



تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های تاخوردۀ مورب مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به صورت مدرج تابعی با استفاده از رویکرد آیزوژئومتریکی

حسن محمدی، علیرضا ستوده*

دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۱۰
بازنگری: ۱۳۹۸/۱۱/۱۱
پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۲۰
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۱/۰۳

کلمات کلیدی:

تحلیل آیزوژئومتریکی
روش نوار خمشی
ورق‌های مورب
ورق‌های تاخوردۀ
نانولوله‌های کربنی

خلاصه: در این پژوهش، یک رویکرد بر مبنای روش آیزوژئومتریکی جهت مطالعه رفتار ارتعاشات آزاد ورق‌های تاخوردۀ مورب مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به صورت مدرج تابعی توسعه داده شده است. در این روش از توابع پایه بی‌اسپیلاین کسری غیریکنواخت به منظور تقریب هندسه و همچنین میدان تغییر مکان استفاده می‌گردد. این ورق‌ها به وسیله نانولوله‌های کربنی تک‌جداره تقویت شده‌اند که فرض می‌شود توزیع این نانولوله‌ها در امتداد ضخامت ورق به صورت مدرج تابعی با الگوهای مختلف است. خواص مکانیکی موثر ورق‌های تاخوردۀ مورب مرکب به کمک قاعده مخلوط‌های اصلاح‌شده محاسبه گردیده است. مدلسازی ورق تاخوردۀ مورب با دو وصله نرَب انجام گرفته است که از نقاط قوت پژوهش می‌باشد. معادلات حاکم بر هر وصله بر مبنای تئوری ورق کلاسیک استخراج گردیده و سپس با استفاده از توابع پایه نرَب گسسته‌سازی شده‌اند. فرم نهایی معادلات گسسته، پس از انتقال ماتریس‌های المانی هر وصله با استفاده از یک تبدیل مختصاتی مناسب و سپس اعمال شرایط پیوستگی در مرز بین وصله‌ها به کمک روش نوار خمشی ایجاد شده است. سپس، چندین مثال عددی برای اثبات دقت و اعتبار فرمول‌بندی پیشنهادی تهیه شده است. نتایج نشان می‌دهد که رویکرد حاضر می‌تواند با دقت زیادی فرکانس‌های طبیعی ورق تاخوردۀ مورب را با هزینه محاسباتی کم پیش‌بینی نماید. در نهایت یک مجموعه نتایج جدید برای پارامترهای مختلف هندسی و مادی ورق تاخوردۀ مورب ارائه گردیده است.

۱- مقدمه

هستند. توزیع نانولوله‌ها درون ماتریس می‌تواند به صورت یکنواخت یا مطابق با یک تابع مشخص باشد. در واقع، برای اولین بار شن [۱] ایده توزیع نانولوله‌های کربنی را به صورت مدرج تابعی در یک فاز زمینه مطرح نمود. وی ادعا کرد که توزیع هدفمند نانولوله‌ها در مقایسه با توزیع یکنواخت به ایجاد سازه‌هایی با استحکام بالاتر می‌انجامد. در دهه اخیر تحقیقات مفصلی بر روی تیرها، ورق‌ها و پوسته‌های ساخته‌شده از مواد مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به صورت مدرج تابعی انجام شده است [۲-۴].

مطالعات بسیاری در زمینه ارتعاشات آزاد ورق‌های تاخوردۀ مستطیلی انجام شده است. عمده این مطالعات در دو دهه اخیر و

امروزه ورق‌های مورب به عنوان یک المان سازه‌ای به طور گسترده‌ای در بسیاری از سازه‌های مدرن استفاده می‌شوند. همچنین، ورق‌های تاخوردۀ نیز یک گزینه مناسب برای استفاده در بسیاری از کاربردهای مهندسی هستند. هزینه ساخت ورق‌های تاخوردۀ کم بوده و همچنین قابلیت تحمل نیرو در این سازه‌ها زیاد است. از سوی دیگر، تحقیقات در زمینه بهبود خواص مکانیکی مواد مرکب تقویت‌شده در سال‌های اخیر ادامه داشته است. نانولوله‌های کربنی به دلیل دارا بودن خواص خارق‌العاده مکانیکی، حرارتی و الکتریکی، یک انتخاب مناسب جهت استفاده به عنوان فاز تقویت‌کننده در یک ماتریس پلیمری

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: setoodeh@sutech.ac.ir



که توسط هیوز^{۱۳} و همکاران [۱۶] به عنوان یک روش جایگزین به جای روش المان محدود معرفی شد. در روش آیزوژئومتری، هندسه دقیق مساله با خطای کم پیش‌بینی شده و از همین تخمین برای پیش‌بینی میدان مجهول مساله استفاده می‌شود. از زمان معرفی، این روش به صورت گسترده‌ای برای تحلیل سازه‌های ساخته‌شده از مواد مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به‌کاررفته است [۱۷-۱۹]. با این وجود، توسعه روش آیزوژئومتری برای ورق‌های تاخوردگی بسیار محدود و عمدتاً مربوط به حالت‌های خاص بوده است. در قالب یک مساله کلاسیک، رفتار استاتیکی یک ورق یک سر درگیر به شکل L توسط تعدادی از محققین مورد بررسی قرار گرفت [۲۰ و ۲۱]. عطری و شجاعی [۲۲] مساله ارتعاشات آزاد این ورق را مورد مطالعه قرار دادند. آنها این ورق را با دو وصله مدل نموده و از روش نوار خمشی^{۱۴} به منظور تحقق شرایط سازگاری در مرز بین وصله‌ها استفاده نمودند. محمدی و ستوده [۱۵] مساله ارتعاشات آزاد یک ورق تاخوردگی مورب ساخته‌شده از ترکیب فلز و سرامیک به صورت مدرج تابعی را با استفاده از روش آیزوژئومتری مطالعه نمودند. ایشان نشان دادند که مقیدنمودن لبه‌های مستقیم ورق تاخوردگی در مقایسه با لبه‌های زاویه‌دار، منجر به افزایش بیشتر سفتی ورق می‌شود.

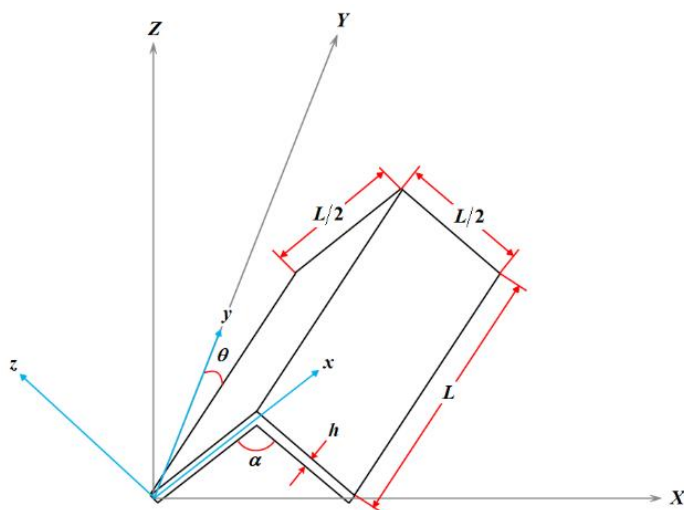
هدف این پژوهش، توسعه روش آیزوژئومتری مبتنی بر تکنیک نربز برای مطالعه رفتار ارتعاشات آزاد ورق‌های تاخوردگی مورب مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی است. ورق تاخوردگی مورب به کمک دو وصله نربز مدل می‌شود. معادلات حاکم بر هر وصله با استفاده از اصل کار مجازی و بر مبنای تئوری ورق کلاسیک به دست می‌آید. ماتریس‌های المانی نیز پس از اسمبل‌شدن در هر وصله به کمک یک تبدیل مختصاتی مناسب به مختصات جهانی منتقل می‌شوند. فرم نهایی معادلات گسسته نیز پس از ایجاد شرایط پیوستگی با استفاده از روش نوار خمشی، حاصل می‌شود. در بخش نتایج، چندین داده عددی به منظور نمایش کارایی تحلیل حاضر ارائه می‌گردد. نتایج عددی به‌دست‌آمده در حالت‌های حدی و غیرحدی در چندین مرحله با نتایج موجود در منابع یا نتایج تولیدشده توسط نرم‌افزار آباکوس^{۱۵} مقایسه می‌شود. در نهایت، یک مجموعه نتایج جدید برای حالات مختلف توزیع نانولوله‌های کربنی، کسرهای حجمی متفاوت و

با گسترش و تکامل کامپیوترهای پرسرعت صورت گرفته است. در این راستا روش‌های عددی کارآمد و متنوعی برای تحلیل ورق‌های تاخوردگی توسط محققین پیشنهاد شده است. این روش‌ها عبارتند از: روش نوار محدود^۱ [۵]، المان مرزی ترکیب شده- ماتریس انتقالی^۲ [۶]، روش بدون المان گلرکین^۳ [۷ و ۸]، روش المان محدود^۴ [۱۴-۹] و روش آیزوژئومتری [۱۵]. در ادامه، تعدادی از این تحقیقات به اختصار مرور می‌شود. گوها نیوجی^۵ و همکاران [۹] با استفاده از روش المان محدود و بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی^۶، ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های تاخوردگی ساخته‌شده از مواد مرکب لایه‌ای را مطالعه نمودند. ایشان نشان دادند که نتایج ارائه‌شده تطابق خیلی خوبی با نتایج به‌دست‌آمده توسط محققین پیشین دارد. پنگ^۷ و همکاران [۷] ارتعاشات آزاد ورق‌های تاخوردگی را با روش بدون المان گلرکین و بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی بررسی نمودند. ایشان نتایج خود را برای ورق‌های تاخوردگی با یک و دو تا ارائه دادند و نشان دادند که نتایج ارائه‌شده مطابقت خوبی با نتایج به‌دست‌آمده از نرم‌افزار انسیس^۸ دارد. هراندز^۹ و هرولا- نیتو^{۱۰} [۱۳] روش المان محدود را برای تحلیل ارتعاشی ورق‌های تاخوردگی به‌کاربردند. آنها چندین مثال عددی برای زوایای تاخوردگی مختلف و شرایط مرزی متفاوت ارائه دادند. بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی و با استفاده از روش بدون المان گلرکین، پنگ [۸] ارتعاشات آزاد ورق‌های تاخوردگی ساخته‌شده از مواد مرکب لایه‌ای را تحقیق نمود. وی نتایج پژوهش خود را برای ورق‌های تاخوردگی با یک و دو تا با زوایای تاخوردگی مختلف و همچنین لایه‌چینی‌های متفاوت ارائه نمود. نگوین مینه^{۱۱} و همکاران [۱۴] با استفاده از یک روش المان محدود هموارشده مبتنی بر سلول^{۱۲} رفتار استاتیک و ارتعاشات آزاد ورق‌های تاخوردگی را تحلیل نمودند. ایشان نشان دادند که فرمول‌بندی پیشنهادی آنها به طور قابل توجهی دقت نتایج عددی را افزایش می‌دهد.

