



# Nonlinear Electro-aero-elastic Vibration Analysis of a Nanocomposite Laminated Trapezoidal Actuator

M. Noroozi, F. Bakhtiari-Nejad\*

Mechanical Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

**ABSTRACT:** The nonlinear vibration behaviors of a cantilevered piezoelectric carbon nanotube-reinforced composite trapezoidal plate as an actuator in micro air vehicles are considered in this article. The assumption of the uniformly distributed single-walled carbon nanotubes along the thickness is taken into consideration. The plate is exposed to subsonic airflow which is modeled by linear potential flow theory and subjected to combined parametric and external excitations. The large deflection von Karman plate assumptions are applied to derive the governing equations of the motion of the laminated trapezoidal plate by using Hamilton's principle. Galerkin's approach combined with proper transformation is formulated and utilized to transform the geometry of the trapezoidal plate into a rectangular computational domain. The nonlinear two-degrees-of-freedom ordinary differential equations with cubic nonlinearities in the case of 1:3 internal resonance and primary resonance are solved by using the multiple scales method. The frequency-response and time-response curves are obtained to analyze the nonlinear dynamic behavior of the plate and study the effects of different parameters such as the amplitudes and frequencies of the excitations and aerodynamic pressure on the nonlinear vibration and dynamic stability of the thin laminated plate. As a result, a complex softening nonlinearity is observed in frequency-response curves.

## Review History:

Received: Nov. 03, 2019  
Revised: Dec. 29, 2019  
Accepted: May, 03, 2020  
Available Online: May, 07, 2020

## Keywords:

Trapezoidal actuator  
Combined parametric and external excitations  
Internal resonance  
Subsonic airflow  
Multiple scales method

## 1. INTRODUCTION

In the past decade, the high-performance piezoelectric nanocomposite laminated plates [1] have been applied to micro air vehicles. These plates can undergo large deflections which lead to nonlinear oscillations. Due to the existence of the modal interactions in high-dimensional nonlinear dynamic systems, several types of internal resonances are created which can lead to various forms of nonlinear vibrations. Hence when a special internal resonant relationship between two linear natural frequencies is created, the large amplitude nonlinear responses may suddenly happen and cause serious damages to the piezoelectric nanocomposite laminated structures. So, research works on the nonlinear mechanical behavior of nanocomposite laminated piezoelectric plates with different practical shapes are playing a key role in such light-weight structures.

A survey of the literature shows that most of the research on quadrilateral and trapezoidal plates was devoted to bending, and free vibration analysis and studies are concerned about the dynamic response and nonlinear characteristics of trapezoidal plates are so limited. For the first time, Tian et al. [2] used the Rayleigh-Ritz approach combined with the affine transformation to investigate the nonlinear vibration characteristics of trapezoidal plates under a transverse harmonic excitation in the case of internal and primary resonances. This article attempts to fill the void by providing a geometrical nonlinear vibration and dynamic behaviors of a cantilever single-walled carbon nanotube-reinforced

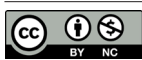
composite bonded with two piezoelectric surfaces trapezoidal plate subjected to the electrical and the transverse mechanical loads in subsonic airflow which have not conducted yet. The case of one-to-three internal resonance and primary resonance is considered and the method of multiple scales is utilized to solve the coupled nonlinear equations having cubic nonlinearities.

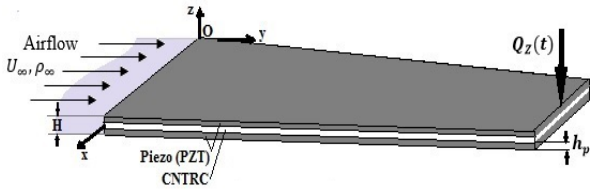
## 2. PROBLEM DEFINITION

A cantilever laminated piezoelectric CNTRC trapezoidal plate subjected to the aerodynamic load  $\Delta P$  and transverse load  $Q_z(t)$  is shown in Fig. 1. It is assumed that the piezoelectric layers are very thin compared to the dimensions of the plate and the applied voltage  $V_E(t) = V_D + V_A \cos(\Omega t)$  is much larger than self-induced voltage, which is derived from the direct piezoelectric effect theory in the actuators and is simultaneously applied to both upper and lower piezoelectric layers.

