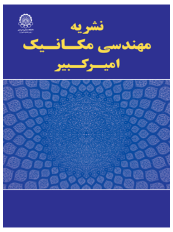



Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(7) (2021) 1005-1008
DOI: 10.22060/mej.2020.16936.6483


# Development of parametric and time dependent reduced order model for diffusion and convection-diffusion problems based on proper orthogonal decomposition method


M. K. Moayyedi*, F. Sabaghzadeghan

CFD, Turbulence and Combustion Research Lab., Department of Mechanical Engineering, University of Qom, Qom, Iran



**ABSTRACT:** Simulation and numerical analysis of physical phenomena, especially for unstable problems, due to dependency of the numerical algorithms on the computer hardware to the increasing of the number of computational nodes, is the most important feature of their solutions. For this reason, increases the number of computations then increased computational costs. The order reduction method has been widely used in recent years to reduce computational time. In this way, by reducing the constraints of the system, without changing the inherent features of the problem, the computational efficiency will dramatically increase. In this study, using the basic concepts of dynamical systems, two problems of thermal diffusion and convection-diffusion are investigated independently and by using the proper orthogonal analysis method, a reduced order model is established for the equations governing these phenomena created. Accordingly, for each of the problems, based on the projection of the governing equation in the vector space of modes, by using more energetic modes, a reduced order model is obtained with respect to the orthogonal basis properties. The model obtained in order to simulate the process time variations can properly replace the original equation and predict the behavior of the system with very good accuracy.



**Review History:**

Received: Aug. 25, 2019
Revised: Nov. 22, 2019
Accepted: Jan. 26, 2020
Available Online: Mar. 08, 2020

**Keywords:**

Proper orthogonal decomposition
Diffusion equation
Convection-diffusion equation
Reduced order model
Surrogate model


## 1 - INTRODUCTION

Proper Orthogonal Decomposition (POD) is one of the most common ways to reduce the order of the problem [1]. The POD method was first studied by Karhunen-Loeve in 1946 [2]. For the first time in 1967, Lamley suggested that POD could be used to extract large structures appearing in turbulent flows and emitting radio waves [3]. Subsequently, due to the limitations of computer hardware and numerical models, this method remained useless for a long time. In the late 1980s, with the advent of snapshots method by Sirovich, POD was introduced as an efficient tool for developing reduced order models for dynamical systems and fluid dynamics problems [4].

## 2 - POD– SNAPSHOTS METHOD

For using the POD-snapshots method, a sequence of fluctuations data will be arranged as a snapshots ensemble. Then by solving the eigenvalue problem for the snapshots matrix, proper orthogonal bases will be computed.

## 3-GALERKIN PROJECTION AND DYNAMICAL SYSTEM EQUATION

in order to develop the reduced order model, by using Galerkin projection of the governing equation, the dynamical system For each of the problems as thermal diffusion and convection-diffusion problems, these equations are as follows:

$$\frac{d\mathrm{a}^k(\mathrm{t})}{dt} = B_i^k \times \mathrm{a}^i(\mathrm{t}) + \mathrm{C}^k \tag{1}$$

$$\frac{da^k(t)}{dt} = A_{ij}^k \times a^i(t) \times a^j(t) + B_i^k \times a^i(t) + C^k \tag{2}$$

## 4–SELECTION OF THE NUMBER OF MODES TO RECONSTRUCT THE FIELD

The number of modes which are captured a high level of kinetic energy of flow field , is calculated by the following equation:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} S_i^{\,2}}{\sum_{i=1}^{N_{total}} S_i^{\,2}} \tag{3}$$

where, $S_i$ are the singular values of the snapshot matrix and $N_r$ is the required number of modes for reconstruction of reduced order model.


*Corresponding author's email: moayyedi@qom.ac.ir

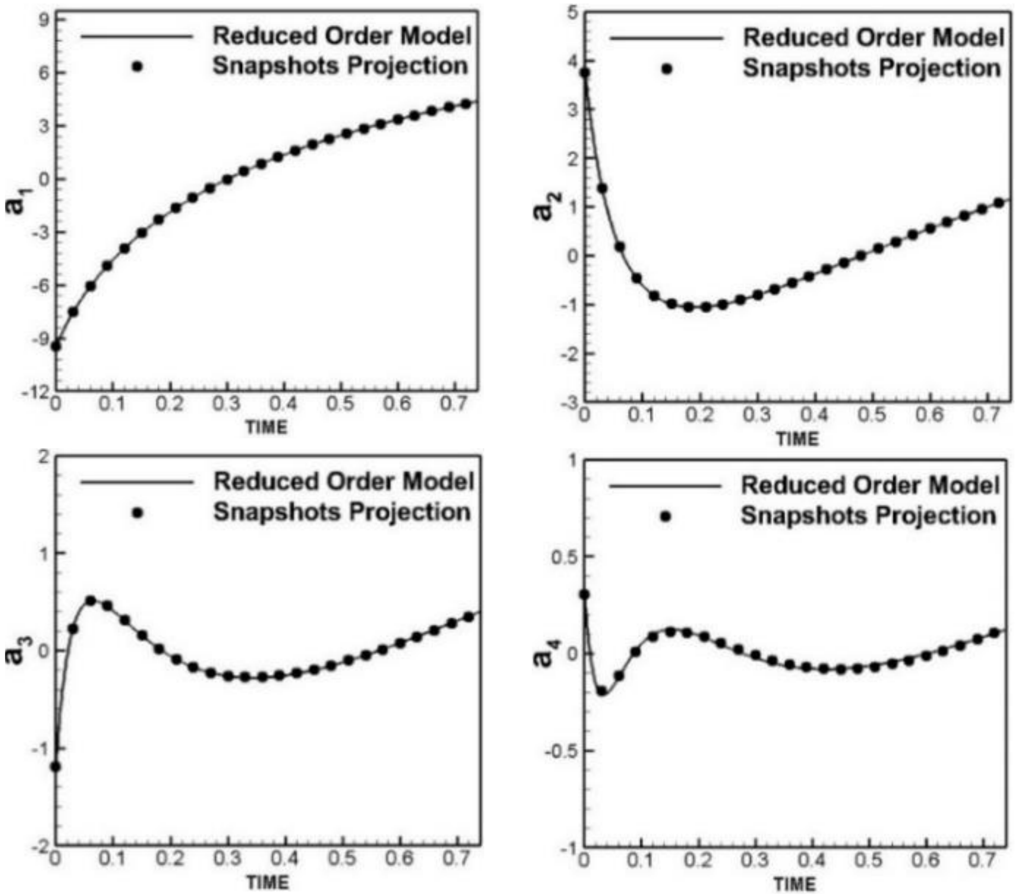



**Fig. 1. Comparison between time history of modal coefficients obtained from reduced order dynamical system and results of snapshots projection**

## 5 - RESULTS AND DISCUSSION

In the first problem, by solving the 2D transient diffusion equation for the diffusion coefficient of 0.0044 over a time interval of 0.75, a snapshots ensemble with 75 members is provided. Then, by solving the singular value problem for snapshot matrix, the vector space containing the modes is obtained. In this investigation, the major portion of the kinetic energy in modes (99.7% of total energy) has been extracted by 4 modes. Then, by using Runge-Kutta, Eq. (**1**) over time interval of 0.75 with the time step of 0.001 is solved to calculate the modal coefficients variations. In order to validate the results of the reduced order model, in Fig. 1, the outcomes will be compared with the results of the direct numerical simulation. Based on the high accuracy of prediction of modal coefficients in the short time interval of 0.75 for diffusion coefficient of 0.0044, a surrogate model to predict the field dynamics has been achieved. Using this parametric model, it is possible to obtain the field variation in the short time interval of 0.75 for different values of the thermal diffusion coefficients. In Fig. **2**, the temperature distribution over the vertical center line in the last time step and for the diffusion coefficients of 0.007 are shown.

In the second problem, by solving the burgers equation at time interval of 4 at *Re*=100, a snapshots ensemble with 80 members is considered. Then, by solving the singular value problem, the vector space containing the modes is obtained. In this study, the major portion of the kinetic energy in modes (99.3% of total energy) has been extracted by 4 modes. Then, Eq. (2**)** is solved with time step of 0.001 and for *Re*=100 to calculate the modal coefficient variations. In Fig. 3, outcomes compared with DNS.

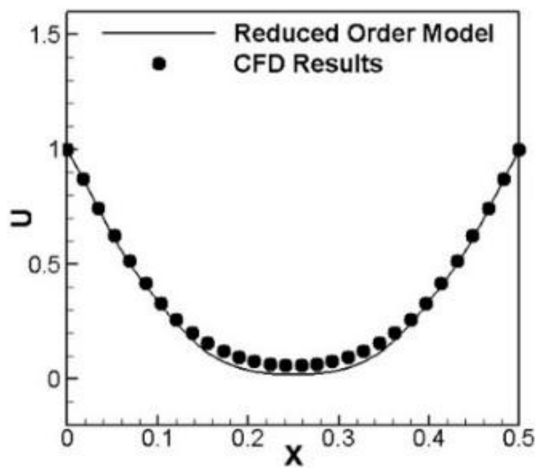



**Fig. 2. Comparison between temperature distribution for the last time step in vertical center line for diffusion coefficients of 0.007**

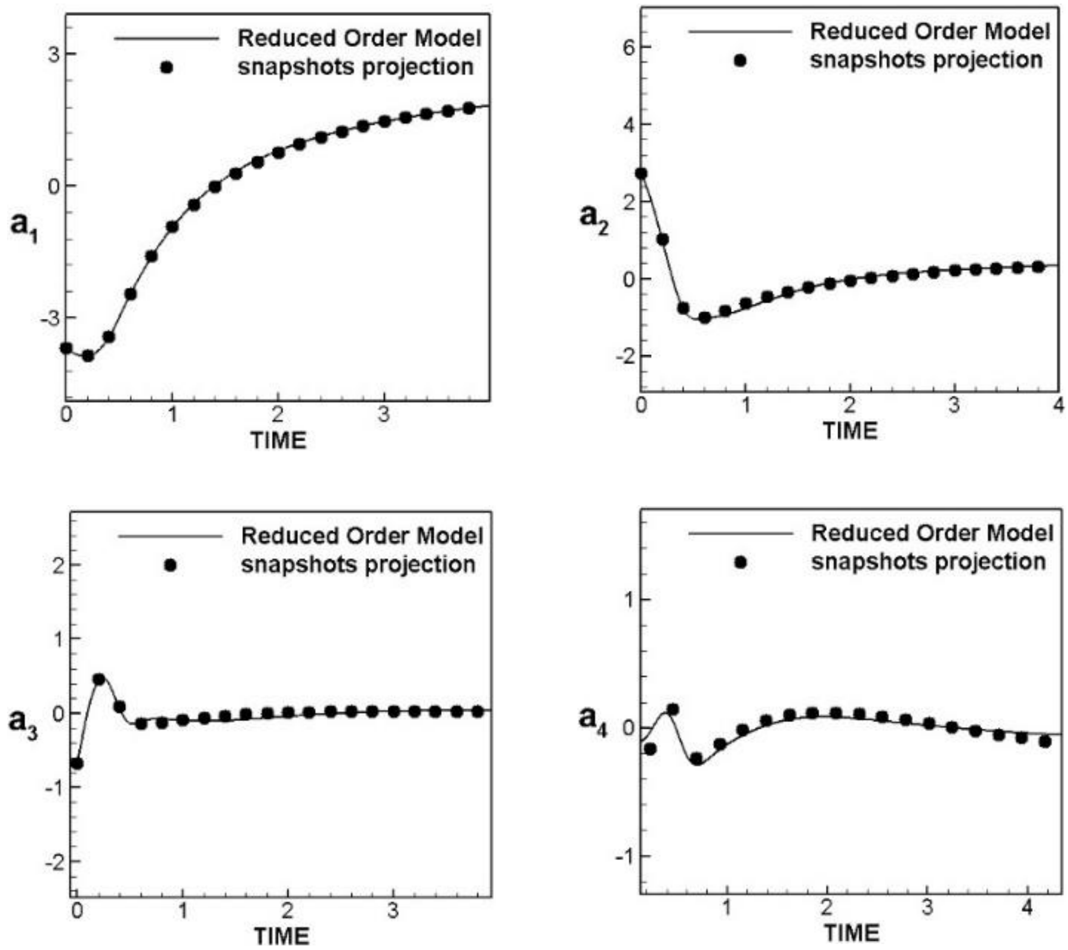



**Fig. 3. Comparison between time history of modal coefficients obtained from reduced order dynamical system and results of snapshots projection**

Due to the high accuracy of predicting the time variation of the Burgers equation (modal coefficients) in the short time interval of 4 units and for the *Re*=100, a surrogate model was obtained. Using this time-dependent model, the variations of the field at different time interval and *Re*=100 can be calculated. In Fig. 4, the distribution of the function of the Berger equation is shown in the last time step at 10,000 time steps.

## 6 - CONCLUSIONS

POD is a powerful tool for reducing the cost of computations. By using POD and transformation of the governing equations to the vector space consisting of basic vectors, a new form of the governing equation is created. Next, more energetic modes were obtained from the initial snapshots ensemble and thus by developing a reduced order model, the field dynamics with fewer dimensions have been carefully reconstructed. The results of the reduced order model are compared with the relative direct numerical simulation and show high accuracy and appropriate capabilities of this method. As a result, it is possible to develop accurate and fast models based on the basic concepts of machine learning methods.

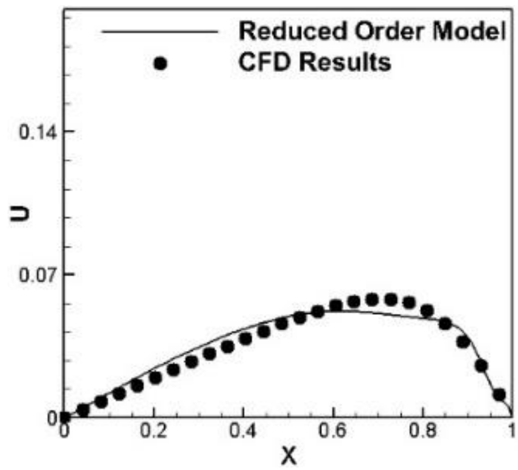



**Fig. 4. Comparison between response of Burgers equation in *x*-direction for the last time step for 10,000 time step**

## REFERENCES

[1] Liang, Y., et al, Proper orthogonal decomposition and its applications—Part I: Theory, Journal of Sound and vibration, 252(3) (2002) 527-544.