تحلیل آیزوژئومتیکی یک روش عددی جدید و قدرتمند است

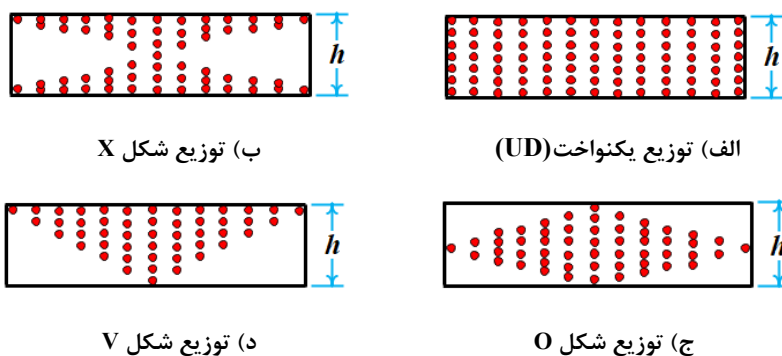
- 1 . Finite strip method
- 2 . Combined boundary element-transfer matrix method
- 3 . Mesh-free Galerkin method
- 4 . Finite element method
- 5 . Guha Niyogi
- 6 . First Order Shear Deformation Theory (FSDT)
- 7 . Peng
- 8 . Ansys
- 9 . Hern'andez
- 10 . Hervella-Nieto
- 11 . Nguyen-Minh
- 12 . Cell-based smoothed finite element method

13 . Hughes
14 . Bending strip
15 . Abaqus



شکل ۱. هندسه ورق تاخوردۀ مورب

Fig. 1. Geometry of the skew folded plate



شکل ۲. توزیع‌های متداول نانولوله‌های کربنی در امتداد ضخامت ورق تاخوردۀ مورب

Fig. 2. Typical distributions of CNTs along the thickness of the skew folded plate

نانولوله‌ها در امتداد ضخامت ورق می‌تواند به صورت یکنواخت یا مدرج تابعی باشد. از نقطه نظر ریاضی، الگوهای توزیع مختلفی را می‌توان برای نانولوله‌ها در امتداد ضخامت ورق در نظر گرفت. اگرچه، الگوهای خطی به دلیل سازگاری بیشتر با فرآیندهای ساخت بیشتر در تحقیقات مشاهده شده‌اند [۲۳]. چهار توزیع متداول نانولوله‌ها که در این تحقیق مورد استفاده قرار می‌گیرند، در شکل ۲ نشان داده شده است. این چهار توزیع عبارتند از: توزیع یکنواخت (UD)، توزیع شکل X، توزیع شکل O و توزیع شکل V. علاوه بر این چهار توزیع، به توزیع خطی شکل A نیز در منابع پیشین اشاره شده است [۲۴-۲۶]. توزیع شکل A در حقیقت عکس توزیع شکل V است. در حالت حدی ورق صاف، نتایج به‌دست‌آمده برای دو توزیع شکل A و V یکسان هستند، هر چند در مورد ورق‌های تاخوردۀ، نتایج با هم متفاوتند. با این وجود در این حالت نیز، تفاوت نسبی نتایج برای این

همچنین زوایای تاخوردگی و مورب گوناگون ارائه می‌شود.

۲-هندسه و خواص مکانیکی

شکل ۱ یک ورق تاخوردۀ که از دو ورق یکسان به طول $L/2$ ، عمق L و ضخامت h ساخته‌شده را نشان می‌دهد. هندسه این ورق‌ها همچنین با زاویه تاخوردگی α و زاویه مورب θ تعریف می‌شود. هر ورق به عنوان یک وصله در نظر گرفته می‌شود. سیستم مختصات کارتزین جهانی و محلی نیز به ترتیب با (X, Y, Z) و (x, y, z) نشان داده شده‌اند. شایان ذکر است که تنها سیستم مختصات محلی برای وصله اول در شکل ۱ رسم شده است. در این پژوهش فرض بر این است که ورق تاخوردۀ مورب از یک ماتریس پلیمری که با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره^۱ تقویت‌شده، ساخته شده است. توزیع

1 Single-Walled Carbon Nanotubes (SWCNTs)

که در آن E_{11}^{CNT} ، E_{22}^{CNT} و G_{12}^{CNT} به ترتیب مدول‌های یانگ و مدول برشی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره هستند. همچنین E^m و G^m نیز خواص متناظر ماتریس هستند. همچنین پارامترهای اصلاحی هستند که به منظور انطباق داده‌های به‌دست‌آمده از قانون مخلوط‌های متداول و آنچه توسط شبیه‌سازی دینامیک مولکولی به دست می‌آید، به قاعده مخلوط‌های متداول اضافه شده‌اند. در رابطه (۳)، V_m و V_{CNT} نیز کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و ماتریس هستند که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$V_{CNT} + V_m = 1 \quad (۴)$$

ضریب پواسون موثر، وابستگی کمتری به موقعیت نانولوله‌ها دارد و از رابطه زیر به دست می‌آید [۴]:

$$V_{12} = V_{CNT}^* V_{12}^{CNT} + V_m V^m \quad (۵)$$

و در نهایت، قانون مخلوط‌های متداول را می‌توان برای تخمین دانسیته ماده مرکب تقویت‌شده در امتداد ضخامت ورق به کار برد [۲۷ و ۲۹]:

$$\rho = V_{CNT} \rho^{CNT} + V_m \rho^m \quad (۶)$$

در روابط فوق $\{\rho^m, V^m\}$ و $\{\rho^{CNT}, V_{12}^{CNT}\}$ به ترتیب نسبت پواسون و دانسیته نانولوله‌های کربنی و ماتریس را نشان می‌دهد.

۳- مرور مختصری بر توابع بی‌اسپیلاین و نریز

در این بخش، برخی از مفاهیم پایه توابع بی‌اسپیلاین و شکل تعمیم‌یافته آن، یعنی نریز، به طور مختصر مرور می‌شود. جزییات بیشتر در مراجع [۳۰-۳۱ و ۱۶] آمده است.

۳-۱- بردار گرهی

بردار گرهی، یک مجموعه غیرنزولی از اعداد حقیقی است که به صورت $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ تعریف می‌شود که ξ_i گره i ام بوده و p نیز درجه چندجمله‌ای است. همچنین n تعداد توابع پایه را نشان می‌دهد.

دو توزیع نسبت به بقیه الگوهای توزیع کمتر است. به همین دلیل توزیع شکل A در کار حاضر در نظر گرفته نشده است. کسر حجمی نانولوله‌ها در الگوهای یادشده از روابط زیر به دست می‌آید [۲۷]:

$$\text{UD: } V_{CNT}(z) = V_{CNT}^* \quad (\text{الف-۱})$$

$$\text{FG-X: } V_{CNT}(z) = 4V_{CNT}^* \frac{|z|}{h} \quad (\text{ب-۱})$$

$$\text{FG-O: } V_{CNT}(z) = 2V_{CNT}^* \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (\text{ج-۱})$$

$$\text{FG-V: } V_{CNT}(z) = V_{CNT}^* \left(1 + \frac{2z}{h}\right) \quad (\text{د-۱})$$

که در آن متغیر z مختصات در امتداد ضخامت ورق است. همچنین V_{CNT}^* با رابطه زیر تعریف می‌شود [۲۸]:

$$V_{CNT}^* = \frac{w^{CNT}}{w^{CNT} + \frac{\rho^{CNT}}{\rho^m} - w^{CNT} \frac{\rho^{CNT}}{\rho^m}} \quad (۲)$$

در رابطه فوق w^{CNT} کسر جرمی نانولوله‌های کربنی است. ρ^{CNT} و ρ^m نیز به ترتیب دانسیته نانولوله‌های کربنی و ماتریس هستند. روش‌های مختلفی برای تخمین خواص موثر مواد مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به صورت مدرج تابعی پیشنهاد شده است. از میان این روش‌ها، روش موری-تاناکا^۱ و قانون مخلوط‌ها^۲ بیشتر در تحقیقات قبلی دیده شده است. قانون مخلوط‌ها یک روش موثر و کارا برای تعیین خواص مکانیکی مواد مرکب تقویت شده است. بر اساس این قانون، خواص مکانیکی ماده مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی از روابط زیر محاسبه می‌شود [۲۷ و ۲۹]:

$$E_{11} = \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E^m \quad (۳)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E^m}$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G^m}$$

1 . Mori-Tanaka

2 . Rule of mixture

۲-۳-توابع پایه بی‌اسپیلاین

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n \times m} N_I(\xi, \eta) \mathbf{P}_I \quad (10)$$

برای یک بردار گرهی معین Ξ و همچنین درجه چندجمله‌ای \mathbf{p} ، توابع پایه بی‌اسپیلاین یک‌متغیره $N_{i,p}$ ، با استفاده از فرمول بازگشتی مشهور کاکس-دی بور^۱ تعریف می‌شوند [۱۶]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7\text{-الف})$$

که در آن $N_I(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta)$ تابع شکل متناظر با نقطه کنترلی I ام است. به منظور پیش‌بینی هندسه دقیق مقاطع مخروطی مانند دایره و بیضی، از توابع نرَبز استفاده می‌شود. در این راستا، به هر نقطه کنترلی، یک مقدار عددی به نام وزن w_I اختصاص داده می‌شود که می‌تواند مقدار انحناء را در آن نقطه کنترل کند [۳۱]:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (7\text{-ب})$$

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n \times m} R_I(\xi, \eta) \mathbf{P}_I \quad (11)$$

با:

$$R_I(\xi, \eta) = \frac{N_I(\xi, \eta) w_I}{\sum_{I=1}^{n \times m} N_I(\xi, \eta) w_I} \quad (12)$$

لازم به ذکر است در هنگام ایجاد توابع پایه نسبت‌هایی به شکل $\frac{0}{0}$ برابر با صفر فرض می‌شوند.

۳-۳-منحنی‌ها و سطوح بی‌اسپیلاین

با یک بررسی ساده می‌توان تشخیص داد که وقتی مقادیر وزن همه نقاط کنترلی با هم برابر باشد، توابع پایه نرَبز به توابع پایه بی‌اسپیلاین تبدیل می‌شود.

یک منحنی بی‌اسپیلاین به صورت ترکیب خطی توابع پایه بی‌اسپیلاین و مجموعه نقاط کنترلی متناظر \mathbf{P}_i به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۶]:

۴- مدل آیزوژئومتریک ورق‌های تاخوردۀ مورب

۴-۱- تئوری ورق کلاسیک

به منظور استخراج معادلات حاکم بر هر وصله، سیستم مختصات محلی در گوشه صفحه میانی هر ورق مطابق با شکل ۳ قرار داده می‌شود.

بر مبنای تئوری ورق کلاسیک، تغییرات مولفه‌های جابجایی (u, v, w) هر نقطه دلخواه از ورق در امتداد ضخامت آن به صورت زیر تقریب زده می‌شود [۳۳]:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i \quad (8)$$

لازم به توضیح است که یک منحنی بی‌اسپیلاین لزوماً از نقاط کنترلی نمی‌گذرد.

یک سطح بی‌اسپیلاین با ضرب تانسوری دو مجموعه از توابع پایه یک‌متغیره $N_{i,p}$ و $M_{j,q}$ که از درجه \mathbf{p} و \mathbf{q} بوده و به ترتیب با استفاده از بردارهای گرهی $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ و $\mathbf{H} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ به وجود آمده‌اند، ساخته می‌شود [۱۶]:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (13)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{P}_{i,j} \quad (9)$$

که در آن $\mathbf{P}_{i,j}$ یک شبکه $n \times m$ از نقاط کنترلی است. رابطه (۹) را می‌توان به شکل مرسوم در روش المان محدود نوشت [۳۲]:

در رابطه فوق (u_0, v_0, w_0) به ترتیب مولفه‌های جابجایی نقطه

1 . Cox-De boor

صورت زیر محاسبه می‌شوند [۳۵]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}(z)(\boldsymbol{\varepsilon}_0 - z\boldsymbol{\kappa}) \quad (17)$$

که در آن:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T, \quad (18)$$

همچنین:

$$\mathbf{Q}(z) = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & 0 \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(z) \end{bmatrix} \quad (19)$$

با [۳]:

$$\begin{aligned} Q_{11}(z) &= \frac{E_{11}(z)}{1 - \nu_{12}(z)\nu_{21}(z)}; \\ Q_{12}(z) &= \frac{\nu_{12}E_{22}(z)}{1 - \nu_{12}(z)\nu_{21}(z)}; \\ Q_{22}(z) &= \frac{E_{22}(z)}{1 - \nu_{12}(z)\nu_{21}(z)}; \\ Q_{66}(z) &= G_{12}(z) \end{aligned} \quad (20)$$

۲-۴- شکل گسسته معادلات حاکم

معادلات حاکم با استفاده از توابع پایه نریز به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شوند [۱۷]:

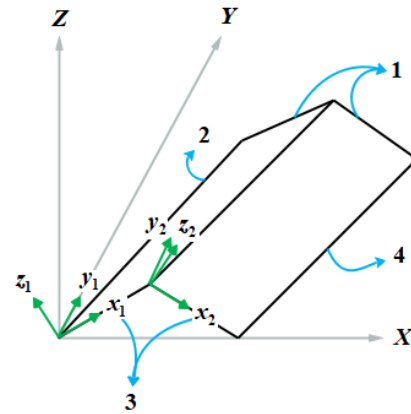
$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n_{CP}} R_I(\xi, \eta) \mathbf{q}_I \quad (21)$$

که در آن n_{CP} تعداد نقاط کنترلی در هر وصله و $\mathbf{q}_I = [u_{0I} \quad v_{0I} \quad w_I]^T$ بردار مقادیر گرهی متناظر با نقطه کنترلی I ام است.

