نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ویژه ۲ ، سال ۱۴۰۰، صفحات ۱۰۴۱ تا ۱۰۶۴
DOI: 10.22060/mej.2020.16853.6456

مدل‌سازی و کنترل مسیر ربات سیار غیرهولونومیک با مفاصل دورانی-کشویی

حسین میرزائی‌نژاد*، علی محمد شافعی

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۸/۰۵/۰۹
بازنگری: ۱۳۹۸/۱۱/۱۷
پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۲۰
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۱/۰۸

کلمات کلیدی:
روش گیبس-اپل
قید غیرهولونومیک
مفاصل دورانی-کشویی
کنترل پیش‌بین
ردیابی مسیر

خلاصه: مدل‌سازی و کنترل مسیر ربات‌های سیار، یکی از مباحث مطرح در رباتیک است. در این مقاله ابتدا، مدل سینماتیکی و دینامیکی یک بازوی مکانیکی با مفاصل دورانی-کشویی که روی یک پایه سیّار با چرخ‌های غیرهولونومیکی قرار دارد، به روش گیبس-اپل ارائه شده است. در واقع، مزیت استفاده از این روش دینامیکی این است که می‌توان از مشکلات ضرایب لاگرانژ که از قیود غیرهولونومیک ناشی می‌شوند، رهایی یافت. سپس از روش کنترل پیش‌بین غیرخطی برای پیدا کردن قوانین کنترل سینماتیکی و دینامیکی برای ردیابی مسیر مرجع استفاده شده است. اساس این روش، پیش‌بینی پاسخ‌های مدل غیرخطی ربات در بازه زمان پیش‌بین با استفاده از بسط سری تیلور می‌باشد. قوانین کنترلی بهینه بر اساس کمینه کردن اختلاف بین پاسخ‌های مطلوب و پیش‌بینی شده خروجی‌های سیستم، به‌صورت تحلیلی توسعه داده می‌شوند. قوانین کنترلی استخراج شده منجر به خطی‌سازی فیدبک خواهند شد. کنترل‌کننده سینماتیک سرعت‌های زاویه‌ای و خطّی مطلوب پایه سیّار و بازوهای مکانیکی را به‌دست می‌آورد. سپس، سرعت‌های مطلوب به‌دست آمده به‌عنوان مقادیر مطلوب برای طراحی کنترل‌کننده دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در پایان، نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی به‌منظور تأکید بر توانایی روش ارائه شده در مدل‌سازی ریاضی و کنترل ردیابی مسیر همزمان پایه سیّار و مجری نهایی نشان داده شده است.

۱- مقدمه

امروزه مسئله مدل‌سازی سینماتیکی و دینامیکی و کنترل ردیابی مسیر بازوهای سیّار مکانیکی توجّه بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده است. بسیاری از این کارها به ربات‌های متداولی که تنها از مفاصل دورانی تشکیل شده‌اند، محدود می‌شوند. واضح است که عملکرد این بازوهای رباتیکی با اضافه شدن مفاصل رفت و برگشتی به شدّت افزایش می‌یابد. در واقع، قابلیّت تحرّک ربات سیّار با قابلیت‌های دستکاری بازوهای مکانیکی باعث می‌شود که این سیستم‌های رباتیکی به‌طور گسترده در صنایع مختلف از جمله نیروگاه‌های برق، نیروگاه‌های هسته‌ای، کارخانه‌های شیمیایی، کارخانه‌های داروسازی مورد استفاده قرار گیرند.

علیرغم مطالعات فراوان در مورد سینماتیک ربات‌های چرخدار، تنها تعداد کمی از آنها مربوط به مدل‌سازی کامل دینامیکی این دست از سیستم‌های رباتیکی است. از گذشته تا به امروز، هنوز مدل‌بندی لاگرانژ و نیوتون- اویلر رایج‌ترین روش‌ها برای استخراج معادلات حاکم برای ربات‌های سیّار چرخدار با قیود غیرهولونومیک می‌باشند. به‌عنوان مثال یک ربات همکار که در آن پایه سیّار بر روی یک سطح صفحه‌ای حرکت می‌کند، توسّط خطیب و همکاران مدل‌سازی گردید [۱]. از سوی دیگر با در نظر گرفتن قیود غیرهولونومیک برای سیستم مورد مطالعه، ضرایب لاگرانژ در معادلات دینامیکی حرکت ظاهر خواهند شد که تنها با استفاده از مدل‌بندی لاگرانژ محاسبه می‌شوند. در واقع ضرایب لاگرانژ نیروهای عکس‌العملی هستند که توسط زمین به سیستم اعمال می‌شوند. به‌منظور اجتناب از ضرایب لاگرانژ، در [۲]

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h_mirzaeinejad@uk.ac.ir

یک پایه سیّار با استفاده از معادلات کین مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق به مزایای استفاده از مدل‌بندی کین در مدل‌سازی پایه‌های سیّار و استفاده از ابزار مناسب جهت در نظر گرفتن قیود غیرهولونومیک اشاره شده است. همچنین در [۳] یک مدل کامل برای یک بازوی مکانیکی سیّار با استفاده از مدل‌بندی کین توسط تانر و کریاکپوس ارائه گردیده است. در این تحقیق یک دسته معادله دینامیکی، همچنین یک دسته معادله قیدی برای بازوی مکانیکی با پایه سیّار ارائه گردیده است. تحقیقات مذکور به مدل‌سازی ریاضی بازوهای مکانیکی سیّار که تنها از مفاصل دورانی تشکیل شده‌اند، محدود شده است؛ و مفاصل رفت و برگشتی در اینگونه از سیستم‌ها در نظر گرفته نشده است. حرکت همزمان پایه و قابلیت‌های دستکاری بازوهای مکانیکی که از مفاصل دورانی-کشویی تشکیل شده‌اند، قابلیّت عملیاتی این نوع از سیستم‌های رباتیکی را به‌طرز چشمگیری افزایش می‌دهند. با این حال اثرات کوپلینگ بین پایه سیّار غیرهولونومیک و بازوی مکانیکی هولونومیک، دشواری مدل‌سازی دینامیکی اینگونه از سیستم‌ها را در پی دارد. علاوه بر این، اگر تعداد بازوهای بیشتری در ساخت یک بازوی رباتیکی سیّار مورد استفاده قرار گیرد، استخراج معادلات حرکت دینامیکی سیستم به‌صورت دستی کاری طاقت‌فرسا و زمان‌بر است. بنابراین برای استخراج خودکار معادلات حرکت، انتظار می‌رود که از یک الگوریتم بازگشتی برای به‌دست آوردن معادلات حرکت استفاده شود. هر چند که الگوریتم‌های بازگشتی متعدّدی برای استخراج معادلات حرکت ربات‌های سری استفاده شده است [۶-۴]، اما تنها تعداد کمی از آنها برای بازوهای رباتیکی سیار قابل اجرا هستند. در زمینه ربات با پایه سیّار، در [۷] از یک الگوریتم بازگشتی برای تولید خودکار و سیستماتیک معادلات حرکت ربات سیّار با قیود غیرهولونومیک استفاده شده است. روش پیشنهادی، یک روش عمومی و کلّی برای استخراج معادلات حرکت ربات با پایه سیّار محسوب می‌گردد که در آن از اصل کار مجازی استفاده شده است.

از آنجایی که تأکید این مقاله بر استخراج معادلات حرکت با استفاده از مدل‌بندی گیبس-اپل می‌باشد، اهمّ کارهایی که در این زمینه انجام شده است به شرح زیر ارائه می‌گردد. در زمینه رباتیک پوپوف روشی را طرح کرد که بعدها توسّط پوتکنجاک و وکوبراتوویچ برای بسط یک عبارت به‌شکل بسته که از پیچیدگی محاسباتی بالایی برخوردار بود، مورد استفاده قرار گرفت [۸]. روشی دیگر توسط ورشچاگین پیشنهاد شد که معادلات حرکت بازوی مکانیکی را از اصول گاوس و تابع گیبس استخراج می‌کرد [۹]. این روش بعدها توسط تو و روداس برای حلّ مسئله دینامیک معکوس ربات‌ها استفاده شد [۱۰]. ماتا و همکاران در تحقیقی، دو الگوریتم برای حلّ مسئله دینامیک معکوس بر پایه معادلات گیبس-اپل ارائه نمودند [۱۱]. در هر دو الگوریتم از متغیّرهای برداری استفاده شده است. اوّلین الگوریتم از پیچیدگی محاسباتی $O(n^2)$ برخوردار است و از الگوریتم دوّم کارایی کمتری دارد؛ ولی الگوریتم دوّم از پیچیدگی محاسباتی $O(n)$ برخوردار است و با معادلات حرکت بر پایه روش نیوتن-اویلر مقایسه شده است. پرووْنزانو و همکاران در تحقیقی روشی برای محاسبه تانسور اینرسی تعمیم‌یافته ربات‌ها بر پایه توابع گیبس-اپل ارائه کردند [۱۲]. در این روش یک الگوریتم بازگشتی مفید با پیچیدگی $O(n)$ ارائه شده است که برای نوشتن برنامه‌ای به زبان فرترن از آن استفاده می‌شود. سرانجام ماتا و همکاران برای تکمیل کارهای قبلی خود در تحقیقی مسئله مدل دینامیکی ربات‌ها با بازوهای صلب و اتّصالات ایده‌آل را با استفاده از معادلات گیبس-اپل چه در حالت مستقیم و چه در حالت معکوس به‌طور کامل شرح دادند [۱۳]. اخیراً کورایم و شافعی به منظور بهره‌گیری از مدل‌بندی گیبس-اپل در استخراج معادلات حرکت سیستم‌های رباتیکی با قیود هولونومیک و غیرهولونومیک یک الگوریتم بازگشتی را بر اساس ماتریس‌های دوران ۳×۳ برای به دست آوردن معادلات حرکت ربات‌های زنجیره‌ای صلب و انعطاف‌پذیر توسعه داده‌اند [۲۷-۱۴]. آنها همچنین از این الگوریتم بازگشتی برای به‌دست آوردن معادلات حاکم در ربات‌های سیّار همکار و همچنین در بازوهای مکانیکی سیّاری که به وسیله مفاصل دورانی-کشویی به هم متصل هستند، بهره جستند [۳۱-۲۸]. با این حال همه این کارها به اهداف مدل‌سازی دینامیکی محدود بوده و هیچ سیستم کنترلی برای ردیابی مسیرهای پایه سیّار و مجری نهایی در سیستم‌های رباتیکی مذکور طراحی نشده است.

ویژگی اصلی بازوهای مکانیکی سیّار، زیر تحریک بودن آنها است. بدین معنا که تعداد ورودی‌های کنترلی در اینگونه از سیستم‌ها کمتر از متغیّرهای حالتی است که باید کنترل شوند. علاوه بر این، بر اساس تئوری براکت [۳۲] طراحی قوانین کنترلی پایدارساز برای کنترل حرکت این سیستم‌های غیرهولونومیک، یک کار چالش برانگیز است. زیرا هیچ فیدبک پیوسته‌ای نمی‌تواند برای پایداری چنین سیستم‌هایی

اعمال شود. همچنین کوپلینگ دینامیکی بین ربات سیّار و بازوهای مکانیکی از یک سو، و غیرخطّی بودن مدل ریاضی این سیستم و عدم قطعیّت‌های مدل از سویی دیگر، چالش‌های کنترلی جذابی را برای ردیابی مسیر بازوهای سیّار ایجاد کرده است [۳۳]. روش‌های متنوعی برای حلّ این مشکلات ارائه شده است که می‌توان به استفاده از کنترل مد لغزشی [۳۴]، کنترل مقاوم [۳۵]، کنترل فازی [۳۶]، کنترل تطبیقی [۳۷]، کنترل شبکه عصبی [۳۸] و کنترل بهینه [۳۹] اشاره کرد. در مرجع [۴۰] یک کنترل‌کننده تطبیقی برای ردیابی مسیرهای مطلوب بازوی رباتیکی سیّار با وجود عدم قطعیّت‌ها توسعه داده شد. بوکاتایا [۴۱] یک کنترل‌کننده تطبیقی غیرفعّال جهت کنترل بازوهای مکانیکی سیّار غیرهولونومیک را با فرض وجود عدم قطعیّت و اغتشاشات پیشنهاد نمود. چن [۴۲] یک کنترل‌کننده مد لغزشی تطبیقی را با استفاده از روش برگشت به عقب برای افزایش مقاومت مسئله تعقیب مسیر طراحی کرد. در کار تحقیقاتی دیگری یک کنترل‌کننده تعقیب مسیر تطبیقی مقاوم در برابر عدم قطعیّت‌های ساختاری و اغتشاشات خارجی توسط پنگ پیشنهاد شده است [۴۳]. همچنین محقّقان در مرجع [۴۴]، کنترل‌کننده چند متغیّره‌ای را به‌صورت تحلیلی به‌منظور تعقیب مسیر ربات‌های سیّار با استفاده از روش کنترل پیش‌بین غیرخطّی توسعه دادند. نتایج این کار به یک پایه سیّار محدود است و اثرات کوپلینگ ناشی از نصب یک بازوی مکانیکی بر روی آن در نظر گرفته نشده است.

در این مقاله از روش کنترل پیش‌بین غیرخطی استفاده شده که در ادامه به مزیت‌های آن اشاره خواهد شد. این روش غیرخطی مبتنی بر بهینه‌سازی است و قوانین کنترلی به شکل تحلیلی و فرم بسته استخراج می‌شوند که موجب پیاده‌سازی آسان کنترل‌کننده به دلایلی که در ادامه بیان خواهد شد، می‌شود. اساساً دو نوع روش کلاسیک در حل مسائل کنترل بهینه وجود دارد: استفاده از روش برنامه‌ریزی دینامیکی برای حل مسئله کنترل بهینه که منجر به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همیلتون- جاکوبی- بلمن[1] می‌شود که بایستی به نوعی حل گردند. روش دوم استفاده از روش حساب تغییرات است که خود منتهی به حل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی جداگانه[2] می‌شود. اما استفاده از روش‌های کلاسیک برای سیستم‌هایی که دینامیک آنها غیرخطی است دارای مشکلاتی

1 Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB)
2 Two-Point Boundary Value (TPBV)

می‌باشد؛ چرا که در این حالت یا باید مسئله غیرخطی و یا معادلات مشتقات جزئی برای یک سیستم غیرخطی حل شوند. برای حل این گونه مسائل به ندرت می‌توان راه حل تحلیلی پیدا کرد و حتی در بسیاری موارد که اثرات غیر خطی مدل شدید باشند، هرگز نمی‌توان جواب تحلیلی ارائه نمود. استفاده از روش‌های عددی نیز در این موارد آسان نبوده و مستلزم بهینه‌سازی دینامیکی همزمان می‌باشد که خود باعث تأخیر در سیستم شده و عوارض نامطلوب دارد.