[2] Karhunen, K, Zur spektraltheorie stochastischer prozesse, Ann. Acad. Sci. Fennicae, AI 34, (1946)

[3] Yaglom, A. and V. Tatarski, The structure of inhomogeneous turbulence. Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation, Nauka, (1967) 166-178.

[4] Sirovich, L. and M. Kirby, Low-dimensional procedure for the characterization of human faces, Josa a, 4(3) (1987) 519-524.

**HOW TO CITE THIS ARTICLE**

*M. K. Moayyedi, F. Sabaghzadeghan, Development of parametric and time dependent reduced order model for diffusion and convection-diffusion problems based on proper orthogonal decomposition method, Amirkabir J. Mech Eng., 53(7) (2021) 1005-1008.*

**DOI:** 10.22060/mej.2020.16936.6483

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ۷، سال ۱۴۰۰، صفحات ۴۲۴۱ تا ۴۲۶۰
DOI: 10.22060/mej.2020.16936.6483

# توسعۀ مدل رتبه‌کاسته پارامتری و وابسته به زمان برای مسائل نفوذ و نفوذ-جابجایی بر مبنای روش تجزیه متعامد بهینه

محمدکاظم مؤیدی*، فرشاد صباغ‌زادگان

آزمایشگاه پژوهشی توربولانس، دینامیک سیالات محاسباتی و احتراق، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم، ایران

**خلاصه:** مدلسازی و شبیه‌سازی عددی به عنوان یک ابزار مناسب جهت تحلیل رفتار دینامیکی سیستم‌های مهندسی به‌شمارمی‌رود. استفاده از این روش‌ها، به ویژه برای مسائل ناپایا، معمولا نیازمند صرف زمان زیادی است. به همین دلیل، توسعه روش‌هایی با سرعت بالاتر و افزایش راندمان محاسباتی همواره به عنوان یک موضوع مهم مورد توجه پژوهشگران بوده‌است. روش کاهش مرتبه روشی است که در سالیان اخیر برای کاهش زمان محاسبات به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌است. در این روش، با کاستن از قیود سیستم، بدون تغییر در ویژگی‌های ذاتی مسئله، سرعت محاسبات به طرز چشم‌گیری افزایش می‌یابد. در این پژوهش، با بهره‌گیری از مفاهیم پایه‌ای سیستم‌های دینامیکی، دو مسئله نفوذ حرارتی و نفوذ-جابجایی به صورت مستقل مورد بررسی قرار گرفته و با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه، الگوی رتبه‌کاسته برای معادلات حاکم بر این پدیده‌ها ایجاد شده‌است. بر همین اساس، برای هر یک از مسائل، مبتنی بر تصویرسازی معادله حاکم در فضای برداری مودهای میدان، با استفاده از مودهای پرانرژی‌تر، مدل رتبه‌کاسته با توجه به ویژگی پایه‌های متعامد به دست می‌آید. مدل به‌دست‌آمده به منظور شبیه‌سازی تغییرات زمانی فرآیند، به درستی می‌تواند جایگزین معادلۀ اصلی شده و با دقت بسیار مناسبی رفتار سیستم موردنظر را پیش‌بینی کند.

**تاریخچه داوری:**
دریافت:۱۳۹۸/۰۶/۰۳
بازنگری: ۱۳۹۸/۰۹/۰۱
پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۶
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۱۲/۱۸

**کلمات کلیدی:**
تجزیه متعامد بهینه
معادله نفوذ
معادله نفوذ-جابجایی
مدل رتبه‌کاسته
مدل جایگزین

## ۱- مقدمه

به طور کلی پدیده‌های نفوذ و نفوذ-جابجایی از جمله بنیادی‌ترین مسائل مکانیک سیالات و انتقال حرارت می‌باشند. شبیه‌سازی و تحلیل عددی این پدیده‌ها، به دلیل وابستگی الگوهای عددی به سخت افزارهای کامپیوتری به منظور افزایش تعداد گره‌های محاسباتی، از مهمترین و قابل تأمل‌ترین ویژگی‌های آنها می‌باشد. این امر باعث افزایش تعداد محاسبات و در نتیجه افزایش هزینه‌های محاسباتی می‌گردد. در دهه‌های اخیر، به‌دست‌آوردن یک روش محاسباتی سریع و دقیق، همواره یکی از دغدغه‌های پژوهشگران در حوزه دینامیک سیالات محاسباتی بوده‌است. پیشرفت‌های اخیر در زمینه سخت‌افزارهای محاسباتی توانسته تا حدود زیادی زمان محاسبات را کاهش دهد. ولی، علاقه محققان به بررسی جزئیات بیشتر یک پدیده فیزیکی، باعث افزایش پیچیدگی‌های معادلات حاکم بر مسئله می‌گردد. لذا، لزوم دستیابی به یک الگوی سریع و دقیق که قادر به مدلسازی مسئله (با هر درجه از پیچیدگی) باشد، همچنان وجود دارد. این مشکلات باعث شده‌است تا در تحقیق حاضر برای کاهش هزینه‌های محاسباتی مسائل نفوذ و نفوذ-جابجایی از الگوهای رتبه‌کاسته استفاده گردد.

در اغلب مسائل کاهش مرتبه، در صورت انتقال معادلات حاکم به فضای برداری تشکیل‌شده از بردارهای پایه، می‌توان دینامیک حاکم بر مسئله را با تعداد ابعاد کمتر بازسازی نمود. با این شرط که ضمن کاستن از درجات آزادی و پیچیدگی‌های مسئله، ویژگی‌های فیزیکی مسئله حفظ شود. روش‌های متفاوتی برای به‌دست‌آوردن

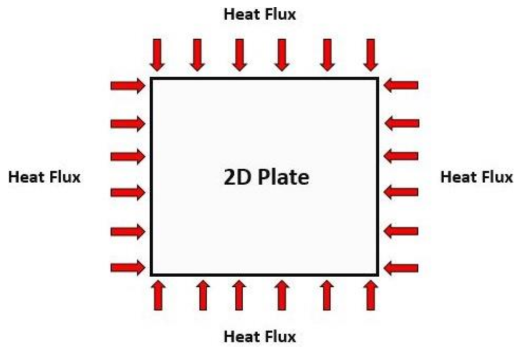
* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: moayyedi@qom.ac.ir

سیستم کاهش‌مرتبه‌یافته مورد استفاده قرار گرفته‌است. به عنوان مثال می‌توان به استفاده از تقریب بسط تیلور یا روش آرنولدی اشاره نمود [۲،۱]. روشی که بیشتر از سایر روش‌ها توسط پژوهشگران این حوزه برای بررسی رفتار سیالات مورد استفاده واقع شده‌است، روش «تجزیه متعامد بهینه»[1] است. این روش یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای کاهش مرتبه مسئله به شمار می‌رود [۳].

این روش که توانایی استخراج ساختارهای پرانرژی میدان را داشته و در نتیجه می‌تواند حجم محاسبات را با حفظ دقت و کیفیت آن کاهش دهد، می‌تواند به عنوان یک الگوی کارآ بسیار مناسب باشد. روش تجزیه متعامد بهینه کاربردهای گسترده‌ای شامل کنترل جریان سیال، بازسازی داده‌ها و ساختارها، توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته، آنالیز سیگنال[2]، پردازش تصاویر[3]، شناخت الگو[4] و بازسازی داده‌های استخراج‌شده از جریان جوی و اقیانوسی و ... دارد. در این روش، ابتدا یک مجموعه از بردارهای پایه برای استخراج ساختارهای پرانرژی سیستم دینامیکی محاسبه می‌شود. سپس، با انتقال معادلات حاکم به فضای برداری تشکیل‌شده از این بردارهای پایه، می‌توان دینامیک حاکم بر میدان را با ابعاد کمتری و با دقتی مناسب بازسازی نمود.

روش تجزیه متعامد بهینه ابتدا توسط کارهونن در سال ۱۹۴۶ و لووی در همان سال به صورت مستقل از هم مورد مطالعه قرار گرفته و به همین دلیل با نام بسط کارهونن-لووی نیز شناخته می‌شود [۴]. برای نخستین بار در سال ۱۹۶۷ میلادی لاملی پیشنهاد کرد که از تجزیه متعامد بهینه می‌توان برای استخراج ساختارهای بزرگ ظاهر شده در جریان‌های آشفته و انتشار امواج رادیویی استفاده نمود [۵]. پس از آن با توجه به محدودیت کامپیوترها و الگوهای عددی، این روش برای مدت‌ها بدون کاربرد باقی ماند. در اواخر دهه ۸۰ میلادی و با مطرح‌شدن روش نمایه‌ها[5] توسط سیرویش، تجزیه متعامد بهینه به عنوان ابزاری کارآمد برای توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته برای سیستم‌های دینامیکی و مسائل دینامیک سیالات مطرح گردید [۶]. طیبی و همکاران از این روش به منظور تحلیل میدان جریان تراکم‌پذیر و محاسبه ضرایب آیرودینامیکی استفاده کردند [۷]. استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه به منظور بازسازی ساختارهای ازدست‌رفته یا نمایه‌های مفقودشده با بهره‌گیری از مودهای پرانرژی میدان در پژوهش‌های دیگری توسط بویی‌تا انجام شد [۸]. ویلککس از این روش به منظور یافتن موقعیت سنسورهایی به منظور کنترل جریان سیال در پایین دست یک سیلندر بهره برد [۹]. ثابت قدم و همکاران به منظور بازسازی نمایه‌های ازدست‌رفته و نقاط مفقودشده میدان جریان ناپایا حول سیلندر مربعی شکل استفاده کردند [۱۰]. لیگرسلی و همکاران یک مدل رتبه‌کاسته بر مبنای روش تجزیه متعامد بهینه و به منظور طراحی ایرفویل استفاده کرده و با بهینه‌سازی آن را توسعه دادند. در این پژوهش یک مدل غیرخطی براساس توابع پایه خطی‌سازی‌شده محاسبه و با بهره‌گیری از کمینه‌سازی تابع هدف تعریف‌شده برای فشار سطحی ایرفویل، شکل هندسی بهینه ایرفویل محاسبه شد [۱۱]. مویدی و همکاران از روش تجزیه متعامد بهینه جهت تخمین سریع میدان جریان، محاسبهٔ ضرایب آیرودینامیکی و طراحی معکوس آیرودینامیکی در جریان تراکم‌پذیر غیرلزج در رژیم‌های جریان متفاوت استفاده کردند [۱۲]. لیو و همکاران در پژوهشی از روش تجزیه متعامد بهینه به منظور مدلسازی آئروالاستیکی هواپیما اف-۱۶ به منظور تخمین و بازسازی میدان جریان در شرایط مختلف پروازی بهره‌بردند و از داده‌های حاصل برای تحلیل آئروالاستیکی استفاده کردند [۱۳]. ماندر و همکاران با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها[6]، پژوهشی پیرامون ساختارهای غالب و دینامیک جریان در شش دستگاه صنعتی انجام دادند [۱۴]. فیلیپه و همکاران پس از اندازه‌گیری میدان سرعت درون یک سیلندر با استفاده از روش سرعت سنجی تصویر ذرات، با به‌کارگیری روش تجزیه متعامد بهینه میدان سرعت لحظه‌ای سه‌بعدی را بازسازی کردند [۱۵]. هیلبرگ و همکاران نیز با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها به بررسی لایه برشی اغتشاشی با ساختارهای تکرارشونده پرداختند [۱۶]. پاستور و همکاران با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها، اطلاعات مربوط به جریان درون یک کانال باز را در دو بعد مورد بررسی قرار دادند [۱۷]. رمپفر و همکارش با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها، ساختار یک لایه مرزی سه‌بعدی ایجادشده بر روی صفحه تخت را بر اساس مودهای مکانی و زمانی که حاوی تمام اطلاعات لایه مرزی می‌باشد، بازسازی کردند [۱۸]. راویندران از روش تجزیه متعامد بهینه برای کنترل بهینه سیستم‌های

1Proper Orthogonal Decomposition (POD)
2Signal Analysis
3Image Processing
4Pattern Recognition
5Snapshots Method
6POD-Snapshots