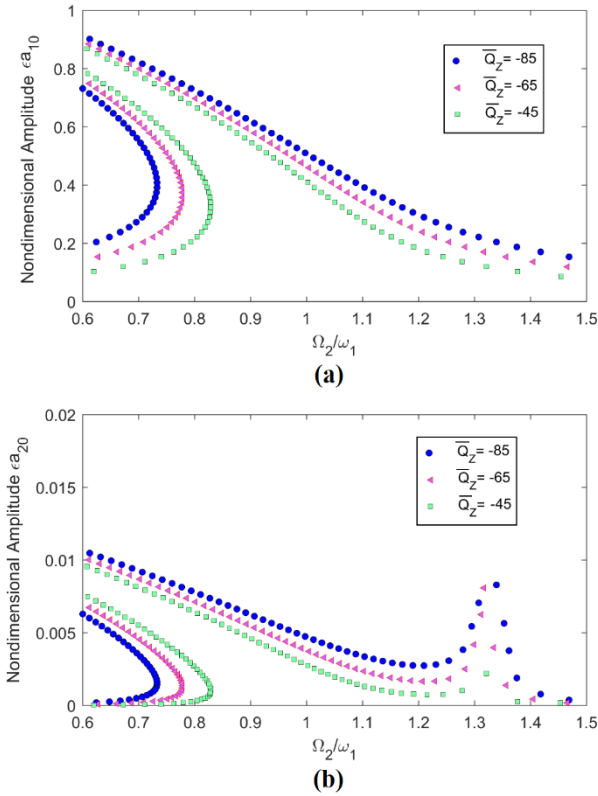
Governing equations are derived using the classical laminated plate theory and von Karman type equations for the geometric nonlinearity with Hamilton's principle. The trapezoidal plate geometry is mapped into a rectangular computational domain. The nonlinear partial differential equations of motion for the cantilever laminated trapezoidal plate are transformed into a two-degree-of-freedom nonlinear system under the electromechanical loads and the aerodynamic pressure by using Galerkin's approach. The

\*Corresponding author's email: bakhtiari@aut.ac.ir





**Fig. 1.** The cantilever laminated CNTRC trapezoidal plate with two surface-bonded piezoelectric actuator layers subjected to a subsonic airflow and external transverse load

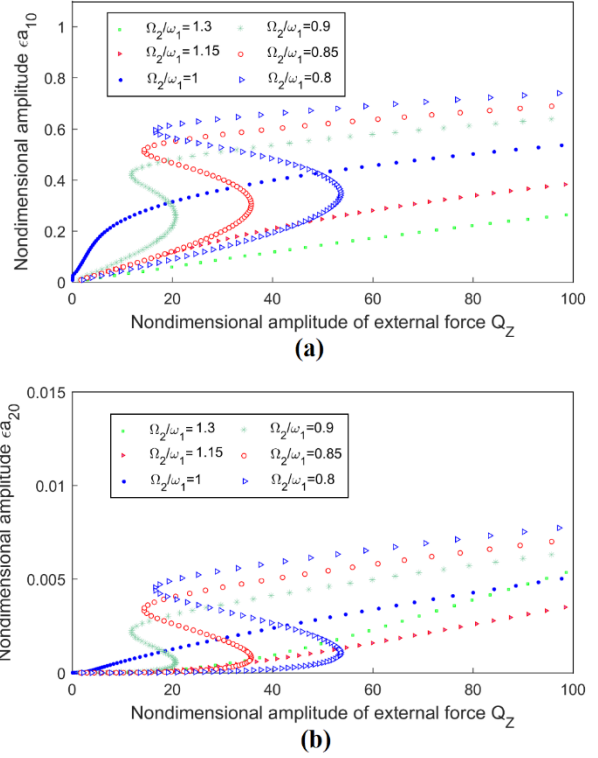


**Fig. 2.** Effect of amplitude of external excitation on frequency-response curves of the plate in the presence of aerodynamic load, parametric and external excitations, (a) mode (1, 1), (b) mode (2, 2)