با توجه به مشکلات فوق، مسئله کنترل بهینه سیستم‌های غیرخطی یکی از موضوعات روز کنترل می‌باشد. به‌عنوان یک روش عملی جایگزین برای حل مسائل کنترل بهینه سیستم‌های غیرخطی که در آن نیازی به حل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی جداگانه و یا معادلات با مشتقات جزئی نیست، روش کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل[3] می‌باشد. اما از مشکلات عمده این روش برای سیستم‌های غیرخطی، نیاز به بهینه‌سازی دینامیکی همزمان می‌باشد. یکی از مشکلات مهم، تأخیری است که محاسبات بالا به‌دنبال دارد. یک روش برای اجتناب از محاسبات همزمان در استفاده از این روش، توسعه کنترل پیش‌بین حلقه بسته است. در این روش، پاسخ غیرخطی سیستم در یک بازه زمان بعدی توسط بسط سری تیلور پیش‌بینی شده و سپس قانون کنترلی در لحظه فعلی چنان پیدا می‌شود که خطای ردیابی پیش‌بینی شده مینیمم گردد. در این مقاله، این روش برای کنترل ردیابی مسیر حرکت یک بازوی مکانیکی سیّار که از یک پایه سیّار با چرخ‌های غیرهولونومیک و یک بازوی مکانیکی صلب که توسط مفاصل دورانی-کشویی به هم متصل شده‌اند، توسعه داده می‌شود. پس از مدل‌سازی سینماتیکی و دینامیکی سیستم رباتیکی مذکور، یک کنترل‌کننده سینماتیکی به‌صورت تحلیلی با یک فرآیند بهینه‌سازی استخراج می‌شود و پایداری این سیستم حلقه بسته ثابت می‌شود. همچنین در این بخش کنترل‌کننده دینامیکی این سیستم با استفاده از روش مشابه به‌دست می‌آید. سپس عملکرد روش کنترلی پیشنهادی با وجود عدم قطعیّت‌ها از طریق شبیه‌سازی کامپیوتری مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۲- مدلسازی

۲-۱- سینماتیک سیستم

در این بخش سینماتیک ربات با بازوهای صلب و مفاصل دورانی- کشویی که بر روی یک پایه سیّار قرار گرفته مورد بررسی قرار

3 Model-Based Predictive Control (MPC)

می‌گیرد (شکل ۱). طبق قاعده (دناویت-هارتنبرگ) به هر بازو یک دستگاه مختصات ($x_1y_1z_1$ و $x_2y_2z_2$) اختصاص می‌یابد. علاوه بر این $x_0y_0z_0$ چارچوب متّصل به پایه سیّار است که در سینماتیک بازوهای رباتیکی می‌توان آن را چارچوب مرجع در نظر گرفت؛ که مبدأ آن در نقطه P قرار دارد، محور x_0 در امتداد محور تقارن پایه سیّار است، y_0 در امتداد محور چرخش چرخ‌ها (به سمت چرخ سمت چپ) و محور z_0 تکمیل کننده دستگاه مختصات متعامد است. $X_GY_GZ_G$ سیستم مختصاتی است که به زمین متّصل است و می‌تواند به‌عنوان چارچوب اینرسی در نظر گرفته شود.

در مدل‌سازی بازوی مکانیکی با پایه سیّار فرضیّات زیر در نظر گرفته می‌شود:

۱- هیچ‌گونه لغزشی بین چرخ‌ها و زمین وجود ندارد (در حقیقت

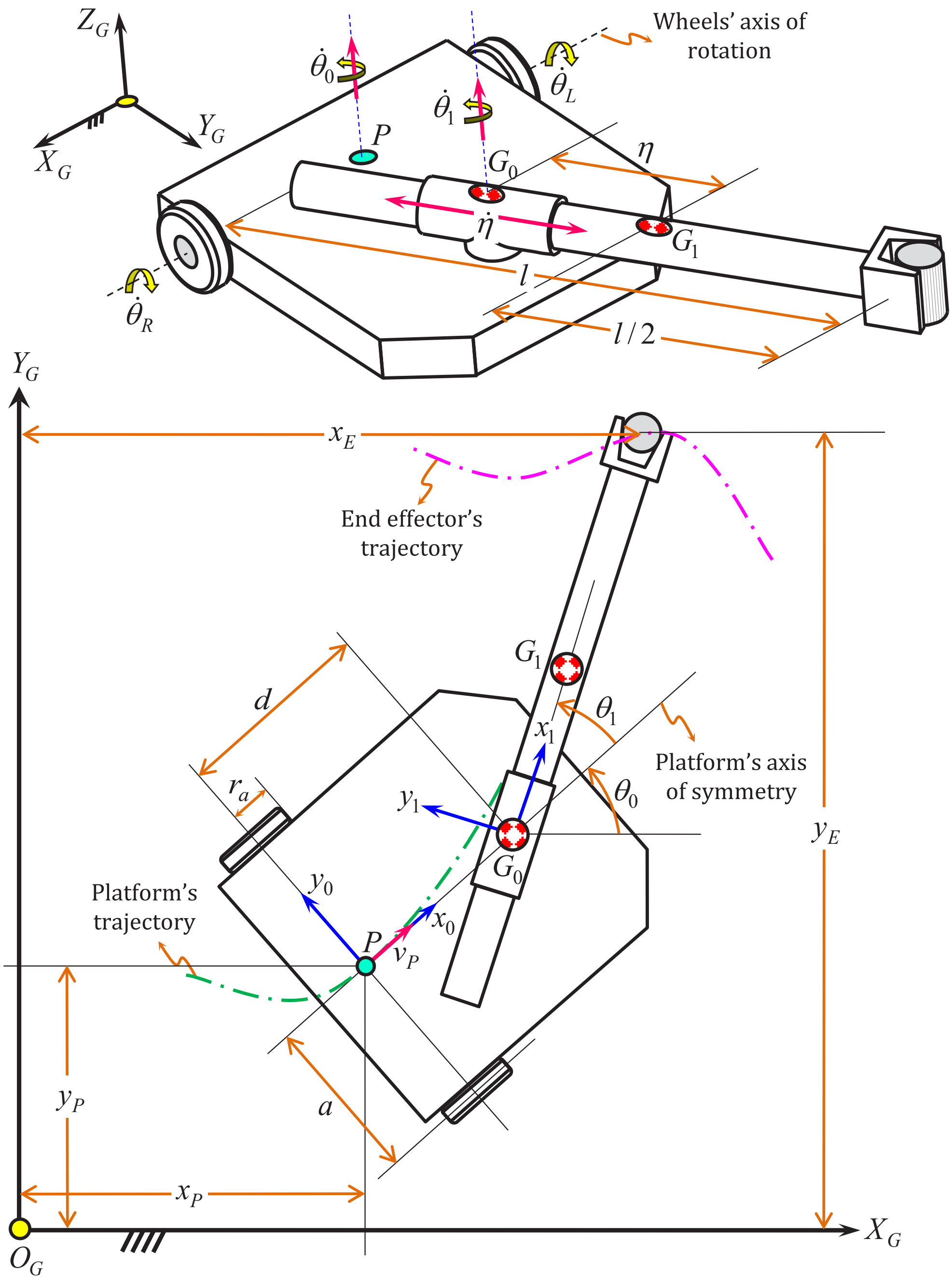

Fig.1. Schematics of a single link moving robot with rotary-sliding joints

شکل ۱: ربات سیار تک بازو با مفاصل دورانی-کشویی

تماس از نوع غلتش خالص فرض می‌شود).

۲- حرکت پایه به صفحه $X_G O_G Z_G$ محدود گردیده و هیچ‌گونه حرکتی در امتداد محور Z انجام نمی‌پذیرد.

۳- عدم حرکت نقطه P در امتداد محور دوران پایه سیّار (نقطه تقاطع محور تقارن پایه سیّار با محور دوران چرخ‌ها) مفروض است.

با توجه به آخرین فرض سرعت واقعی نقطه P نسبت به دستگاه مختصات متصل به پایه سیّار ($x_0 y_0 z_0$) به فرم زیر ارائه می‌گردد.

$$ {}^0\vec{v}_P = v_P \, {}^0\vec{x}_0 \tag{۱}$$

که در آن ${}^0\vec{x}_0 = \{1 \quad 0 \quad 0\}^T$ است. اکنون سرعت و شتاب زاویه‌ای پایه سیّار و بازوی مکانیکی در دستگاه مرجع محلی خود به صورت زیر بیان می‌شود.

$$ {}^0\vec{\omega}_0 = \dot{\theta}_0 \, {}^0\vec{z}_0 \tag{۲}$$

$$ {}^1\vec{\omega}_1 = \left(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1\right) {}^1\vec{z}_1 \tag{۳}$$

به‌طوری که ${}^0\vec{z}_0 = {}^1\vec{z}_1 = \{0 \quad 0 \quad 1\}^T$ می‌باشد. از آنجا که روش پیشنهادی در این مقاله بر اساس مدل‌بندی گیبس-اپل است مقدار شتاب مطلق نقطه P لازم است، که می‌توان آن را با مشتق گرفتن از معادله (۱) نسبت به زمان به‌دست آورد.

$$ {}^0\dot{\vec{v}}_P = \dot{v}_P \, {}^0\vec{x}_0 + v_p \dot{\theta}_0 \, {}^0\vec{y}_0 \tag{۴}$$

که در آن ${}^0\vec{y}_0 = \{0 \quad 1 \quad 0\}^T$ است. اکنون با داشتن سرعت مطلق نقطه P و سرعت زاویه‌ای پایه، شتاب مطلق مرکز جرم مجموعه پایه و چرخ‌ها (G_0) و همچنین شتاب مطلق مرکز جرم بازوی مکانیکی در دستگاه مختصات محلی آنها به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$ {}^0\dot{\vec{v}}_{G_0} = \left(\dot{v}_P - d\,\dot{\theta}_0^2\right) {}^0\vec{x}_0 + \left(v_P \dot{\theta}_0 + d\,\ddot{\theta}_0\right) {}^0\vec{y}_0 \tag{۵}$$

$$ \begin{aligned} {}^1\dot{\vec{v}}_{G_1} = &\Big(C_1\left(\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2\right) + S_1\left(v_P\dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0\right) \\ &+ \ddot{\eta} - \eta\left(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1\right)^2\Big) {}^0\vec{x}_0 \\ &+ \Big(-S_1\left(\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2\right) + C_1\left(v_P\dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0\right) \\ &+ 2\dot{\eta}\left(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1\right) + \eta\left(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1\right)\Big) {}^0\vec{y}_0 \end{aligned} \tag{۶}$$

که d فاصله بین نقطه P و G_0 است. همچنین $C_1 = \cos\theta_1$، $S_1 = \sin\theta_1$ می‌باشند.

همانگونه که در بالا ذکر شد چرخ‌های پایه سیّار بدون لغزش روی زمین حرکت می‌کنند. بنابراین سرعت مطلق مرکز چرخ‌های چپ و راست در دستگاه مختصات محلی متصل به پایه سیّار ($x_0 y_0 z_0$) به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$ {}^0\vec{v}_{L/R} = \dot{\theta}_{L/R} \, {}^0\vec{y}_0 \times r_a \, {}^0\vec{z}_0 = r_a \dot{\theta}_{L/R} \, {}^0\vec{x}_0 \tag{۷}$$

که در آن (×) عملگر ضرب خارجی را نشان می‌دهد و r_a شعاع دوران چرخ‌ها و $\dot{\theta}_L$ و $\dot{\theta}_R$ به‌ترتیب سرعت زاویه‌ای چرخ‌های سمت چپ و راست در امتداد محور دوران چرخش چرخ‌ها را نشان می‌دهد. همچنین سرعت مرکز چرخ‌ها (چپ یا راست) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$ {}^0\vec{v}_{L/R} = {}^0\vec{v}_P + \dot{\theta}_0 \, {}^0\vec{z}_0 \times \left(\pm a \, {}^0\vec{y}_0\right) = \left(v_P \mp a\dot{\theta}_0\right) {}^0\vec{x}_0 \tag{۸}$$

که a فاصله بین نقطه P و مرکز دوران چرخ‌ها است. با توجه به معادلات (۷) و (۸) داریم:

$$ \dot{\theta}_{L/R} = \frac{1}{r_a}\left(v_P \mp a\dot{\theta}_0\right) \tag{۹}$$

همانگونه که قبلاً ذکر شد، تأکید این مقاله استخراج معادلات حرکت این سیستم رباتیکی بر اساس مدل‌بندی گیبس-اپل است. بنابراین شتاب زاویه‌ای چرخ‌های چپ و راست باید به‌ترتیب با مشتق‌گیری از معادله (۹) نسبت به زمان به‌دست آیند. بنابراین داریم:

$$ \ddot{\theta}_{L/R} = \frac{1}{r_a}\left(\dot{v}_P \mp a\ddot{\theta}_0\right) \tag{۱۰}$$

در بخش بعدی از روابط ارائه شده در بالا به‌منظور به‌دست آوردن تابع گیبس کل سیستم استفاده می‌شود.

۲-۲- دینامیک سیستم

مدل‌بندی گیبس-اپل از یک تابع اسکالر به نام تابع گیبس یا انرژی شتاب برای به‌دست آوردن معادلات حرکت یک سیستم مکانیکی استفاده می‌کند. به‌همین دلیل مجموعه‌ای از شبه سرعت‌های مستقل

انتخاب می‌شود. پس از تشکیل تابع گیبس بر حسب جملات شتاب، از این تابع نسبت به شبه شتاب‌ها مشتق می‌گیریم. در نهایت با مساوی قرار دادن نتیجه به‌دست آمده با نیروهای تعمیم‌یافته مرتبط با شبه سرعت‌ها معادلات حاکم بر حرکت به‌دست می‌آیند. می‌توان به‌راحتی ثابت کرد که تابع گیبس برای یک جسم صلب به‌فرم زیر ارائه می‌گردد.

$$S = \frac{1}{2} m\, \vec{a}_G^T \cdot \vec{a}_G + \frac{1}{2} \dot{\vec{\omega}}^T \cdot I_G\, \dot{\vec{\omega}} + \dot{\vec{\omega}}^T \cdot \tilde{\omega} I_G\, \vec{\omega} \qquad (۱۱)$$

در معادله بالا m و I_G به‌ترتیب بیانگر جرم و ممان اینرسی جرمی نسبت به مرکز جرم هستند. $\vec{a}_G$ شتاب مرکز جرم و $\vec{\omega}$ و $\dot{\vec{\omega}}$ به‌ترتیب سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای جسم صلب هستند. همچنین $\tilde{\omega}$ یک ماتریس پادمتقارن مرتبط با بردار $\vec{\omega}$ است. سیستم رباتیک نشان داده شده در شکل ۱ از چهار جسم صلب تشکیل شده است. این اجسام عبارت است از: یک پایه سیّار، دو چرخ و یک بازوی صلب. از آنجایی که جرم‌های چرخ‌های چپ و راست در جرم پایه سیّار ادغام شده‌اند، G_0 مرکز جرم پایه سیّار و چرخ‌ها می‌باشد. لذا با استفاده از معادله (۱۱) تابع گیبس برای بازوهای مکانیکی پایه سیّار به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} S = \sum_{i=0}^{1} \Bigg(& \frac{1}{2} m_i\, {}^i\dot{\vec{v}}_{G_i}^T \cdot {}^i\dot{\vec{v}}_{G_i} + \frac{1}{2} {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot I_{G_i}\; {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \\ & + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot {}^i\tilde{\omega}_i\, I_{G_i}\; {}^i\vec{\omega}_i \Bigg) \\ & + \frac{1}{2} I_w \left(\ddot{\theta}_R^2 + \ddot{\theta}_L^2 \right) \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که m_0 جرم کل پایه سیّار و چرخ‌ها و I_{G_0} ممان اینرسی جرمی پایه سیّار حول محور عمودی که از مرکز جرم G_0 عبور می‌کند، است. همچنین m_1 جرم بازو و I_{G_1} ممان اینرسی جرمی بازو حول محور عمودی گذرنده از مرکز جرم G_1 هستند. در پایان I_w ممان اینرسی چرخ‌های چپ و راست حول محور دوران چرخ‌ها می‌باشد. بقیه عبارات قبلاً نام‌گذاری شده است. با جایگذاری معادلات (۲) و (۳) و همچنین معادلات (۵) و (۶) فرمول گیبس-اپل برای کل سیستم بر حسب مجموعه‌ای از شبه شتاب‌های مستقل به‌دست می‌آید. جهت اجتناب از طولانی شدن مقاله، این تابع اسکالر در پیوست (معادله الف -۱) ارائه شده است.