**شکل ۱. شماتیک صفحه مورد بررسی**
**Fig. 1. Schematic of Case Study**

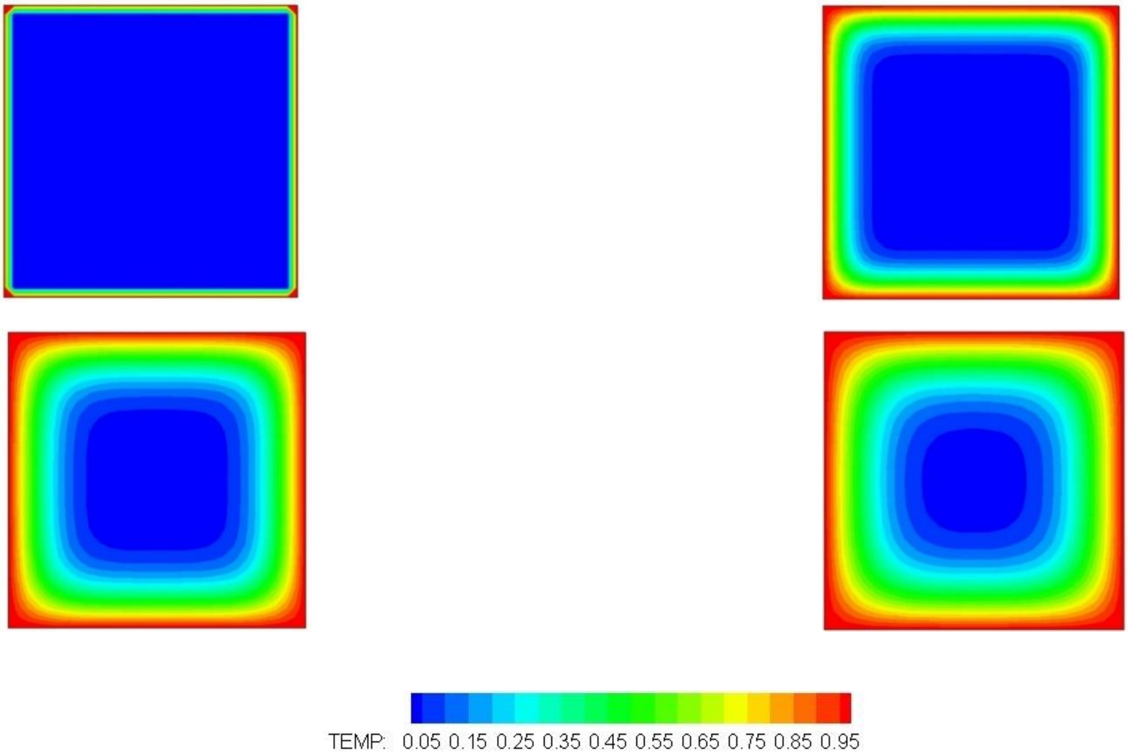
دینامیک سیالات استفاده نمود. وی با استفاده از این روش، کنترل جریان را در حالت غیردائم در سیستم‌های میکروالکترو-مکانیکی مطالعه کرد [۱۹]. اوستراوسکی و همکاران پیشرفت‌های جدیدی در کاربرد روش تجزیه متعامد بهینه برای تحلیل مسئله معکوس انتقال حرارت هدایت پایا را بررسی نمودند [۲۰]. ویلاس و همکاران با بررسی لرزش‌های ناشی از وجود گردابه درون یک سیلندر مستطیلی شکل، با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه موفق به توسعه مدل رتبه‌کاسته برای برهم‌کنش ساختارهای سیال به‌ازای عدد رینولدز ۱۰۰ شدند [۲۱]. بلانک و همکاران از تجزیه متعامد بهینه همراه با روش‌های درونیابی برای مدل‌سازی انتقال حرارت مزدوج استفاده نمودند [۲۲]. فاگیانو و گاتی از مدل رتبه‌کاسته برای شبیه‌سازی قوس پلاسما در دستگاه‌های توزیع‌کننده استفاده کردند [۲۳]. کالبرگ و همکاران روش جدیدی موسوم به حداقل مربعات پتروف-گالرکین را برای افزایش دقت روش تصویرسازی گالرکین، به‌منظور شبیه‌سازی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی همراه با پیچیدگی ارائه کردند [۲۴]. چوی و کالبرگ نیز با مطالعه بر روی روش حداقل مربعات پتروف-گالرکین، این روش را بیشتر توسعه دادند [۲۵]. انصاری و همکاران نیز با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه موفق به توسعه مدل رتبه‌کاسته‌ای با هدف شبیه‌سازی الکتروشیمیایی باتری سرب-اسید شدند. آن‌ها تغییرات غلظت اسید و ولتاژ باطری را در طی سه مرحله تخلیه، استراحت و شارژ به روش رتبه‌کاسته شبیه‌سازی کردند [۲۶].

در این پژوهش، از روش تجزیه متعامد بهینه جهت ایجاد الگوی رتبه‌کاسته برای مسائل نفوذ دو بعدی و مسئله نفوذ-جابجایی یک‌بعدی استفاده شده‌است. مسائل در حالت گذرا شبیه‌سازی شده‌اند. برای ایجاد ماتریس نمایه‌ها، هر دو مسئله با استفاده از روش تفاضل محدود در بازه‌های زمانی مشخصی حل شده‌اند. سپس، ساختارهای میدان تعیین شده و ساختارهای اصلی و حائز اهمیت درون میدان استخراج و از ساختارهای کم انرژی و فاقد اهمیت چشم‌پوشی می‌شود. با این کار، ضمن حفظ شاخصه‌ها و ویژگی‌های اصلی و ذاتی مسائل مورد بررسی، پیچیدگی آن‌ها کاهش می‌یابد. در نتیجه با استفاده از روش تصویرسازی گالرکین، معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌است. در نهایت، دستگاه معادلات کاهش مرتبه‌یافته با استفاده از روش رانگ-کوتای مرتبه چهار حل و تغییرات زمانی سیستم (ضرایب سیستم دینامیکی) به‌دست خواهدآمد. در نتیجه با استفاده از ترکیب خطی ساختارهای پرانرژی (مودهای غالب) سیستم، می‌توان میدان را بازسازی کرد. در کار حاضر، مدل رتبه‌کاسته مربوط به مسئله نفوذ حرارتی قادر به بازسازی میدان به‌ازای تغییر در ضریب نفوذ، و مدل مربوط به مسئله نفوذ-جابجایی توانایی بازسازی میدان در بازه‌های زمانی مختلف به‌ازای عدد رینولدز ۱۰۰ را دارا می‌باشد. روشن است استفاده از این مدل‌ها به منظور بازسازی میدان در هر یک از مسائل، موجب کاهش هزینه‌های محاسباتی از جمله کاهش حجم و زمان محاسبات می‌شود. نتایج به‌دست‌آمده نشان‌دهنده دقت و سرعت بالای الگوی رتبه‌کاسته در شبیه‌سازی مسئله نفوذ و مسئله نفوذ-جابجایی می‌باشد.

## ۲- حل عددی معادله نفوذ دو بعدی و ناپایا

در این پژوهش، توسعه مدلی رتبه‌کاسته به منظور حل معادله نفوذ حرارتی درون صفحه‌ای دوبعدی و مربعی‌شکل، مطابق شکل ۱، مورد بررسی قرار می‌گیرد:

برای این امر نیز ابتدا لازم است تا دنباله‌ای از داده‌هایی که




**شکل ۲. خطوط همتراز دما برای دسته نمایه‌های شماره ۱ (بالا چپ)، شماره ۲۰ (بالا راست)، شماره ۵۰ (پایین چپ) و شماره ۷۵ (پایین راست)**

**Fig. 2. Contours of Temperature Snapshots Ensemble, Members No. 1 (Left-Up), No. 20 (Right-Up), No. 50 (Left-Bottom), No. 75 (Right-Bottom**

به صورت شبیه‌سازی عددی مستقیم جمع‌آوری شده‌اند، به صورت مجموعه‌ای از نمایه‌ها یا همان میدان‌های لحظه‌ای مرتب گردند. بدین منظور در شبیه‌سازی‌های ارائه‌شده و برای ایجاد دسته نمایه‌ها، از کد حل عددی معادله نفوذ حرارتی دو بعدی و ناپایا مطابق با معادله ۱ استفاده شده‌است. از آنجایی که معادله نفوذ ذاتاً یک معادله بیضوی است، در حل مستقیم عددی از تفاضل محدود مرکزی با دقت مرتبه دوم برای ترم‌های مکانی و روش رانگ-کوتا با دقت مرتبه چهارم برای عبارت مشتق زمانی بهره گرفته شده‌است. شکل گسسته‌سازی‌شده این معادله به صورت زیر است:

$$\frac{u^{n+1}{}_i - u^n{}_i}{dt} = \alpha \left( \begin{array}{l} \dfrac{u^n{}_{i+1} - 2u^n{}_i + u^n{}_{i-1}}{dx^2} \\ + \dfrac{u^n{}_{j+1} - 2u^n{}_j + u^n{}_{j-1}}{dy^2} \end{array} \right) \quad (۱)$$

همچنین برای تحلیل عددی این مسئله از شرط اولیه:

$$u(x,y,0) = 0, \quad (۲)$$

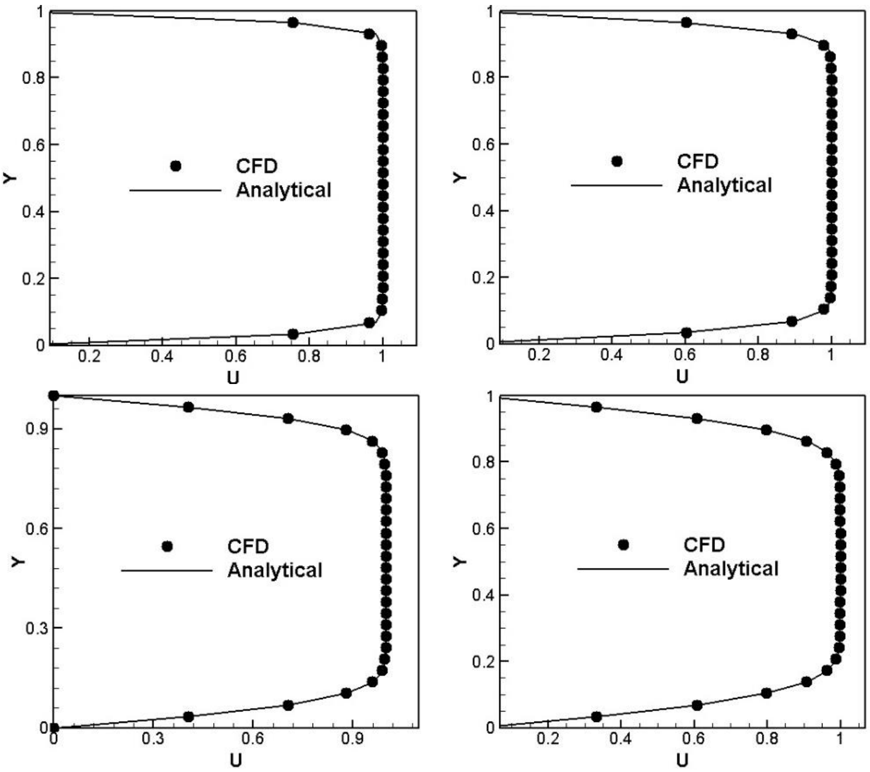
و شرایط مرزی:

$$u(0,y,t) = u(1,y,t) = u(x,0,t) = u(x,1,t) = 1 \quad (۳)$$

استفاده شده‌است. ضریب نفوذ ۰/۰۰۴۴ بوده و مسئله در بازه زمانی ۰/۷۵ واحد مورد بررسی قرار گرفته‌است. با حل معادلۀ حاکم، یک دسته با ۷۵ عضو (از حل میدان) در یک بازه زمانی خاص و با گام‌های زمانی مساوی و متوالی در نظر گرفته خواهدشد. درشکل ۲، به ترتیب خطوط همتراز دمای درون صفحه مورد بررسی برای نمایه‌های ۱، ۲۰، ۵۰ و ۷۵ نمایش داده‌شده‌است:

## ۲-۱- صحت‌سنجی نتایج حاصل از حل عددی معادله نفوذ حرارتی دو بعدی و ناپایا

به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل از حل عددی معادله نفوذ




**شکل ۳. مقایسه بین توزیع درجه حرارت برای شبیه‌سازی عددی مستقیم و حل تحلیلی در راستای خط تقارن افقی برای دسته‌نمایه شماره ۱۰ (بالا چپ)، شماره ۲۰ (بالا راست)، شماره ۵۰ (پائین چپ) و شماره ۷۵ (پائین راست)**

**Fig. 3. Comparison between Temperature Distribution for Direct Numerical Simulation and Analytical Solution in Horizontal Center line for Snapshots Ensemble Members No. 10 (Left-Up), No. 20 (Right-Up), No. 50 (Left-Bottom), (No. 75 (Right-Bottom**

حرارتی دو بعدی و ناپایا، به مقایسه این نتایج با پاسخ تحلیلی معادله پرداخته شده‌است. برای محاسبه پاسخ تحلیلی این معادله از نرم‌افزار میپل استفاده می‌شود. به منظور وجود پاسخ تحلیلی و سهولت در استخراج آن توسط این نرم‌افزار، از شرط اولیه:

$$u(x,y,0)=1, \tag{۴}$$

و شرایط مرزی همگن:

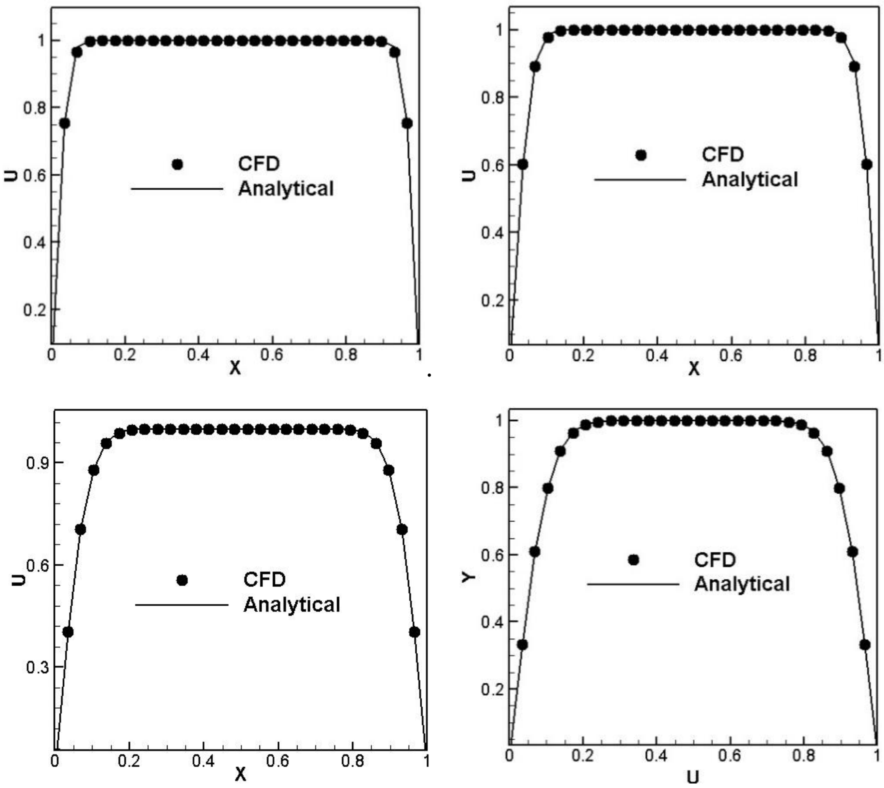
$$u(0,y,t)=u(1,y,t)=u(x,0,t)=u(x,1,t)=0 \tag{۵}$$

