکین و انرژی نسبی

داده‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته برای پیش‌بینی دینامیک میدان در مقایسه با نمونه حاصل از حل عددی مستقیم بسیار بالا بوده و به درستی تغییرات زمانی مسئله موردنظر را پیش‌بینی می‌کند.

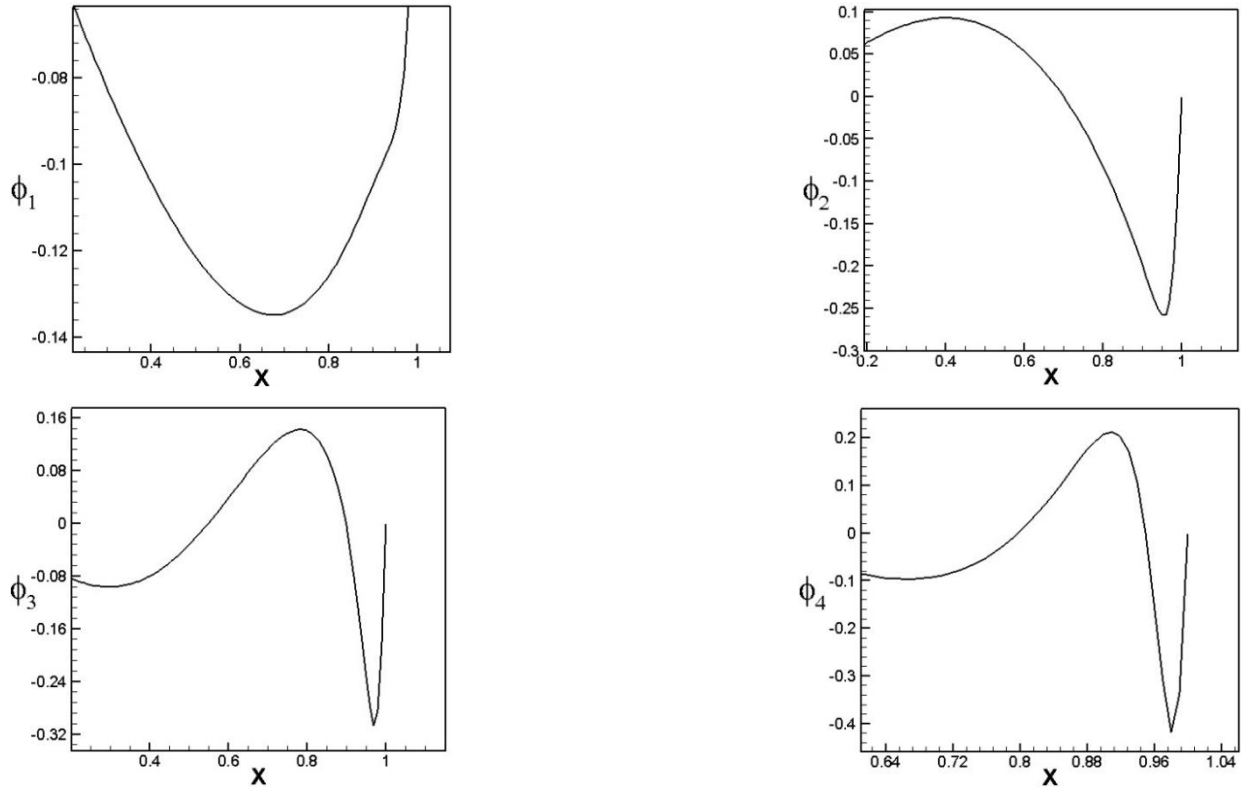
۸-۲-۱- انتگرال‌گیری از معادله سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته به ازای ضرایب نفوذ مختلف

در بخش قبل، با توجه به دقت بالای پیش‌بینی تغییرات زمانی نفوذ حرارتی (ضرایب مودال) در بازه زمانی کوتاه ۰/۷۵ واحد و به ازای ضریب نفوذ ۰/۰۴۴ توسط مدل رتبه‌کاسته ساخته شده، مدلی جایگزین به منظور پیش‌بینی دینامیک میدان به دست آمد. انتظار می‌رود به منظور توسعه مدلی پارامتری، مدل حاصل بتواند به عنوان الگویی جایگزین برای پیش‌بینی تغییرات میدان در بازه زمانی کوتاه ۰/۷۵ واحد و به ازای تغییر در مقادیر پارامترهای موثر از جمله ضریب نفوذ حرارتی به کار رود. در شکل ۱۲ توزیع درجه حرارت روی خط مرکزی تقارن افقی و عمودی در آخرین گام زمانی به ازای ضرایب