در روش گیبس-اپل معادله حرکت با مشتق‌گیری از تابع گیبس نسبت به شبه‌شتاب‌های مستقل به‌دست می‌آید. بنابراین نیاز به محاسبه جملات، $\partial S / \partial \dot{v}_P$ ،$\partial S / \partial \ddot{\theta}_0$ ،$\partial S / \partial \ddot{\theta}_1$ و $\partial S / \partial \ddot{\eta}$ داریم. این عبارت‌ها در پیوست (معادلات الف-۲ تا الف-۵) آورده شده‌اند.

معادلات حاکم بر ربات با در نظر گرفتن نیروهای تعمیم‌یافته مرتبط با شبه‌سرعت‌ها تکمیل می‌گردد. فرض می‌کنیم تنها گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم، τ_R و τ_L که به‌ترتیب به چرخ‌های راست و چپ و گشتاور τ به مفصل دورانی اعمال می‌شوند. همچنین نیروی F به مفصل کشویی وارد می‌شود. بنابراین کار تعمیم‌یافته را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$U = \dot{\theta}_R \tau_R + \dot{\theta}_L \tau_L + \dot{\theta}_1 \tau + \dot{\eta} F \qquad (۱۳)$$

با جایگذاری معادله (۹) در معادله (۱۳) کار تعمیم‌یافته بر حسب شبه سرعت‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{r_a}\left(v_A + a\dot{\theta}_0\right)\tau_R + \frac{1}{r_a}\left(v_A - a\dot{\theta}_0\right)\tau_L \\ & + \dot{\theta}_1 \tau + \dot{\eta} F; \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

برای به‌دست آوردن نیروهای تعمیم‌یافته ناشی از گشتاور و نیروهای خارجی کافی است که از معادله (۱۴) نسبت به شبه سرعت‌ها مشتق بگیریم.

$$\frac{\partial U}{\partial v_A} = \frac{1}{r_a}\left(\tau_R + \tau_L\right) \qquad (۱۵)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_0} = \frac{a}{r_a}\left(\tau_R - \tau_L\right) \qquad (۱۶)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_1} = \tau \qquad (۱۷)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\eta}} = F \qquad (۱۸)$$

حال، معادلات حرکت دینامیک معکوس سیستم رباتیکی مذکور

که شامل مجموعه‌ای از ۴ معادله دیفرانسیلی است به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_A}=\frac{\partial U}{\partial v_A} \tag{۱۹}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}_i}=\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_i} \quad i=0,1 \tag{۲۰}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\eta}}=\frac{\partial U}{\partial \dot{\eta}} \tag{۲۱}$$

معادلات بالا به‌فرم دینامیک معکوس می‌باشند. در بخش بعد با نوشتن این معادلات به‌فرم دینامیک مستقیم زمینه را برای شبیه‌سازی این دسته از معادلات آماده می‌نماییم.

برای اهداف کنترلی مطلوب است که ضریب‌های شبه شتاب‌ها، در سمت چپ معادله و اثرات دینامیکی باقیمانده $\vec{\mathrm{Re}}(\vec{\Theta},\dot{\vec{\Theta}})$ که شامل ترم‌های گرانش، شتاب کریولیس، نیروهای گریز از مرکز هستند و همچنین نیروهای تعمیم‌یافته سیستم یعنی بردار $\vec{\tau}$ در سمت راست معادلات حرکت قرار گیرند. با سازماندهی این معادلات دیفرانسیلی به شکل ماتریسی معادلات دینامیک مستقیم سیستم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$I(\vec{\Theta})\ddot{\vec{\Theta}}=\vec{\mathrm{Re}}(\vec{\Theta},\dot{\vec{\Theta}})+\vec{\tau} \tag{۲۲}$$

که $I(\vec{\Theta})$ ماتریس اینرسی کل سیستم شامل (پایه سیّار و بازوها) و $\ddot{\vec{\Theta}}$ بردار شبه شتاب‌ها می‌باشد. همچنین $\vec{\mathrm{Re}}(\vec{\Theta},\dot{\vec{\Theta}})$ و $\vec{\tau}$ قبلاً معرفی شده‌اند. اجزای معادله (۲۲) به‌صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$I(\vec{\Theta})=\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} & I_{14} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} & I_{24} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & I_{34} \\ I_{41} & I_{42} & I_{43} & I_{44} \end{bmatrix} \tag{۲۳}$$

$$\ddot{\vec{\Theta}}=\left\{\dot{v}_P \quad \ddot{\theta}_0 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\eta}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{۲۴}$$

$$\vec{\tau}=\left\{\frac{1}{r_a}(\tau_R+\tau_L) \quad \frac{a}{r_a}(\tau_R-\tau_L) \quad \tau \quad F\right\}^{\mathrm{T}} \tag{۲۵}$$

$$\vec{\mathrm{Re}}(\vec{\Theta},\dot{\vec{\Theta}})=\left\{\mathrm{Re}_{\dot{v}_P} \quad \mathrm{Re}_{\ddot{\theta}_0} \quad \mathrm{Re}_{\ddot{\theta}_1} \quad \mathrm{Re}_{\ddot{\eta}}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{۲۶}$$

عناصر ماتریس اینرسی و ترم‌های دینامیکی باقیمانده در پیوست (معادلات الف-۶ تا الف-۲۵) آورده شده‌اند.

۳- توصیف مسئله و طراحی سیستم کنترلی

شکل ۲دیاگرام بلوکی سیستم کنترلی طراحی شده را نشان می‌دهد. هدف اصلی این سیستم کنترلی تعیین گشتاور ورودی اعمال شده به چرخ‌های چپ و راست (τ_L و τ_R) و همچنین گشتاور ورودی به مفاصل بازوی مکانیکی یعنی τ و نیروی ورودی به مفصل کشویی یعنی F است؛ به‌طوری که پایه سیّار و مجری نهایی سیستم واقعی بتوانند مسیر پایه سیّار و مجری نهایی مرجع را دنبال کنند. مطابق شکل ۲ سیستم کنترل پیشنهادی از دو بخش تشکیل شده است:

۱- ابتدا یک کنترل‌کننده سینماتیکی برای یافتن سرعت ورودی مناسب طراحی شده است، به‌طوری که بتواند خطاهای موقعیّت سیستم (${}^0x_{P_e}$، ${}^0y_{P_e}$، $\theta_{i,e}(i=0,1)$ و η_e) را به صفر نزدیک کند.

۲- طراحی یک کنترل‌کننده دینامیکی برای ایجاد گشتاور و نیروهای کنترلی اعمال شده به چرخ‌ها و مفاصل دورانی-کشویی بازوی مکانیکی، به‌طوری که سرعت خطّی و زاویه‌ای ربات (v_P ، $\dot{\theta}_i(i=0,1)$ و $\dot{\eta}_d$) به سرعت خطّی و زاویه‌ای مطلوبی که از مرحله سینماتیک به‌دست آمده است (v_{P_d}، $\dot{\theta}_{i,d}(i=0,1)$ و $\dot{\eta}_d$) میل کند.

توجه شود در این مقاله در طراحی کنترل‌کننده فرض شده است که تمامی حالت‌های سیستم در دسترس می‌باشند. در واقع با داشتن ژیروسکوپ جهت تعیین موقعیت ربات و سنسور سرعت زاویه‌ای (انکودر) و استفاده از الگوریتم‌های متداول تخمین مانند فیلتر کالمن (KF[۱])، فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF[۲]) و فیلتر کالمن بی بو (UKF[۳]) [۴۵-۴۷] می‌توان حالت‌های مورد نیاز جهت فیدبک را فراهم نمود.

۳-۱- معادلات خطای ردیابی

به‌منظور طراحی یک کنترل‌کننده سینماتیکی برای ربات مورد مطالعه، خطای ردیابی سیستم شامل پایه سیّار و بازوی مکانیکی باید

1 Kalman Filter
2 Extended Kalman Filter
3 Unscented Kalman Filter

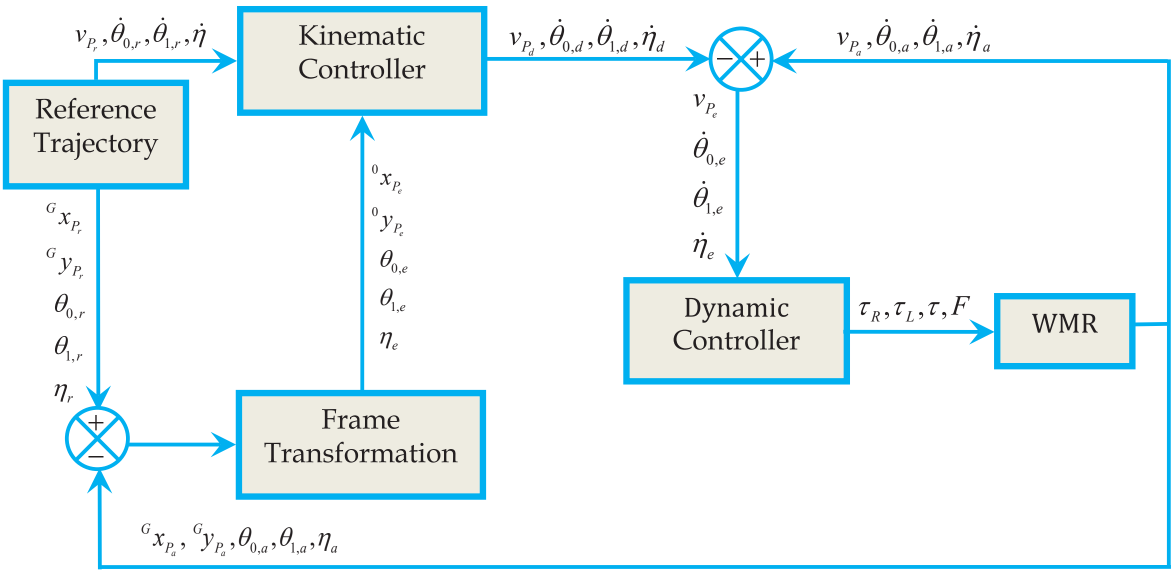

Fig.2. The block diagram of control system

شکل ۲: دیاگرام بلوکی سیستم کنترلی

محاسبه شوند. شکل ۳ مسیرهای واقعی و مرجع پایه سیّار و مجری نهایی را نشان می‌دهد.

همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است، تفاوت بین وضعیّت فعلی و موقعیّت مطلوب پایه سیّار در نقطه P توسط بردار ${}^0\vec{r}_{P_e}$ نشان داده شده است؛ که در سیستم مختصات محلی متصل به پایه سیّار ($x_0y_0z_0$) به‌صورت رابطه زیر ارائه می‌گردد.

$$
\begin{aligned}
{}^0\vec{r}_{P_e} &= {}^0R_G\left({}^G\vec{r}_{P_r} - {}^G\vec{r}_{P_a}\right) = \\
&x_{P_e}\,{}^0\vec{x}_0 + y_{P_e}\,{}^0\vec{y}_0
\end{aligned}
\tag{۲۷}
$$

در معادله (۲۷)، ${}^0R_G$ ماتریس دوران ۳×۳ ای است که جهت‌گیری دستگاه مختصات اینرسی $X_GY_GZ_G$ را نسبت به دستگاه مختصات محلی $x_0y_0z_0$ که به پایه سیّار متصل شده است، توصیف می‌کند. خطای جهت‌گیری بین موقعیّت واقعی پایه سیّار و موقعیّت مطلوب آن یعنی $\theta_{0,e}$، همچنین خطای موقعیّت خطّی و زاویه‌ای بین وضعیّت واقعی و وضعیّت مطلوب برای بازوی مکانیکی (η_e و $\theta_{1,e}$) به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$
\theta_{0,e} = \theta_{0,r} - \theta_{0,a} \tag{۲۸}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_{1,e} &= \left(\theta_{0,r} + \theta_{1,r}\right) - \left(\theta_{0,a} + \theta_{1,a}\right) = \\
&\theta_{0,e} + \left(\theta_{1,r} - \theta_{1,a}\right)
\end{aligned}
\tag{۲۹}
$$

$$
\eta_e = \eta_r - \eta_a \tag{۳۰}
$$

با مشتق‌گیری از معادله (۲۷) نسبت به زمان، تفاوت بین سرعت مرجع نقطه P و سرعت واقعی این نقطه توصیف شده در دستگاه مختصات $x_0y_0z_0$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
{}^0\dot{\vec{r}}_{P_e} &= {}^0\vec{v}_{P_e} = \left(\dot{x}_{P_e} - y_{P_e}\dot{\theta}_{0,a}\right){}^0\vec{x}_0 \\
&+ \left(\dot{y}_{P_e} + x_{P_e}\dot{\theta}_{0,a}\right){}^0\vec{y}_0
\end{aligned}
\tag{۳۱}
$$

همچنین بر اساس شکل ۳، تفاوت بین سرعت مرجع و واقعی نقطه P توصیف شده در دستگاه مختصات $x_0y_0z_0$ به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$
\begin{aligned}
{}^0\vec{v}_{P_e} &= {}^0\vec{v}_{P_r} - {}^0\vec{v}_{P_a} = \left(v_{P_r}\cos\theta_{0,e} - v_{P_a}\right){}^0\vec{x}_0 \\
&+ \left(v_{P_r}\sin\theta_{0,e} - 0\right){}^0\vec{y}_0
\end{aligned}
\tag{۳۲}
$$

دینامیک خطای موقعیّت پایه سیّار را می‌توان با مساوی قرار دادن معادلات (۳۱) و (۳۲) به‌صورت زیر به‌دست آورد.