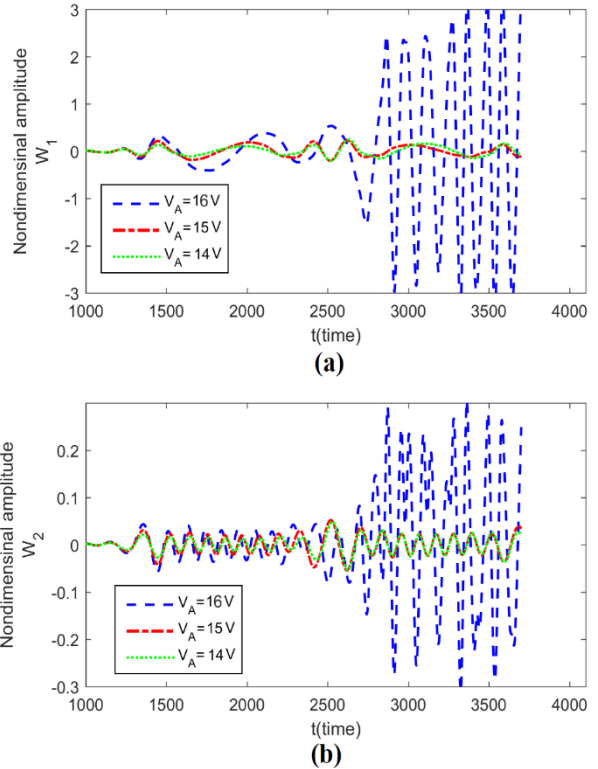
method of multiple scales is employed to solve the coupled nonlinear equations having cubic nonlinearities in the case of one-to-three internal resonance and primary resonance.

### 3. RESULTS AND DISCUSSION

The influence of the amplitude of external transverse excitation on frequency-response curves of the trapezoidal plate obtained by considering two-mode analysis in the presence of aerodynamic load and parametric excitation is depicted in Fig. 2. It can be seen at the same excitation to linear frequency ratio the higher amplitude of external excitation leads to a higher amplitude of vibration. Besides, it can be observed that the nonlinearity increases by increasing the amplitude of external transverse excitation. Also, it can be noticed in Fig. 2(b) that there is a complex softening



**Fig. 3.** Amplitude of response of (a) mode (1, 1), (b) mode (2, 2), versus amplitude of the external excitation for several frequency ratios in the presence of aerodynamic load, parametric excitation



**Fig. 4.** Effect of the amplitude of electrical excitation on time response of (a) mode (1, 1), (b) mode (2, 2).

nonlinearity with two peaks in higher coupled mode. This type of nonlinearity happens due to the presence of the 1:3 internal resonance between two modes which resulting in the exchange of energy among two different modes.

The variation of the amplitudes of the responses as a function of the amplitude of the external excitation for several frequency ratios in the presence of aerodynamic load, parametric and external excitations is shown in Fig. 3(a, b). It is clear that depending on the value of frequency ratio, some curves are single-valued while others are multivalued which leads to jumping phenomena. In addition, the presence of internal resonance and complex nonlinearity causes the different behavior of the curves in Figs. 3(a,b).

The influence of amplitude of parametric excitation on the time history responses of the two modes of the trapezoidal plate is studied by using numerical integration. In Fig. 4(a, b) when  $V_A = 16$  V, the amplitude of mode responses grows exponentially and unbounded oscillatory happens so the dynamic instability can be observed.

#### 4. CONCLUSIONS

In this paper, the nonlinear theoretical model is used to study the nonlinear vibration of the cantilever laminated piezoelectric CNTRC trapezoidal actuator under combined parametric and external excitations and exposed to the subsonic airflow. The resonance case considered here is 1:3

internal resonance and primary resonance. The following important results were obtained

a) Internal resonance provides a mechanism of transferring energy between the two modes, so a complex softening nonlinearity with two peaks in the higher mode is observed in frequency-response curves which depend on the airflow velocity and amplitude of external excitation.

b) The stability analysis of steady-state solutions shows that depending on the value of the detuning parameter, some response curves are multivalued which leads to the jumping phenomena in the resonance region.

c) The amplitude and frequency of electrical excitation have significant effects on dynamic instability.