استفاده شده‌است. ضریب نفوذ نیز ۰/۰۰۴۴ در نظر گرفته می‌شود. در اینصورت پاسخ تحلیلی معادله نفوذ حرارتی دو بعدی و ناپایا به‌دست‌آمده توسط نرم‌افزار میپل به صورت زیر می‌باشد:

$$u(\vec{x},t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-(-1)^{n+m}+(-1)^{m}+(-1)^{n}-1\right)\left(-4\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)e^{\frac{-11\ t\pi^{2}(n^{2}+m^{2})}{2500}}\right)}{\pi^{2}nm} \tag{۶}$$

سپس با حل عددی معادله ۶ به‌ازای بازه ۰/۷۵ واحد زمانی، به مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با نتایج حاصل از عددی حل معادله نفوذ پرداخته‌خواهدشد. بدین‌منظور در شکل ۳ و ۴ به‌ترتیب مقایسه توزیع درجه حرارت بر روی خط مرکزی تقارن افقی و عمودی برای نمایه‌های ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۷۵ حاصل از حل عددی معادله نفوذ حرارتی و حل عددی معادله ۶ به‌دست‌آمده از حل تحلیلی نمایش داده‌شده‌است:

همانطور که از نتایج نشان داده‌شده در شکل‌های ۳ و ۴ مشخص است، حل عددی معادله نفوذ دوبعدی و ناپایا کاملا منطبق بر نتایج حاصل از حل عددی معادله ۶ بوده و این امر نشان‌دهنده دقت بالای حل عددی معادله نفوذ حرارتی دوبعدی و دسته‌نمایه‌های ورودی




**شکل ۴. مقایسه بین توزیع درجه حرارت برای شبیه‌سازی عددی مستقیم و حل تحلیلی در راستای خط تقارن عمودی برای دسته نمایه شماره ۱۰ (بالا چپ)، شماره ۲۰ (بالا راست)، شماره ۵۰ (پائین چپ) و شماره ۷۵ (پائین راست)**

**Fig. 4. Comparison between Temperature Distribution for Direct Numerical Simulation and Analytical Solution in Horizontal Central line for Snapshots Ensemble, Members No. 10 (Left-Up), No. 20 (Right-Up), No. 50 (Left-Bottom), (No. 75 (Right-Bottom**

مدل رتبه‌کاسته تولیدشده از این معادله می‌باشد.

## ۳- حل عددی معادله برگرز لزج و یک بعدی

دیگر مسئله موردنظر در این پژوهش، توسعه مدلی رتبه‌کاسته به منظور حل معادله برگرز یا نفوذ-جابجایی در یک بعد (در راستای طول حجم کنترل) می‌باشد. برای این امر نیز ابتدا لازم است تا دنباله‌ای از داده‌هایی که به صورت شبیه‌سازی عددی مستقیم جمع‌آوری شده‌اند، به صورت مجموعه‌ای از نمایه‌ها یا همان میدان‌های لحظه‌ای مرتب گردند. در شبیه‌سازی‌های ارائه‌شده و برای ایجاد دسته‌نمایه‌ها، از کد حل عددی معادله برگرز یک بعدی لزج و ناپایا مطابق با معادله ۷ استفاده شده‌است. در حل عددی مستقیم برای جمله غیرخطی جابجایی از روش بالادست با دقت مرتبه دو و برای جمله خطی نفوذ از روش تفاضل مرکزی با دقت مرتبه دو و از روش رانگ-کوتا با دقت مرتبه چهارم برای عبارت مشتق زمانی بهره گرفته‌شده‌است. شکل

گسسته‌سازی‌شده این معادله به صورت زیر است:

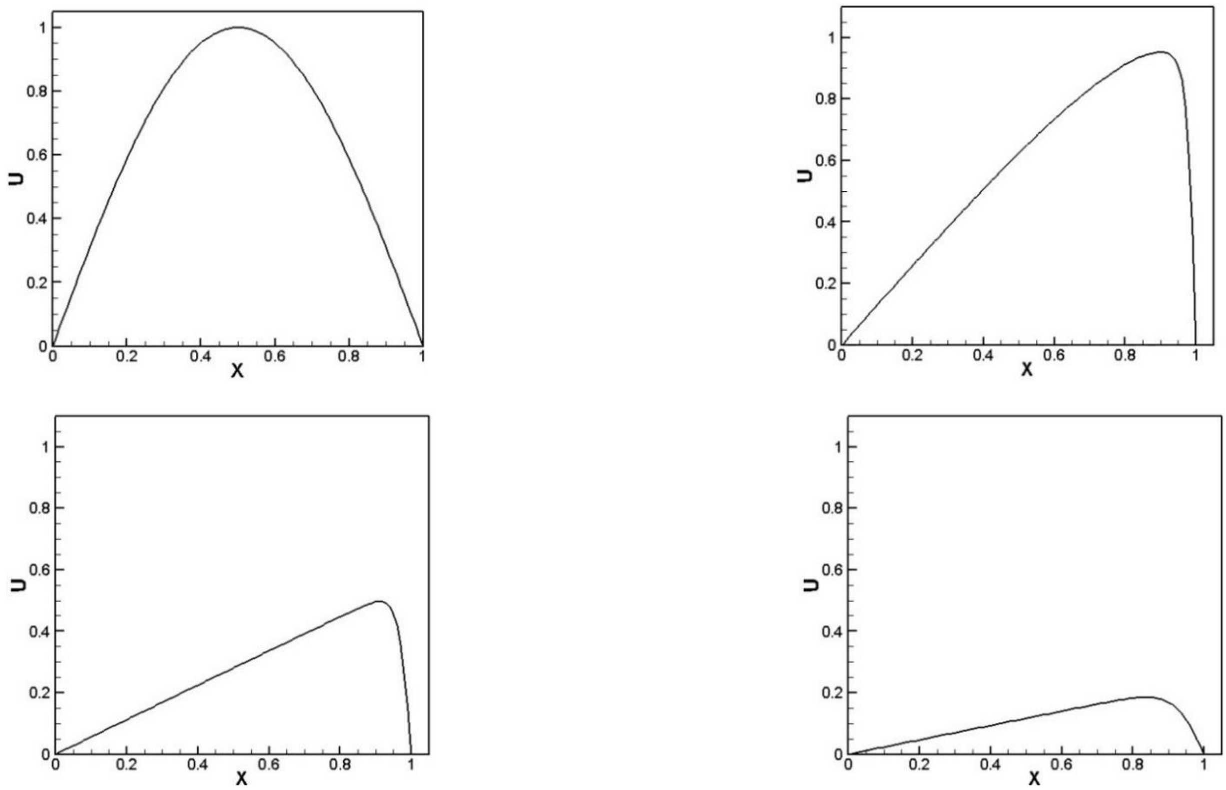
$$\frac{u^{n+1}{}_i - u^{n}{}_i}{\Delta t} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - (A_p U_n + A_n U_p) \qquad (۷)$$

$$A_p = \max(u_i, 0) \;\;,\;\; A_n = \min(u_i, 0) \qquad (۸)$$

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2\Delta x} \;, \\ U_n &= \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x} \end{aligned} \qquad (۹)$$

همچنین برای تحلیل عددی این مسئله از شرط اولیه:

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \qquad (۱۰)$$




**شکل ۵. پاسخ معادلۀ نفوذ-جابجایی (برگرز) برای شرایط اولیه مشابه با یک موج سینوسی در عدد رینولدز ۱۰۰ برای دسته نمایه‌های شماره ۱ (بالا چپ)، شماره ۱۰ (بالا راست)، شماره ۳۰ (پایین چپ) و شماره ۸۰ (پایین راست)**

**Fig. 5. Response of Convection-Diffusion (Burgers) Equation for Initial Condition Similar to a Sine Wave at Re=100 for (Snapshots Ensemble, Membrs No. 1 (Left-Up), No. 10 (Right-Up), No. 30 (Left-Bottom), No. 80 (Right-Bottom**

و شرایط مرزی:

$$u(0,t) = u(x,t) = 0 \tag{۱۱}$$

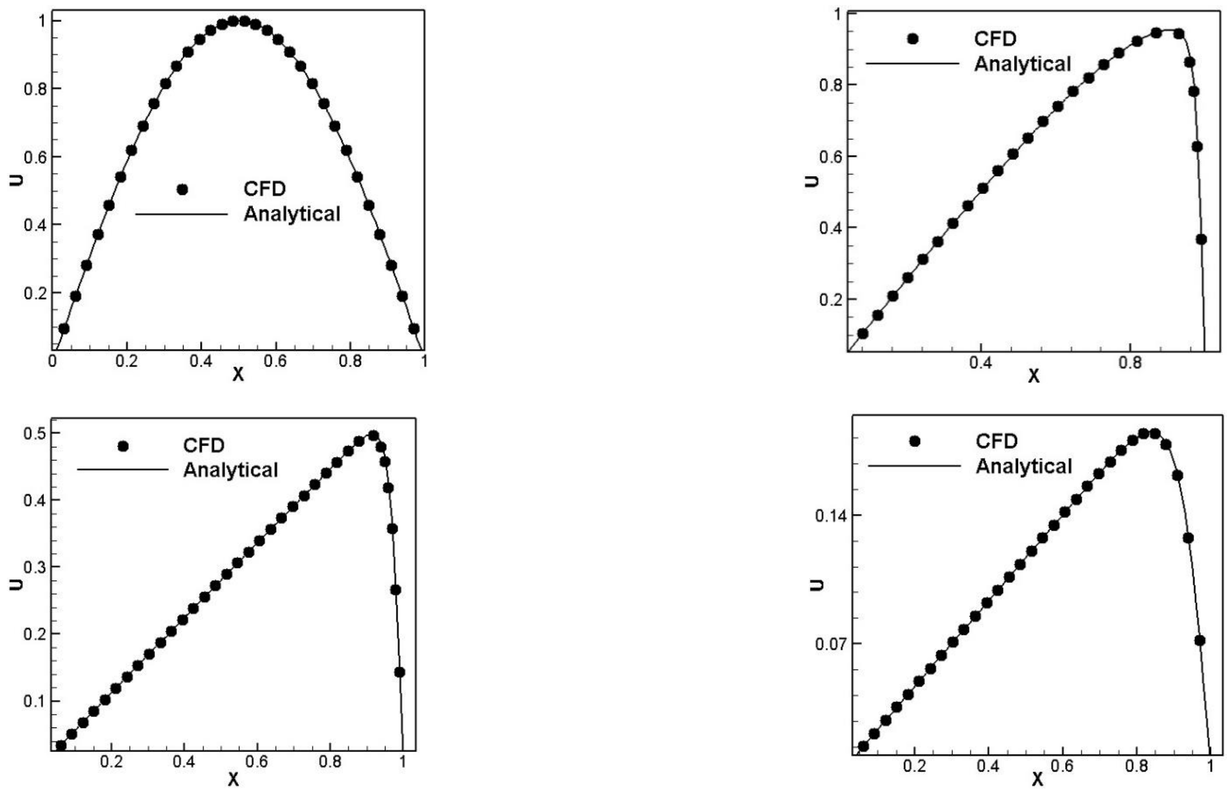
استفاده شده‌است. عدد رینولدز ۱۰۰ درنظرگرفته‌شده و مسئله در یک بازه زمانی معادل ۴ واحد مورد بررسی قرارگرفته‌است. با حل معادلۀ حاکم، یک دسته با ۸۰ عضو (از حل میدان) در یک بازه زمانی خاص و با گام‌های زمانی مساوی و متوالی درنظر گرفته‌خواهدشد. درشکل ۵، به ترتیب نمودار پاسخ سیستم برای شرایط اولیه مشابه با یک موج سینوسی برای نمایه‌های ۱، ۱۰، ۳۰ و ۸۰ نمایش داده‌شده‌است.

## ۳-۱- صحت‌سنجی نتایج حاصل از حل عددی معادله برگرز لزج و یک‌بعدی

در این بخش نیز به منظور صحت‌سنجی نتایج به‌دست‌آمده از حل عددی معادله برگرز لزج و یک‌بعدی، به مقایسه این نتایج با نتایج حاصل از حل تحلیلی پرداخته خواهد شد. بدین منظور از معادله حاصل از حل تحلیلی معادله برگرز نمایش‌داده‌شده در مرجع [۲۷] استفاده شده‌است:

$$u(x,t) = \frac{4\pi}{\mathrm{Re}} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{\mathrm{Re}}\right) I_n\left(\frac{Re}{2\pi}\right) n \,\mathrm{Sin}(n\pi x)}{I_0\left(\frac{\mathrm{Re}}{2\pi}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{\mathrm{Re}}\right) I_n\left(\frac{Re}{2\pi}\right) \mathrm{Cos}(n\pi x)} \tag{۱۲}$$

همچنین در این پژوهش برای حل تحلیلی معادله برگرز از شرط اولیه:




**شکل ۶. مقایسه نتایج حاصل از حل عددی و حل تحلیلی معادله برگرز برای شرایط اولیه مشابه با یک موج سینوسی در عدد رینولدز ۱۰۰ برای دسته نمایه‌های شماره ۱ (بالا چپ)، شماره ۱۰ (بالا راست)، شماره ۳۰ (پایین چپ) و شماره ۸۰ (پایین راست)**

**Fig. 6. Comparison between the Results of Numerical Solution and Analytical Solution Burgers Equation for Initial Condition Similar to a Sine Wave at Re=100 for Snapshots Ensemble, Membres No. 1 (Left-Up), No. 10 (Right-Up), No. (30 (Left-Bottom), No. 80 (Right-Bottom)**

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \tag{۱۳}$$

و شرایط مرزی:

$$u(0,t) = u(x,t) = 0 \tag{۱۴}$$

استفاده شده‌است. حال با حل عددی معادله ۱۲ در بازه ۴ واحد زمانی و به‌ازای عدد رینولدز ۱۰۰، نتایج حاصل با نتایج به‌دست‌آمده از حل عددی معادله برگرز برای نمایه‌های ۱، ۱۰، ۳۰ و ۸۰ در شکل ۶ مقایسه شده‌است.