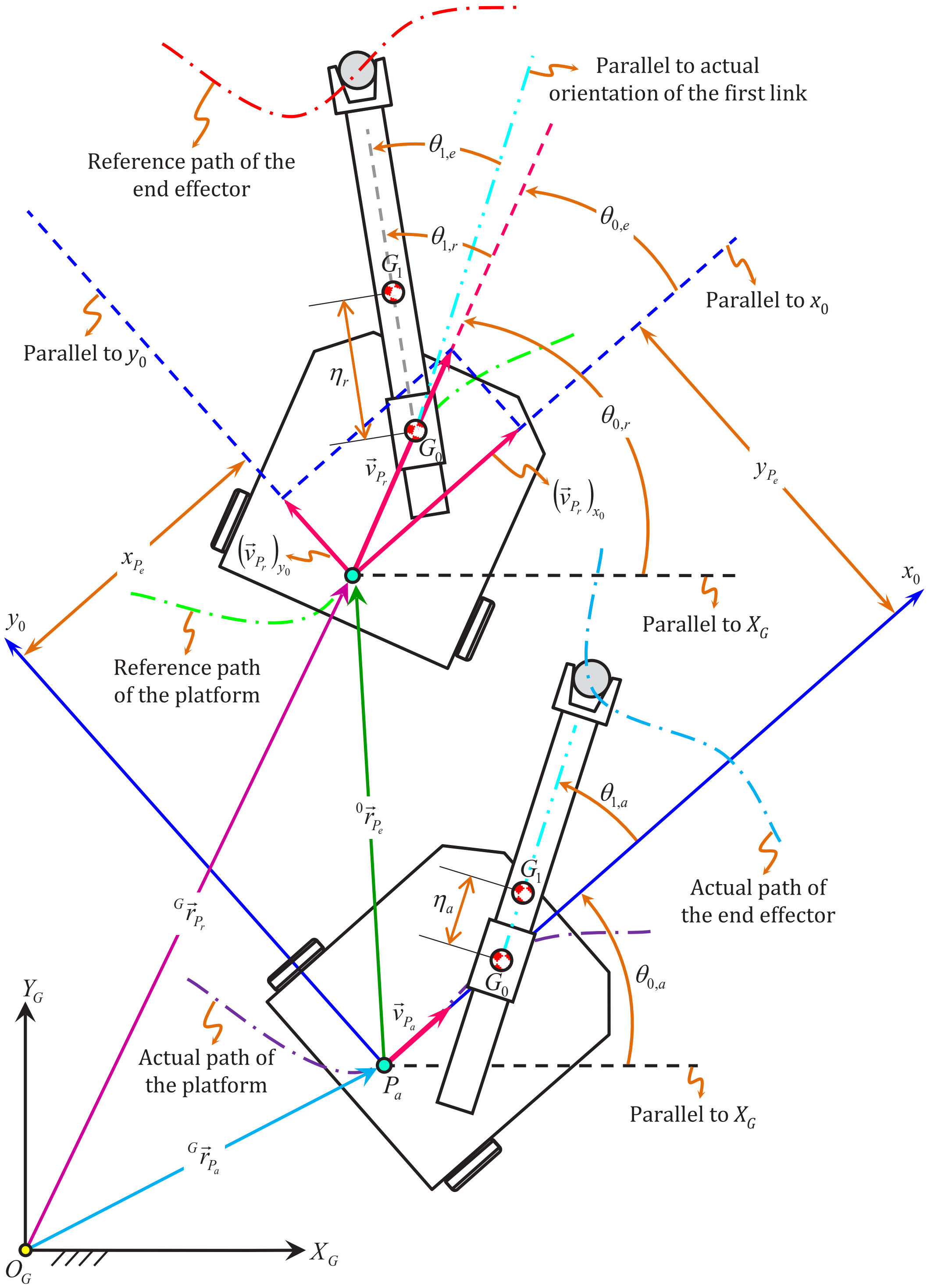

Fig.3. Actual and reference positions of the robot

شکل ۳: موقعیّت‌های واقعی و مرجع ربات

از طرفی دینامیک خطای جهت‌گیری پایه سیّار و بازوهای مکانیکی را می‌توان با مشتق‌گیری از معادلات (۲۸) الی (۳۰) نسبت به زمان به‌صورت زیر ارائه نمود.

$$\dot{x}_{P_e} = v_{P_r} \cos\theta_{0,e} - v_{P_a} + y_{P_e}\dot{\theta}_{0,a} \quad (۳۳)$$

$$\dot{y}_{P_e} = v_{P_r} \sin\theta_{0,e} - x_{P_e}\dot{\theta}_{0,a} \quad (۳۴)$$

$$\dot{\theta}_{0,e} = \dot{\theta}_{0,r} - \dot{\theta}_{0,a} \quad (۳۵)$$

$$\dot{\theta}_{1,e} = \dot{\theta}_{0,e} + \left(\dot{\theta}_{1,r} - \dot{\theta}_{1,a}\right) \quad (۳۶)$$

$$\dot{\eta}_e = \dot{\eta}_r - \dot{\eta}_a \quad (۳۷)$$

معادلات (۳۳) تا (۳۷) به‌عنوان دینامیک خطای ردیابی شناخته می‌شوند. لذا در بخش بعد این معادلات برای طراحی کنترل‌کننده سینماتیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۳-۲- طراحی کنترل‌کننده سینماتیکی

در این بخش یک کنترل‌کننده سینماتیک غیرخطّی با استفاده از روش کنترل پیش‌بین طراحی خواهد شد. در اینجا معادلات (۳۳) الی (۳۷) به‌فرم فضای حالت ارائه می‌گردند.

$$\dot{x}_1 = v_{P_r} \cos x_3 - u_1 + x_2 u_2 \quad (۳۸)$$

$$\dot{x}_2 = v_{P_r} \sin x_3 - x_1 u_2 \quad (۳۹)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta}_{0,r} - u_2 \quad (۴۰)$$

$$\dot{x}_4 = \dot{x}_3 + \left(\dot{\theta}_{1,r} - u_3\right) \quad (۴۱)$$

$$\dot{x}_5 = \dot{\eta}_r - u_4 \quad (۴۲)$$

که در آن $\vec{x} = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5\}^{\mathrm{T}} = \{x_{P_e} \quad y_{P_e} \quad \theta_{0,e} \quad \theta_{1,e} \quad \eta_e\}^{\mathrm{T}}$ بردارهای متغیر حالت و همچنین $\vec{u} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\}^{\mathrm{T}}$ =بردار ورودی سرعت‌های کنترلی است. از $\{v_{P_d} \quad \dot{\theta}_{0,d} \quad \dot{\theta}_{1,d} \quad \dot{\eta}_d\}^{\mathrm{T}}$ آنجایی که تعداد ورودی‌های کنترلی کمتر از تعداد متغیّرهای حالتی است که باید کنترل شوند، سیستم رباتیکی مورد بررسی به‌عنوان یک سیستم زیر تحریک شناخته می‌شود. هدف از این بخش پیدا کردن قوانین کنترلی مناسب جهت پایدارسازی سیستم زیر تحریکی است که توسط معادلات (۳۸) الی (۴۲) ارائه شده است (یعنی $\vec{x} \to \vec{0}$ زمانی‌که $t \to \infty$).

در مسائل پایدارسازی، توابع خروجی را می‌توان به‌گونه‌ای انتخاب نمود که کنترل‌کننده فیدبک طراحی شده سیستم را پایدار نماید [۴۸]. از این روی، بر اساس فرم فضای حالت سیستم، این توابع خروجی را می‌توان به‌صورت زیر ارائه نمود.

$$y_1 = x_1 - \beta x_2 \operatorname{sgn}\left(\dot{\theta}_{0r}\right) \quad (۴۳)$$

$$y_i = x_{i+1} \quad i = 2,\ldots,4 \quad (۴۴)$$

که $\operatorname{sgn}(.)$ تابع علامت است و β یک عدد ثابت مثبت است. اکنون با توسعه یک روش کنترل‌کننده غیرخطّی پیش‌بین [۵۲-۴۹]، کنترل‌کننده غیرخطّی چند متغیّره‌ای طراحی می‌گردد که باعث می‌شود خروجی‌های سیستم به سمت صفر میل کنند. در این روش ابتدا خروجی‌های سیستم برای بازه زمانی بعدی با استفاده از بسط سری تیلور پیش‌بینی می‌شوند. سپس ورودی‌های کنترلی پیوسته‌ای اعمال می‌گردد تا خطاهای ردیابی پیش‌بینی شده را به حداقل برساند. لذا برای حل مسئله پایدارسازی، یک تابع هدف نقطه‌ای مرتبه دو را به‌صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$$J\left(\vec{u}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} w_i \, y_i^2\left(t+h\right) \quad (۴۵)$$

که h زمان پیش‌بینی بوده و یک عدد ثابت حقیقی است و w_i عامل وزنی است. لازم به ذکر است که یک سیستم کنترلی ارزان در اینجا در نظر گرفته شده است. زیرا در آن هیچ ثابت وزنی برای ورودی‌های کنترلی در تابع هدف (معادله (۴۵)) در نظر گرفته نشده است. با به کارگیری این راهکار، ردیابی کامل حرکت ربات بدون اعمال هیچگونه محدودیتی بر روی ورودیهای کنترلی سیستم تحقّق می‌یابد. در اینجا بسط سری تیلور به‌منظور پیش‌بینی خروجی‌ها در زمان $t+h$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. خروجی‌های سیستم برای بازه زمان بعدی با استفاده از بسط سری تیلور مرتبه q در زمان t به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} y_i(t+h) &= y_i(t) + h\,\dot{y}_i(t) \\ &+ \frac{h^2}{2!}\ddot{y}_i(t) + \ldots \\ &+ \frac{h^q}{q!} y_i^{(q)}(t) \quad i = 1,\ldots,4 \end{aligned} \quad (۴۶)$$

که در آن q_i با استفاده از مرجع [۵۳] به‌دست می‌آید.

$$q_i = r_i + \rho_i \tag{۴۷}$$

که r_i و ρ_i به‌ترتیب مرتبه کنترل و درجه نسبی را نشان می‌دهند.

$$s \le r \;\; u^{[s]}\left(t+\tau\right) \neq 0 \;\; \text{اگر} \;\; \tau \in \left[0,h\right] \;\; \text{برای هر} \tag{۴۸}$$

$$s > r \;\; u^{[s]}\left(t+\tau\right) = 0 \;\; \text{اگر} \;\; \tau \in \left[0,h\right] \;\; \text{برای هر} \tag{۴۹}$$

در معادلات فوق $u^{[s]}\left(t+\tau\right)$مشتق مرتبه s تابع $u\left(t+\tau\right)$ نسبت به τ است و ρ_i درجه نسبی است، که به‌عنوان پایین‌ترین مرتبه مشتق y_i تعریف می‌شود؛ بطوریکه در آن ورودی کنترلی برای اوّلین بار به‌صورت صریح ظاهر می‌شود. بر اساس معادلات (۳۸) تا (۴۲) درجه نسبی سیستم با توجه به هر خروجی $\rho = 1$ است. از طرف دیگر برای رسیدن به یک انرژی کنترلی پایین، مرتبه کنترلی r_i در اینجا به حداقل ممکن یعنی صفر محدود می‌شود [۵۳]. لذا تنها بایستی یک بسط سری تیلور مرتبه اوّل بر روی خروجی‌ها اعمال شود. پس، پاسخ غیرخطّی هر خروجی در بازه زمانی بعد به‌صورت زیر پیش‌بینی می‌شود.

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h\,\dot{y}_i(t) \qquad i = 1,\ldots,4 \tag{۵۰}$$

با جایگذاری معادلات خروجی و مشتقّات آنها در معادله (۵۰) و سپس با جایگذاری نتیجه حاصله در معادله (۴۵)، تابع هدف بر حسب تابعی از ورودی‌های کنترلی به‌دست می‌آید. در ادامه قوانین کنترلی بهینه با کمینه‌سازی تابع هدف (معادله (۴۵)) به‌دست می‌آیند.

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = 0 \qquad i = 1,\ldots,4 \tag{۵۱}$$

بعد از انجام تعدادی عملیات ریاضی داریم.

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{1}{h}\Big\{& x_1 - \beta\, x_2 \operatorname{sgn}(\dot{e}_{0,r}) + \\ & \left(x_2 + \beta\, x_1 \operatorname{sgn}(\dot{e}_{0,r})\right)\left(x_3 + h\dot{e}_{0,r}\right) + \\ & h v_{P_r}\left(\cos x_3 - \beta \sin x_3 \operatorname{sgn}(\dot{e}_{0,r})\right)\Big\} \end{aligned} \tag{۵۲}$$

$$u_2 = \frac{1}{h}\left(x_3 + h\,\dot{\theta}_{0,r}\right) \tag{۵۳}$$

$$u_3 = \dot{\theta}_{1,r} + \dot{x}_3 + \frac{1}{h}x_4 \tag{۵۴}$$

$$u_4 = \dot{\eta}_r + \frac{1}{h}x_5 \tag{۵۵}$$

لازم به ذکر است که در استخراج ورودی‌های کنترلی بهینه، ثوابت وزنی برای تأکید بر اهمیت یکسان خطاهای ردیابی مسیر حرکت ربات، برابر ۱ در نظر گرفته شده‌اند. در ادامه ثابت خواهد شد سیستم حلقه-بسته‌ای که توسط معادلات (۳۸) تا (۴۲) توصیف شده و از طریق قوانین کنترلی که بوسیله معادلات (۵۲) الی (۵۵) به‌عنوان ورودی پایدارسازی گردیده، برای هر $\mathrm{h} > 0$ به‌صورت نمایی پایدار است. البته به شرط آنکه سرعت زاویه‌ای مرجع $\dot{e}_{0,r} \neq 0$ باشد. با جایگذاری معادلات (۳۸) و (۳۹) در مشتق اوّلین خروجی (معادله (۴۳)) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 - \beta\,\dot{x}_2 \operatorname{sgn}\left(\dot{\theta}_{0,r}\right) \\ &= -u_1 + u_2\left(x_2 + \beta\, x_1 \operatorname{sgn}\left(\dot{\theta}_{0,r}\right)\right) \\ &+ v_{p_r}\left(\cos x_3 - \beta \sin x_3 \operatorname{sgn}\left(\dot{\theta}_{0,r}\right)\right) \end{aligned} \tag{۵۶}$$

در ادامه قوانین کنترلی به‌دست آمده که توسط معادلات (۵۲) و (۵۳) ارائه گردیده‌اند، در معادله (۵۶) جایگزین می‌شوند. با ساده‌سازی معادله به‌دست آمده داریم:

$$\dot{y}_1 + \frac{1}{h}y_1 = 0 \tag{۵۷}$$

همچنین اگر عملیات فوق بر روی دیگر خروجی‌ها اعمال گردد، داریم:

$$\dot{y}_i + \frac{1}{h}y_i = 0 \quad i = 2,\ldots,4 \tag{۵۸}$$

معادلات (۵۷) و (۵۸) خطّی و ثابت با زمان هستند. لذا سیستم حلقه-بسته برای هر $\mathrm{h} > 0$ به‌صورت نمایی پایدار است. همچنین نتایج زیر بدست می‌آید:

اگر

$$t \to \infty, \quad \Rightarrow \begin{cases} y_1 \to 0 \Rightarrow x_1 \to \beta x_2 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{0,r}) \\ y_i \to 0 \Rightarrow x_{i+1} \to 0 \quad i = 2,\dots,4 \end{cases} \tag{۵۹}$$

حال با جایگذاری قوانین کنترلی ارائه شده توسط معادلات (۵۲) الی (۵۵) در معادلات دینامیک خطا ((۳۸) تا (۴۲)) و اعمال شرایط به‌دست آمده در معادله (۵۹) داریم:

$$\dot{x}_1 + \beta\, \dot{\theta}_{0,r} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{0,r})\, x_i = 0 \quad i = 1,2 \tag{۶۰}$$

$$\dot{x}_i + \frac{1}{h} x_i = 0 \quad i = 3,\dots,5 \tag{۶۱}$$

معادلات (۶۰) و (۶۱) برای هر $\mathrm{h} > 0$ و $\dot{e}_{0,r} \neq 0$ به‌صورت نمایی پایدار است. از طرفی تمامی متغیّرهای حالت به صفر همگرا می‌شوند. بنابراین هدف پایدارسازی تحقّق می‌یابد. در ادامه از ورودی‌های کنترلی به‌دست آمده در این مرحله به‌عنوان مقادیر مطلوب کنترل‌کننده دینامیکی استفاده می‌شود. در بخش بعدی ورودی‌های کنترلی گشتاور و نیرو به‌گونه‌ای طراحی می‌شوند تا این مقادیر مطلوب سرعت را ردیابی کنند.