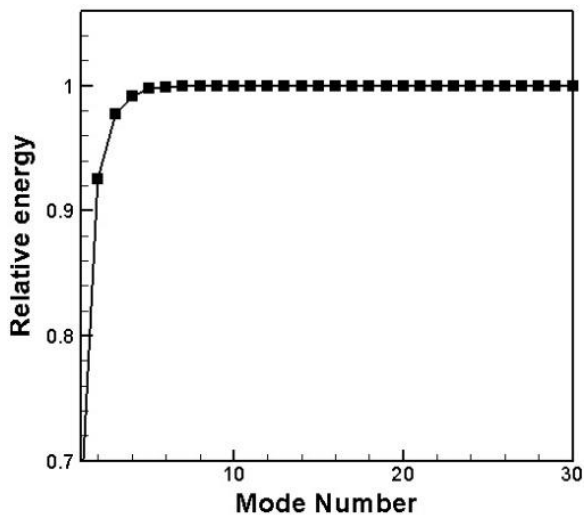
شکل ۱۲. مقایسه بین توزیع درجه حرارت برای آخرین گام زمانی در راستای خط تقارن افقی (ستون سمت چپ) و در راستای خط تقارن عمودی (ستون سمت راست) به ازای ضریب نفوذ ۰/۰۰۲ (ردیف یک)، ۰/۰۰۴ (ردیف دو)، ۰/۰۰۶ (ردیف سه)، ۰/۰۰۷ (ردیف چهار)

Fig. 12. Comparison between Temperature Distribution for the Last Time Step in Horizontal Center line (Left Column) and in Vertical Center line (Right Column) for Diffusion Coefficients of 0.002 (First Row), 0.004 (Second Row), 0.006 (Third Row), 0.007 (Fourth Row)



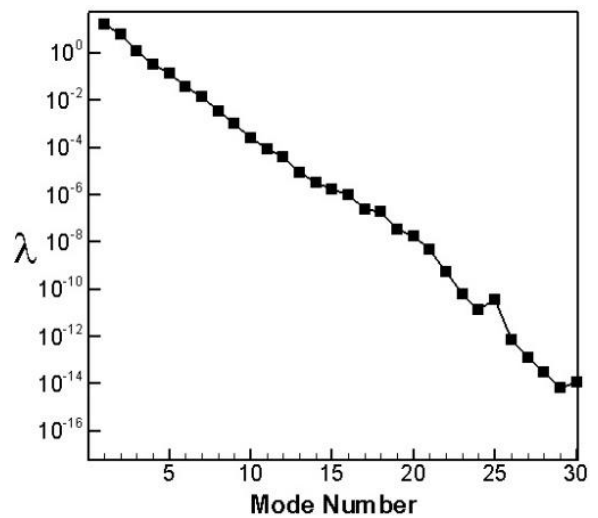
شکل ۱۳. توزیع چهار مود پرانرژی‌تر برای دسته نمایه‌های حاصل از حل معادله برگرز در عدد رینولدز ۱۰۰

Fig. 13. Distribution of Four Strongest Modes for Snapshots Ensemble obtained from the solution of Burgers Equation at $Re=100$