با جایگذاری رابطه (۲۱) در رابطه (۱۶) می‌توان نوشت:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \sum_{I=1}^{n_{CP}} \mathbf{B}_I^m(\xi, \eta) \mathbf{q}_I; \quad \boldsymbol{\kappa} = \sum_{I=1}^{n_{CP}} \mathbf{B}_I^b(\xi, \eta) \mathbf{q}_I \quad (22)$$

که در آن:



شکل ۳. نمایش سیستم مختصات جهانی (X, Y, Z) و محلی (x, y, z)
Fig. 3. Demonstration of global (X, Y, Z) and local (x, y, z) coordinate systems

مادی (x, y, z) روی صفحه میانی را در امتداد جهات x, y و z نشان می‌دهد.

با توجه به میدان جابجایی تعریف‌شده در رابطه (۱۳)، مولفه‌های غیرصفر تانسور کرنش در هر نقطه مادی دلخواه (x, y, z) از ورق به صورت زیر محاسبه می‌شود [۳۴]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (14)$$

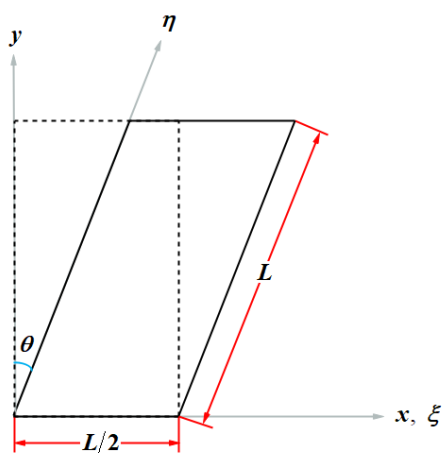
رابطه (۱۴) را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 - z\boldsymbol{\kappa} \quad (15)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T; \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0 &= \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right]^T; \\ \boldsymbol{\kappa} &= \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T \end{aligned} \quad (16)$$

تنش‌های متناظر نیز با استفاده از قانون تعمیم‌یافته هوک به



شکل ۴. نمایش المان مورب در مختصات فیزیکی و پارامتریک

Fig. 4. Sketch of skew element in the physical and parametric coordinates

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} I_0 \hat{\mathbf{N}}^T \hat{\mathbf{N}} d\Omega \quad (31)$$

به منظور محاسبه ماتریس‌های سفتی و جرم که با روابط (۳۰) و (۳۱) داده شده‌اند، می‌بایست متغیرهای مختصاتی در فضای فیزیکی را ابتدا به فضای پارامتریک و سپس به فضای مرجع نگاشت داد. روابط مورد نیاز این دو نگاشت، در پیوست ارائه شده‌اند. علاوه بر این، با توجه به روابط (۲۳) و (۳۰)، برای محاسبه ماتریس سفتی، می‌بایست مشتقات اول و دوم توابع پایه نربرز را یافت. این مشتقات را می‌توان با چندبار استفاده متوالی از قاعده زنجیره‌ای محاسبه نمود. فرمول‌های مورد نیاز در مرجع [۱۵] داده شده‌اند. برای محاسبه این مشتقات نیاز است که رابطه بین مختصات فیزیکی (x, y) و مختصات پارامتری (ξ, η) به دست آید. با توجه به شکل ۴ روابط مورد نیاز به شکل زیر هستند:

$$x = \frac{L}{2} \xi + L \sin \theta \eta ; \quad y = L \cos \theta \eta \quad (32)$$

لازم به توضیح است که ماتریس‌های سفتی و جرم مربوط به هر وصله پیش از اعمال شرایط پیوستگی در مرز بین وصله‌ها می‌بایست از مختصات محلی وصله به مختصات جهانی انتقال یابند. رابطه بین مختصات محلی و جهانی در شکل ۳ نشان داده شده است. همچنین فرمول‌های مورد نیاز در پیوست ب ارائه گردیده است.

$$\mathbf{B}_I^m = \begin{bmatrix} R_{I,x} & 0 & 0 \\ 0 & R_{I,y} & 0 \\ R_{I,y} & R_{I,x} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_I^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{I,xx} \\ 0 & 0 & R_{I,yy} \\ 0 & 0 & 2R_{I,xy} \end{bmatrix} \quad (23)$$

فرم ضعیف‌شده برای تحلیل ارتعاشات آزاد هر وصله، با استفاده از اصل کار مجازی به صورت زیر به دست می‌آید [۱۵]:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{D}_p \boldsymbol{\varepsilon}_p d\Omega = \int_{\Omega} I_0 \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} d\Omega \quad (24)$$

که در آن:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p^T = [\boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad \boldsymbol{\kappa}]; \quad \mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}; \quad I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz \quad (25)$$

در رابطه (۲۵) ماتریس‌های \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{D} به ترتیب ماتریس‌های سفتی کششی، کوپلینگ کشش-خمش و سفتی خمشی نامیده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۳]:

$$\mathbf{A} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(z) dz; \quad \mathbf{B} = \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{Q}(z) dz; \quad \mathbf{D} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \mathbf{Q}(z) dz \quad (26)$$

همچنین بردار جابجایی \mathbf{u} را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n_{CP}} \hat{\mathbf{N}}_I \mathbf{q}_I \quad (27)$$

که در آن:

$$\hat{\mathbf{N}}_I = \begin{bmatrix} R_I & 0 & 0 \\ 0 & R_I & 0 \\ 0 & 0 & R_I \end{bmatrix} \quad (28)$$

با جایگذاری روابط (۲۵) و (۲۷) در رابطه (۲۴)، سیستم معادلات

گسسته برای مساله ارتعاشات آزاد به شکل ماتریسی زیر درمی‌آید:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (29)$$

که در آن \mathbf{K} ، ماتریس سفتی بوده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^b \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^b \end{matrix} \right\} d\Omega \quad (30)$$

همچنین \mathbf{M} ماتریس جرم است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

۳-۴- روش نوار خمشی

این روش به وسیله کیندل^۱ و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۱۰ به منظور اعمال شرایط پیوستگی در سازه‌های مدل شده با چندین وصله نرئز پیشنهاد شد. در این روش نوارهای ساخته شده از مواد فرضی بدون جرم که خود به عنوان یک وصله نرئز در نظر گرفته می‌شوند، در محل اتصال وصله‌ها قرار داده می‌شوند. شبکه کنترلی نوار خمشی شامل یک ردیف نقطه کنترلی مشترک در محل اتصال و دو ردیف دیگر در دو طرف محل اتصال است. فضای پارامتریک نیز دربرگیرنده یک المان درجه دو در جهت عمود بر نوار و تعدادی المان خطی در امتداد نوار است. بدون ازدست دادن کلیت، تعداد المان‌های خطی در امتداد طول نوار را می‌توان به صورتی در نظر گرفت که نقاط کنترلی نوار با نقاط کنترلی متناظر دو وصله مجاور بر روی هم واقع شوند. در این روش فرض می‌شود که ماده نوار خمشی سفتی غشایی نداشته و تنها در جهت عمود بر نوار سفتی خمشی دارد. این بدین معنی است که ماتریس سفتی نوار خمشی به شکل زیر است [۱۵]:

$$\mathbf{K}^{(bs)} = \int_{\Omega^{(bs)}} \begin{Bmatrix} (\mathbf{B}^m)^{(bs)} \\ (\mathbf{B}^b)^{(bs)} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{(bs)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\mathbf{B}^m)^{(bs)} \\ (\mathbf{B}^b)^{(bs)} \end{Bmatrix} d\Omega^{(bs)} \quad (33)$$

که در آن:

$$\mathbf{D}^{(bs)} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} E^{(bs)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

در روابط فوق بالانویس *bs* به نوار خمشی اشاره می‌کند. $E^{(bs)}$ نیز سفتی خمشی جهتی است. توجه شود که سفتی $E^{(bs)}$ می‌بایست به اندازه کافی بزرگ باشد تا تغییر زاویه بین دو وصله از یک مقدار معین و کوچک، کمتر باشد. اگرچه انتخاب یک مقدار خیلی بزرگ برای $E^{(bs)}$ باعث می‌شود که ماتریس سفتی بدرفتار شده و نتایج واگرا شوند.

۵- نتایج عددی

در این قسمت، نتایج به دست آمده با استفاده از فرمول بندی پیشنهادی در چندین گام ارائه می‌شود. در ابتدا یک مقدار مناسب برای

1 . Kiendl

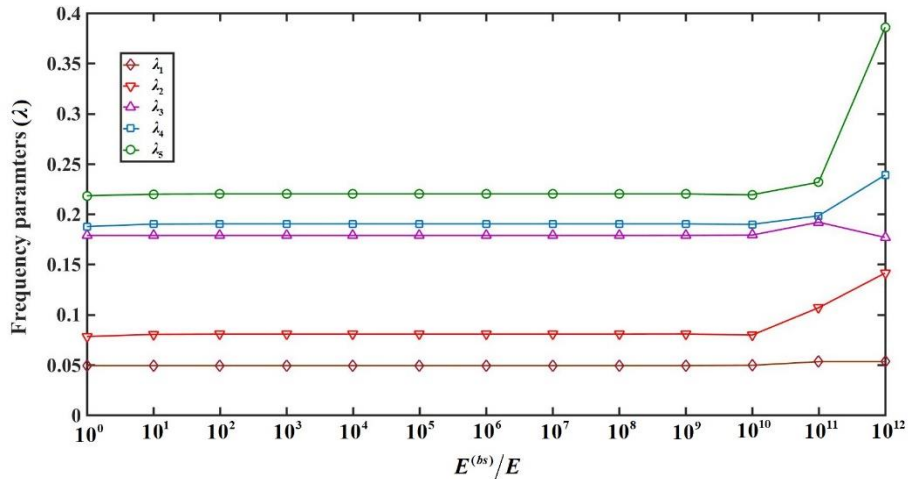
سفتی نوار خمشی به دست می‌آید. سپس همگرایی نتایج برای روش عددی آیزوژئومتریک بررسی شده و نتایج به دست آمده در حالت‌های حدی با نتایج موجود در مراجع معتبر مقایسه می‌شود. در صورت عدم وجود نتایج در مراجع پیشین به منظور مقایسه، مساله مورد نظر به وسیله نرم افزار آباکوس حل شده و نتایج حاصل از روش عددی آیزوژئومتریک با نتایج حاصل از نرم افزار آباکوس مقایسه می‌شود. بعد از اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، اثر پارامترهای مختلف مادی و هندسی بر روی رفتار ارتعاش آزاد ورق‌های تاخوردده مورب مرکب تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به صورت مدرج تابعی بررسی شده و نتایج به دست آمده در قالب جدول یا نمودار ارائه می‌گردد.

در همه مثال‌های عددی ارائه شده در این مقاله، از چند جمله‌ای‌های درجه ۴ در هر دو راستای فضای پارامتریک استفاده می‌شود. همچنین بدون ازدست دادن عمومیت، تعداد المان‌ها نیز در هر دو راستای یکسان در نظر گرفته می‌شود. به علاوه به عنوان یک قرارداد برای نام گذاری شرایط مرزی به کمک علائم اختصاری، لبه‌های ورق تاخوردده مورب مطابق شکل ۳ به ترتیب از ۱ تا ۴ شماره گذاری می‌شوند. به عنوان مثال نماد CFCS نشان می‌دهد که لبه‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ به ترتیب گیردار (C)، آزاد (F)، گیردار (C) و ساده (S) هستند.