۳-۳- طراحی کنترل‌کننده دینامیکی

در این بخش یک کنترل کننده غیرخطّی مبتنی بر روش کنترل پیش‌بین با استفاده از معادلات دینامیکی سیستم برای ربات پایه سیّار ارائه می‌گردد. مدل دینامیکی این سیستم (معادله (۲۲)) به‌فرم فضای حالت به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}) + U_i \quad i = 1,\dots,4 \tag{۶۲}$$

که $\vec{x} = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\}^{\mathrm{T}} = \{v_P \quad \dot{\theta}_0 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\eta}\}^{\mathrm{T}}$ است. همچنین بردارهای $\vec{f}\,(\vec{x})$ و $\vec{U}$ به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{\Theta}} &= I^{-1}(\vec{\Theta})\, \vec{\mathrm{Re}}(\vec{\Theta}, \dot{\vec{\Theta}}) \\ &+ I^{-1}(\vec{\Theta})\, \vec{\tau} = \vec{f}\,(\vec{x}) + \vec{U} \end{aligned} \tag{۶۳}$$

طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین برای مدل دینامیکی مشابه مدل سینماتیکی است. هدف این قسمت این است که خروجی‌های سیستم ($y_4 = \dot{\eta}$ و $y_3 = \dot{\theta}_1$ ،$y_2 = \dot{\theta}_0$ ،$y_1 = v_P$) مقادیر مطلوبشان ($y_{4,d} = \dot{\eta}_d$ و $y_{3,d} = \dot{\theta}_{1,d}$ ،$y_{2,d} = \dot{\theta}_{0,d}$ ،$y_{1,d} = v_{P_d}$) که در بخش قبل به‌دست آمدند را دنبال کنند. بر اساس فرم فضای حالت سیستم، توابع خروجی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$y_{i\ o\ i,d} = x_{i\ o\ i,d} \quad i = 1,..,4 \tag{۶۴}$$

توجه داشته باشید که پایه سیّار دارای قیود غیرهولونومیک است. لذا انتگرال v_P نسبت به زمان به‌عنوان یک شبه‌مختصات معنای فیزیکی خاصی ندارد. بنابراین متغیّر حالت $x_1 = v_P$ (و نه $x_1 = \int v_P\, dt$) برای توصیف حرکت پایه سیّار انتخاب می‌شود. همانطور که پیشتر نیز گفته شد مقادیر مطلوب به‌دست آمده از کنترل کننده سینماتیکی به شکل قوانین کنترلی ارائه شده در روابط (۵۲) الی (۵۵) باید با پیدا کردن قوانین کنترلی مناسب ردیابی شوند. در اینجا نیز مجدداً یک تابع هدف برای لحظه بعد به‌گونه‌ای که خطای ردیابی را به حداقل برساند، به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$J_1\left(\vec{U}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} w'_i\, e_i^2\left(t + h_1\right) \tag{۶۵}$$

که در آن w'_i ضریب وزنی مثبت و h_1 افق پیش‌بینی است. خطاهای ردیابی پیش‌بینی شده به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} e_i(t + h_1) &= y_i(t + h_1) \\ &- y_{i,d}(t + h_1) \quad i = 1,\cdots,4 \end{aligned} \tag{۶۶}$$

با توجه به مدل سیستم، خروجی‌های سیستم یعنی $y_i = x_i, (i = 1,\cdots,4)$ دارای درجه نسبی $\tilde{n} = 1$ هستند. لذا بسط سری تیلور مرتبه اوّل برای خروجی‌های $y_i, (i = 1,\cdots,4)$ و مقادیر مطلوب آنها یعنی $y_{i,d}, (i = 1,\cdots,4)$ کافی است.

$$\begin{aligned} y_{i\ o\ i,d}(t + h) &= y_{i\ o\ i,d}(t) \\ &+ h_1\, \dot{y}_{i\ o\ i,d}(t) \quad i = 1,\cdots,4 \end{aligned} \tag{۶۷}$$

با جایگذاری معادلات (۶۷) در معادله (۶۶) و در ادامه با جایگذاری نتیجه به‌دست آمده در تابع هدف ارائه شده توسط معادله (۶۵) و به‌کارگیری فرم فضای حالت معادلات دینامیکی (یعنی معادله (۶۲)) معادله زیر به‌دست می‌آید.

$$J_1\left(\vec{U}\right)= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} w'_i\left[\left(x_i - x_{i,d}\right)+h_1\left(f_i + U_i - \dot{x}_{i,d}\right)\right]^2 \quad (۶۸)$$

حال با اعمال شرایط بهینگی، قوانین کنترل بهینه را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$U_i = -\frac{1}{h_1}\left[e_i + h_1\left(f_i - \dot{x}_{i,d}\right)\right] \quad i=1,\cdots,4 \quad (۶۹)$$

به‌طوری که در آن خطاهای ردیابی در معادله (۶۶) تعریف شده‌اند. مانند بخش قبل با توجه به اهمیت یکسان دقت ردیابی، ضرائب وزنی برابر با یک در نظر گرفته شده‌اند. حال، با استفاده از معادلات (۲۵) و (۶۳) می‌توان به محاسبه گشتاور و نیروی اعمال شده به چرخ‌های پایه سیّار و مفاصل بازوی مکانیکی پرداخت.

$$\tau_R = \frac{r_a}{2}\left(\vec{\tau}\left(1,1\right)+\frac{\vec{\tau}\left(2,1\right)}{a}\right) \quad (۷۰)$$

$$\tau_L = \frac{r_a}{2}\left(\vec{\tau}\left(1,1\right)-\frac{\vec{\tau}\left(2,1\right)}{a}\right) \quad (۷۱)$$

$$\tau = \vec{\tau}\left(3,1\right) \quad (۷۲)$$

$$F = \vec{\tau}\left(4,1\right) \quad (۷۳)$$

در ادامه، دینامیک سیستم حلقه-بسته استخراج شده و رفتار سیستم در حضور کنترل‌کننده مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با وارد کردن قوانین کنترلی به‌دست آمده بر اساس مدل نامی (رابطه (۶۹)) در مدل واقعی سیستم (معادله (۶۲)) داریم.

$$\dot{x}_i = f_i - \frac{1}{h_1}\left[e_i + h_1(\hat{f}_i - \dot{x}_{id})\right] \quad i=1,\dots,4 \quad (۷۴)$$

که در آن $\hat{f}_i$ بیانگر مقادیر نامی است. اکنون با بازنویسی معادله (۷۴) معادله خطای ردیابی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\dot{e}_i + \frac{1}{h_1}e_i = (f_i - \hat{f}_i) \quad i=1,\dots,4 \quad (۷۵)$$

همانطور که می‌دانیم وجود عدم قطعیّت‌ها در مدل واقعی باعث می‌شود که f_i از مقداری نامی خود یعنی $\hat{f}_i$ انحراف داشته باشد. برای مقادیر مشخصی از عدم قطعیّت‌ها اختلاف بین f_i و $\hat{f}_i$ توسط یک مقدار ثابت $F_i > 0$ محدود می‌گردد. این عدم قطعیت‌ها شامل دو بخش ساختاری و غیر ساختاری هستند. دسته اول از اختلاف در مقادیر پارامترهای نامی و واقعی سیستم حاصل می‌شوند. دسته دوم شامل دینامیک‌های مدل نشده مانند لقی و بک‌لش و اصطکاک و ... می‌باشند.

$$\left|f_i - \hat{f}_i\right| \le F_i \quad i=1,\dots,4 \quad (۷۶)$$

با اعمال کران‌های بالا و پایین معادله فوق در سمت راست معادله دینامیکی خطای ردیابی (معادله (۷۵)) داریم:

$$\dot{e}_i + \frac{1}{h_1}e_i \le F_i \quad (۷۷)$$

حال برای تحلیل خطا و پایداری سیستم کنترلی در حضور عدم قطعیت‌ها، تابع لیاپانوف به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$V = \frac{1}{2}\|e\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} e_i^{\,2} \quad (۷۸)$$

با استفاده از (۷۵) و مشتق تابع لیاپانوف تعریف شده داریم:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{4} e_i\left((f_i - \hat{f}_i) - \frac{1}{h_1}e_i\right) = -\frac{1}{h_1}\|e\|^2 + \sum_{i=1}^{4} e_i(f_i - \hat{f}_i) \quad (۷۹)$$

اعمال کران بالای عدم قطعیت‌ها از رابطه (۷۶) به رابطه (۷۹) منجر می‌شود به:

$$\dot{V} \le -\frac{1}{h_1}\|e\|^2 + \sum_{i=1}^{4}|e_i|F_i \quad (۸۰)$$

حال از ناتساوی معروف زیر که از اتحاد دوم نتیجه می‌شود، استفاده می‌کنیم:

$$ab \le ca^2 + \frac{b^2}{4c} \tag{۸۱}$$

که در آن a، b و c اعداد حقیقی و مثبت هستند. با در نظر گرفتن $c = \frac{1}{4h_1}$ و اعمال ناتساوی فوق به آخرین عبارت سمت راست معادله (۸۰) می‌توان نوشت:

$$\dot{V} \le -\frac{3}{4h_1}\|e\|^2 + h_1\sum_{i=1}^{4}F_i^{\,2} \le -\frac{3}{2h_1}V + h_1 M^2 \tag{۸۲}$$

به‌طوری که

$$M^2 = \sum_{i=1}^{4}F_i^{\,2} \tag{۸۳}$$

از ناتساوی فوق نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\|e\|^2 \le (V(0) - \frac{2}{3}h_1^2 M^2)e^{-\frac{3}{2}h_1 t} \\ &+ \frac{2}{3}h_1^2 M^2 \le \frac{2}{3}h_1^2 M^2 \end{aligned} \tag{۸۴}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که خطا با گذشت زمان در داخل مجموعه $\{\|e\| \le 2h_1 M/\sqrt{3}\}$ محدود می‌شود و بدین ترتیب پایداری سیستم از نظر لیاپانوف تضمین می‌شود. همچنین با تنظیم h_1 به‌عنوان پارامتر آزاد کنترل‌کننده، می‌توان خطا را از هر مقدار دلخواه $\varepsilon > 0$ کوچکتر کرد. به عبارتی دیگر با انتخاب پارامتر آزاد h_1 به‌صورت $0 < h_1 < \sqrt{3}\varepsilon/2M$ خطای ردیابی به مجموعه $\{\|e\| \le \varepsilon\}$ همگرا خواهد شد.

تحلیل فوق نشان می‌دهد که عدم قطعیّت‌ها منجر به ایجاد خطای ردیابی می‌شود. اگر چه پارامتر افق پیش‌بین h_1 می‌تواند طوری تنظیم گردد که سبب کاهش خطاهای ردیابی ناشی از عدم قطعیّت‌ها شود؛ اما این پارامتر را تا اندازه‌ای مشخص می‌توان کاهش داد. در واقع با توجه به رابطه (۶۹) کاهش بیش از حد این پارامتر آزاد سبب ایجاد ورودی‌های کنترلی بزرگ و نوسانی می‌شود. از این‌رو لازم است با تنظیم مناسب پارمتر h_1، یک مصالحه بین کاهش خطای ردیابی و مقادیر ورودی کنترلی برقرار شود. در بسیاری از مسائل کاربردی مثل مقاله حاضر، خطای ردیابی مجاز قابل قبول می‌باشد و انتظار می‌رود انرژی کنترلی به ازای خطای ردیابی مجاز در حداقل ممکن قرار بگیرد. در مسائلی که رسیدن به خطای صفر ضروری است می‌توان از روش‌های فیدبک انتگرال [۵۴] و روش شبکه عصبی [۵۵] در ترکیب با روش پیشنهادی بهره برد.

۴- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، یک شبیه‌سازی بر پایه روش پیشنهادی برای ارزیابی عملکرد سیستم کنترلی طراحی شده، به‌منظور ردیابی مسیر حرکت توسط ربات، ارائه می‌گردد. در این شبیه‌سازی عدم قطعیّت‌ها نیز لحاظ شده است. لذا ۳۰% عدم قطعیّت در خواص جرمی این سیستم شامل m_0، m_1، I_{G_0}، I_{G_1} و I_w در نظر گرفته شده است. همچنین به‌منظور بررسی عملکرد کنترل‌کننده در شرایط واقعی، به تمام داده‌های اندازه‌گیری شده، نویز سفید افزوده شده است.