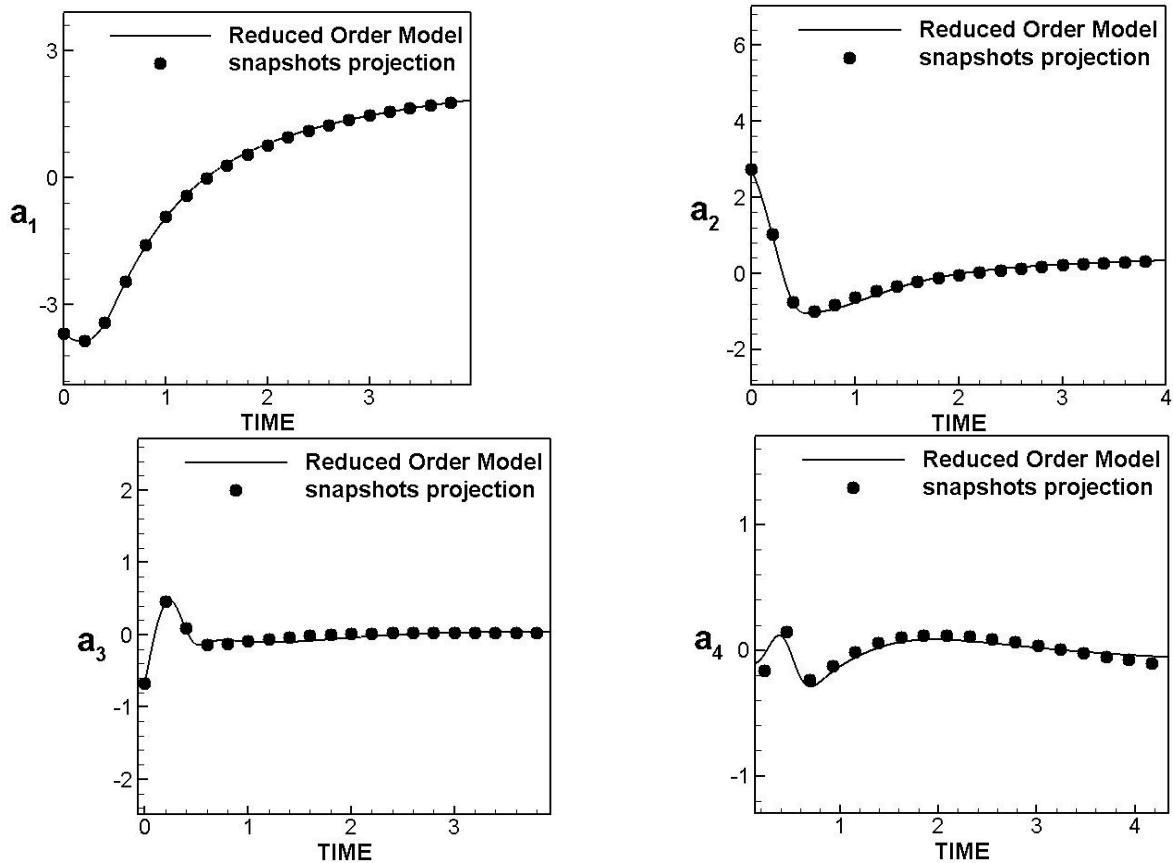
شکل ۱۵. انرژی نسبی مودهای میدان برای سی مود اول

Fig. 15. Relative Energy of Field Modes Modes for the First Thirty Modes



شکل ۱۴. توزیع مقادیر تکین برحسب شماره مود در مقیاس لگاریتمی

Fig. 14. Distribution of Singular Values versus Modes Number in Logarithmic Scale



شکل ۱۶. مقایسه تغییرات زمانی ضرایب مودال حاصل از حل معادله سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته با داده‌های حاصل از تصویرسازی نمایه‌ها

Fig. 16. Comparison Between Time history of Modal coefficients obtained from Reduced Order Dynamical System and Results of Snapshots Projection

جدول ۲. انرژی نسبی چهار مود پرنرژی‌تر برای دسته‌نمایه‌های حاصل از حل معادله برگرز

Table 2. Relative Energy of Four strongest Modes for Snapshots Ensemble obtained from Solution of Burgers Equation

شماره مود	۱	۲	۳	۴
انرژی نسبی	٪۶۸	٪۲۵	٪۵/۳	٪۱/۴

۸-۲-۱- انتگرال‌گیری از معادله سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته در بازه زمانی کوتاه

با مشخص‌شدن تعداد مودها برای بازسازی مدل رتبه‌کاسته، ضرایب ترم‌های غیرخطی، خطی و ثابت معادله ۲۷، در ۴ واحد زمانی همراه با گام زمانی ۰/۰۰۱ به ازای عدد رینولدز ۱۰۰ محاسبه می‌شوند. سپس با بهره‌گیری از روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم، مبتنی بر یک پیمایش زمانی، معادله ۲۷ برای ۴۰۰۰ گام زمانی حل شده تا تغییرات ضرایب مودال محاسبه شود. در شکل ۱۶ نتایج حاصل از

مودها بر حسب شماره مود برای ۳۰ نمایه اول، نمایش داده شده‌است. همانطور که در هر دو شکل مشاهده می‌شود سهم عمده‌ای از انرژی جنبشی میدان تا مود شماره ۴ استخراج می‌شود. با توجه به توزیع انرژی نسبی، این موضوع به وضوح دیده شده که پس از مود شماره ۴ تغییرات انرژی جنبشی میدان بسیار کم شده و به مقدار ثابتی کمتر از ۱ درصد انرژی کل همگرا می‌شود.