در تحقیقات پیشین، از دو ماتریس پلیمری پلی (پی- فنیلن وینیلن)^۲ با نام اختصاری PmPV و پلی (متیل متاکریلات)^۳ با نام اختصاری PMMA به عنوان فاز زمینه استفاده شده است [۳۶-۳۸]. در پلیمر PmPV، نانولوله‌های کربنی به عنوان فاز تقویت کننده با کسرهای حجمی ۰/۱۷، ۰/۱۴، ۰/۱۱، $V_{CNT}^* = 0/11, 0/14, 0/17$ توزیع می‌شوند. این در حالیست که در پلیمر PMMA، نانولوله‌ها با کسرهای حجمی ۰/۲۸، ۰/۱۷، ۰/۱۲، $V_{CNT}^* = 0/12, 0/17, 0/28$ قرار می‌گیرند. در مرجع [۳۶] خواص مکانیکی دو سیستم مرکب CNT/PmPV و CNT/PMMA مقایسه شده است. در این مقاله، پلیمر PmPV به عنوان فاز زمینه انتخاب شده است. خواص مکانیکی استفاده شده برای فازهای تقویت کننده و زمینه به ترتیب، به صورت زیر است [۲۷]: $E_{11}^{CNT} = 5/6466 \text{TPa}$ ، $E_{33}^{CNT} = 7/080 \text{TPa}$ ، $E_{11}^{CNT} = 5/6466 \text{TPa}$ ، $E_{33}^{CNT} = 7/080 \text{TPa}$ ، $G_{11}^{CNT} = 1/9445 \text{TPa}$ ، $\rho^{CNT} = 1400 \text{kg/m}^3$ ، $\nu_{11}^{CNT} = 0/175$ و $\nu_{33}^{CNT} = 0/175$ ، $E^m = 2/1 \text{GPa}$ ، $\nu^m = 0/34$ و $\rho^m = 1150 \text{kg/m}^3$. این خواص

2 . poly{(m-phenylenevinylene)-co-[(2,5-dioctoxy-p-phenylene)vinylene]} (PmPV)

3 . Poly(methyl methacrylate) (PMMA)



شکل ۵. تغییرات پنج فرکانس اول بی بعد $(\lambda = \omega L \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E)$ برای یک ورق تاخوردده مستطیلی همگن با شرط مرزی CFFF بر حسب سفتی نوار خمشی، $(\alpha = 150^\circ, \theta = 0^\circ, L/h = 50)$.

Fig. 5. Variation of first five non-dimensional frequency parameters $(\lambda = \omega L \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E)$ for CFFF homogeneous rectangular folded plates with respect to bending strip stiffness $(\alpha = 150^\circ, \theta = 0^\circ, L/h = 50)$.

می‌گیرد. پنج فرکانس اول بی بعد (λ) برای ورق تاخوردده یادشده با مشخصات هندسی $\alpha = 150^\circ, \theta = 0^\circ, L/h = 50$ و شرط مرزی CFFF بر حسب مقادیر مختلف سفتی نوار خمشی در شکل ۵ نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشخص است، هنگامی که $10^2 \leq E^{(bs)}/E \leq 10^7$ است، نتایج مطلوب به دست می‌آید. مثال بالا نشان می‌دهد که انتخاب مقادیر کم یا خیلی بالا برای سفتی نوار خمشی منجر به پاسخ اشتباه می‌شود. در همه مثال‌های این بخش که در ادامه می‌آید مقدار میانی بازه فوق، یعنی $E^{(bs)} = 10^6 E^m$ برای سفتی نوار خمشی انتخاب می‌گردد.

بعد از انتخاب یک مقدار مناسب برای سفتی نوار خمشی، می‌بایست همگرایی و دقت فرمول‌بندی پیشنهادی را بررسی نمود. این مطالعه در سه مرحله صورت می‌پذیرد. در مثال اول به عنوان یک حالت حدی، یک ورق صاف مربعی $(\alpha = 180^\circ, \theta = 0^\circ)$ را در نظر بگیرید که از مواد مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به صورت مدرج تابعی ساخته شده است. نتایج این مطالعه برای توزیع‌های متفاوت و کسرهای حجمی مختلف نانولوله‌های کربنی برای نسبت ضخامت به طول $L/h = 50$ و شرط مرزی SSSS در جدول ۱ داده شده است. همان‌طور که معلوم است، نرخ همگرایی روش عددی بسیار

در دمای اتاق (۳۰۰ کلوین) ارزیابی شده‌اند. پارامترهای کمکی نانولوله‌های کربنی نیز عبارتند از [۳۹]: $\eta_r = 0.934, \eta_l = 0.149$ و $\eta_r = 0.934$ و $\eta_l = 0.149$ برای حالت $V_{CNT}^* = 0.11$ و $\eta_r = 0.941$ و $\eta_l = 0.150$ و $V_{CNT}^* = 0.14$ برای حالت $\eta_r = 0.941$ و $\eta_l = 0.149$ و $V_{CNT}^* = 0.17$ برای حالت $\eta_r = 0.941$ و $\eta_l = 0.149$ و $V_{CNT}^* = 0.17$.

همچنین فرکانس‌های بی‌بعد مورد استفاده در این بخش به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda = \omega L \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$$

$$\bar{\omega} = \omega(L^2/h) \sqrt{\rho^m/E^m}$$

$$\Omega = \omega(L^2/\pi^2) \sqrt{\rho h/D_0}$$

$$\hat{\omega} = \omega(L^2/\pi^2 h) \sqrt{\rho^m/E^m}$$

همان‌طور که گفته شد ابتدا می‌بایست یک مقدار مناسب برای سفتی نوار خمشی به دست آید. بدین منظور یک ورق تاخوردده را در نظر بگیرید که از مواد همگن با مدول یانگ E ساخته شده است. سفتی نوار خمشی به صورت $E^{(bs)} = 10^\mu \times E$ انتخاب می‌شود و محاسبات برای مقادیر مختلف μ ($\mu = 0, 1, 2, \dots, 12$) صورت

جدول ۱. مطالعه همگرایی و مقایسه فرکانس اصلی بی بعد $(\bar{\omega}_1 = \omega_1 (L^2/h) \sqrt{\rho^m/E^m})$ برای ورق مربعی ساخته شده از مواد مرکب تقویت شده با نانولوله های کربنی به صورت مدرج تابعی و با شرط مرزی SSSS برای توزیع های متفاوت و کسرهای حجمی مختلف نانولوله های کربنی $(\alpha = 180^\circ, \theta = 0^\circ, L/h = 50)$

Table 1. Convergence and comparison study of non-dimensional fundamental frequency parameter $(\bar{\omega}_1 = \omega_1 (L^2/h) \sqrt{\rho^m/E^m})$ for various types of simply supported FG-CNTRC square plates with different CNTs volume fractions, $(\alpha = 180^\circ, \theta = 0^\circ, L/h = 50)$

توزیع شکل X	توزیع شکل O	توزیع شکل V	توزیع یکنواخت	تعداد المان ها در هر راستا	روش	کسر حجمی
۲۳/۶۴۶۱	۱۴/۴۲۹۴	۱۶/۴۴۸۳	۱۹/۵۸۲۶	۱	آیزوژئومتریک (تئوری کلاسیک)	۰/۱۱
۲۳/۶۴۴۶	۱۴/۴۲۸۴	۱۶/۴۴۷۱	۱۹/۵۸۱۳	۳		
۲۳/۶۴۴۶	۱۴/۴۲۸۴	۱۶/۴۴۷۱	۱۹/۵۸۱۳	۵		
۲۳/۶۴۴۶	۱۴/۴۲۸۴	۱۶/۴۴۷۱	۱۹/۵۸۱۳	۷		
۲۳/۶۴۴۶	۱۴/۴۲۸۴	۱۶/۴۴۷۱	۱۹/۵۸۱۳	۹		
۲۲/۹۸۴	۱۴/۳۰۲	۱۶/۲۵۲	۱۹/۲۲۳		المان محدود (تئوری مرتبه اول برشی) [۴۰]	
۲۶/۵۲۰۹	۱۶/۰۰۷۰	۱۸/۳۰۱۷	۲۱/۸۹۷۴	۱	آیزوژئومتریک (تئوری کلاسیک)	۰/۱۴
۲۶/۵۱۹۲	۱۶/۰۰۵۹	۱۸/۳۰۰۴	۲۱/۸۹۵۹	۳		
۲۶/۵۱۹۲	۱۶/۰۰۵۹	۱۸/۳۰۰۴	۲۱/۸۹۵۹	۵		
۲۶/۵۱۹۲	۱۶/۰۰۵۹	۱۸/۳۰۰۴	۲۱/۸۹۵۹	۷		
۲۶/۵۱۹۲	۱۶/۰۰۵۹	۱۸/۳۰۰۴	۲۱/۸۹۵۹	۹		
۲۵/۵۵۵	۱۵/۸۰۱	۱۷/۹۹۵	۲۱/۳۵۴		المان محدود (تئوری مرتبه اول برشی) [۴۰]	
۲۹/۱۸۰۹	۱۷/۶۹۵۸	۲۰/۲۰۹۵	۲۴/۱۱۷۳	۱	آیزوژئومتریک (تئوری کلاسیک)	۰/۱۷
۲۹/۱۷۹۱	۱۷/۶۹۴۵	۲۰/۲۰۸۰	۲۴/۱۱۵۷	۳		
۲۹/۱۷۹۱	۱۷/۶۹۴۵	۲۰/۲۰۸۰	۲۴/۱۱۵۷	۵		
۲۹/۱۷۹۱	۱۷/۶۹۴۵	۲۰/۲۰۸۰	۲۴/۱۱۵۷	۷		
۲۹/۱۷۹۱	۱۷/۶۹۴۵	۲۰/۲۰۸۰	۲۴/۱۱۵۷	۹		
۲۸/۴۱۳	۱۷/۵۴۴	۱۹/۹۸۲	۲۳/۶۹۷		المان محدود (تئوری مرتبه اول برشی) [۴۰]	

CFCF و مشخصات هندسی $\alpha = 15^\circ, \theta = 0^\circ, L/h = 100$ را در نظر بگیرید. پنج فرکانس اول بی بعد (λ) برای این ورق در جدول ۲ ارائه شده است. علاوه بر نتایج حاضر، نتایج گزارش شده توسط هرناندز و هرولا-نیتو [۱۳] که بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی به دست آمده نیز در این جدول نمایش داده شده است. ایشان از روش المان محدود برای استخراج نتایج استفاده کردند. همان طور که معلوم است، همگرایی روش عددی حاضر بسیار خوب بوده و همچنین انطباق نزدیکی بین نتایج حاصل از دو روش عددی وجود

خوب بوده و تنها ۷ نقطه کنترلی در هر راستا $(N_\xi = N_\eta = 3)$ برای به دست آوردن نتایج دقیق و همگرا شده کافی است. همچنین، مقادیر حاصل با نتایج قبلی به دست آمده توسط ژو^۱ و همکاران [۴۰] به وسیله روش المان محدود بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی مقایسه گردیده است. همان طور که از داده های جدول معلوم است، انطباق خوب و قابل قبولی بین نتایج وجود دارد.

به عنوان مثال دوم یک ورق تاخوردده همگن با شرط مرزی

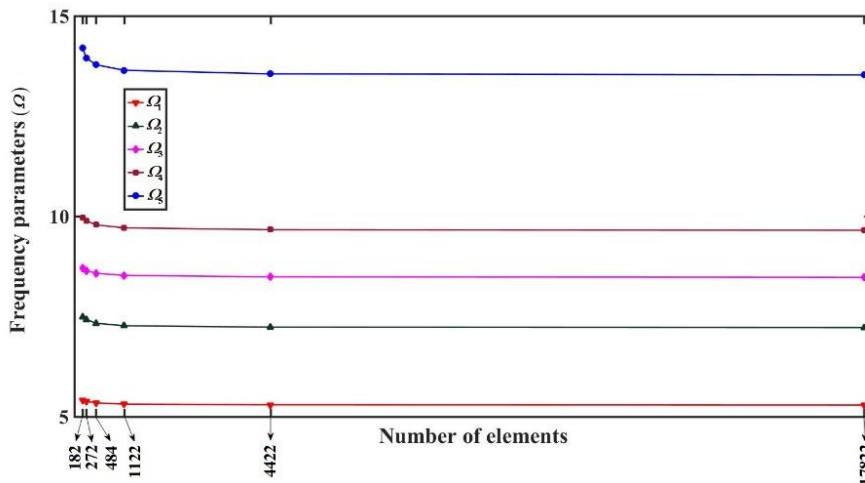
1 Zhu

جدول ۲. مطالعه همگرایی و مقایسه پنج فرکانس اول بی‌بعد ($\lambda = \omega L \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$) برای ورق تاخوردۀ مستطیلی همگن با شرط مرزی CFCF.

$$\lambda = \omega L \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E} \text{ for CFCF}$$

Table 2. Convergence and comparison study of non-dimensional first five frequency parameters ($\lambda = \omega L \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$) for CFCF homogeneous rectangular folded plates, $\lambda = \omega L \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ for CFCF

λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	تعداد المان‌ها در هر راستا	روش
۰/۱۸۰۴۴	۰/۲۹۴۸	۰/۲۳۴۲	۰/۰۸۹۸	۰/۰۷۶۵	۱	آیزوژئومتریک (تئوری کلاسیک)
۰/۲۳۰۸	۰/۲۰۵۴	۰/۱۹۷۴	۰/۰۸۹۵	۰/۰۷۶۴	۳	
۰/۲۳۰۵	۰/۲۰۲۳	۰/۱۹۴۱	۰/۰۸۹۴	۰/۰۷۶۳	۵	
۰/۲۳۰۴	۰/۲۰۲۲	۰/۱۹۴۰	۰/۰۸۹۴	۰/۰۷۶۳	۷	
۰/۲۳۰۴	۰/۲۰۲۱	۰/۱۹۴۰	۰/۰۸۹۴	۰/۰۷۶۳	۹	
۰/۲۳۰۴	۰/۲۰۲۱	۰/۱۹۴۰	۰/۰۸۹۴	۰/۰۷۶۳	۱۱	
۰/۲۳۰۷	۰/۲۰۲۶	۰/۱۹۴۶	۰/۰۸۹۳	۰/۰۷۶۳		المان محدود (تئوری مرتبه اول برشی) [۱۳]



شکل ۶. رفتار همگرایی پنج فرکانس اول بی‌بعد ($\Omega = \omega(L^2/\pi^2) \sqrt{\rho h/D_0}$) به‌دست‌آمده توسط نرم‌افزار آباکوس برای یک ورق تاخوردۀ مورب همگن با شرط مرزی SSSS، ($\alpha = 90^\circ$, $\theta = 15^\circ$, $L/h = 100$).