مسیرهای مرجع برای پایه سیّار و مجری نهایی به‌ترتیب زیر انتخاب شده است.

$$\begin{aligned} x_{P_r}(t) &= \sin(0.6t) \\ y_{P_r}(t) &= \sin(1.2t) \end{aligned} \tag{۸۵}$$

$$\begin{aligned} x_{E_r}(t) &= 2.16\sin^3(t) \\ y_{E_r}(t) &= 1.54\cos(t) - 0.55\cos(2t) \\ &-0.33\cos(3t) - 0.11\cos(4t) \end{aligned} \tag{۸۶}$$

با استفاده از معادله (۱) سرعت خطّی و زاویه‌ای مرجع پایه سیّار به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$v_{P_r}(t) = \sqrt{\dot{x}_{P_r}^2(t) + \dot{y}_{P_r}^2(t)} \tag{۸۷}$$

$$\begin{aligned} \theta_{0,r}(t) &= \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}_{P_r}(t)}{\dot{x}_{P_r}(t)}\right) \xrightarrow{diff} \\ \dot{\theta}_{0,r}(t) &= \frac{\ddot{y}_{P_r}(t)\dot{x}_{P_r}(t) - \ddot{x}_{P_r}(t)\dot{y}_{P_r}(t)}{\sqrt{\dot{x}_{P_r}^2(t) + \dot{y}_{P_r}^2(t)}} \end{aligned} \tag{۸۸}$$

همچنین می‌توان به آسانی نشان داد که موقعیّت خطی و زاویه‌ای مرجع بازوی صلب به‌صورت زیر است.

$$\theta_{1,r}(t) = \tan^{-1}\left(\frac{Y_r(t)}{X_r(t)}\right) - \theta_{0,r}(t) \tag{۸۹}$$

جدول ۱: موقعیّت‌ها و سرعت‌های اوّلیه برای ربات مرجع و ربات واقعی

Table 1. Reference robot and actual robot’s initial positions and velocities

ربات واقعی	ربات مرجع
$(x_P, y_P)\|_{t=0} = (2,2)\,m$	$(x_{P_r}, y_{P_r}) = (-0.333, -0.5)\,m$
$(\theta_0, \theta_1)\|_{t=0} = (\pi/6, \pi/6)\,rad$	$(\theta_{0,r}, \theta_{1,r})\|_{t=0} = (1.5708, -1.4429)\,rad$
$\eta_1\|_{t=0} = 0.5\,m$	$\eta_{1,r}\|_{t=0} = 0.3525\,m$
$v_p\|_{t=0} = 1\,m/s$	$v_{p_r}\|_{t=0} = 3\,m/s$
$(\dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1)\|_{t=0} = (1,1)\,rad/s$	$(\dot{\theta}_{0,r}, \dot{\theta}_{1,r})\|_{t=0} = (1.666, -2.3409)\,rad/s$
$\dot{\eta}_1\|_{t=0} = 1\,m/s$	$\dot{\eta}_{1,r}\|_{t=0} = 5.1871\,m/s$

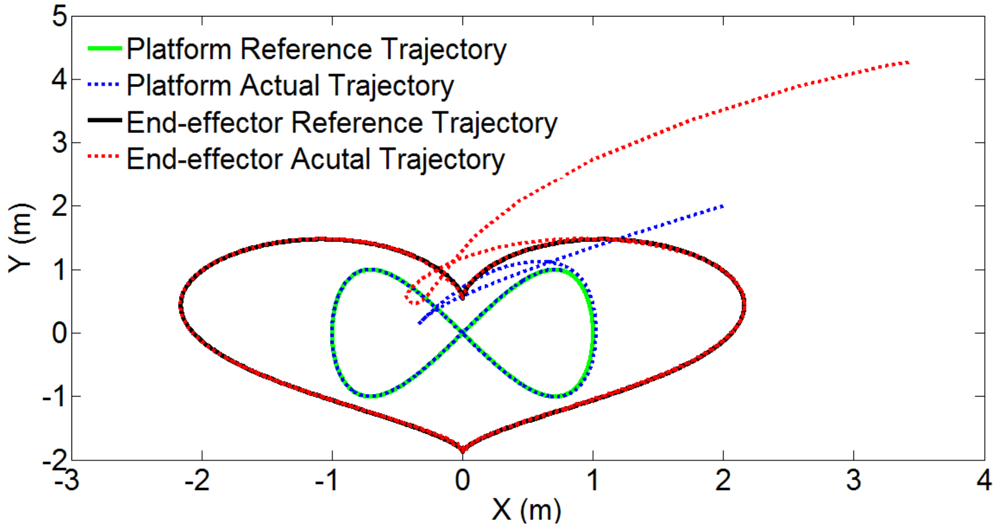

Fig.4. Moving platform and end-effector’s reference and actual trajectories

شکل ۴: مسیر مرجع و واقعی مربوط به پایه سیّار و مجری نهایی

$$\eta_r(t) = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2} - \frac{l_1}{2} \tag{۹۰}$$

که در آن

$$X_r(t) = x_{E_r}(t) - x_{P_r}(t) - d\cos(\theta_{0,r}) \\ Y_r(t) = y_{E_r}(t) - y_{P_r}(t) - d\sin(\theta_{0,r}) \tag{۹۱}$$

حال با در اختیار داشتن $\theta_{1,r}(t)$ و $\eta_r(t)$ سرعت خطّی و زاویه‌ای مرجع بازوی صلب با مشتق‌گیری از معادلات (۸۹) و (۹۰) به‌دست می‌آیند. البتّه در اینجا مسئله سینماتیک معکوس این سیستم رباتیکی به‌صورت تحلیلی حل شده است. با این وجود می‌توان مسئله سینماتیک معکوس را به‌صورت عددی جهت استفاده از مزایای روش پیشنهادی برای سیستم‌های رباتیکی پایه سیّار که از چندین بازوی صلب تشکیل شده‌اند، حل نمود.

در جدول ۱ موقعیّت و سرعت اوّلیه ربات مرجع و ربات واقعی ارائه شده است. همچنین پارامترهای آزاد قوانین کنترلی یعنی $\beta = 1$ و $h = h_1 = 0.01s$ انتخاب شده است.

شکل ۴ مسیر واقعی و مرجع پایه سیّار و مجری نهایی را نشان می‌دهد. علاوه بر این، خطای ردیابی موقعیّت و جهت‌گیری پایه سیّار و بازوی مکانیکی (x_{P_e}، y_{P_e}، $\theta_{0,e}$، $\theta_{1,e}$، η_e) در شکل ۵ نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود با وجود پارامترهای عدم قطعیّت، قوانین کنترل سینماتیکی که در این مقاله با استفاده از معادلات (۵۲) الی (۵۵) ارائه شده است، ردیابی مسیر را با دقّت قابل

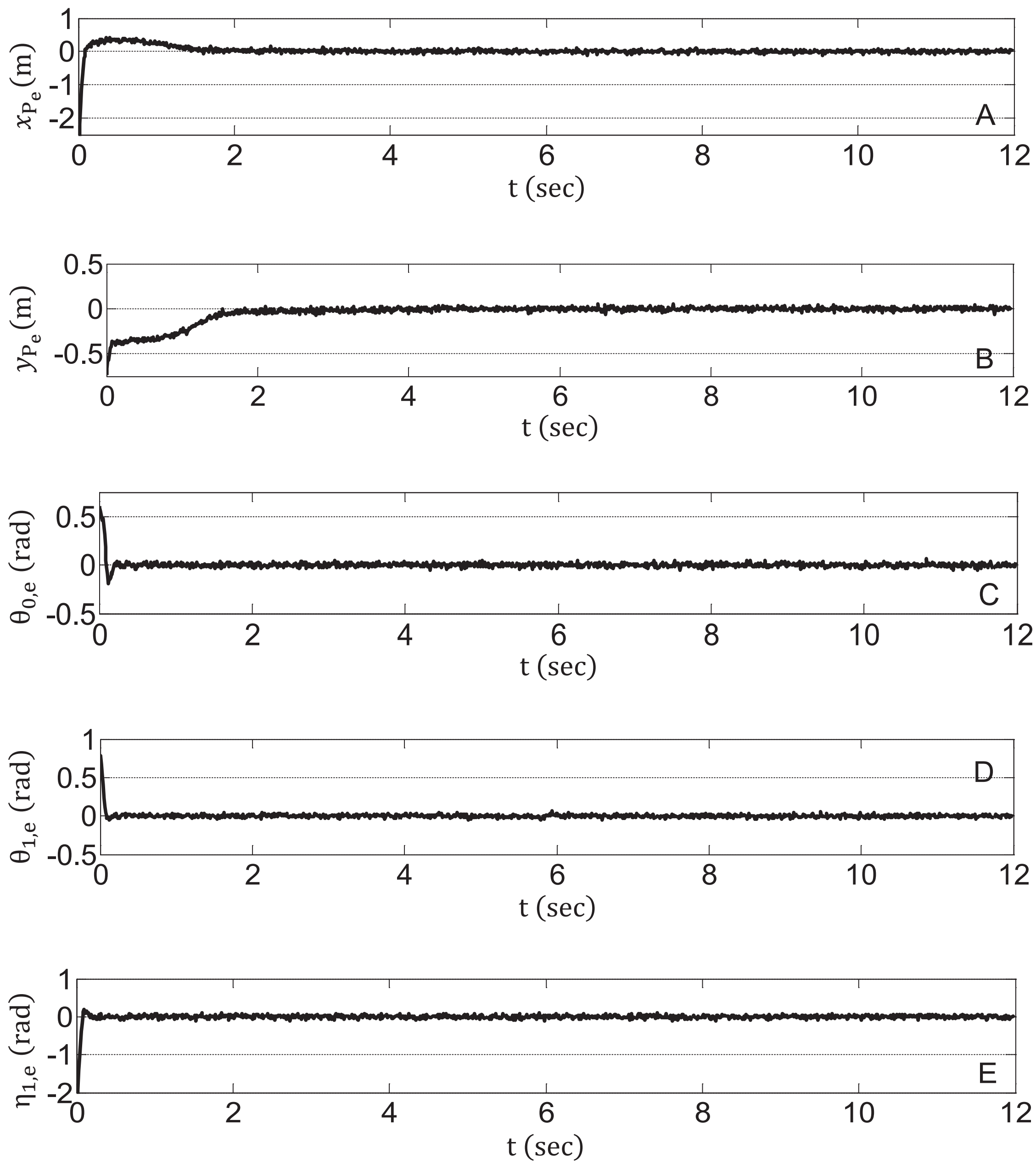

Fig.5. The position and the orientation tracking errors associated with the mobile base and manipulator links

شکل ۵: خطای ردیابی موقعیّت و جهت‌گیری مربوط به پایه سیّار و بازوی مکانیکی

قبولی انجام می‌دهند.

همانطور که قبلا ذکر شد، سرعت‌های خطّی و زاویه‌ای پایه سیّار و بازوی مکانیکی با استفاده از کنترل‌کننده سینماتیکی، توسط اعمال قوانین کنترلی که به‌وسیله معادلات (۵۲) الی (۵۵) ارائه شده است، به‌دست می‌آیند. شکل ۶ توانایی کنترل‌کننده دینامیکی که توسط معادله (۶۹) ارائه شده، در ردیابی مؤثّر پاسخ‌های مطلوب (v_{P_d}، $\dot{\theta}_{0,d}$، $\dot{\theta}_{1,d}$، $\dot{\eta}_d$) را نشان می‌دهد.

گشتاور و نیروهای اعمال شده به چرخ‌های سمت چپ و راست و بازوی مکانیکی صلب به عنوان سیگنال‌های کنترلی در شکل ۷ نشان داده شده است. همانطور که از شکل ۷ نتیجه می‌شود، ورودی‌های کنترلی به‌دست آمده تقریباً هموار هستند؛ لذا برای اهداف عملی مناسب به نظر می‌رسند.

توجه داشته باشید از آنجایی که تابع $\text{sgn}\left(\dot{\theta}_{0,r}\right)$ در $\dot{\theta}_{0,r}=0$ مشتق‌پذیر نیست، می‌توان نتیجه گرفت که کنترل‌کننده سینماتیکی

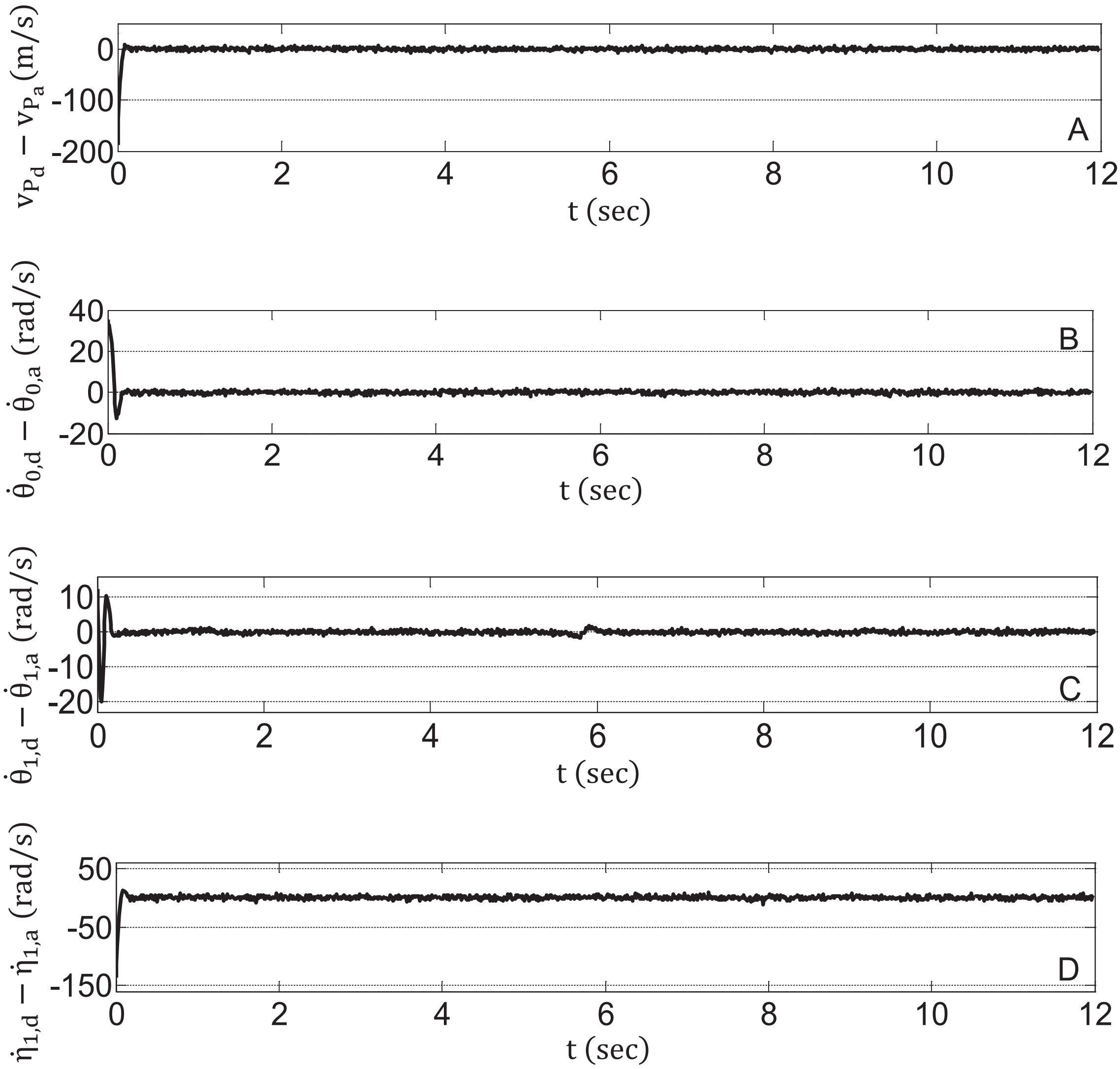

Fig.6. The tracking errors associated with (A, B) the moving platform's linear and angular velocities and (C, D) the manipulator link's linear and angular velocities

شکل ۶: (A و B) خطای ردیابی مربوط به سرعت‌های خطّی و زاویه‌ای پایه سیّار و (C و D) خطای ردیابی مربوط به سرعت‌های خطّی و زاویه‌ای بازوی مکانیکی

پیشنهاد شده در این نقطه عملکرد مطلوبی از خود نشان نمی‌دهد. در واقع ویژگی تابع *signum* باعث جهش ناگهانی در پاسخ‌های سیستم می‌شود. لذا برای غلبه بر این نقص، تابع $\tanh\left(10\dot{\theta}_{0,r}\right)$ که رفتاری شبیه به $\mathrm{sgn}\left(\dot{\theta}_{0,r}\right)$ از خود نشان می‌دهد و در عین حال در این نقطه مشتق‌پذیر است، به‌جای این تابع به‌کار می‌رود. علاوه بر این، در شبیه‌سازی ارائه شده در اینجا یک برنامه کامپیوتری بر اساس روش مرتبه هفتم و مرتبه هشتم فلبرگ[1] با گام زمانی ۰/۰۱ ثانیه برای حلّ یک دستگاه شامل پنج معادله دیفرانسیلی مرتبه اوّل سینماتیکی (معادلات (۳۸) الی (۴۲)) و همچنین برای حلّ یک دستگاه شامل چهار معادله دیفرانسیلی مرتبه اوّل دینامیکی (معادله (۶۲)) ارائه شده است. استفاده از مرتبه هفتم و مرتبه هشتم مدل‌بندی رانگ-کوتا[2]، جهت حلّ معادله دیفرانسیلی $y'(x)=f(x,y)$، تابع $f(x,y)$ را ۱۳ مرتبه در هر بازه زمانی به منظور تخمین خطا و حل مسئله مورد ارزیابی قرار می‌دهد.