همانطور که از نتایج نشان‌داده‌شده در شکل ۶ مشخص است، حل عددی معادله برگرز لزج و یک بعدی کاملا منطبق بر نتایج حاصل از حل عددی معادله ۱۲ بوده و این امر نشان‌دهنده دقت بالای حل عددی معادله برگرز لزج و دسته نمایه‌های ورودی مدل رتبه‌کاسته تولیدشده از این معادله می‌باشد.

## ۴- روش تجزیه متعامد بهینه

روش تجزیه متعامد بهینه در واقع راه حلی برای استخراج ویژگی‌هایی از سیستم دینامیکی خطی و غیرخطی بوده که علاوه بر دارابودن خاصیت تعامد، از لحاظ سطح انرژی نیز بهینه می‌باشند. مهم‌ترین خاصیت این روش این است که تنها با تعداد معدودی از پایه‌ها می‌توان بخش مهمی (معمولا بیش از ۹۹ درصد) از انرژی جنبشی میدان را استخراج کرد. همانطور که اشاره شد، ایده اصلی در روش تجزیه متعامد بهینه، یافتن پایه‌های متعامد بوده به طوری که بتوان هر بردار در فضای مورد بررسی را به صورت ترکیب خطی از این پایه‌ها نوشت. اگر $U$ یک بردار دلخواه در فضای $\mathbb{R}^m$ باشد و مجموعه $\{\phi_i\}_{i=1}^{m}$ پایه‌های متعامد برای این فضا باشند، در این صورت، می‌توان بردار $U$ را بر حسب ترکیب خطی از آن‌ها به صورت زیر بیان کرد:

$$U = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i = \Phi A \tag{۱۵}$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} a_1, a_2, \\ \cdots, a_N \end{bmatrix}^T \quad ; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_1, \phi_2, \cdots \\ , \phi_N \end{bmatrix}$$

و بالانویس $T$ به معنای ترانهاده ماتریس است. بر این اساس روش تجزیه متعامد بهینه، این قابلیت را به وجود می‌آورد که با یافتن پایه‌های پرانرژی‌تر، بتوان با بهره‌گیری از $l$ پایه اول ( $l \ll N$ ) بردار پاسخ سیستم را با دقت بالایی تقریب زد:

$$\begin{aligned} &\min_{\phi_i} \varepsilon^2\left(l\right) = E\left\{\left(X - X\left(l\right)\right)^2\right\} \\ &\phi_i^T \phi_j = \delta_{i,j} \qquad \mathrm{i,\ j} = 1,2,\ldots\ldots\ldots,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{۱۶}$$

که $\boldsymbol{E}\{.\}$ بیانگر میانگین موزون است.

## ۵- روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها

در اواخر دهه ۸۰ میلادی، سیرویش روش نمایه را به عنوان یک راه موثر برای استفاده گسترده‌تری از روش تجزیه متعامد بهینه معرفی کرد. مهم‌ترین دستاورد روش نمایه توسعه روش تجزیه متعامد بهینه در میان روش‌هایی است که به صورت مستقیم از داده‌های تولیدشده در الگوهای تجربی و یا عددی استفاده می‌کنند. به منظور استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها، دنباله‌ای از داده‌هایی که به صورت آزمایشگاهی یا از شبیه‌سازی عددی مستقیم جمع‌آوری شده‌اند، به صورت مجموعه‌ای از نمایه‌ها یا همان میدان‌های لحظه‌ای[1] مرتب خواهند شد:

$$U_i(\vec{x}) = U\ (\vec{x}, t^i) \qquad ; \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,N \tag{۱۷}$$

1Instantaneous Fields

در صورتیکه حرکت ذرات سیال در میدان جریان بصورت آشفته باشد، جریان دارای رفتارهای نامنظم و بی‌قاعده است. در اینصورت حرکات توده‌های سیال شدیداً وابسته به زمان و مکان می‌باشد. وسعت این بی‌نظمی چنان زیاد است که مانع از بررسی کامل (لحظه‌ای) حرکت همه ذرات سیال و تعیین مقادیر صریح متغیرهای جریانی (سرعت، دما، فشار، چگالی، غلظت جرمی) در میدان می‌شود. با اینکه جزئیات آشفتگی را نمی‌توان برحسب زمان و مکان پیش‌بینی کرد لیکن خواص آماری آن را می‌توان بازتولید نمود. بنابراین بررسی مقادیر متوسط و توزیع‌های احتمالی کمیت‌های جریان می‌تواند مفید باشد. به همین دلیل می‌توان به منظور بررسی متغیرهای اصلی میدان، هر متغیر را بر اساس تجزیه رینولدز[2] به دو بخش متوسط و اغتشاشی تقسیم نموده و بیان کرد:

$$U(\vec{\mathrm{x}}, t^i) = \bar{U}(\vec{\mathrm{x}}) + U'(\vec{\mathrm{x}}, t^i) \tag{۱۸}$$

به طور کلی کمیت متوسط را به دو روش متوسط گیری زمانی و متوسط‌گیری جمعی می‌توان محاسبه نمود. مطابق با مفهوم متوسط‌گیری جمعی، هرگاه یک آزمایش را در بازه زمانی $T$ به تعداد $N$ بار انجام داده به طوری که مقادیر میدان $U_i(\vec{\mathrm{x}})$ در هر گام زمانی ( $t_s$ ) اندازه‌گیری شود، مجموعه‌ای از $N$ عدد مقادیر لحظه‌ای $U_i(\vec{\mathrm{x}})$ به صورت مستقل از زمان به‌دست خواهدآمد. بنابراین بخش متوسط به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{U}(\vec{\mathrm{x}}) = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} U_i(\vec{\mathrm{x}}) \tag{۱۹}$$

هر المان $i$ متناظر با یک نمایه مشاهده‌شده در یک فرآیند است. فاصله بین نمایه‌ها در دنباله بالا ثابت می‌باشد. تنها شرط لازم برای نمایه‌ها این است که مستقل خطی باشند. هر نمایه معادل ماتریس‌هایی با $i$ سطر و $j$ ستون می‌باشد. حال می‌توان بخش اغتشاشی هر یک از نمایه‌ها را در قالب یک ماتریس به ابعاد $(i \times j) = M$ سطر و $N$ ستون به صورت زیر مرتب کرد:

2Reynolds Decomposition

$$F=\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ U'_1 & \dots\dots\dots & U'_N \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \quad (۲۰)$$

ماتریس به‌دست‌آمده می‌تواند یک ماتریس غیرمربعی باشد. لازم به ذکر است که غیرمربعی‌شدن ماتریس به دلیل بیشتربودن تعداد نقاط شبکه محاسباتی نسبت به تعداد نمایه‌های ثبت شده ( $M > N$ ) می‌باشد. در صورت استفاده از تعداد کثیری نمایه و برابرشدن آنها با تعداد نقاط شبکه، علاوه بر افزایش زمان محاسبات که یک عیب محسوب می‌شود، توسعه مدل رتبه کاسته جهت پیش‌بینی رفتار سیستم در بازه زمانی بلند بی‌معنا خواهد بود. در ادامه برای محاسبه توابع پایه، می‌توان از روش‌های متفاوتی از جمله روش ماتریس همبستگی و روش تجزیه مقادیر تکین استفاده کرد. در هر دو مسئله مطرح در این پژوهش، از روش دوم استفاده می‌شود. بدین ترتیب که با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین[1] ماتریس مقادیر اغتشاشی حاصل از تصاویر لحظه‌ای تجزیه خواهد شد. تجزیه مقدار تکین یک روش ریاضی بر پایه جبر خطی و با استفاده از خواص ماتریس‌ها است. این نگاشت به عنوان یک روش کاهنده، یک ماتریس را به حاصلضرب سه ماتریس و در حقیقت به تصاویر مشخصه سازنده‌اش تجزیه می‌کند. بر این اساس ماتریس بخش اغتشاشی حاصل از تصاویر لحظه‌ای، با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین به صورت زیر تجزیه خواهد شد:

$$F_{(m\times n)} = U_{(m\times m)}\Sigma_{(m\times n)}V^T{}_{(n\times n)} \quad (۲۱)$$

که ماتریس $U$ و $V$ ماتریس هایی متعامد بوده و به ترتیب ماتریس بردار ویژه سمت چپ و ماتریس بردار ویژه سمت راست نامیده می‌شوند. هر دو ماتریس دارای بردارهایی با اندازه واحد بوده و در هر ماتریس، هر بردار بر تمامی بردار های دیگر آن ماتریس عمود است. در واقع $U$ و $V$ یک چرخش مختصات ساده را نمایش می‌دهند، لذا می‌توان نوشت:

$$UU^T = U^TU = I \quad (۲۲)$$

$$VV^T = V^TV = I \quad (۲۳)$$

و ماتریس $\Sigma$ ماتریسی قطری بوده که عناصر قطر اصلی آن شامل مقادیر تکین غیرمنفی $S_{i,j}$ می‌باشد. نحوه قرارگیری مقادیر تکین طوری است که این مقادیر به طور نزولی بر قطر اصلی ماتریس $\Sigma$ قرار گرفته‌اند. به عبارت دیگر قطر اصلی ماتریس مقادیر تکین به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$S_{1,1} \geq S_{2,2} \geq \dots. \geq S_{n,n} \geq 0 \quad (۲۴)$$

در این صورت ماتریس غیرمربعی $U$ همان توابع متعامد بهینه ( $\phi(\vec{x})$ ) و ماتریس مربعی $\Sigma V^T$ همان مودهای زمانی می‌باشند. بنابراین می‌توان به جای بخش اغتشاشی دسته $N$ تایی از نمایه‌های اولیه، عبارتی گسسته‌سازی‌شده مبتنی بر توابع پایه تجزیه متعامد بهینه و مودهای زمانی را معادل قرار داد:

$$U'(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{N} A^i(t)\times\phi_i(\vec{x}) \quad (۲۵)$$

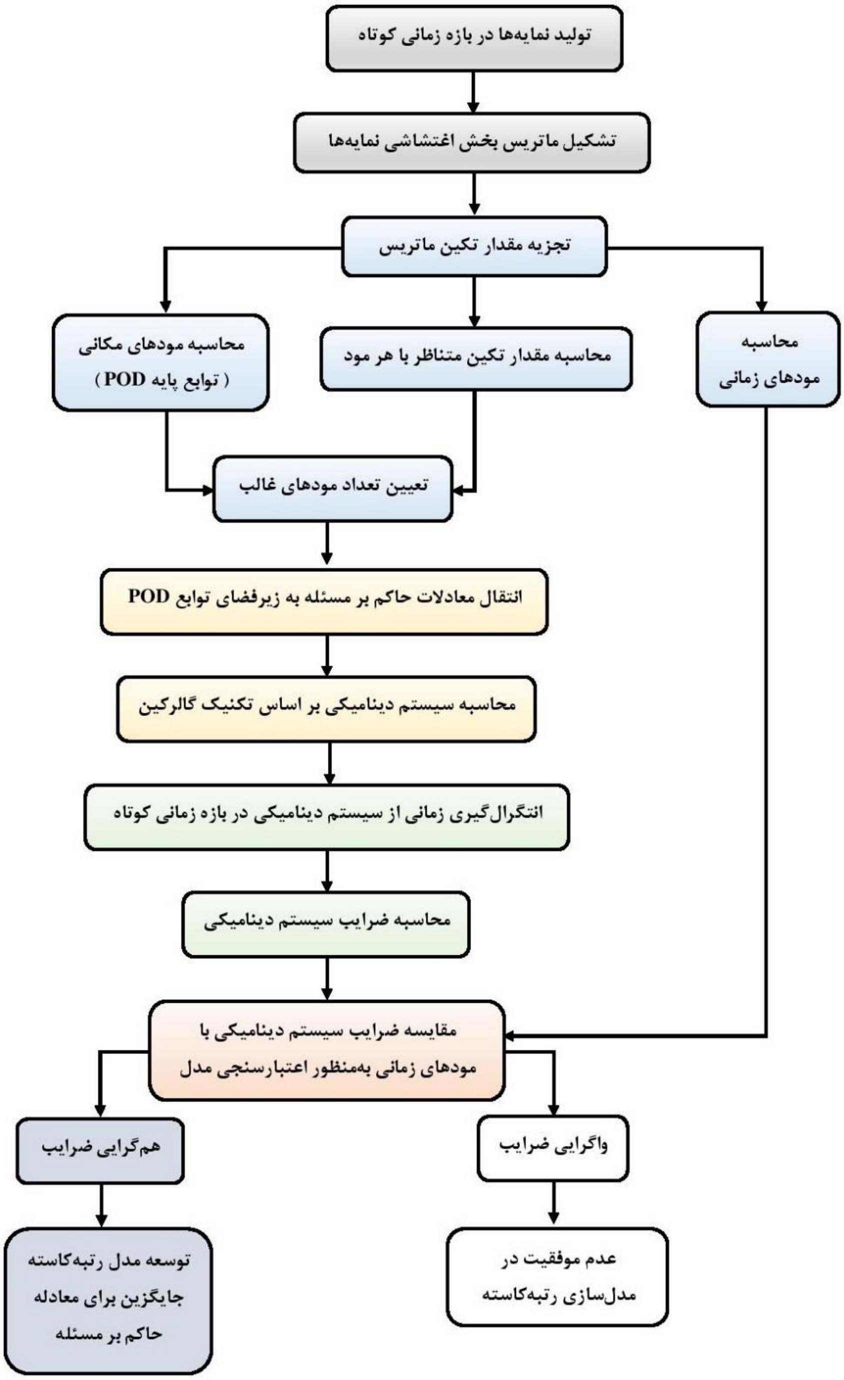
## ۶-۰- تصویرسازی گالرکین و معادله سیستم دینامیکی