Fig. 6. Convergence behavior of non-dimensional first five frequency parameters ($\Omega = \omega(L^2/\pi^2) \sqrt{\rho h/D_0}$) for SSSS homogeneous skew folded plates obtained by ABAQUS, ($\alpha = 90^\circ$, $\theta = 15^\circ$, $L/h = 100$)

ابتدا مدل هندسی مساله در نرم‌افزار سالیدورکس^۱ رسم گردیده و سپس این مدل وارد نرم‌افزار آباکوس شده است. خواص مکانیکی ورق تاخوردۀ همگن به صورت $E = 10/92 \text{ GPa}$ ، $\nu = 0/3$ و دانسیته آن نیز برابر $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ تعریف شده است. پس از تعیین نوع حل، شرایط مرزی مورد نظر با انتخاب لبه‌های مستقیم و زاویه‌دار ورق تاخوردۀ اعمال گردیده است. در مورد لبه‌های واقع‌شده بر روی

دارد که بازدهی محاسباتی بالای رویکرد آیزوژئومتریک حاضر را نشان می‌دهد.

پس از بررسی دقت و بازدهی روش پیشنهادی برای دو مساله موجود و متداول، نتایج استخراج‌شده از فرمول‌بندی موجود برای ورق‌های تاخوردۀ مورب گسترش می‌یابد. از آنجاییکه نتایجی برای این حالت موجود نیست، ابتدا نتایج حاضر با نتایج حاصل از شبیه‌سازی با نرم‌افزار آباکوس برای یک ورق تاخوردۀ همگن مقایسه گردیده است.

1 . SolidWorks

جدول ۳. پنج فرکانس اول بی‌بعد ($\Omega = \omega(L^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D_0}$) برای ورق تاخوردۀ مورب همگن با شرط مرزی SSSS با سه زاویۀ تاخوردگی و دو زاویۀ مورب مختلف، ($L/h = 100$)

Table 3. Non-dimensional first five frequency parameters ($\Omega = \omega(L^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D_0}$) for SSSS homogeneous skew folded plates with three different crank angles and two different skew angles, ($L/h = 100$)

Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	روش	زاویۀ مورب (θ)	زاویۀ تاخوردگی (α)
۱۳/۸۰۷۸	۹/۸۰۰۲	۸/۶۳۵۲	۷/۲۷۸۶	۵/۳۵۷۳	آیزوژئومتریک	۱۵°	۹۰°
۱۳/۵۵۴۳	۹/۶۶۵۲	۸/۴۸۸۱	۷/۲۳۳۳	۵/۲۹۴۴	آباکوس*		
(۱/۸۷)	(۱/۴۰)	(۱/۷۳)	(۰/۶۳)	(۱/۱۹)**			
۱۹/۰۵۳۰	۱۵/۵۰۷۳	۱۴/۳۱۲۴	۱۱/۹۰۵۶	۹/۹۲۸۵	آیزوژئومتریک	۴۵°	
۱۸/۵۰۷۲	۱۵/۲۳۴۳	۱۴/۰۴۱۳	۱۱/۸۶۲۱	۹/۷۲۱۲	آباکوس*		
(۲/۹۵)	(۱/۷۹)	(۱/۹۳)	(۰/۳۷)	(۲/۱۳)			
۱۳/۸۱۴۶	۹/۸۱۶۱	۸/۶۴۲۰	۷/۲۹۸۱	۵/۳۵۹۳	آیزوژئومتریک	۱۵°	۱۲۰°
۱۳/۵۳۷۱	۹/۶۰۷۹	۸/۴۸۱۰	۷/۱۸۳۶	۵/۳۰۰۸	آباکوس*		
(۲/۰۵)	(۲/۱۷)	(۱/۹۰)	(۱/۵۹)	(۱/۱۰)			
۱۹/۰۷۵۸	۱۵/۶۲۹۷	۱۴/۳۷۷۵	۱۱/۹۹۵۱	۹/۹۵۶۵	آیزوژئومتریک	۴۵°	
۱۸/۴۹۶۴	۱۵/۰۱۴۷	۱۳/۹۳۷۵	۱۱/۷۵۵۲	۹/۷۱۸۰	آباکوس*		
(۳/۱۳)	(۴/۱۰)	(۳/۱۶)	(۲/۰۴)	(۲/۴۵)			
۱۳/۷۷۵۵	۹/۷۴۲۲	۸/۶۱۹۹	۷/۲۳۵۹	۵/۳۵۸۰	آیزوژئومتریک	۱۵°	۱۵۰°
۱۳/۳۹۵۱	۹/۲۸۴۵	۸/۴۰۷۸	۶/۸۹۰۱	۵/۳۰۰۹	آباکوس*		
(۲/۸۴)	(۴/۹۳)	(۲/۵۲)	(۵/۰۲)	(۱/۰۸)			
۱۸/۹۹۰۱	۱۵/۳۳۲۰	۱۴/۲۰۹۸	۱۱/۸۱۸۷	۹/۹۲۷۴	آیزوژئومتریک	۴۵°	
۱۸/۳۵۲۵	۱۳/۹۴۶۴	۱۳/۴۵۵۰	۱۱/۱۶۰۶	۹/۶۱۴۹	آباکوس*		
(۳/۴۷)	(۹/۹۴)	(۵/۶۱)	(۵/۹۰)	(۳/۲۵)			

نوع المان: S4R، تعداد المان‌ها: ۴۴۲۲

** درصد تفاوت نسبی

المان برای استخراج نتایج همگرا شده کافی است. جداول ۳ و ۴ نیز پنج فرکانس اول بی‌بعد (Ω) ورق‌های تاخوردۀ مورب همگن را به ازای سه زاویۀ تاخوردگی و دو زاویۀ مورب مختلف به ترتیب برای دو شرط مرزی SSSS و CCCC نشان می‌دهد. در این جدول، همچنین نتایج تولیدشده به وسیله نرم‌افزار آباکوس که با تعداد المان ۴۴۲۲ المان به‌دست‌آمده نیز ارائه شده است. علاوه بر این، مقادیر تفاوت نسبی در هر حالت نیز در پرانتز گزارش شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود انطباق بسیار خوب و قابل‌قبولی بین هر دو مجموعه نتایج وجود دارد که نشان‌دهندۀ دقت و کارایی بالای روش پیشنهادی است. پس از اطمینان از همگرایی روش عددی و همچنین صحت

تکیه‌گاه ساده، هر سه مولفه جابجایی برابر صفر در نظر گرفته شده است. همچنین در مورد تکیه‌گاه گیردار، علاوه بر مولفه‌های جابجایی، هر سه مولفه چرخش نیز برابر صفر فرض شده است. سپس هندسه مسالۀ با استفاده از المان پوسته S4R مش‌بندی شده است. به منظور اطمینان از همگرایی نتایج استخراج‌شده، هندسه مورد نظر در یکی از حالت‌ها با شش اندازه مختلف مش‌بندی شده و در هر حالت فرکانس‌های طبیعی ورق تاخوردۀ مورب محاسبه گردیده است. شکل ۶ همگرایی پنج فرکانس اول بی‌بعد (Ω) را برای یک ورق تاخوردۀ مورب همگن با شرط مرزی SSSS به ترتیب برای زوایای تاخوردگی و مورب $\alpha = 90^\circ$ و $\theta = 15^\circ$ نشان می‌دهد. به وضوح، تعداد ۴۴۲۲

جدول ۴. پنج فرکانس اول بی بعد $(\Omega = \omega(L^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D_0})$ برای ورق تاخوردۀ مورب همگن با شرط مرزی CCCC با سه زاویه تاخوردگی و دو زاویه مورب مختلف، $(L/h = 100)$

Table 3. Non-dimensional first five frequency parameters $(\Omega = \omega(L^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D_0})$ for CCCC homogeneous skew folded plates with three different crank angles and two different skew angles, $(L/h = 100)$

Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	روش	زاویه مورب (θ)	زاویه تاخوردگی (α)
۱۷/۷۷۸۲	۱۳/۲۵۴۱	۱۱/۸۳۸۹	۱۰/۳۳۶۷	۷/۹۶۳۹	آیزوژئومتریکی	۱۵°	۹۰°
۱۷/۴۵۷۴	۱۳/۰۸۸۹	۱۱/۶۷۰۵	۱۰/۲۵۰۹	۷/۸۷۹۴	آباکوس*		
(۱/۸۴)	(۱/۲۶)	(۱/۴۴)	(۰/۸۴)	(۱/۰۷)**			
۲۵/۵۰۶۵	۲۱/۲۹۷۹	۱۹/۹۶۱۵	۱۷/۱۴۲۱	۱۴/۶۸۹۵	آیزوژئومتریکی	۴۵°	
۲۴/۸۵۶۸	۲۱/۰۶۱۹	۱۹/۶۵۳۱	۱۶/۹۹۳۳	۱۴/۴۵۹۵	آباکوس*		
(۲/۶۱)	(۱/۱۲)	(۱/۵۷)	(۰/۸۸)	(۱/۵۹)			
۱۷/۷۸۶۱	۱۳/۲۷۱۳	۱۱/۸۴۷۷	۱۰/۳۵۷۴	۷/۹۶۷۴	آیزوژئومتریکی	۱۵°	۱۲۰°
۱۷/۴۳۰۶	۱۲/۹۹۳۴	۱۱/۶۵۲۷	۱۰/۱۵۷۳	۷/۸۹۰۹	آباکوس*		
(۲/۰۴)	(۲/۱۴)	(۱/۶۷)	(۱/۹۷)	(۰/۹۷)			
۲۵/۵۵۱۳	۲۱/۴۵۲۲	۲۰/۰۵۷۸	۱۷/۲۵۰۶	۱۴/۷۲۷۲	آیزوژئومتریکی	۴۵°	
۲۴/۸۳۵۸	۲۰/۶۷۵۵	۱۹/۴۹۹۰	۱۶/۸۱۰۶	۱۴/۴۵۷۶	آباکوس*		
(۲/۸۸)	(۳/۷۶)	(۲/۸۷)	(۲/۶۲)	(۱/۸۶)			
۱۷/۷۲۹۰	۱۳/۱۴۸۵	۱۱/۸۰۷۳	۱۰/۲۳۶۲	۷/۹۶۵۹	آیزوژئومتریکی	۱۵°	۱۵۰°
۱۷/۲۱۶۷	۱۲/۴۵۷۴	۱۱/۵۲۷۹	۹/۵۸۴۹	۷/۸۹۰۹	آباکوس*		
(۲/۹۸)	(۵/۵۵)	(۲/۴۲)	(۶/۸۰)	(۰/۹۵)			
۲۵/۴۳۵۶	۲۰/۹۳۹۴	۱۹/۸۱۶۴	۱۶/۹۲۳۷	۱۴/۶۸۰۰	آیزوژئومتریکی	۴۵°	
۲۴/۵۹۱۳	۱۸/۹۰۹۵	۱۸/۷۳۱۹	۱۵/۶۴۲۴	۱۴/۲۵۹۶	آباکوس*		
(۳/۴۳)	(۱۰/۷۳)	(۵/۷۹)	(۸/۱۹)	(۲/۹۵)			