۵- نتیجه‌گیری

1 Fehlberg

2 Runge-Kutta

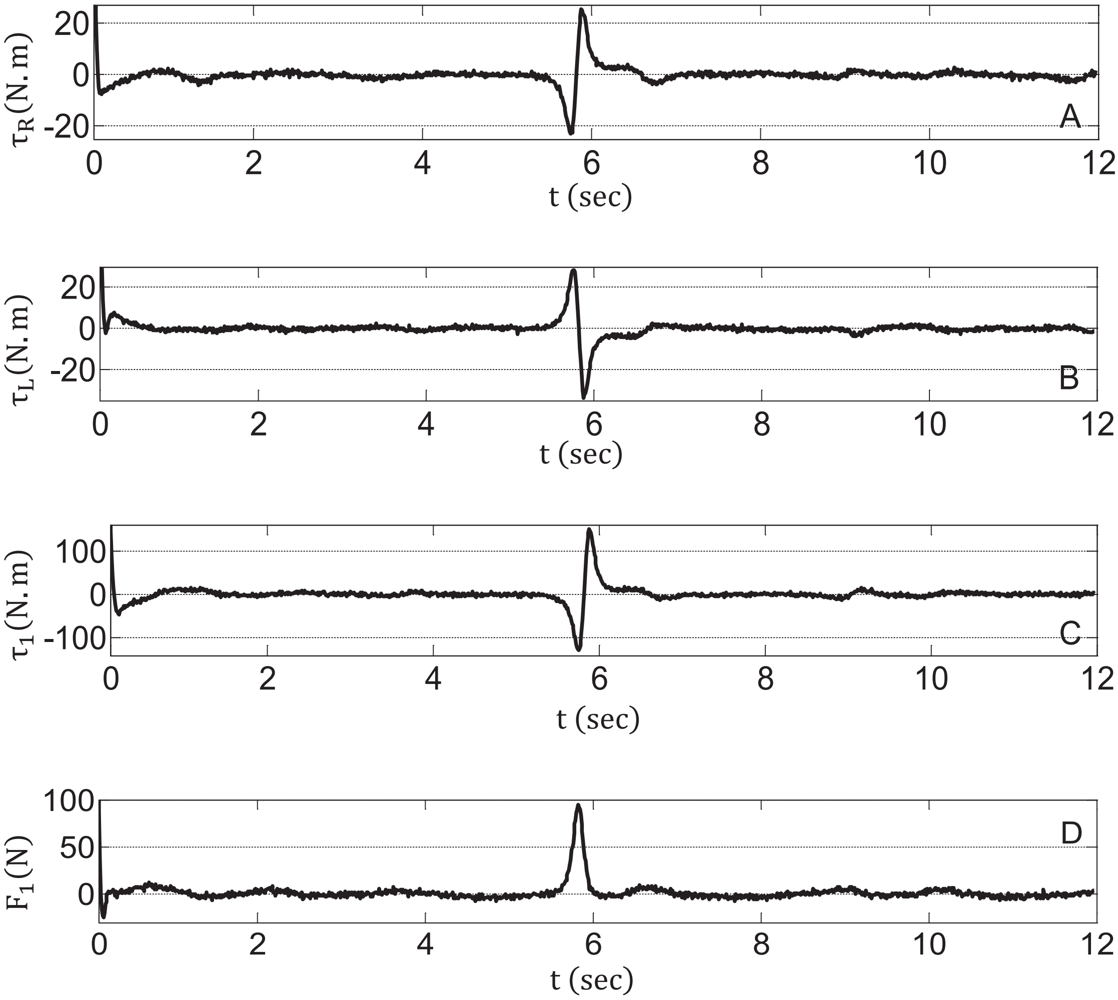

Fig.7. The input torques applied to (A, B, C) the right and left rolling wheels and the rotary joint of manipulator. The input force exerted on (D) the manipulator's sliding joint

شکل ۷: (A، B و C) گشتاور ورودی به چرخ‌های چپ و راست و بازوی دورانی ربات و (D) نیروی اعمالی به بازوی کشویی ربات

در این مقاله، ابتدا روش گیبس-اپل برای مدل‌سازی سینماتیکی و دینامیکی یک بازوی مکانیکی با مفاصل دورانی-کشویی که روی یک پایه سیّار با چرخ‌های غیرهولونومیکی قرار گرفته، توسعه داده شد. مزیت این روش در برابر دیگر روش‌ها این است که به مشکلات ضرایب لاگرانژ ناشی از قیود غیرهولونومیک برخورد نمی‌کند. در ادامه روش کنترل پیش‌بین غیرخطی برای توسعه قوانین سینماتیکی و دینامیکی مورد استفاده قرار گرفت. در این روش، پاسخ سیستم غیرخطی در افق پیش‌بین، با استفاده از بسط تیلور پیش‌بینی شده و ورودی‌های کنترلی در لحظه فعلی بر اساس مینیمم کردن خطای ردیابی در تابع عملکرد بدست آمدند. در پایان، نتایج شبیه‌سازی توانایی سیستم کنترلی طراحی شده در ردیابی مسیر مرجع زمانی در حضور نامعینی‌های پارامتریک را نشان دادند.

تأکید بیشتر این مقاله بر ارائه یک چارچوب تئوری به‌منظور استخراج معادلات حرکت و طراحی سیستم کنترلی استوار بود. لذا به‌عنوان کارهای آینده می‌توان از روش مذکور جهت مدل‌سازی دینامیکی و کنترل سیستم‌هایی به مراتب پیچیده‌تر که از تعداد بازوهای بیشتری تشکیل شده است، استفاده نمود. در ادامه با ساخت یک نمونه آزمایشگاهی می‌توان نتایج حاصل از تئوری را با نتایج حاصل از تست مقایسه نمود. همچنین به‌عنوان کارهای آینده می‌توان از تکنیک‌هایی همچون انتگرال پسخورد و شبکه عصبی به‌منظور کاهش هر چه بیشتر خطای ردیابی که به‌دلیل عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات ناشی می‌شود، بهره برد. در پایان، نوآوری‌های این تحقیق

به‌صورت خلاصه یادآوری می‌شود:

- یکی از نوع‌آوری‌های این مقاله، ترکیب همزمان دو مفصل دورانی، و رفت و برگشتی است که بر روی یک پایه سیار سوار شده است. همان‌گونه که می‌دانیم استفاده از این نوع مفاصل باعث افزایش فضای کاری ربات می‌شود. در واقع قابلیت دستکاری بازوی مکانیکی ماهر به همراه چابکی پایه سیار از ویژگی‌های منحصر به‌فرد سیستم رباتیکی مورد مطالعه می‌باشد. حال آنکه در کار انجام شده در مرجع [۴۴] تنها ردیابی پایه سیار مد نظر بوده است.
- از دیگر مزایای روش بکار رفته در این مقاله، استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل در استخراج معادلات حرکت سیستم رباتیکی مورد مطالعه است. به دلیل وجود دو قید غیرهولونومیک در پایه سیار، استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ منجر به ظهور ضرایب لاگرانژ می‌شود که حذف این ضرایب به عملیات ریاضی پیچیده‌ای نیاز دارد. حال آنکه با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل، بدون مواجه با این ضرایب و به صورت کاملاً سرراست و مستقیم معادلات حرکت استخراج می‌گردند. از طرف دیگر، روش گیبس-اپل نسبت به فرمولاسیون لاگرانژ به مشتقات جزئی کمتری برای استخراج معادلات حرکت احتیاج دارد.
- در این مقاله تمامی محاسبات با استفاده از ماتریس‌های دوران ۳×۳ و بردارهای ۱×۳ انجام شده است. استفاده از ماتریس‌های دوران ۳×۳ به‌جای ماتریس‌های انتقال ۴×۴ موجب کاهش بیش از پیش پیچیدگی محاسبات می‌شود.
- مهمترین نوآوری این مقاله الگوریتم بازگشتی آن است که برای استخراج معادلات حرکت و طراحی سیستم کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرد. همانگونه که پیشتر نیز اشاره گردید، به دلیل ماهیت بسیار پیچیده این‌گونه از سیستم‌های رباتیکی، استخراج غیربازگشتی و غیرسیستماتیک این‌گونه از معادلات علاوه بر اینکه وقت بسیار زیادی را از تحلیل‌کننده صرف می‌کند، امکان بروز خطای انسانی در آن را نیز به شدت افزایش می‌دهد. لذا ارائه یک الگوریتم سمبولیک که به تولید خودکار و سیستماتیک این‌گونه از معادلات بپردازد و نقش محاسبات دستی را بی‌اثر کند، امری لازم و ضروری است که در این مقاله به آن اشاره شده است.
- روش کنترل پیش‌بین غیرخطی به شکل حلقه بسته برای ردیابی همزمان مسیر بازوهای مکانیکی و پایه سیار مطرح گردید. حال آنکه در مرجع [۴۴] کنترل‌کننده دینامیکی طراحی شده بدون در نظر گرفتن اثرات کوپلینگ دینامیکی پایه سیار و بازوهای مکانیکی انجام شده است.

۶- مراجع

[1] O. Khatib, K. Yokoi, K. Chang, D. Ruspini, R. Holberg, A. Casal, A. Baader, Force strategies for cooperative tasks in multiple mobile manipulation systems, Robotics Research 148(2) (1996) 333-342.

[2] K. Thanjavur, R. Rajagopalan, Ease of dynamic modeling of wheeled mobile robots (WMRs) using Kane's approach, International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico: IEEE, (1997) 2926-2931.

[3] H. G. Tanner, K.J. Kyriakopouos, Mobile manipulator modeling with Kane's approach, Robotica, 19(6) (2001) 675-690.

[4] M. H. Korayem, R. A. Esfeden, S. R. Nekoo, Path planning algorithm in wheeled mobile manipulators based on motion of arms, Journal of Mechanical Science and Technology, 29(4)(2015) 1753-1763.

[5] M. H. Korayem, S. R. Nekoo, The SDRE control of mobile base cooperative manipulators: Collision free path planning and moving obstacle avoidance, Robotics and Autonomous Systems, 86 (2016) 86-105.

[6] A. H. Korayem, S. R. Nekoo, M. H. Korayem, Optimal sliding mode control design based on the state-dependent Riccati equation for cooperative manipulators to increase dynamic load carrying capacity, Robotica, 37(2) (2019) 321-337.

[7] Q. Yu, I. M. Chen, A general approach to the dynamics of nonholonomic mobile manipulator systems, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Transactions of the ASME, 124 (4) (2002) 512-521.

[8] M. Vukobratovic, V. Potkonjak, Applied dynamics and CAD of manipulation robots, Springer-Verlag, Berlin, (1985).

[9] A. F. Vereshchagin, Computer simulation of the dynamics of complicated mechanisms of robot-manipulators,

Engineering Cybernetics, 12(6) (1974) 65-70.

[10] I. J. Rudas, A. Toth, Efficient recursive algorithm for inverse dynamics, Mechatronics, 3(2) (1993) 205-214.

[11] V. Mata, S. Provenzano, J. I. Cuadrado, F. Valero, Inverse Dynamic Problem in Robots using Gibbs-Appell Equations, Robotica, 20(1) (2002) 59-67.

[12] S. Provenzano, V. Mata, M. Ceccarelli, J. L. Suner, An algorithm for solving the inverse dynamic problem in robots by using the Gibbs–Appell formulation, Robotica 21(1) (2002) 138-145.

[13] V. Mata, S. Provenzano, J. I. Cuadrado, F. Valero, Efficient Computation of the generalized inertial tensor of robots by using the Gibbs–Appell equations, Robotica, 21(1) (2002) 739-755.

[14] A. M. Shafei, H. R. Shafei, Planar multibranch open-loop robotic manipulators subjected to ground collision, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Transactions of the ASME, 12(6) (2017)1-14.

[15] M. H. Korayem, A. M. Shafei, F. Absalan, B. Kadkhodaei, A. Azimi, Kinematic and dynamic modeling of viscoelastic robotic manipulators using Timoshenko beam theory: theory and experiment, International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 71 (5-8) (2014) 1005-1018.

[16] A. M. Shafei, H. R. Shafei, Dynamic modeling of tree-type robotic systems by combining 3×3 rotation matrices and 4×4 transformation ones, Multibody System Dynamics, 44(4) (2018) 367-395.

[17] A. M. Shafei, H. R. Shafei, Dynamic behavior of flexible multiple links captured inside a closed space, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Transactions of the ASME, 11(5) (2016) 1-13.

[18] M. H. Korayem, A. M. Shafei, S. F. Dehkordi, Systematic modeling of a chain of N-flexible link manipulators connected by revolute-prismatic joints using recursive Gibbs-Appell formulation, Archive of Applied Mechanics, 84 (2) (2014) 187-206.

[19] A. M. Shafei, H. R. Shafei, Dynamic modeling of planar closed-chain robotic manipulators in flight and impact phases, Mechanism and Machine Theory, 126 (2018) 141-154.

[20] A. M. Shafei, H. R. Shafei, A systematic method for the hybrid dynamic modeling of open kinematic chains confined in a closed environment, Multibody System Dynamics, 38(1) (2016) 21-42.