مدل رتبه کاسته با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم برای بازه زمانی کوتاه حاصل از پاسخ معادله برگزر به ازای عدد رینولدز ۱۰۰، مقایسه شده‌اند.

فهرست علائم

میدان	$U(x, t)$
بخش متوسط میدان	$\bar{U}(x, t)$
بخش اغتشاشی میدان	$U'(x, t)$
مودهای زمانی	$A(t)$
ضرایب مودال	$a(t)$
تعداد کل نمایه‌ها	N_{total}
تعداد نمایه‌های مورد استفاده در مدل رتبه کاسته	N_r
عدد رینولدز	Re
ضریب نفوذ حرارتی	α
مقدار تکین	S_i

علائم یونانی

توابع پایه	$\phi(x)$
------------	-----------

زیرنویس

شمارنده مکانی	i
شمارنده زمانی	k

مراجع

- [1] Chen, Y., Model order reduction for nonlinear systems, M. Sc. Thesis, Dept. of Elec. Eng. Comput. Sci., Massachusetts Institute of Technology, (1999).
- [2] Schilders, W. H., et al, Model order reduction: theory research aspects and applications, Springer, (2008)
- [3] Liang, Y., et al, Proper orthogonal decomposition and its applications—Part I: Theory, Journal of Sound and vibration, 252(3) (2002) 527-544.
- [4] Karhunen, K, Zur spektraltheorie stochastischer prozesse, Ann. Acad. Sci. Fennicae, AI 34 (1946)
- [5] Yaglom, A. and V. Tatarski, The structure of inhomogeneous turbulence Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation, Nauka, (1967) 166-178.
- [6] Sirovich, L. and M. Kirby, Low-dimensional procedure for the characterization of human faces, Josa a, 4(3) (1987) 519-524.

۸-۲-۲- انتگرال گیری از معادله سیستم دینامیکی در بازه زمانی بلند در بخش قبلی با توجه به دقت مدل توسعه یافته در پیش بینی تغییرات زمانی معادله برگزر در بازه زمانی کوتاه ۴ واحد و به ازای عدد رینولدز ۱۰۰، مدلی جایگزین به منظور پیش بینی دینامیک میدان به دست آمد. حال انتظار می رود به منظور توسعه مدلی وابسته به زمان، مدل حاصل بتواند به عنوان الگویی جایگزین برای پیش بینی تغییرات میدان در بازه های زمانی مختلف به ازای عدد رینولدز ۱۰۰ به کار رود. در شکل ۱۷ توزیع تابع معادله برگزر در آخرین گام زمانی به ازای ۵۰۰۰، ۶۰۰۰، ۷۰۰۰، ۸۰۰۰، ۹۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ گام زمانی نمایش داده شده است. به منظور بررسی صحت نتایج، داده های حاصل با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم مقایسه شده اند.

۹- نتیجه گیری

روش تجزیه متعامد بهینه به عنوان یک ابزار محاسباتی نسبتاً دقیق و پر سرعت، به کمک مدل های دینامیک سیالات عددی آمده تا با کاهش هزینه و زمان محاسبات، پیچیدگی های شبیه سازی های مربوطه را کاهش دهد. بدین منظور انتخاب دسته نمایه مورد نظر می تواند در کیفیت مدل رتبه کاسته و دقت نتایج به دست آمده تاثیر گذار باشد. در پژوهش هایی که به طور مستقل صورت گرفت، به توسعه مدل رتبه کاسته برای مسائل نفوذ حرارتی دو بعدی و نفوذ-جابجایی یک بعدی پرداخته شد. با به کارگیری روش تجزیه متعامد بهینه و انتقال معادلات حاکم بر مسئله به فضای برداری تشکیل شده از بردارهای پایه، مودهای پرانرژی تر از بین دسته نمایه اولیه به دست آمده و در نتیجه با توسعه مدلی رتبه کاسته، دینامیک میدان مورد نظر با تعداد ابعاد کمتر و با دقتی مناسب بازسازی شده است. نتایج حاصل از مدل رتبه کاسته به دست آمده با شبیه سازی های حاصل از حل عددی مقایسه شده که دقت بالا و توانایی های مناسب در این روش را نشان می دهد. در نتیجه می توان گفت با بهره گیری از این روش می توان الگوهای دقیق و سریع مبتنی بر مفاهیم اساسی روش های یادگیری ماشین را توسعه داد.