#### 5. REFERENCES

- [1] M. Rafiee, X. He, K. Liew, Non-linear dynamic stability of piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates with initial geometric imperfection, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 59 (2014) 37-51.
- [2] W. Tian, Z. Yang, T. Zhao, Analysis of Nonlinear Vibrations and Dynamic Responses in a Trapezoidal Cantilever Plate Using the Rayleigh-Ritz Approach Combined with the Affine Transformation, *Mathematical Problems in Engineering*, 1 (2019) 1–23.

#### HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Noroozi, F. Bakhtiari-Nejad, *Nonlinear Electro-aero-elastic Vibration Analysis of a Nanocomposite Laminated Trapezoidal Actuator*. *Amirkabir J. Mech Eng.*, 53(special issue 2) (2021) 271-274.  
DOI: [10.22060/mej.2020.17292.6564](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17292.6564)







## تحلیل ارتعاشات غیرخطی الکتروآیروالاستیکی یک عملگر لایه‌ای نانوکامپوزیت

مرضیه نوروزی، فیروز بختیاری نژاد\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۱۲

بازنگری: ۱۳۹۸/۱۰/۰۸

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۲/۱۴

ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۲/۱۸

### کلمات کلیدی:

عملگر دوزنقه‌ای

تحریک همزمان خارجی و پارامتریک

تشدید داخلی

جریان مادون صوت

روش مقیاس‌های چندگانه

**خلاصه:** دینامیک غیرخطی و رفتارهای ارتعاشی یک صفحه‌ی دوزنقه‌ای یکسرگردار، با یک لایه‌ی نانوکامپوزیت و دو لایه پیزوالکتریک، در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. این صفحه که به عنوان یک عملگر در ریزپرنده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد، در معرض جریان مادون صوت بوده که با کمک نظریه جریان پتانسیل خطی مدل گردیده و تحت تحریک‌های الکتریکی و نیروی خارجی قرار دارد. لایه میانی صفحه توسط نانولوله‌های کربنی که به صورت یکنواختی در سرتاسر ضخامت صفحه توزیع شده‌اند، تقویت شده است. معادلات غیرخطی صفحه با فرض جابجایی‌های بزرگ و ن کارمن و با کمک اصل همپلتون استخراج شده و طی نگاشتی، هندسه‌ی صفحه دوزنقه‌ای از حوزه فیزیکی به حوزه محاسباتی مستطیلی انتقال می‌یابد. همچنین با استفاده از روش گلرکین معادلات دیفرانسیل با دو درجه آزادی و جزءهای غیرخطی مرتبه سه استخراج می‌شود. معادلات با بکارگیری روش مقیاس‌های چندگانه و در حالت تشدید همزمان اولیه و داخلی ۱:۳ حل گردیدند. در ادامه منحنی‌های پاسخ فرکانسی و زمانی بدست آورده شد و اثرات پارامترهای مختلف مانند فشار آیرودینامیک، دامنه‌ی بارهای عرضی و ولتاژ الکتریکی بر ارتعاشات غیرخطی صفحه نازک مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به نتایج بدست آمده در منحنی پاسخ فرکانسی، رفتار نرم‌شوندگی غیرخطی پیچیده‌ای با دو قله در مد بالاتر مشاهده می‌شود.

### ۱- مقدمه

پدیدارشدن تکنولوژی‌های نوظهور مانند ریزپرنده‌ها و ریزربات‌ها نیازمند عملگرهایی با وزن کم و فرکانس تشدید بالا بوده که از موادی با کارایی بالا ساخته شده باشند. نانولوله‌های کربنی، لوله‌هایی در مقیاس مولکولی از جنس کربن گرافیت هستند که دارای خواص مکانیکی قابل توجهی مانند نسبت وزن به سختی بالا می‌باشند. اضافه کردن نانولوله‌های کربنی به داخل ماده پلیمری به عنوان تقویت‌کننده به جای فیبرهای معمول، عملکرد ماده را به صورت بالقوه‌ای بالا می‌برد و فواید بسیاری در ریز سازه‌ها دارد. از مواد پیزوالکتریک به عنوان عملگرها و سنسورها در کاربردهای مهندسی استفاده می‌شود. به دلیل خواص قابل توجه فیزیکی و مکانیکی نانولوله‌های کربنی و