نوع المان: S4R، تعداد المان‌ها: ۴۴۲۲
** درصد تفاوت نسبی

توزیع، با افزایش کسر حجمی نانولوله‌ها، سفتی ورق تاخوردۀ مورب و متعاقباً فرکانس اصلی سازه افزایش می‌یابد. علاوه بر این، همان‌گونه که مشاهده می‌شود به ازای یک هندسه و کسر حجمی معین، توزیع شکل X بیشترین و توزیع شکل O کمترین مقدار فرکانس طبیعی را به دست می‌دهد. این امر بدین معنی است که توزیع بیشتر نانولوله‌ها در لبه‌های بالایی و پایینی به جای سطوح میانی ورق، باعث افزایش سفتی خمشی و متعاقباً افزایش فرکانس طبیعی ورق تاخوردۀ مورب می‌شود. در نتیجه می‌توان گفت که انتخاب مناسب نحوه توزیع و کسر حجمی نانولوله‌های کربنی می‌تواند ویژگی‌های ارتعاشی سازه

فرمول‌بندی پیشنهادی، مساله ارتعاشات آزاد ورق‌های تاخوردۀ مورب ساخته‌شده از مواد مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. جدول ۵ فرکانس اصلی بی‌بعد $(\hat{\omega}_1)$ ورق‌های تاخوردۀ مورب را برای الگوهای توزیع مختلف نانولوله‌ها و نیز کسرهای حجمی متفاوت به ازای تغییر زاویه مورب از $\theta = 15^\circ$ تا $\theta = 75^\circ$ نشان می‌دهد. داده‌های این جدول برای دو زاویه تاخوردگی یعنی $\alpha = 12^\circ$ و $\alpha = 15^\circ$ و نیز دو شرط مرزی SSSS و CCCC ارائه شده است. بر طبق داده‌های این دو جدول چندین نتیجه را می‌توان بیان نمود. به ازای یک هندسه و شرط مرزی معین، در تمامی الگوهای

جدول ۵. فرکانس اصلی بی‌بعد $(\hat{\omega}_1 = \omega_1 (L^2/\pi^2 h) \sqrt{\rho^m/E^m})$ برای ورق تاخوردۀ مورب مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی برای الگوهای توزیع و کسرهای حجمی مختلف و نیز زوایای تاخوردگی و مورب متفاوت، $(L/h = 50)$

Table 5. Non-dimensional fundamental frequency parameter $(\hat{\omega}_1 = \omega_1 (L^2/\pi^2 h) \sqrt{\rho^m/E^m})$ for simply supported and fully clamped FG-CNTRC skew folded plates with different distribution patterns and volume fractions as well as different crank and skew angles, $(L/h = 50)$

زاویه مورب (θ)					کسر حجمی	نحوه توزیع	زاویه تاخوردگی (α)	شرط مرزی
75°	60°	45°	30°	15°				
۲۳/۳۷۰۴	۱۰/۰۴۲۲	۸/۲۵۴۲	۷/۸۵۴۷	۷/۷۳۸۱	۰/۱۱	یکنواخت	120°	SSSS
۲۴/۲۸۹۲	۱۰/۸۸۹۳	۹/۱۷۲۸	۸/۷۹۹۱	۸/۶۹۱۱	۰/۱۴			
۲۹/۱۳۱۷	۱۲/۴۳۱۲	۱۰/۱۷۶۲	۹/۶۷۱۲	۹/۵۲۳۷	۰/۱۷			
۲۴/۸۱۷۴	۱۱/۵۳۳۷	۹/۸۶۶۸	۹/۵۰۹۷	۹/۴۰۷۳	۰/۱۱	شکل X		
۲۶/۱۱۸۶	۱۲/۶۳۶۱	۱۱/۰۱۷۸	۱۰/۶۷۸۶	۱۰/۵۸۲۲	۰/۱۴			
۳۱/۴۸۶۶	۱۴/۳۸۴۴	۱۲/۲۰۰۸	۱۱/۷۳۰۳	۱۱/۵۹۵۴	۰/۱۷			
۲۱/۹۴۴۷	۸/۲۸۲۹	۶/۲۳۸۳	۵/۷۴۱۱	۵/۵۹۰۱	۰/۱۱	شکل O		
۲۲/۵۰۳۶	۸/۸۱۹۵	۶/۸۵۴۰	۶/۳۹۰۴	۶/۲۵۱۶	۰/۱۴			
۲۷/۰۰۷۹	۱۰/۱۷۴۸	۷/۶۵۳۵	۷/۰۳۹۸	۶/۸۵۳۵	۰/۱۷			
۲۲/۵۷۴۷	۸/۹۲۹۰	۶/۹۴۹۲	۶/۴۷۷۹	۶/۳۳۶۲	۰/۱۱	شکل V		
۲۳/۳۷۰۹	۹/۵۹۱۱	۷/۶۶۸۵	۷/۲۲۳۰	۷/۰۹۰۸	۰/۱۴			
۲۸/۲۵۴۴	۱۱/۰۶۹۲	۸/۵۵۴۸	۷/۹۵۳۱	۷/۷۷۱۹	۰/۱۷			
۲۲/۲۶۰۶	۱۰/۰۱۷۵	۸/۲۵۳۹	۷/۸۵۶۹	۷/۷۴۰۷	۰/۱۱	یکنواخت	150°	
۲۳/۳۲۲۷	۱۰/۸۶۷۹	۹/۱۷۳۲	۸/۸۰۱۷	۸/۶۹۴۱	۰/۱۴			
۲۷/۷۰۸۱	۱۲/۳۹۹۵	۱۰/۱۷۵۷	۹/۶۷۳۹	۹/۵۲۶۹	۰/۱۷			
۲۳/۵۹۷۴	۱۱/۵۱۱۴	۹/۸۶۸۹	۹/۵۱۴۲	۹/۴۱۲۱	۰/۱۱	شکل X		
۲۵/۰۱۷۸	۱۲/۶۱۶۹	۱۱/۰۲۰۹	۱۰/۶۸۳۷	۱۰/۵۸۷۶	۰/۱۴			
۲۹/۷۰۲۰	۱۴/۳۵۳۱	۱۲/۲۰۳۱	۱۱/۷۳۵۸	۱۱/۶۰۱۳	۰/۱۷			
۲۰/۹۰۹۰	۸/۲۵۵۸	۶/۲۳۵۸	۵/۷۴۱۵	۵/۵۹۱۰	۰/۱۱	شکل O		
۲۱/۶۳۰۸	۸/۷۹۵۸	۶/۸۵۲۱	۶/۳۹۱۰	۶/۲۵۲۷	۰/۱۴			
۲۵/۷۵۱۶	۱۰/۱۴۱۷	۷/۶۵۰۴	۷/۰۴۰۳	۶/۸۵۴۶	۰/۱۷			
۲۱/۴۶۳۴	۸/۹۵۰۴	۶/۹۹۹۳	۶/۵۲۹۸	۶/۳۸۸۱	۰/۱۱	شکل V		
۲۲/۳۹۴۰	۹/۶۲۳۰	۷/۷۲۵۸	۷/۲۸۱۷	۷/۱۴۹۳	۰/۱۴			
۲۶/۸۱۹۱	۱۱/۰۹۳۹	۸/۶۱۶۴	۸/۰۱۷۲	۷/۸۳۶۰	۰/۱۷			
۳۴/۰۸۵۳	۱۵/۱۳۹۳	۱۲/۷۳۳۸	۱۲/۲۰۹۷	۱۲/۰۵۶۹	۰/۱۱	یکنواخت	120°	CCCC
۳۵/۴۵۳۶	۱۶/۴۷۱۲	۱۴/۱۷۷۱	۱۳/۶۸۸۹	۱۳/۵۴۷۸	۰/۱۴			
۴۲/۴۸۱۴	۱۸/۷۳۰۵	۱۵/۶۹۴۵	۱۵/۰۳۱۶	۱۴/۸۳۸۴	۰/۱۷			
۳۶/۲۴۲۳	۱۷/۴۸۴۴	۱۵/۲۶۵۳	۱۴/۸۰۰۰	۱۴/۶۶۶۵	۰/۱۱	شکل X		
۳۸/۱۸۱۵	۱۹/۲۱۱۱	۱۷/۰۶۸۸	۱۶/۶۲۸۴	۱۶/۵۰۲۹	۰/۱۴			
۴۵/۹۵۹۰	۲۱/۷۷۷۹	۱۸/۸۶۵۴	۱۸/۲۵۲۰	۱۸/۰۷۶۱	۰/۱۷			
۳۱/۹۴۵۰	۱۲/۳۶۲۳	۹/۵۵۵۵	۸/۸۹۳۲	۸/۶۹۳۶	۰/۱۱	شکل O		
۳۲/۷۷۱۴	۱۳/۲۰۶۰	۱۰/۵۲۷۱	۹/۹۱۳۰	۹/۷۳۰۲	۰/۱۴			
۳۹/۳۱۳۸	۱۵/۱۸۳۹	۱۱/۷۲۲۰	۱۰/۹۰۴۴	۱۰/۶۵۸۰	۰/۱۷			

۳۳/۱۳۶۳	۱۳/۴۹۸۸	۱۰/۷۸۹۰	۱۰/۱۶۶۹	۹/۹۸۳۴	۰/۱۱	شکل V
۳۴/۳۴۴۶	۱۴/۵۵۳۰	۱۱/۹۳۹۱	۱۱/۳۵۴۲	۱۱/۱۸۳۴	۰/۱۴	
۴۱/۴۶۳۰	۱۶/۷۲۱۳	۱۳/۲۷۶۰	۱۲/۴۸۱۲	۱۲/۲۴۶۲	۰/۱۷	
۳۰/۴۲۰۳	۱۵/۱۲۰۳	۱۲/۷۳۹۰	۱۲/۲۱۵۹	۱۲/۰۶۳۱	۰/۱۱	یکنواخت ۱۵۰°
۳۲/۶۱۳۳	۱۶/۴۵۷۹	۱۴/۱۸۳۴	۱۳/۶۹۵۸	۱۳/۵۵۴۷	۰/۱۴	
۳۷/۷۳۰۳	۱۸/۷۰۵۴	۱۵/۷۰۰۸	۱۵/۰۳۹۱	۱۴/۸۴۵۹	۰/۱۷	
۳۱/۴۰۱۴	۱۷/۴۷۱۲	۱۵/۲۷۵۸	۱۴/۸۱۱۲	۱۴/۶۷۷۶	۰/۱۱	شکل X
۳۳/۹۳۲۳	۱۹/۲۰۳۶	۱۷/۰۸۱۰	۱۶/۶۴۱۱	۱۶/۵۱۵۵	۰/۱۴	
۳۹/۲۸۸۹	۲۱/۷۵۷۰	۱۸/۸۷۸۲	۱۸/۲۶۵۹	۱۸/۰۸۹۹	۰/۱۷	
۲۹/۲۷۹۰	۱۲/۳۳۶۷	۹/۵۵۶۱	۸/۸۹۵۴	۸/۶۹۵۹	۰/۱۱	شکل O
۳۱/۰۳۸۸	۱۳/۱۸۶۰	۱۰/۵۲۸۴	۹/۹۱۵۵	۹/۷۳۲۷	۰/۱۴	
۳۶/۰۸۳۸	۱۵/۱۵۲۵	۱۱/۷۲۲۶	۱۰/۹۰۷۱	۱۰/۶۶۰۷	۰/۱۷	
۳۰/۱۲۳۷	۱۳/۵۲۳۵	۱۰/۸۳۴۷	۱۰/۲۱۲۳	۱۰/۰۲۸۴	۰/۱۱	شکل V
۳۲/۱۸۳۴	۱۴/۵۸۸۴	۱۱/۹۹۰۸	۱۱/۴۰۵۳	۱۱/۲۳۴۱	۰/۱۴	
۳۷/۴۵۰۸	۱۶/۷۵۰۰	۱۳/۳۳۲۳	۱۲/۵۳۷۳	۱۲/۳۰۱۶	۰/۱۷	