[21] M. H. Korayem, A. M. Shafei, Application of recursive Gibbs-Appell formulation in deriving the equations of motion of N-viscoelastic robotic manipulators in 3D space using Timoshenko beam theory, Acta Astronautica, 83 (2013) 273-294.

[22] V. Rezaei, A. M. Shafei, Dynamic analysis of flexible robotic manipulators constructed of functionally graded materials, Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering, 43(1) (2019) 327–342.

[23] M. H. Korayem, A. M. Shafei, M. Doosthoseini, F. Absalan, B. Kadkhodaei, Theoretical and experimental investigation of viscoelastic serial robotic manipulators with motors at the joints using Timoshenko beam theory and Gibbs–Appell formulation, Proc IMechE Part K: J Multi-body Dynamics, 230 (1) (2016) 37-51.

[24] A. M. Shafei, H. R. Shafei, Considering link flexibility in the dynamic synthesis of closed-loop mechanisms: A general approach, Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME, 142(2) (2020) 1-12.

[25] M. Ahmadizadeh, A. M. Shafei, M. Fooladi, A recursive algorithm for dynamics of multiple frictionless impact-contacts in open-loop robotic mechanisms, Mechanism and Machine Theory, 146 (2020) 1-20.

[26] A. M. Shafei, H. R. Shafei, Oblique Impact of Multi-Flexible-Link Systems, Journal of Vibration and Control, 24(5) (2018) 904-923.

[27] A. M. Shafei, M. H. Korayem, Theoretical and experimental study of DLCC for flexible robotic arms in point-to-point motion, Optimal Control Applications and Methods, 38(6) (2017) 963-972.

[28] M. H. Korayem, A. M. Shafei, Motion equation of nonholonomic wheeled mobile robotic manipulator with revolute-prismatic joints using recursive Gibbs-Appell formulation, Applied Mathematical Modeling, 39(5) (2015) 1701-1716.

[29] M. H. Korayem, A. M. Shafei,A New Approach for Dynamic Modeling of n-Viscoelastic-link Robotic Manipulators Mounted on a Mobile Base, Nonlinear Dynamics, 79(4) (2015) 2767-2786.

[30] M. H. Korayem, A. M. Shafei, E. Seidi, Symbolic derivation of governing equations for dual-arm mobile manipulators used in fruit-picking and the pruning of tall trees, Computers and Electronics in Agriculture, 105 (2014) 95-102.

[31] M. H. Korayem, A. M. Shafei, H. R. Shafei, Dynamic modeling of nonholonomic wheeled mobile manipulators with elastic joints using recursive Gibbs-Appell formulation, Scientia Iranica Transaction b: Mechanical engineering, 19(4) (2012) 1092-1104.

[32] R. W. Brockett, Asymptotic stability and feedback stabilization, R. W. Brockett, R. S. Millman, H. J. Sussmann, Differential Geometric Control Theory, Boston, MA: Birkhuser, (1983)181-191.

[33] G. D. White, R. M. Bhatt, C. P. Tang, V. N. Krovi, Experimental evaluation of dynamic redundancy resolution in a nonholonomic wheeled mobile manipulator, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 14(3) (2009) 349-357, 2009.

[34] S. Yi, J. Zhai, Adaptive second-order fast nonsingular terminal sliding mode control for robotic manipulators, ISA Transactions, 90 (2019), 41-51.

[35] M. Boukens, A. Boukabou, M. Chadli, Robust adaptive neural network-based trajectory tracking control approach for nonholonomic electrically driven mobile robots, Robotics and Autonomous Systems, 92 (2017) 30-40.

[36] S. G. Tzafestas, K. M. Deliparaschos, G. P. Moustris, Fuzzy logic path tracking control for autonomous non-holonomic mobile robots: Design of System on a Chip, Robotics and Autonomous Systems, 58(8) (2010) 1017-1027.

[37] L. Xin, Q. Wang, J. She, Y. Li, Robust adaptive tracking control of wheeled mobile robot, Robotics and Autonomous Systems, 78 (2016) 36-48.

[38] G. Yi, J. Mao, Y. Wang, S. Guo, Z. Miao, Adaptive tracking control of nonholonomic mobile manipulators using recurrent neural networks, International Journal of Control, Automation and Systems, 16(3) (2018) 1390-1403.

[39] A. Bakdi, A. Hentout, H. Boutami, A. Maoudj, O. Hachour, B. Bouzouia, Optimal path planning and execution for mobile robots using genetic algorithm and adaptive fuzzy-logic control, Robotics and Autonomous Systems, 89 (2017) 95-109.

[40] Z. Li, Y. Kang, Dynamic coupling switching control incorporating support vector machines for wheeled mobile manipulators with hybrid joints, Automatica, 46(5) (2010) 832-842.

[41] M. Boukattaya, M. Jallouli, T. Damak, On trajectory tracking control for nonholonomic mobile manipulators with dynamic uncertainties and external torque disturbances, Robotics and autonomous systems, 60(12) (2012) 1640-1647.

[42] N. Chen, F. Song, G. Li, X. Sun, C. Ai, An adaptive sliding mode backstepping control for the mobile manipulator with nonholonomic constraints, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18(10) (2013) 2885-2899.

[43] J. Peng, J. Yu, J. Wang, Robust adaptive tracking control for nonholonomic mobile manipulator with uncertainties, ISA Transactions, 53(4) (2014) 1035-1043.

[44] H. Mirzaeinejad, A. M. shafei, Modeling and trajectory tracking control of a two-wheeled mobile robot: Gibbs–Appell and prediction-based approaches, Robotica, 36(10) (2018) 1551-1570.

[45] J. R. Forbes, Adaptive approaches to nonlinear state estimation for mobile robot localization: an experimental comparison ,Transactions of the Institute of Measurement and Control, 35 (2013) 971-985.

[46] B. Zhou,Y. Peng, J. Han, UKF based estimation and tracking control of nonholonomic mobile robots with slipping, IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, Sanya, China, (2007) 2058–2063.

[47] D. Simon,Optimal State Estimation: Kalman, H∞, and Nonlinear Approaches, Hoboken, NY: Wiley-Interscience, (2006).

[48] J. J. E. Slotine, W. Li,Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N J, (1991).

[49] M. Mirzaei, H. Mirzaeinejad,Fuzzy Scheduled Optimal Control of Integrated Vehicle Braking and Steering Systems, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 22 (2017) 2369-2379.

[50] H. Mirzaeinejad, M. Mirzaei, R. Kazemi, Enhancement of vehicle braking performance on split-k roads using optimal integrated control of steering and braking systems, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: J Multi-body Dynamics, 230 (2016) 401-415.

[51] H. Mirzaeinejad , M. Mirzaei, S. Rafatnia, A novel technique for optimal integration of active steering and differential braking with estimation to improve vehicle directional stability, ISA Transactions, 80 (2018) 513-527.

[52] M. Jafari, M. Mirzaei, and H. Mirzaeinejad, Optimal nonlinear control of vehicle braking torques to generate practical stabilizing yaw moments, International Journal of Automotive and Mechanical Engineering, 11 (2015) 2639.

[53] W. H. Chen, D. J. Balance, P. J. Gawthrop, Optimal control of nonlinear systems: A predictive control approach, Automatica, 39 (2013) 633–641.

[54] H. Mirzaeinejad, Optimization-based nonlinear control laws with increased robustness for trajectory tracking of non-holonomic wheeled mobile robots, Journal of Transportation Research Part C, 101 (2019) 1-17.

[55] H. Mirzaeinejad, Robust predictive control of wheel slip in antilock braking systems based on radial basis function neural network, Applied Soft Computing, 70 (2018) 318-329.

پیوست الف

تابع گیبس کل سیستم شامل پایه سیار، چرخ‌های سمت راست و چپ و بازوی صلب سیستم به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$
\begin{aligned}
S ={}& \frac{1}{2}m_0\left[\left(\dot v_P - d\dot\theta_0^2\right)^2 + \left(v_P\dot\theta_0 + d\ddot\theta_0\right)^2\right] \\
&+\frac{1}{2}m_1\left[\begin{array}{l}
\left(\dot v_P - d\dot\theta_0^2\right)^2 + \left(v_P\dot\theta_0 + d\ddot\theta_0\right)^2 + \eta^2\left(\dot\theta_0+\dot\theta_1\right)^4 \\
+\ddot\eta^2 + 4\dot\eta^2\left(\dot\theta_0+\dot\theta_1\right)^2 + \eta^2\left(\ddot\theta_0+\ddot\theta_1\right)^2 \\
+2\ddot\eta C_1\left(\dot v_P - d\dot\theta_0^2\right) - 2\eta C_1\left(\dot v_P - d\dot\theta_0^2\right)\left(\dot\theta_0+\dot\theta_1\right)^2 \\
-4\dot\eta S_1\left(\dot v_P - d\dot\theta_0^2\right)\left(\dot\theta_0+\dot\theta_1\right) - 2\eta S_1\left(\dot v_P - d\dot\theta_0^2\right)\left(\ddot\theta_0+\ddot\theta_1\right) \\
+2\ddot\eta S_1\left(v_P\dot\theta_0 + d\ddot\theta_0\right) - 2\eta S_1\left(v_P\dot\theta_0 + d\ddot\theta_0\right)\left(\dot\theta_0+\dot\theta_1\right)^2 \\
+4\dot\eta C_1\left(v_P\dot\theta_0 + d\ddot\theta_0\right)\left(\dot\theta_0+\dot\theta_1\right) + 2\eta C_1\left(v_P\dot\theta_0 + d\ddot\theta_0\right)\left(\ddot\theta_0+\ddot\theta_1\right) \\
-2\eta\ddot\eta\left(\dot\theta_0+\dot\theta_1\right)^2 + 4\eta\dot\eta\left(\dot\theta_0+\dot\theta_1\right)\left(\ddot\theta_0+\ddot\theta_1\right)
\end{array}\right] \\
&+\frac{1}{2}I_{G_0}\ddot\theta_0^2 + \frac{1}{2}I_{G_1}\left(\ddot\theta_0+\ddot\theta_1\right)^2 + \frac{I_w}{r_a^2}\left(\dot v_P^2 + a^2\ddot\theta_0^2\right);
\end{aligned}
\tag{الف-۱}
$$

مشتق‌گیری از تابع گیبس (انرژی شتاب) نسبت به شبه شتابهای مستقل به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \dot v_P} ={}& \frac{2I_w}{r_a^2}\dot v_P + \left(m_0+m_1\right)\left(\dot v_P - d\dot\theta_0^2\right) - m_1\eta C_1\left(\dot\theta_0+\dot\theta_1\right)^2 \\
&- m_1\eta S_1\left(\ddot\theta_0+\ddot\theta_1\right) + m_1\ddot\eta C_1 - 2m_1\dot\eta S_1\left(\dot\theta_0+\dot\theta_1\right);
\end{aligned}
\tag{الف-۲}
$$

(الف-۳)
$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}_0}=\left(m_0 d+m_1 d+m_1 \eta C_1\right)\left(v_P \dot{\theta}_0+d \ddot{\theta}_0\right)+\left(m_1 \eta^2+m_1 d \eta C_1+I_{G_1}\right)\left(\ddot{\theta}_0+\ddot{\theta}_1\right)$$
$$-m_1 \eta S_1\left(\dot{v}_P-d \dot{\theta}_0^2\right)+m_1 d \ddot{\eta} S_1-m_1 d \eta S_1\left(\dot{\theta}_0+\dot{\theta}_1\right)^2$$
$$+2 m_1 \dot{\eta}\left(d C_1+\eta\right)\left(\dot{\theta}_0+\dot{\theta}_1\right)+\left(I_{G_0}+\frac{2 a^2 I_w}{r_a^2}\right) \ddot{\theta}_0 ;$$

(الف-۴)
$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}_1}=\left(m_1 \eta^2+I_{G_1}\right)\left(\ddot{\theta}_0+\ddot{\theta}_1\right)-m_1 \eta S_1\left(\dot{v}_P-d \dot{\theta}_0^2\right)+m_1 \eta C_1\left(v_P \dot{\theta}_0+d \ddot{\theta}_0\right)+2 m_1 \eta \dot{\eta}\left(\dot{\theta}_0+\dot{\theta}_1\right);$$

(الف-۵)
$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\eta}}=m_1 \ddot{\eta}+m_1 C_1\left(\dot{v}_P-d \dot{\theta}_0^2\right)+m_1 S_1\left(v_P \dot{\theta}_0+d \ddot{\theta}_0\right)-m_1 \eta\left(\dot{\theta}_0+\dot{\theta}_1\right)^2 ;$$

همچنین ضرایب ماتریس اینرسی کل سیستم و سمت راست معادلات دینامیک مستقیم به صورت زیر ارائه می‌گردند:

(الف-۶)
$$I_{11}=\frac{2 I_w}{r_a^2}+m_0+m_1$$

(الف-۷)
$$I_{12}=I_{21}=-m_1 \eta S_1$$

(الف-۸)
$$I_{13}=I_{31}=-m_1 \eta S_1$$

(الف-۹)
$$I_{14}=I_{41}=m_1 C_1$$

(الف-۱۰)
$$I_{22}=d^2\left(m_0+m_1\right)+2 m_1 d \eta C_1+I_{G_0}+I_{G_1}+\frac{2 a^2 I_w}{r_a^2}+m_1 \eta^2$$

(الف-۱۱)
$$I_{23}=I_{32}=m_1 \eta^2+m_1 d \eta C_1+I_{G_1}$$

(الف-۱۲)
$$I_{24}=m_1 d S_1$$

(الف-۱۳)
$$I_{33}=m_1 \eta^2+I_{G_1}$$

(الف-۱۴)
$$I_{34}=I_{43}=0$$

$$I_{44} = m_1 \tag{الف-۱۵}$$

$$\mathrm{Re}_{\dot{v}_p} = (m_0 + m_1) d\dot{\theta}_0^2 + m_1 \eta C_1 (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2 + 2m_1 \dot{\eta} S_1 (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1); \tag{الف-۱۶}$$

$$\mathrm{Re}_{\ddot{\theta}_0} = -(m_0 d + m_1 d + m_1 \eta C_1) v_P \dot{\theta}_0 + m_1 d \eta S_1 (\dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_0)) - 2m_1 \dot{\eta} (d C_1 + \eta)(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1); \tag{الف-۱۷}$$

$$\mathrm{Re}_{\ddot{\theta}_1} = -m_1 \eta d S_1 \dot{\theta}_0^2 - m_1 \eta C_1 v_P \dot{\theta}_0 - 2m_1 \eta \dot{\eta} (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1); \tag{الف-۱۸}$$

$$\mathrm{Re}_{\ddot{\eta}} = m_1 C_1 d \dot{\theta}_0^2 - m_1 S_1 v_P \dot{\theta}_0 + m_1 \eta (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2; \tag{الف-۱۹}$$

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

H. Mirzaeinejad, A.M. Shafei, Modeling and trajectory tracking control of non-holonomic mobile robot with revolute-prismatic joints. AmirKabir J. Mech Eng., 53(special issue 2) (2021) 1041-1064.

DOI: 10.22060/mej.2020.16853.6456