پیزوالکتریک، در دهه گذشته تیرها، صفحات و پوسته‌های لایه‌ای نانوکامپوزیت پیزوالکتریک با کارایی بالا در ساخت سازه‌هایی با ابعاد کوچک مخصوصاً در کاربردهای هوایی بکار گرفته شدند. این سازه‌ها می‌توانند متحمل خیزهای بزرگی شوند که منجر به ارتعاشات غیرخطی می‌شود. بنابراین به دلیل حضور برهم‌کنش‌های مودال در سیستم‌های دینامیک غیرخطی انواع مختلفی از تشدیدهای داخلی در این سیستم‌ها وجود می‌آید که سبب انواعی از رفتارهای ارتعاشی غیرخطی می‌شود. یکی از دلایل بوجود آمدن تشدیدهای داخلی تبادل انرژی بین مدهای مختلف می‌باشد. زمانیکه نسبت یا رابطه‌ی خاصی بین دو فرکانس طبیعی خطی بوجود می‌آید، پاسخ‌های غیرخطی با دامنه‌ی بالا اتفاق می‌افتد که سبب خسارت‌های جدی در این سازه‌های نانوکامپوزیتی چند لایه می‌شود. بنابراین مطالعات

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: baktiari@aut.ac.ir



بر روی رفتارهای مکانیک غیرخطی این سازه‌ها در اشکال مختلف و با روش‌های تحلیلی و عددی گوناگون نقش کلیدی را در شناخت رفتارهای این سازه‌های سبک بازی می‌کنند.

مطالعات متعددی در زمینه رفتار غیرخطی دینامیکی سازه‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی اختصاص داده شده است. برای مثال، تحلیل رفتار غیرخطی خمشی یک صفحه نانوکامپوزیت تقویت‌شده مستطیلی تحت بارهای مختلف حرارتی توسط شن [۱] ارائه شد. شوشتری و همکاران [۲] دینامیک غیرخطی مکانیکی و حرارتی یک صفحه نانوکامپوزیت با تکیه‌گاه ساده را مورد بررسی قرار دادند. وانگ و شن [۳] ارتعاشات خمشی با دامنه بزرگ یک صفحه ساندویچی که بر روی تکیه‌گاه الاستیک قرار دارد را با کمک تکنیک اغتشاشی مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند با اضافه کردن نانولوله‌های کربنی به صفحه فرکانس خطی صفحه کاهش می‌یابد در حالیکه نسبت فرکانس غیرخطی به خطی افزایش می‌یابد. رفیعی و همکاران [۴] پایداری دینامیک غیرخطی یک صفحه پیزوالکتریک نانوکامپوزیت مستطیلی با نقص هندسی اولیه را مورد بررسی قرار دادند. پایداری غیرخطی وابسته به حرارت یک صفحه ویسکوز تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی توسط کلاهچی و همکاران [۵] بررسی شد. گو و ژانگ [۶] ارتعاشات غیرخطی و حرکات آشفته یک صفحه تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و تکیه‌گاه ساده را تحت تحریک‌های پارامتریک و خارجی در حضور تشدید داخلی ۱:۱، ارائه کردند.