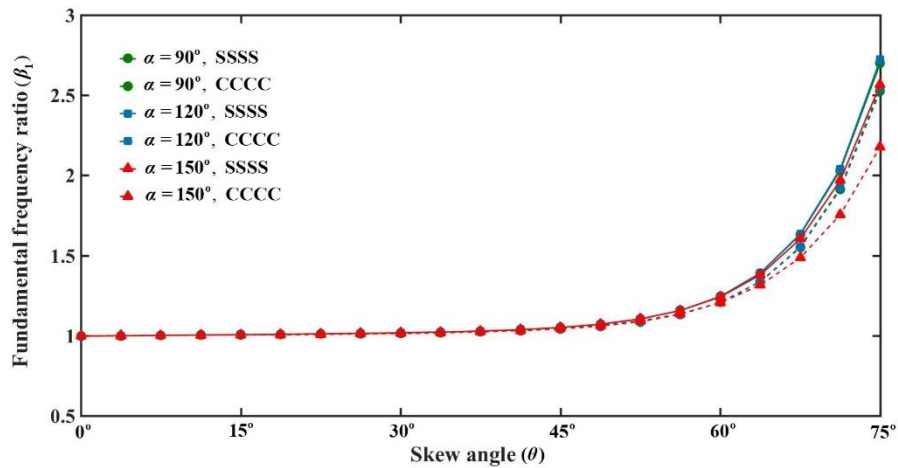
SSSS و CCCC نمایش داده شده است. نسبت فرکانسی به صورت نسبت فرکانس طبیعی آام ورق تاخورد مورب به فرکانس طبیعی متناظر ورق تاخورد مستطیلی ($\theta = 0^\circ$) تعریف شده و با نماد β ($\beta_i = \omega_i^{\text{skew}} / \omega_i^{\text{rectangular}}$) نشان داده می‌شود. با توجه به این شکل‌ها می‌توان گفت که نسبت فرکانسی اصلی همیشه بزرگتر از یک است. این امر بدین معنی است که فرکانس اصلی ورق تاخورد مورب همواره بزرگتر از ورق تاخورد مستطیلی است. به علاوه همان‌طور که دیده می‌شود، رفتار یکسانی برای تغییرات نسبت فرکانس اصلی در همه الگوها وجود دارد. در نتیجه می‌توان گفت برای هر سه توزیع یادشده و در همه زوایای تاخوردگی، به ازای زوایای مورب بالا ($\theta \geq 45^\circ$) این نسبت به طور قابل‌ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. این نتیجه برای هر دو شرط مرزی بیان‌شده صحیح است. همچنین همان‌طور که دیده می‌شود، در زوایای مورب پایین، اثر زاویه تاخوردگی و همچنین شرط مرزی بر نسبت فرکانس اصلی بسیار ناچیز است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات آزاد ورق‌های تاخورد مورب ساخته‌شده از مواد مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به صورت مدرج تابعی با استفاده از روش آیزوژئومتریک مورد بررسی قرار گرفت. خواص

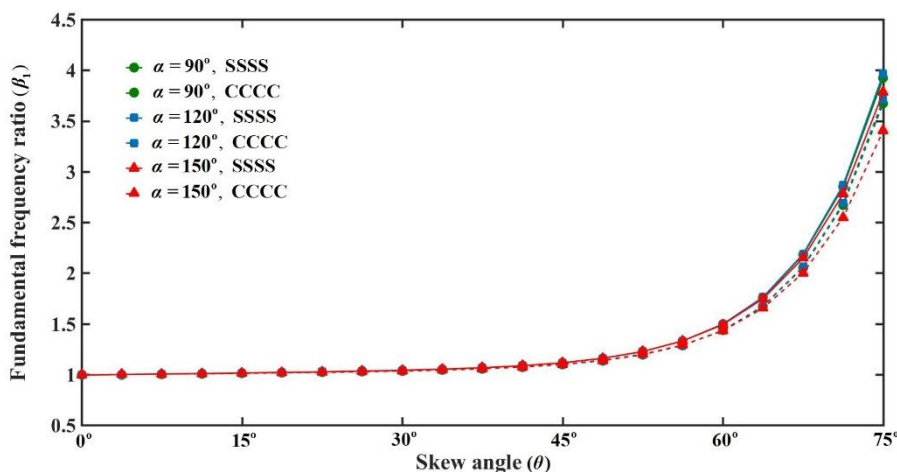
را بدون تغییر در هندسه بهبود بخشید. این نتایج توسط محققین پیشین نیز گزارش شده است که از آن جمله می‌توان به مراجع [۴۲] و [۴۱] اشاره کرد. استفاده از این نکات می‌تواند در زمینه‌های مرتبط با فرآیندهای طراحی و ساخت بسیار حائز اهمیت باشد. همچنین، همان‌گونه که دیده می‌شود، با ثابت‌بودن زاویه مورب (θ) و نیز پارامترهای مربوط به ماده ورق، فرکانس طبیعی ورق تاخورد مورب با تغییر زاویه تاخوردگی (α) چندان تغییر نمی‌کند. با این وجود، در همه الگوهای توزیع و به ازای یک کسر حجمی معین و نیز با فرض ثابت‌بودن زاویه تاخوردگی (α)، فرکانس اصلی ورق با افزایش زاویه مورب (θ) افزایش می‌یابد. این افزایش به نحوی است که در زوایای مورب بالا، نرخ افزایش فرکانس طبیعی خیلی بیشتر از نرخ افزایش در زوایای مورب پایین است. این امر ناشی از این حقیقت است که با افزایش زاویه مورب، مساحت ورق کاهش یافته و در نتیجه سفتی ورق افزایش می‌یابد. از این رو فرکانس طبیعی ورق تاخورد مورب افزایش پیدا می‌کند.

در نهایت تغییرات نسبت فرکانسی اصلی (β_1) نسبت به زاویه مورب (θ) برای سه الگوی FG-O، FG-X و FG-V در شکل‌های ۷ تا ۹ رسم شده است. این تغییرات برای سه زاویه تاخوردگی مختلف یعنی $\alpha = 90^\circ$ ، $\alpha = 120^\circ$ ، $\alpha = 150^\circ$ و همچنین دو شرط مرزی



شکل ۷. تغییرات نسبت فرکانسی اصلی (β_1) نسبت به زاویه مورب (θ) برای ورق تاخوردده مورب مرکب تقویت شده با نانولوله های کربنی با توزیع شکل X به ازای سه زاویه تاخوردگی مختلف و با شرایط مرزی SSSS و CCCC، $(V_{CNT}^* = 0.17, L/h = 50)$

Fig. 7. Variation of fundamental frequency ratio (β_1) with respect to skew angle (θ) for simply supported and fully clamped FG-X CNTRC skew folded plates with three different crank angles, $(V_{CNT}^* = 0.17, L/h = 50)$

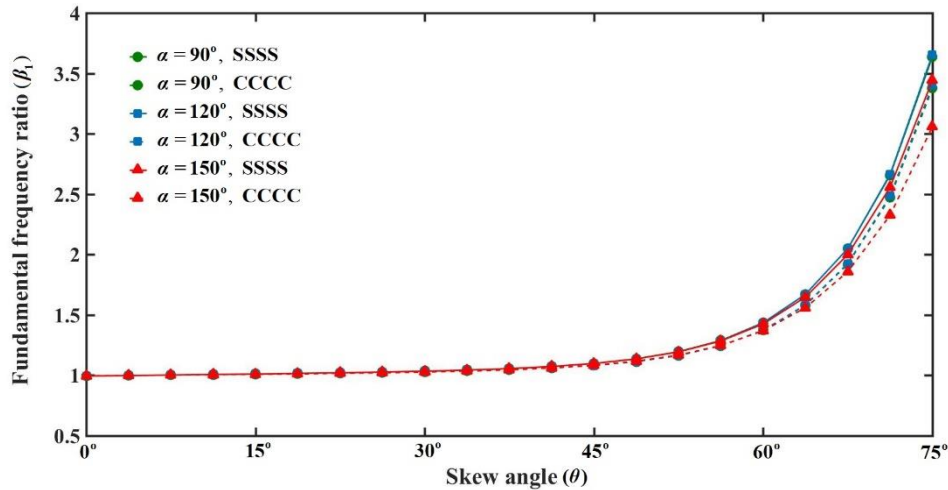


شکل ۸. تغییرات نسبت فرکانسی اصلی (β_1) نسبت به زاویه مورب (θ) برای ورق تاخوردده مورب مرکب تقویت شده با نانولوله های کربنی با توزیع شکل O به ازای سه زاویه تاخوردگی مختلف و با شرایط مرزی SSSS و CCCC، $(V_{CNT}^* = 0.17, L/h = 50)$

Fig. 8. Variation of fundamental frequency ratio (β_1) with respect to skew angle (θ) for simply supported and fully clamped FG-O CNTRC skew folded plates with three different crank angles, $(V_{CNT}^* = 0.17, L/h = 50)$

نیز، یک وصله بدون جرم به نام نوار خمشی در محل اتصال وصله های نریز قرار گرفت. نوار خمشی فاقد سفتی غشایی بوده و تنها در یک جهت دارای سفتی خمشی است. در بخش نتایج، رفتار همگرایی و صحت سنجی فرمول بندی پیشنهادی به طور همزمان در قالب چند

مکانیکی معادل این ورق ها با استفاده از قاعده مخلوط های توسعه یافته ارزیابی شد. مدلسازی این ورق ها با استفاده از دو وصله نریز صورت پذیرفت. معادلات حاکم بر هر وصله با استفاده از اصل کار مجازی و بر مبنای تئوری کلاسیک ارائه گردید. به منظور اعمال شرایط پیوستگی



شکل ۹. تغییرات نسبت فرکانسی اصلی (β_1) نسبت به زاویه مورب (θ) برای ورق تاخوردۀ مورب مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی با توزیع شکل V به ازای سه زاویه تاخوردگی مختلف و با شرایط مرزی SSSS و CCCC. $(V_{CNT}^* = 0.17, L/h = 50)$

Fig. 9. Variation of fundamental frequency ratio (β_1) with respect to skew angle (θ) for simply supported and fully clamped FG-V CNTRC skew folded plates with three different crank angles, $(V_{CNT}^* = 0.17, L/h = 50)$

تاخوردگی، نسبت فرکانسی اصلی در زوایای مورب بالا به سرعت افزایش می‌یابد.

در یک توزیع معین از نانولوله‌های کربنی و در زوایای مورب کوچک، حساسیت نسبت فرکانسی اصلی نسبت به تغییر زاویه تاخوردگی و شرط مرزی بسیار کم است.

۷- پیوست آ

نگاشت از مختصات فیزیکی به مختصات پارامتریک با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{n_{CP}} R_I(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} P_{Ix} \\ P_{Iy} \end{Bmatrix} \quad (\text{آ-۱})$$

در رابطه (آ-۱)، (P_{Ix}, P_{Iy}) مختصات جهانی نقطه کنترلی ام است.

و نگاشت از فضای پارامتریک به فضای مرجع به صورت زیر تعریف

می‌شود:

$$\begin{aligned} \xi(\tilde{\xi}) &= \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)\tilde{\xi} + (\xi_{i+1} + \xi_i)}{2} \\ \eta(\tilde{\eta}) &= \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)\tilde{\eta} + (\eta_{i+1} + \eta_i)}{2} \end{aligned} \quad (\text{آ-۲})$$

مثال هم برای سازه در حالت‌های حدی و هم برای سازه اصلی بررسی گردید. پس از اطمینان از سرعت، دقت و کارایی فرمول‌بندی، اثرات تغییر پارامترهای مرتبط با ماده و هندسه ورق تاخوردۀ مورب بر رفتار ارتعاشی آن مورد مطالعه قرار گرفت. با توجه به نتایج ارائه‌شده می‌توان گفت:

به ازای یک هندسه معین، در تمامی الگوهای توزیع، با افزایش کسر حجمی نانولوله‌ها، سفتی ورق تاخوردۀ مورب و متعاقباً فرکانس اصلی آن افزایش می‌یابد.

به ازای یک هندسه و کسر حجمی معین، توزیع شکل X بیشترین و توزیع شکل O کمترین مقدار فرکانس طبیعی را به دست می‌دهد. این امر بدین معنی است که قرار دادن نانولوله‌ها در لبه‌های بالایی و پایینی ورق، نسبت به توزیع نانولوله‌ها در صفحه میانی بسیار موثرتر است.

زاویه مورب اثر قابل توجهی بر فرکانس‌های طبیعی دارد که این امر، اهمیت مدلسازی ورق‌های تاخوردۀ مورب را برای اهداف طراحی نشان می‌دهد.

نسبت فرکانسی اصلی همواره بزرگتر از یک است. بدین معنی که فرکانس اصلی ورق تاخوردۀ مورب همیشه بیشتر از ورق تاخوردۀ مستطیلی است.