پس از محاسبه توابع متعامد بهینه، به منظور توسعه مدل رتبه‌کاسته، از تصویرسازی گالرکین معادله حاکم در فضای برداری مودها استفاده می‌شود. با تصویرسازی معادلات حاکم بر مسئله در زیرفضای مودهای تجزیه متعامد بهینه، یک دسته معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به منظور محاسبه تغییرات زمانی ضرایب مودال[2] جهت بازسازی میدان به دست آمده، که سیستم دینامیکی نامیده می‌شود. برای هر یک از مسائل مورد بحث، مسئله نفوذ حرارتی و مسئله نفوذ-جابجایی، به ترتیب معادله سیستم دینامیکی مذکور به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{da^k(t)}{dt} = B_i^k \times a^i(t) + C^k \quad (۲۶)$$

1Singular Values Decomposition

2 Modal Coefficients




**شکل ۷. فلوچارت مدل رتبه کاسته بر مبنای روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه‌ها**

**Fig. 7. Flowchart of Reduced Order Model Based on POD-Snapshots Method**

$$\frac{da^k(t)}{dt} = A_{ij}^k \times a^i(t) \times a^j(t) + B_i^k \times a^i(t) + C^k \qquad (۲۷)$$

## ۷- انتخاب تعداد مودها جهت بازسازی میدان

در حل رتبه‌کاسته با افزایش تعداد مودهای میدان، مدل حاصل از دقت نزدیک‌تری به حل دقیق برخوردار می‌شود. بنابراین، با تعداد کمتری از مودهای تولیدشده می‌توان سهم بالایی از انرژی موجود در میدان را تسخیر کرد. بدین‌ترتیب، برای محاسبه تعداد مودهایی که درصد انرژی بالاتری را دارا می‌باشند، تعداد پایه‌های لازم برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} S_i^2}{\sum_{i=1}^{N_{total}} S_i^2} \qquad (۲۸)$$

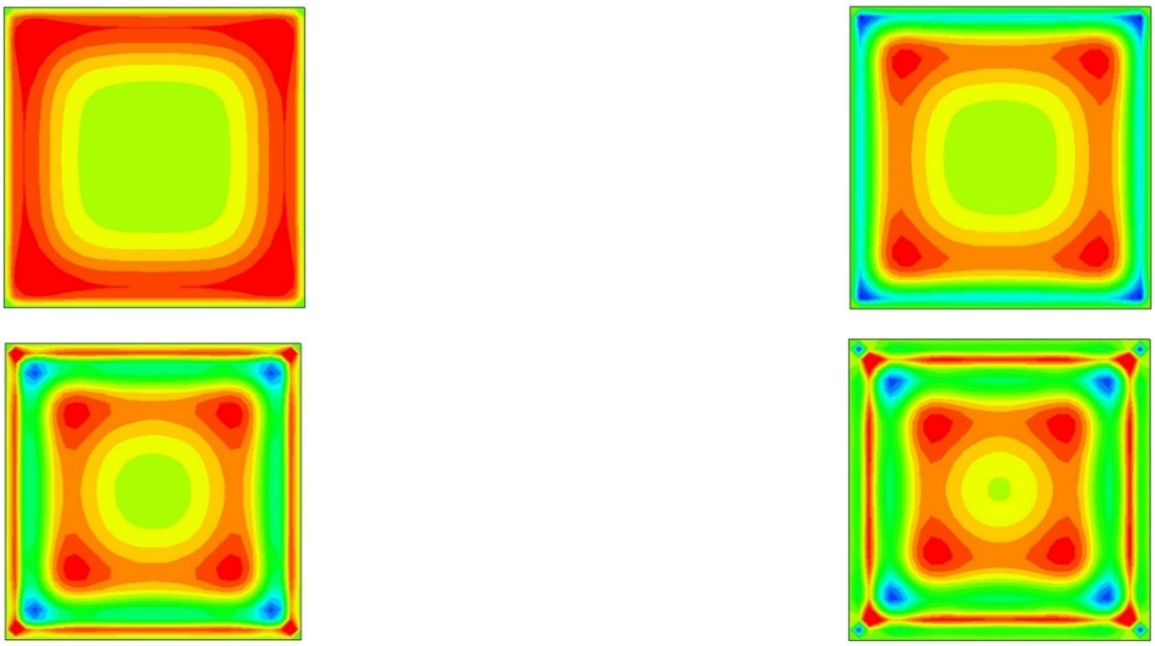
در رابطه بالا، $S_i$ مقادیر تکین حاصل از حل مسئله مقدار تکین برای ماتریس بخش اغتشاشی داده‌ها می‌باشد. هرگاه مقدار k معمولا بیش از ۹۹ درصد باشد، $N_r$ حاصل، تعداد مودهای مورد نیاز برای توسعه مدل رتبه‌کاسته با دقت کافی را نشان می‌دهد. فلوچارت روش در شکل ۷ آورده شده‌است.

## ۸- نتایج

در این قسمت به ارائه و بررسی نتایج پژوهش پرداخته می‌شود. دو مسئله مورد بررسی قرار گرفته که در مسئله اول معادله نفوذ حرارتی در یک حجم کنترل دوبعدی با ابعاد محدود، و در مسئله دوم معادله برگرز لزج در یک حجم کنترل یک‌بعدی مورد نظر بوده‌است. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته، داده‌های حاصل با نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم مقایسه شده‌اند.

### ۸-۱- مدل رتبه‌کاسته پارامتری معادله نفوذ حرارتی ناپایا

در این بخش، به‌دست‌آوردن مدلی که با دقت مناسب قادر به پیش‌بینی دینامیک میدان به ازای تغییر در مقادیر پارامترهای موثر از جمله ضریب نفوذ حرارتی باشد، مدنظر خواهد بود. بدین منظور، با استفاده از دسته نمایه مقادیر اغتشاشی و با حل مسئله مقدار تکین،



**شکل ۸. خطوط همتراز ۴ مود پرانرژی‌تر برای دسته نمایه‌های حاصل از حل معادله نفوذ حرارتی به ازای ضریب نفوذ ۰/۰۰۴۴ – شماره ۱ (بالا چپ)، شماره ۲ (بالا راست)، شماره ۳ (پایین چپ) و شماره ۴ (پایین راست)**

**Fig. 8. Contours of Four Strongest Modes for Snapshots Ensemble obtained from Solution of Thermal Diffusion for (Diffusion Coefficient of 0.0044, Mode No. 1 (Left-Up), No. 2 (Right-Up), No. 3 (Left-Bottom), No. 4 (Right-Bottom**

جدول ۱. انرژی نسبی چهار مود پرانرژی‌تر برای دسته نمایه‌های توزیع نفوذ حرارتی

**Table 1. Relative Energy of Four Strongest Modes for Snapshots Ensemble of Temperature**

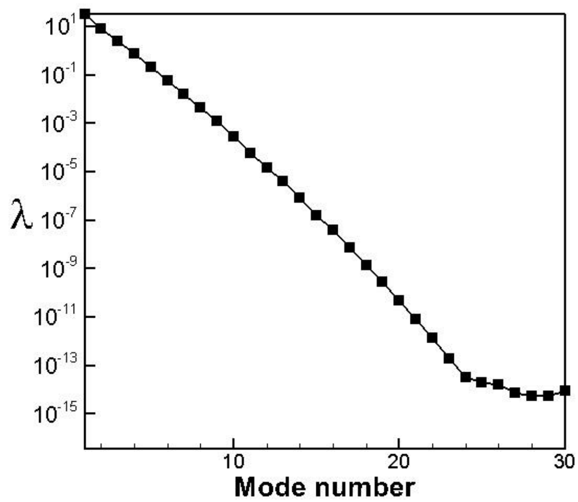
| شماره مود | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|
| انرژی نسبی | ٪۷۳ | ٪۱۹ | ٪۶ | ٪۱/۷ |

فضای برداری مشتمل بر مودها به دست می‌آید. در شکل ۸ خطوط همتراز چهار مود پرانرژی‌تر نمایش داده شده‌است. جدول ۱، میزان انرژی چهار مود اول را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، سهم عمده‌ای از انرژی نسبی میدان، مربوط به دو مود اول با میزان ۹۲ درصد می‌باشد.

در شکل ۹ و ۱۰ به ترتیب توزیع مقادیر تکین و انرژی نسبی مودها بر حسب شماره مود برای ۳۰ نمایه اول، نمایش داده شده‌است. همانطور که در هر دو شکل مشاهده می‌شود سهم عمده‌ای از انرژی جنبشی موجود در مودها تا مود شماره ۴ استخراج می‌شود. با توجه به توزیع انرژی نسبی میدان، این موضوع به وضوح دیده شده که پس از مود شماره ۴ تغییرات انرژی نسبی میدان بسیار کم شده و به مقدار ثابتی کمتر از ۱ درصد انرژی کل همگرا می‌شود.

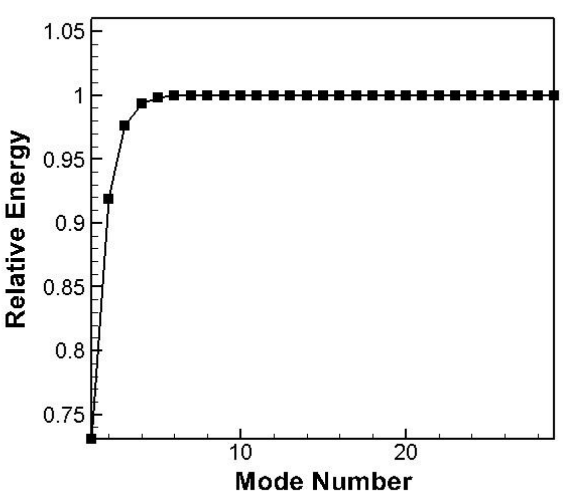
### ۸-۱-۱- انتگرال‌گیری از معادله سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته در بازه زمانی کوتاه

با مشخص‌شدن تعداد مودها برای بازسازی مدل رتبه‌کاسته، ضرایب سمت راست معادلۀ ۲۶، در بازه ۰/۷۵ واحد زمانی همراه با گام زمانی ۰/۰۰۱ به ازای ضریب نفوذ ۰/۰۰۴۴ محاسبه می‌شود. سپس با بهره‌گیری از روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم، مبتنی بر یک پیمایش زمانی، معادلۀ ۲۶ حل شده تا تغییرات ضرایب مودال محاسبه شود. به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته، داده‌های حاصل با نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم مقایسه خواهندشد. در شکل ۱۱ تغییرات زمانی ۴ ضریب مودال اول، مربوط به چهار مود پرانرژی‌تر میدان، حاصل از مدل رتبه‌کاسته و حل عددی مستقیم، نمایش داده شده‌است. همانطور که در نتایج مشخص است دقت



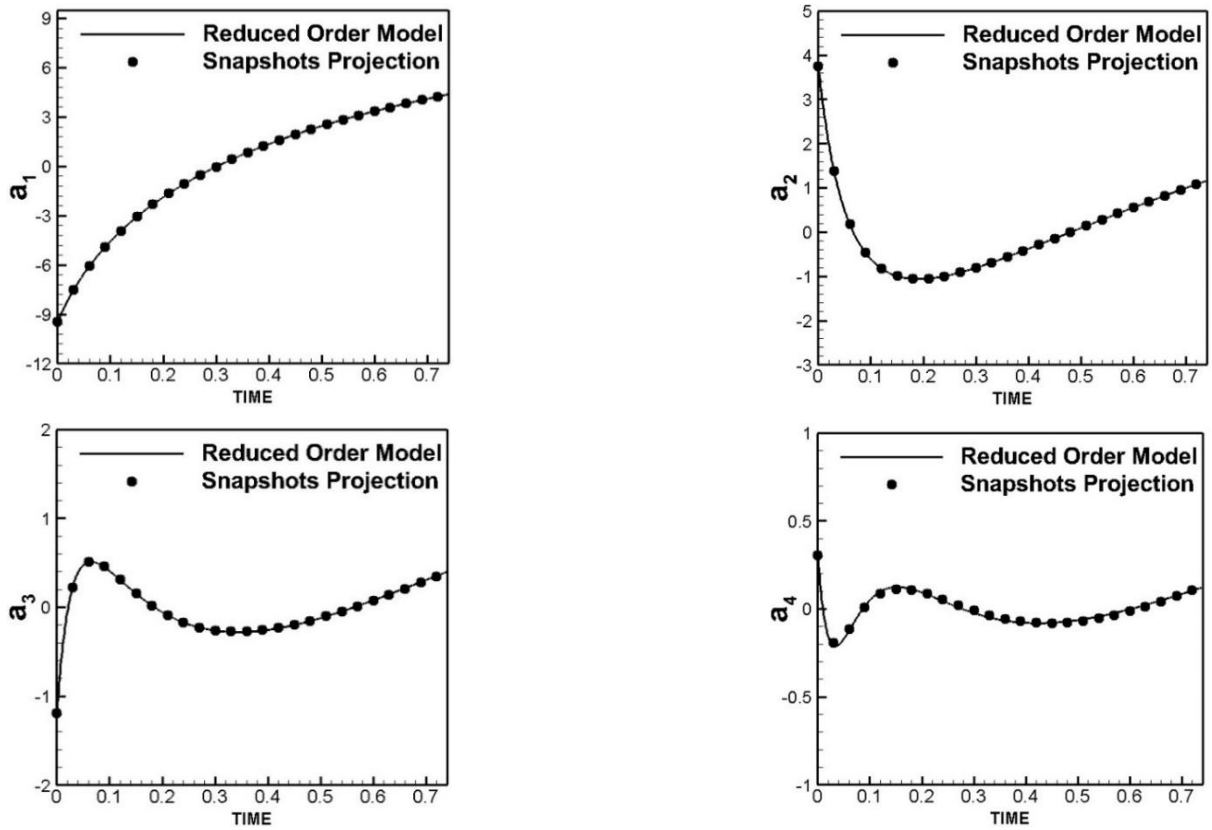

شکل ۹. توزیع مقادیر تکین برحسب شماره مود در مقیاس لگاریتمی

**Fig. 9. Distribution of Singular Values versus Modes Number in Logarithmic Scale**




شکل ۱۰. انرژی نسبی مودهای میدان برای سی مود اول

**Fig. 10. Relative Energy of Field Modes for the First Thirty Modes**




**شکل ۱۱. مقایسه بین تغییرات زمانی ضرایب مودال حاصل از حل معادله سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته با داده‌های حاصل از تصویرسازی نمایه‌ها**

**Fig. 11. Comparison Between Time history of Modal coefficients obtained from Reduced Order Dynamical System and Results of Snapshots Projection**

داده‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته برای پیش‌بینی دینامیک میدان در مقایسه با نمونهٔ حاصل از حل عددی مستقیم بسیار بالا بوده و به درستی تغییرات زمانی مسئله موردنظر را پیش‌بینی می‌کند.