- spatial coherent structures in an open cavity flow, Physical review, E 72(6) (2005) 065301.
- [18] Rempfer, D. and H. F. Fasel, Evolution of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer, Journal of Fluid Mechanics, 260 (1994) 351-375.
- [19] Ravindran, S, Proper orthogonal decomposition in optimal control of fluids, Technical report NASA/TM-1999-209113, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, (1999).
- [20] Ostrowski, Z., et al, Advances in application of proper orthogonal decomposition in inverse problems, Proc. 5th Int. conf. on inverse problems in engineering: theory and practice, Cambridge, UK, (2005)
- [21] Shinde, V., et al, Galerkin-free model reduction for fluid-structure interaction using proper orthogonal decomposition, Journal of Computational Physics, 396 (2019) 579-595.
- [22] Blanc, T. J., et al, Reduced-Order Modeling of Conjugate Heat Transfer Processes, Journal of Heat Transfer, 138(5) (2016)
- [23] Fagiano, L. and R. Gati, On the order reduction of the radiative heat transfer model for the simulation of plasma arcs in switchgear devices, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 169 (2016) 58-78.
- [24] Carlberg, K., et al, Galerkin v. least-squares Petrov-Galerkin projection in nonlinear model reduction, Journal of Computational Physics 330 (2017) 693-734.
- [25] Choi, Y. and K. Carlberg, Space--Time Least-Squares Petrov--Galerkin Projection for Nonlinear Model Reduction, SIAM Journal on Scientific Computing, 41(1) (2019) A26-A58.
- [26] Esfahanian, V., et al, Simulation of lead-acid battery using model order reduction, Journal of Power Sources, (2015) 279: 294-305.
- [27] Tian, Z. F. and P. Yu, A high-order exponential scheme for solving 1D unsteady convection-diffusion equations, Journal of computational and applied mathematics, 235(8) (2011) 2477-2491.
- [7] Taeibi-Rahni, M., et al, Fast Estimation of Aerodynamics Data Using Proper Orthogonal Decomposition, The 10th Fluid Dynamics Conference, Yazd, Iran, (2006). (In Persian)
- [8] Bui-Thanh, T., et al, Aerodynamic data reconstruction and inverse design using proper orthogonal decomposition, AIAA journal, 42(8) (2004) 1505-1516.
- [9] Willcox, K, Unsteady flow sensing and estimation via the gappy proper orthogonal decomposition, Computers & fluids, 35(2) (2006) 208-226.
- [10] Sabetghadam, F., et al, Gappy Low-dimensional POD, A Powerful Tool of Data Reconstruction of the Unsteady Flow Fields, CFD Journal, 17(3) (2008) 156-164.
- [11] LeGresley, P. and J. Alonso, Investigation of non-linear projection for pod based reduced order models for aerodynamics, 39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, (2001)
- [12] Moayyedi, M., K., et al, Development of Inverse Aerodynamics Design Model Based on Proper Orthogonal Decomposition Method, the first Annual Conference on Aerodynamics and Hydrodynamics, Tehran, Iran, (2011) (In Persian)
- [13] Lieu, T. and C. Farhat, Adaptation of aeroelastic reduced-order models and application to an F-16 configuration, AIAA Journal, 45(6) (2007) 1244-1257.
- [14] Tabib, M. V. and J. B. Joshi, Analysis of dominant flow structures and their flow dynamics in chemical process equipment using snapshot proper orthogonal decomposition technique, Chemical Engineering Science, 63(14) (2008) 3695-3715.
- [15] Druault, P. and C. Chaillou, Use of proper orthogonal decomposition for reconstructing the 3D in-cylinder mean-flow field from PIV data, Comptes Rendus Mécanique, 335(1) (2007) 42-47.
- [16] Hilberg, D., et al, The application of classical POD and snapshot POD in a turbulent shear layer with periodic structures, Applied scientific research, 53(3-4) (1994) 283-290.
- [17] Pastur, L., et al, Determining the spectral signature of

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. K. Moayyedi, F. Sabaghzadeghan, Development of parametric and time dependent reduced order model for diffusion and convection-diffusion problems based on proper orthogonal decomposition method, Amirkabir J. Mech Eng., 53(7) (2021) 4241-4260.

DOI: [10.22060/mej.2020.16936.6483](https://doi.org/10.22060/mej.2020.16936.6483)