در یک توزیع معین از نانولوله‌های کربنی و برای همه زوایای

همچنین $(\bar{u}_{0I}, \bar{v}_{0I}, \bar{w}_{0I})$ و (u_{0I}, v_{0I}, w_{0I}) به ترتیب مقادیر جابجایی گرهی در مختصات محلی و جهانی هستند. علاوه بر این، کوچکترین زاویه بین محورهای \mathbf{X}_i و \mathbf{X}_j را نشان می‌دهد. با استفاده از قانون تبدیل، مولفه‌های ماتریس‌های مربوط به هر وصله، که در سیستم مختصات محلی وصله محاسبه شده‌اند را می‌توان به کمک روابط زیر به سیستم مختصات جهانی انتقال داد:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{M}} \mathbf{\Lambda}^T \\ \mathbf{K} &= \mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{K}} \mathbf{\Lambda}^T \end{aligned} \quad (\text{ب-۳})$$

که در آن $(\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{K}})$ و (\mathbf{M}, \mathbf{K}) به ترتیب ماتریس‌های سفتی و جرم را در مختصات محلی و جهانی نشان می‌دهد. همچنین $\mathbf{\Lambda}$ یک ماتریس تبدیل مختصات قطری به صورت زیر است:

$$[\mathbf{\Lambda}] = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & & & \\ & \cdot & & \mathbf{0} \\ & & \cdot & \\ & \mathbf{0} & & \cdot \\ & & & & \mathbf{T} \end{bmatrix}_{3 \times m \times n} \quad (\text{ب-۴})$$

مراجع

- [1] H. Shen, Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Structures*, 91(1) (2009) 9-19.
- [2] L. L. Ke, J. Yang, S. Kitipornchai, Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams, *Composite Structures*, 92 (2010) 676-683.
- [3] P. Malekzadeh, A. R. Zarei, Free vibration of quadrilateral laminated plates with carbon nanotube reinforced composite layers, *Thin-Walled Structures*, 82 (2014) 221-232.
- [4] A. Alibeigloo, Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel embedded in piezoelectric layers by using theory of elasticity, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 44 (2014) 104-115.
- [5] R. J. Jiang, F. T. K. Au, A general finite strip for the

در رابطه $(\bar{\mathbf{A}}-۲)$ ، $\tilde{\xi}$ و $\tilde{\eta}$ به ترتیب نقاط گوسی در راستاهای ξ و η هستند. همچنین (ξ_i, ξ_{i+1}) و (η_i, η_{i+1}) به ترتیب حدود بالا و پایین دهانه‌های گرهی غیرصفر را در دو راستای یاد شده نشان می‌دهد.

پس از اعمال نگاشت‌های مختصاتی بیان شده، از فرمول زیر برای انتگرال عددی تابع دلخواه f استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) dA &= \sum_{e=1}^{N_\xi \times N_\eta} \int_{\hat{A}^{(e)}} f(x, y) dA_e = \\ &= \sum_{e=1}^{N_\xi \times N_\eta} \int_{\hat{A}^{(e)}} f(\xi, \eta) |\mathbf{J}_{\xi\eta}^{22}| d\hat{A}_e \\ &= \sum_{e=1}^{N_\xi \times N_\eta} \int_{\hat{A}^{(e)}} f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) |\mathbf{J}_{\xi\eta}^{22}| |\mathbf{J}_{\tilde{\xi}\tilde{\eta}}| d\tilde{A}_e \end{aligned} \quad (\text{ب-۳})$$

که در آن $|\mathbf{J}_{\xi\eta}^{22}| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \times \frac{\partial y}{\partial \xi}$ و همچنین N_ξ و N_η به ترتیب تعداد المان‌ها را در دو راستای ξ و η نشان می‌دهد. علاوه بر این $d\hat{A}_e$ و $d\tilde{A}_e$ به ترتیب المان مساحت را در فضاهای فیزیکی، پارامتریک و مرجع نشان می‌دهد. شایان ذکر است که در این تحقیق، انتگرال نهایی با استفاده از تکنیک استاندارد گوس-لژاندر انجام می‌گیرد.

۸- پیوست ب

مطابق با شکل ۳، رابطه بین جابجایی‌های محلی و جهانی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} u_{0I} \\ v_{0I} \\ w_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(X, x_j) & \cos(X, y_j) & \cos(X, z_j) \\ \cos(Y, x_j) & \cos(Y, y_j) & \cos(Y, z_j) \\ \cos(Z, x_j) & \cos(Z, y_j) & \cos(Z, z_j) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{0I} \\ \bar{v}_{0I} \\ \bar{w}_I \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{Bmatrix} \bar{u}_{0I} \\ \bar{v}_{0I} \\ \bar{w}_I \end{Bmatrix} \quad (\text{ب-۱})$$

که در آن:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos(X, x_j) & \cos(X, y_j) & \cos(X, z_j) \\ \cos(Y, x_j) & \cos(Y, y_j) & \cos(Y, z_j) \\ \cos(Z, x_j) & \cos(Z, y_j) & \cos(Z, z_j) \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۲})$$

- of Functionally Graded Skew Folded Plates, Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering, (2019) <https://doi.org/10.1007/s40997-019-00320-0>.
- [16] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 (2005) 4135-4195.
- [17] P. Phung-Van, M. Abdel-Wahab, K.M. Liew, S.P.A. Bordas, H. Nguyen-Xuan, Isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using higher-order shear deformation theory, *Composite Structures*, 123 (2015) 137-149.
- [18] P. Phung-Van, Qui X. Lieu, H. Nguyen-Xuan, M. Abdel Wahab, Size-dependent isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite nanoplates, *Composite Structures*, 166 (2017) 120-135.
- [19] M. Memar Ardestani, L.W. Zhang, K.M. Liew, Isogeometric analysis of the effect of CNT orientation on the static and vibration behaviors of CNT-reinforced skew composite plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 317 (2017) 341-379.
- [20] J. Kiendl, Y. Bazilevs, M. C. Hsu, R. Wüchner, K. U. Bletzinger, The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff-Love shell structures comprised of multiple patches, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (2010) 2403-2416.
- [21] D. J. Benson, S. Hartmann, Y. Bazilevs, M. C. Hsu, T. J. R. Hughes, Blended Isogeometric Shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255 (2013) 133-146.
- [22] H. R. Atri, S. Shojaee, Free Vibration Analysis of Thin-Shell Structures Using Finite Element Based on Isogeometric Approach, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 40 (2016) 85-96.
- [23] H. Kown, C. R. Bradbury, M. Leparoux, Fabrication static and dynamic analyses of folded plates, *Thin-Walled Structures*, 49 (2011) 1288-1294.
- [6] M. Ohga, T. Shigematsu, S. Kohigashi, Analysis of folded plate structures by a combined boundary element-transfer matrix method, *Computers and Structures*, 41 (1991) 739-744.
- [7] L. X. Peng, S. Kitipornchai, K. M. Liew, Free vibration analysis of folded plate structures by the FSDT mesh-free method, *Computational Mechanics*, 39 (2007) 799-814.
- [8] L. X. Peng, Free Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Folded Plate Structures Using an Element-Free Galerkin Method, *Mathematical Problems in Engineering*, (2014) <http://dx.doi.org/10.1155/2015/124296>.
- [9] A. Guha Niyogi, M. K. Laha, P. K. Sinha, Finite element vibration analysis of laminated composite folded plate structures, *Shock and Vibration*, 6 (1999) 273-283.
- [10] A. Samanta, M. Mukhopadhyay, Finite element static and dynamic analyses of folded plates, *Engineering Structures*, 21 (1999) 277-287.
- [11] S. Y. Lee, S. C. Wooh, S. S. Yhim, Dynamic behavior of folded composite plates analyzed by the third order plate theory, *International Journal of Solids and Structures*, 41 (2004) 1879-1892.
- [12] S. Haldar, A. H. Sheikh, Free vibration analysis of isotropic and composite folded plates using a shear flexible element, *Finite Elements in Analysis and Design*, 42 (2005) 208-226.
- [13] E. Hernández, L. Hervella-Nieto, Finite element approximation of free vibration of folded plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 (2009) 1360-1367.
- [14] N. Nguyen-Minh, T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, T. Vo-Duy, Static and free vibration analyses of stiffened folded plates using a cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3), *Applied Mathematics and Computation*, 266 (2015) 212-234.
- [15] H. Mohammadi, A. R. Setoodeh, FSDT-Based Isogeometric Analysis for Free Vibration Behavior

- John Wiley & Sons, Ltd., West Sussex.
- [32] V. P. Nguyen, C. Anitescu, S. P. A. Bordas, T. Rabczuk, Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects, *Mathematics and Computers in Simulation*, 117 (2015) 89-116.
- [33] J. N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, (2004) Oxford University Press.
- [34] A. Hasani Baferani, A. R. Saidi, E. Jomehzadeh, An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangular plates, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, (2010) <https://doi.org/10.1243/09544062JMES2171>.
- [35] S. Yin, J. S. Hale, T. Yu, T. Q. Bui, S. P. A. Bordas, Isogeometric locking-free plate element: a simple first order shear deformation theory for functionally graded plates, *Composite Structures*, 118 (2014) 121-138.
- [36] Y. Han, J. Elliott, Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/carbon nanotube composites, *Computational Materials Science*, 39 (2007) 315-323.
- [37] P. Zhu, Z. X. Lei, K. M. Liew, Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory, *Composite Structures*, 94 (2012) 1450-1460.
- [38] Y. Kiani, Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew plates, *Aerospace Science and Technology*, 58 (2016) 178-188.
- [39] M. Mohammadimehr, M. Mehrabi, E. Shaabaninejad, Buckling and Vibration Analyses of Double-bonded Micro Composite Plates Reinforced by CNTs and BNNTs Based on MSGT, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 51(1) (2018) 79-96. (In Persian)
- [40] P. Zhu, Z. X. Lei, K. M. Liew, Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory, *Composite Structures*, 94 (2012) 1450-1460.
- of functionally graded carbon nanotube-reinforced aluminum matrix composite, *Advanced Engineering Materials*, 13 (2013) 325-329.
- [24] A. R. Setoodeh, M. Shojaee, P. Malekzadeh, Application of transformed differential quadrature to free vibration analysis of FG-CNTRC quadrilateral spherical panel with piezoelectric layers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 335 (2018) 510-537.
- [25] R. Ansari, J. Torabi, R. Hassani, A comprehensive study on the free vibration of arbitrary shaped thick functionally graded CNT-reinforced composite plates, *Engineering Structures*, 181 (2019) 653-669.
- [26] Q. Wang, F. Pang, B. Qin, Q. Liang, A unified formulation for free vibration of functionally graded carbon nanotube reinforced composite spherical panels and shells of revolution with general elastic restraints by means of the Rayleigh-Ritz method, *Polymer Composites*, (2017) <https://doi.org/10.1002/pc.24339>.
- [27] M. Shojaee, A. R. Setoodeh, P. Malekzadeh, Vibration of functionally graded CNTs-reinforced skewed cylindrical panels using a transformed differential quadrature method, *Acta Mechanica*, (2017) DOI 10.1007/s00707-017-1846-z.
- [28] F. Ebrahimi and S. Habibi, Nonlinear Dynamic Response Analysis of Carbon Fiber Reinforced Polymer Enhanced with Carbon Nanotubes on Elastic Foundations in Thermal Environments, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(1) (2018) 73-90. (In Persian)
- [29] S. Razavi and A. Shoostari, On the Free Vibration Analysis of a CNT-Reinforced Plate Bonded to a Magneto-electroelastic Layer, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(1) (2018) 15-24. (In Persian)
- [30] L. Piegl, W. Tiller, *The NURBS Book (Monographs in Visual Communication)*, Second edition, (1997) Springer-Verlag, New York.
- [31] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, *Isogeometric Analysis Towards Unification of CAD and FEA*, (2009)

- [42] M. Heidari Rarani, S. Alimirzaei, K. Torabi, Analytical solution for free vibration of functionally graded carbon nanotubes (FG-CNT) reinforced double-layered nano-plates resting on elastic medium, *Journal of Science and Technology Composite*, 2(3) (2015) 55-66. (In Persian)
- [41] Z. X. Lei, K. M. Liew, J. L. Yu, Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment, *Composite Structures*, 106 (2013) 128-138.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

H. Mohammadi, A.R. Setoodeh, *Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite skew folded plates using the isogeometric approach*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 53(4) (2021) 2239-2260.

DOI: [10.22060/mej.2020.17298.6569](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17298.6569)