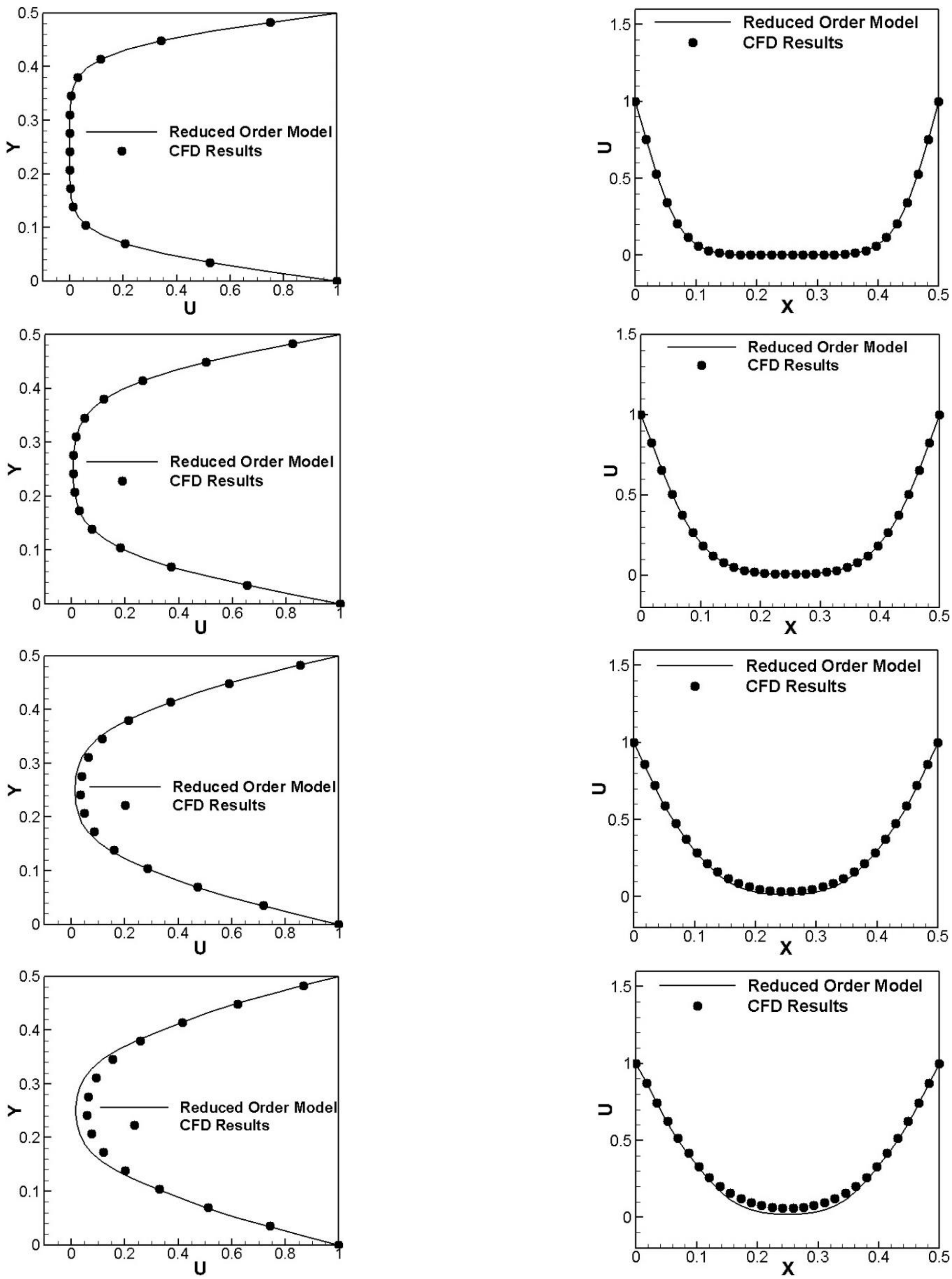
### ۸-۱-۲- انتگرال‌گیری از معادله سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته به ازای ضرایب نفوذ مختلف

در بخش قبل، با توجه به دقت بالای پیش‌بینی تغییرات زمانی نفوذ حرارتی (ضرایب مودال) در بازه زمانی کوتاه ۰/۷۵ واحد و به ازای ضریب نفوذ ۰/۰۰۴۴ توسط مدل رتبه‌کاسته ساخته شده، مدلی جایگزین به منظور پیش‌بینی دینامیک میدان به دست آمد. انتظار می‌رود به منظور توسعه مدلی پارامتری، مدل حاصل بتواند به عنوان الگویی جایگزین برای پیش‌بینی تغییرات میدان در بازه زمانی کوتاه ۰/۷۵ واحد و به ازای تغییر در مقادیر پارامترهای موثر از جمله ضریب نفوذ حرارتی به کار رود. در شکل ۱۲ توزیع درجه حرارت روی خط مرکزی تقارن افقی و عمودی در آخرین گام زمانی به ازای ضرایب نفوذ، ۰/۰۰۲، ۰/۰۰۴، ۰/۰۰۶ و ۰/۰۰۷ نمایش داده شده‌است. به منظور بررسی صحت نتایج، داده‌های حاصل با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم مقایسه شده‌اند.

### ۸-۲- مدل رتبه‌کاسته وابسته به زمان برای معادله برگرز لزج و یک‌بعدی

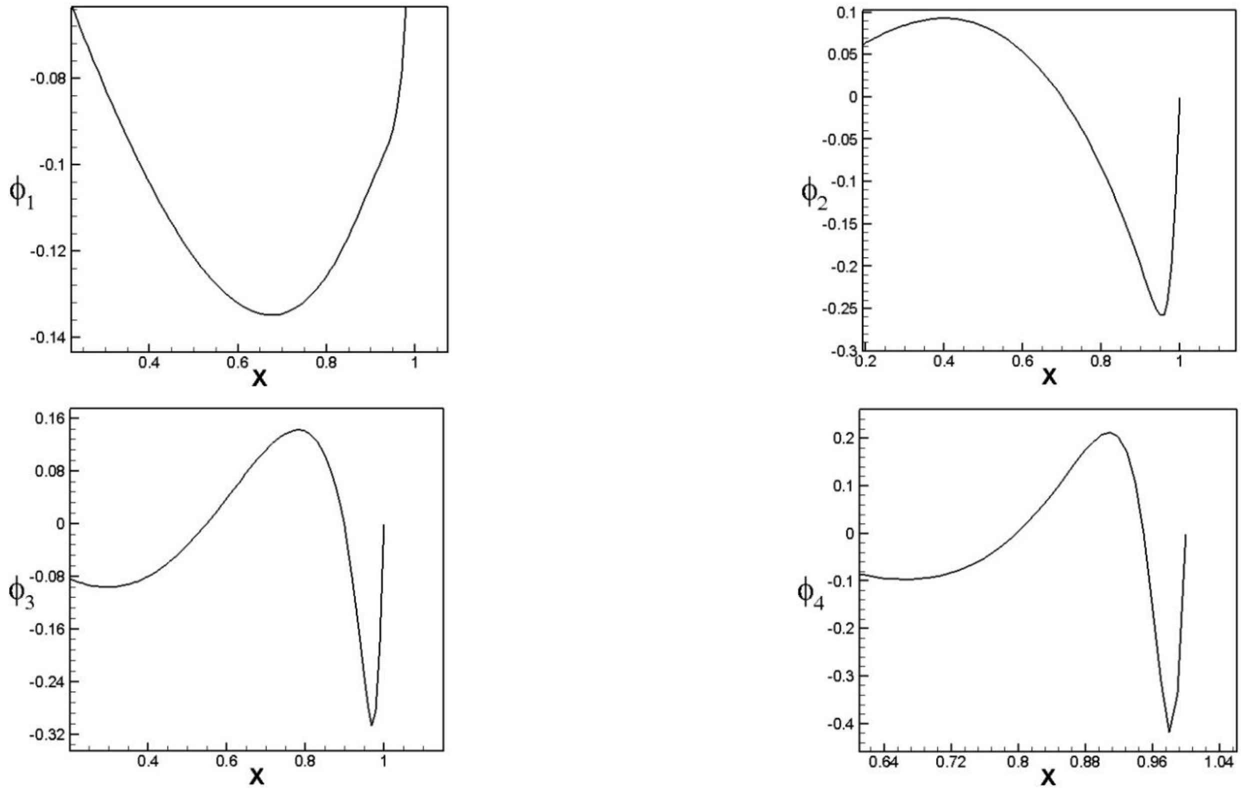
در این بخش، به‌دست‌آوردن مدلی که با دقت مناسب قادر به پیش‌بینی دینامیک میدان در بازه‌های زمانی مختلف باشد مدنظر خواهد بود. بدین منظور، با استفاده از دسته نمایه مقادیر اغتشاشی و با حل مسئله مقدار تکین، فضای برداری مشتمل بر مودها به دست می‌آید. در شکل ۱۳ توزیع ۴ مود پرانرژی‌تر نمایش داده شده‌است. جدول ۲، میزان انرژی چهار مود اول را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، سهم عمده‌ای از انرژی نسبی میدان، مربوط به دو مود اول با میزان ۹۳ درصد می‌باشد.

در شکل ۱۴ و ۱۵ به ترتیب توزیع مقادیر تکین و انرژی نسبی



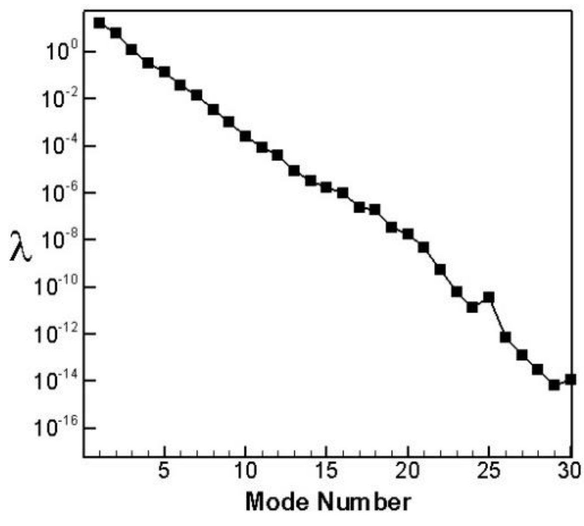

**شکل ۱۲. مقایسه بین توزیع درجه حرارت برای آخرین گام زمانی در راستای خط تقارن افقی(ستون سمت چپ) و در راستای خط تقارن عمودی (ستون سمت راست) به ازای ضریب نفوذ ۰/۰۰۲ (ردیف یک)، ۰/۰۰۴ (ردیف دو)، ۰/۰۰۶ (ردیف سه)، ۰/۰۰۷ (ردیف چهار)**

**Fig. 12. Comparison between Temperature Distribution for the Last Time Step in Horizontal Center line (Left Column) and in Vertical Center line (Right Column) for Diffusion Coefficients of 0.002 (First Row), 0.004 (Second Row), 0.006 ((Third Row), 0.007 (Fourth Row**



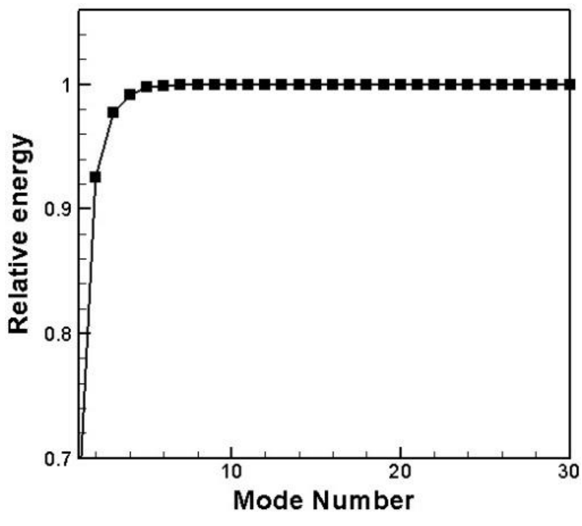

**شکل ۱۳. توزیع چهار مود پرانرژی‌تر برای دسته نمایه‌های حاصل از حل معادله برگرز در عدد رینولدز ۱۰۰**

**Fig. 13. Distribution of Four Strongest Modes for Snapshots Ensemble obtained from the solution of Burgers Equation at Re=100**