تاکنون تحقیقاتی در زمینه ارتعاشات صفحات لایه‌ای پیزوالکتریک کامپوزیت انجام گرفته شده است. کرومر و ایسچیک [۷] ارتعاشات خمشی یک صفحه ریزنر-میندیلین پیزوالکتریک کامپوزیتی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها صفحات پیزوالکتریک را به عنوان عملگر و حسگر در نظر گرفتند. همچنین نشان دادند که جفت‌شدگی مکانیکی، الکتریکی و حرارتی به وسیله پارامترهای سختی و بارهای حرارتی مؤثر امکان پذیر می‌باشد. تحلیل پس‌کمانش حرارتی یک عملگر پیزوالکتریک لایه‌ای تحت بارهای حرارتی و الکتریکی توسط شن [۸] انجام شد. لیم و همکاران [۹] مطالعه‌ای سه بعدی از پاسخ‌های الکترومکانیکی یک صفحه یکسرگیردار پیزوالکتریک که به عنوان حسگر و عملگر مورد استفاده قرار گرفته بود، انجام دادند. لیم و ه [۱۰] حل دقیقی از یک صفحه لایه‌ای پیزوالکتریک تحت

بار یکنواخت مکانیکی ارائه کردند. نتایج بدست‌آمده از تحقیق گویای این واقعیت است که تنش، کرنش، پتانسیل الکتریکی و جابجایی الکتریکی در لایه‌ها مستقل از مختصات درون صفحه‌ای می‌باشند. دنادون و همکاران [۱۱] تحقیقی در زمینه اثرات تنش‌های القایی پیزوالکتریک بر فرکانس‌های طبیعی صفحات پیزوالکتریک لایه‌ای کامپوزیتی مربعی با دو تکیه‌گاه گیردار در دو ضلع روبرو انجام دادند. همچنین حساسیت فرکانس‌های طبیعی به ولتاژهای مختلف پیزوالکتریک مشاهده شد. لیو و همکاران [۱۲] ارتعاشات صفحات کامپوزیتی پیزوالکتریک مستطیلی با عملگر و حسگر پیزوالکتریک را با استفاده از روش مش آزاد تحلیل کردند. لیم و لاو [۱۳] رفتارهای الکترومکانیکی یک صفحه‌ی یکسرگیردار لایه‌ای ضخیم با عملگر پیزوالکتریک و لایه‌ی همسانگرد تحت بار خارجی الکتریکی با استفاده از مدل دو بعدی را مورد بررسی قرار دادند. نتایج عددی نشان داد که پاسخ خمشی عملگر با ولتاژ الکتریکی رابطه‌ی مستقیمی دارد و پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت به صورت خطی افزایش می‌یابد. حیدری و اسلامی [۱۴] اثرات حرارت را بر پاسخ دینامیکی یک صفحه کامپوزیتی پیزوالکتریک مطالعه کردند. پاسخ‌های استاتیکی و دینامیکی یک سازه کامپوزیتی ساخته شده از یک صفحه الاستیک باریک و یک لایه پیزوالکتریک که به طور کامل به آن متصل شده است توسط فرناندس و پوگت [۱۵] ارائه شد. آنها اثرات موقعیت عملگر را بر پاسخ‌های محلی و جامع صفحه بررسی کردند. کوسکولوقلو و رویستون [۱۶] با کمک روش المان محدود به تحلیل ارتعاشات صفحات میندیلین لایه‌ای پیزوالکتریک با در نظر گرفتن رفتار هیستریزیک پرداختند. ژانگ و همکاران [۱۷] دینامیک متناوب و آشفته یک صفحه مستطیلی لایه‌ای کامپوزیتی پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده تحت بارهای الکتریکی و درون صفحه‌ای با فرض تشدید پارامتریک و داخلی ۱:۲ را مورد بررسی قرار دادند. یاو و ژانگ [۱۸] با استفاده از روش توسعه یافته ملنیکو به بررسی دوشاخگی هموکلینیک چند پالسی در یک صفحه لایه‌ای پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده پرداختند. ساویز [۱۹] با بکارگیری یک دیدگاه بهینه پاسخ گذرای یک صفحه کامپوزیتی لایه‌ای با لایه‌های پیزوالکتریک و غیرخطی هندسی با درجه بالا را کنترل کرد. لی و پن [۲۰] به جهت ارتقاء مدل وابسته به اندازه یک ریز صفحه پیزوالکتریک از معادلات متغیر استفاده کردند. آنها فرض کردند که خواص مواد

شرایط مرزی کاملاً گیردار و کاملاً ساده بررسی کرده که این قابلیت فراتر از توان روش‌های نیمه‌تحلیلی دیگر می‌باشد. زمانی و همکاران [۳۰]، ارتعاشات آزاد صفحات نسبتاً ضخیم چند لایه متقارن با شرایط مرزی مختلف را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از روش درجه‌بندی دیفرانسیل عمومی برای بدست آوردن معادلات حرکت استفاده کردند. ملک‌زاده و زارعی [۳۱]، رفتار ارتعاشی خطی یک صفحه چند ضلعی چند لایه تشکیل شده از لایه‌های نانوکامپوزیت، با تکیه‌گاه‌های ساده، گیردار و ترکیبی از آنها را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و درجه بندی دیفرانسیلی مورد مطالعه قرار دادند. ترابی و افشاری [۳۲]، بال دوزنقه‌ای ساندویچی تشکیل شده از دو لایه همسانگرد و یک هسته لانه زنبوری را با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تحت جریان ماوراءصوت مدل کردند. معادلات صفحه دوزنقه‌ای را از صفحه مختصات طبیعی به صفحه مختصات محاسباتی مستطیلی انتقال دادند و سپس معادلات را به صورت عددی و با استفاده از روش درجه‌بندی دیفرانسیلی حل کردند. در نهایت فرکانس‌های طبیعی، شکل مدها و همچنین سرعت بحرانی را محاسبه کردند. رفتار غیرخطی یک بال دوزنقه‌ای تحت جریان ماوراء صوت توسط تیان و همکاران [۳۳] مورد مطالعه قرار گرفت. آنها با استفاده از نظریه خیزهای بزرگ و تئوری مرتبه سوم پیستون و همچنین با بکارگیری روش رایلی-ریتز و انتقال هندسه صفحه دوزنقه‌ای از مختصات طبیعی به مختصات محاسباتی، بال دوزنقه‌ای را مدل کرده و سپس با استفاده از انتگرال‌گیری عددی معادلات را حل کرده و از نظر آیروداستیکی تحلیل کردند. همچنین در مطالعه‌ای دیگر [۳۴] به بررسی ارتعاشات غیرخطی صفحه دوزنقه‌ای تحت تحریک خارجی عرضی و تشدید داخلی با استفاده از روش رایلی-ریتز، انتقال مختصات و تئوری اغتشاشی پرداختند و نشان دادند که صفحه یکسرگیردار دوزنقه‌ای با تغییر دامنه تحریک در حالت تشدید داخلی یک به سه، رفتار آشفته، نیمه‌آشفته و تناوبی را از خود نشان می‌دهد.

همانطور که بررسی مطالعات پیشین نشان می‌دهد بیشتر تحقیقات در زمینه صفحات چندوجهی و دوزنقه‌ای، به تحلیل ارتعاشات آزاد و استاتیکی اختصاص داده شده است و مطالعه بر روی پاسخ دینامیکی غیرخطی این صفحات بسیار محدود می‌باشد. در این مقاله به بررسی ارتعاشات غیرخطی و رفتار دینامیکی یک میکرو صفحه دوزنقه‌ای لایه‌ای پیزوالکتریک نانوکامپوزیت یکسرگیردار که

در میان ضخامت بر طبق قانون توزیع توانی تغییر می‌کند. ژانگ و همکاران [۲۱] دوشاخگی و حرکات متناوب و آشفته یک صفحه مستطیلی پیزوالکتریک لایه‌ای را تحت تحریک‌های درون صفحه‌ای، پیزوالکتریک و عرضی در حالت تشدید اولیه پارامتریک و تشدید داخلی ۱:۳ بررسی کردند. خورشیدی و کریمی [۲۲] به بررسی رفتار آیرودینامیکی یک صفحه ساندویچی در محیط گرمایی پرداختند و اثرات پارامترهای مختلف را بر پایداری دینامیکی بررسی کردند.