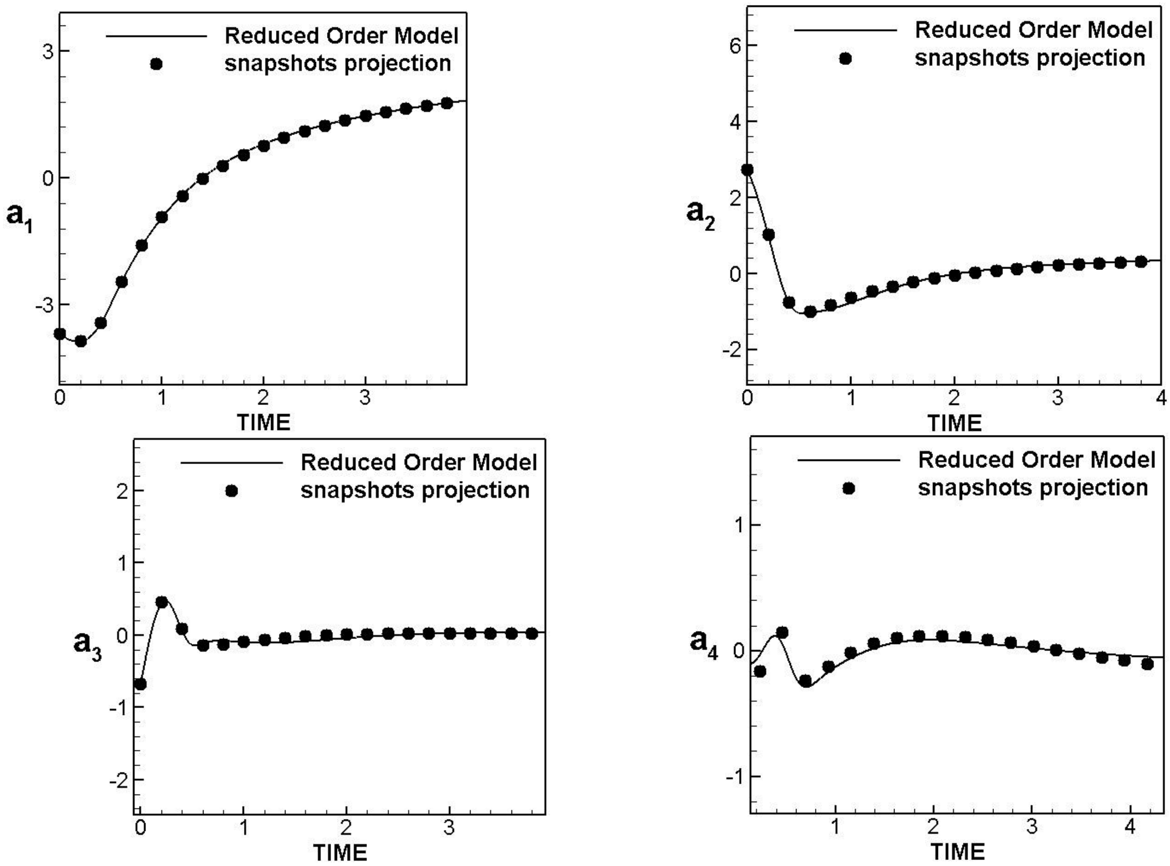

**شکل ۱۴. توزیع مقادیر تکین برحسب شماره مود در مقیاس لگاریتمی**

**Fig. 14. Distribution of Singular Values versus Modes Number in Logarithmic Scale**




**شکل ۱۵. انرژی نسبی مودهای میدان برای سی مود اول**

**Fig. 15. Relative Energy of Field Modes Modes for the First Thirty Modes**




شکل ۱۶. مقایسه تغییرات زمانی ضرایب مودال حاصل از حل معادله سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته با داده‌های حاصل از تصویرسازی نمایه‌ها

**Fig. 16. Comparison Between Time history of Modal coefficients obtained from Reduced Order Dynamical System and Results of Snapshots Projection**

جدول ۲. انرژی نسبی چهار مود پرانرژی‌تر برای دسته‌نمایه‌های حاصل از حل معادله برگرز

**Table 2. Relative Energy of Four strongest Modes for Snapshots Ensemble obtained from Solution of Burgers Equation**

| شماره مود | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|
| انرژی نسبی | ٪۶۸ | ٪۲۵ | ۵/۳٪ | ۱/۴٪ |

مودها بر حسب شماره مود برای ۳۰ نمایه اول، نمایش داده شده‌است. همانطور که در هر دو شکل مشاهده می‌شود سهم عمده‌ای از انرژی جنبشی میدان تا مود شماره ۴ استخراج می‌شود. با توجه به توزیع انرژی نسبی، این موضوع به وضوح دیده شده که پس از مود شماره ۴ تغییرات انرژی جنبشی میدان بسیار کم شده و به مقدار ثابتی کمتر از ۱ درصد انرژی کل همگرا می‌شود.

## ۸-۲-۱- انتگرال‌گیری از معادله سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته در بازه زمانی کوتاه

با مشخص‌شدن تعداد مودها برای بازسازی مدل رتبه‌کاسته، ضرایب ترم‌های غیرخطی، خطی و ثابت معادلۀ ۲۷، در ۴ واحد زمانی همراه با گام زمانی ۰/۰۰۱ به ازای عدد رینولدز ۱۰۰ محاسبه می‌شوند. سپس با بهره‌گیری از روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم، مبتنی بر یک پیمایش زمانی، معادلۀ ۲۷ برای ۴۰۰۰ گام زمانی حل شده تا تغییرات ضرایب مودال محاسبه شود. در شکل ۱۶ نتایج حاصل از

مدل رتبه‌کاسته با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم برای بازه زمانی کوتاه حاصل از پاسخ معادله برگرز به ازای عدد رینولدز ۱۰۰، مقایسه شده‌اند.

### ۸-۲-۲- انتگرال‌گیری از معادله سیستم دینامیکی در بازه زمانی بلند

در بخش قبلی با توجه به دقت مدل توسعه‌یافته در پیش‌بینی تغییرات زمانی معادلۀ برگرز در بازۀ زمانی کوتاه ۴ واحد و به ازای عدد رینولدز ۱۰۰، مدلی جایگزین به منظور پیش‌بینی دینامیک میدان به دست آمد. حال انتظار می‌رود به منظور توسعه مدلی وابسته به زمان، مدل حاصل بتواند به عنوان الگویی جایگزین برای پیش‌بینی تغییرات میدان در بازه‌های زمانی مختلف به ازای عدد رینولدز ۱۰۰ به کار رود. در شکل ۱۷ توزیع تابع معادله برگرز در آخرین گام زمانی به ازای ۵۰۰۰، ۶۰۰۰، ۷۰۰۰، ۸۰۰۰، ۹۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ گام زمانی نمایش داده شده‌است. به منظور بررسی صحت نتایج، داده‌های حاصل با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم مقایسه شده‌اند.

## ۹- نتیجه‌گیری

روش تجزیه متعامد بهینه به عنوان یک ابزار محاسباتی نسبتا دقیق و پر سرعت، به کمک مدل‌های دینامیک سیالات عددی آمده تا با کاهش هزینه و زمان محاسبات، پیچیدگی‌های شبیه‌سازی‌های مربوطه را کاهش دهد. بدین منظور انتخاب دسته نمایه موردنظر می‌تواند در کیفیت مدل رتبه‌کاسته و دقت نتایج به‌دست‌آمده تاثیرگذار باشد. در پژوهش‌هایی که به طور مستقل صورت گرفت، به توسعه مدل رتبه‌کاسته برای مسائل نفوذ حرارتی دو بعدی و نفوذ-جابجایی یک‌بعدی پرداخته شد. با به‌کارگیری روش تجزیه متعامد بهینه و انتقال معادلات حاکم بر مسئله به فضای برداری تشکیل‌شده از بردارهای پایه، مودهای پرانرژی‌تر از بین دسته‌نمایه اولیه به‌دست‌آمده و در نتیجه با توسعه مدلی رتبه‌کاسته، دینامیک میدان مورد نظر با تعداد ابعاد کمتر و با دقتی مناسب بازسازی شده‌است. نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته به‌دست‌آمده با شبیه‌سازی های حاصل از حل عددی مقایسه شده که دقت بالا و توانایی‌های مناسب در این روش را نشان می‌دهد. در نتیجه می‌توان گفت با بهره‌گیری از این روش می‌توان الگوهای دقیق و سریع مبتنی بر مفاهیم اساسی روش‌های یادگیری ماشین را توسعه داد.

## فهرست علائم

| | |
|---|---|
| $U(x,t)$ | میدان |
| $\bar{U}(x,t)$ | بخش متوسط میدان |
| $U'(x,t)$ | بخش اغتشاشی میدان |
| $A(t)$ | مودهای زمانی |
| $a(t)$ | ضرایب مودال |
| $N_{total}$ | تعداد کل نمایه‌ها |
| $N_r$ | تعداد نمایه‌های مورد استفاده در مدل رتبه‌کاسته |
| $\mathrm{Re}$ | عدد رینولدز |
| $\alpha$ | ضریب نفوذ حرارتی |
| $S_i$ | مقدار تکین |

### علائم یونانی

| | |
|---|---|
| $\phi(x)$ | توابع پایه |

### زیرنویس

| | |
|---|---|
| $i$ | شمارنده مکانی |
| $k$ | شمارنده زمانی |

## مراجع


[1] Chen, Y., Model order reduction for nonlinear systems, M. Sc. Thesis, Dept. of Elec. Eng. Comput. Sci., Massachusetts Institute of Technology, (1999).

[2] Schilders, W. H., et al, Model order reduction: theory research aspects and applications, Springer, (2008)

[3] Liang, Y., et al, Proper orthogonal decomposition and its applications—Part I: Theory, Journal of Sound and vibration, 252(3) (2002) 527-544.

[4] Karhunen, K, Zur spektraltheorie stochastischer prozesse, Ann. Acad. Sci. Fennicae, AI 34 (1946)

[5] Yaglom, A. and V. Tatarski, The structure of inhomogeneous turbulence Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation, Nauka, (1967) 166-178.

[6] Sirovich, L. and M. Kirby, Low-dimensional procedure for the characterization of human faces, Josa a, 4(3) (1987) 519-524.

[7] Taeibi-Rahni, M., et al, Fast Estimation of Aerodynamics Data Using Proper Orthogonal Decomposition, The 10th Fluid Dynamics Conference, Yazd, Iran, (2006). (In Persian)

[8] Bui-Thanh, T., et al, Aerodynamic data reconstruction and inverse design using proper orthogonal decomposition, AIAA journal, 42(8) (2004) 1505-1516.

[9] Willcox, K, Unsteady flow sensing and estimation via the gappy proper orthogonal decomposition, Computers & fluids, 35(2) (2006) 208-226.

[10] Sabetghadam, F., et al, Gappy Low-dimensional POD, A Powerful Tool of Data Reconstruction of the Unsteady Flow Fields, CFD Journal, 17(3) (2008) 156-164.

[11] LeGresley, P. and J. Alonso, Investigation of non-linear projection for pod based reduced order models for aerodynamics, $39^{th}$ Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, (2001)

[12] Moayyedi, M., K., et al, Development of Inverse Aerodynamics Design Model Based on Proper Orthogonal Decomposition Method, the first Annual Conference on Aerodynamics and Hydrodynamics, Tehran, Iran, (2011) (In Persian)

[13] Lieu, T. and C. Farhat, Adaptation of aeroelastic reduced-order models and application to an F-16 configuration, AIAA Journal, 45(6) (2007) 1244-1257.

[14] Tabib, M. V. and J. B. Joshi, Analysis of dominant flow structures and their flow dynamics in chemical process equipment using snapshot proper orthogonal decomposition technique, Chemical Engineering Science, 63(14) (2008) 3695-3715.

[15] Druault, P. and C. Chaillou, Use of proper orthogonal decomposition for reconstructing the 3D in-cylinder mean-flow field from PIV data, Comptes Rendus Mécanique, 335(1) (2007) 42-47.

[16] Hilberg, D., et al, The application of classical POD and snapshot POD in a turbulent shear layer with periodic structures, Applied scientific research, 53(3-4) (1994) 283-290.

[17] Pastur, L., et al, Determining the spectral signature of spatial coherent structures in an open cavity flow, Physical review, E 72(6) (2005) 065301.

[18] Rempfer, D. and H. F. Fasel, Evolution of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer, Journal of Fluid Mechanics, 260 (1994) 351-375.

[19] Ravindran, S, Proper orthogonal decomposition in optimal control of fluids, Technical report NASA/TM-1999-209113, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, (1999).

[20] Ostrowski, Z., et al, Advances in application of proper orthogonal decomposition in inverse problems, Proc. $5^{th}$ Int. conf. on inverse problems in engineering: theory and practice, Cambridge, UK, (2005)

[21] Shinde, V., et al, Galerkin-free model reduction for fluid-structure interaction using proper orthogonal decomposition, Journal of Computational Physics, 396 (2019) 579-595.

[22] Blanc, T. J., et al, Reduced-Order Modeling of Conjugate Heat Transfer Processes, Journal of Heat Transfer, 138(5) (2016)

[23] Fagiano, L. and R. Gati, On the order reduction of the radiative heat transfer model for the simulation of plasma arcs in switchgear devices, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 169 (2016) 58-78.

[24] Carlberg, K., et al, Galerkin v. least-squares Petrov–Galerkin projection in nonlinear model reduction, Journal of Computational Physics 330 (2017) 693-734.

[25] Choi, Y. and K. Carlberg, Space--Time Least-Squares Petrov--Galerkin Projection for Nonlinear Model Reduction, SIAM Journal on Scientific Computing, 41(1) (2019) A26-A58.

[26] Esfahanian, V., et al, Simulation of lead-acid battery using model order reduction, Journal of Power Sources, (2015) 279: 294-305.

[27] Tian, Z. F. and P. Yu, A high-order exponential scheme for solving 1D unsteady convection–diffusion equations, Journal of computational and applied mathematics, 235(8) (2011) 2477-2491.

**چگونه به این مقاله ارجاع دهیم**

*M. K. Moayyedi, F. Sabaghzadeghan, Development of parametric and time dependent reduced order model for diffusion and convection-diffusion problems based on proper orthogonal decomposition method, Amirkabir J. Mech Eng., 53(7) (2021) 4241-4260.*

**DOI:** 10.22060/mej.2020.16936.6483