اگر چه تحقیقات زیادی در زمینه ارتعاشات صفحات لایه‌ای پیزوالکتریک انجام شده است [۷-۲۲]، مطالعه در مورد تحلیل ارتعاشات و پاسخ دینامیکی صفحات دوزنقه‌ای پیزوالکتریک با تحریک‌های مختلف هنوز مورد بررسی قرار گرفته نشده است. تحلیل ارتعاشات غیرخطی صفحات دوزنقه‌ای یکسرگیردار به دلیل پیچیدگی شرایط مرزی در لبه‌های آزاد و شکل هندسی نسبت به سایر صفحات دارای دشواری‌های زیادی می‌باشند. بنابراین بررسی رفتار ارتعاشی و پاسخ‌های مکانیکی این صفحات از اهمیت خاصی در طراحی‌های مهندسی برخوردار می‌باشد. از اینرو سرینیواسان و بابو [۲۳]، به تحلیل ارتعاشات صفحات چند وجهی و دوزنقه‌ای با استفاده از روش عددی و بر پایه اصل تغییرات پرداختند. لیو و همکاران [۲۴-۲۶]، با استفاده از روش رایلی-ریتز فرکانس‌های طبیعی صفحات دوزنقه‌ای همسانگرد و غیرهمسانگرد با تکیه‌گاه‌های مختلف ساده، گیردار، آزاد و با ضخامت ثابت و متغیر را بررسی کردند، آنها نشان دادند بیشترین فرکانس طبیعی زمانی است که صفحه یکسرگیردار دوزنقه‌ای تا حد امکان به صفحه مثلی تبدیل شود. ارتعاشات آزاد صفحات دوزنقه‌ای یکسرگیردار چند لایه ضخیم متقارن با استفاده از روش پی-ریتز با در نظر گرفتن تئوری برشی مرتبه سوم توسط چن و همکاران [۲۷] ارائه شد. شکراللهی و بختیاری نژاد [۲۸]، با استفاده از روش رایلی-ریتز و تئوری جابجایی بزرگ ون کارمن به بررسی ارتعاشات یک بال دوزنقه‌ای ریب در جریان‌های مادون صوت پرداختند. همچنین آنها اثرات پارامترهای کلیدی را در رفتار بال بررسی کردند. شوفرین و همکاران [۲۹]، از یک روش نیمه تحلیلی برای تحلیل ارتعاشات غیرخطی استاتیکی یک صفحه دوزنقه‌ای تحت بار عرضی استفاده کردند. آنها با استفاده از روش تعمیم‌یافته چند ترمی کانترویچ و همچنین انتقال هندسه صفحه دوزنقه‌ای از مختصات طبیعی به مختصات محاسباتی مستطیلی، جابجایی و تنش‌های صفحه را به ازای

هر لایه پیزوالکتریک عملگر می‌باشد. از ضخامت لایه چسب صرف‌نظر شده است. هندسه صفحه دوزنقه‌ای و مختصات آن در شکل ۲ (الف) به تصویر کشیده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود و طول دو ضلع مجاور،  $\alpha$  و  $\beta$  مقادیر زاویه‌های حاد و منفرجه نسبت به محور  $x$  می‌باشند که در صفحه دوزنقه‌ای متقارن مورد نظر  $\beta = 180 - \alpha$  فرض شده است. مبدأ مختصات سیستم در گوشه پایینی صفحه دوزنقه‌ای قرار گرفته شده است و صفحه محورهای  $x$ - $y$  بر سطح میانی صفحه دوزنقه‌ای واقع شده است. همچنین محور  $z$  به سمت بالا می‌باشد. بعلاوه صفحه مورد نظر یکسرگیردار بوده بدین معنی که ضلع واقع بر محور  $x$  در شکل ۲ (الف) گیردار بوده و شرایط مرزی سایر وجه‌ها آزاد می‌باشند. فرض شده است که بار عرضی متمرکز بر نقطه‌ی در انتهای آزاد صفحه و بر خط مرکزی  $(0, 0, L_x, L_y)$  وارد می‌شود.

$$Q_z(t) = Q \cos(\Omega_2 t) \quad (1)$$

$\Omega_2$  فرکانس و  $Q$  دامنه تحریک هارمونیک عرضی می‌باشند.

به عنوان عملگر در میکرو ربات‌های پرنده‌ها بکار گرفته می‌شود و تحت فشار آیرودینامیک ناشی از جریان مادون‌صوت و تحریک‌های خارجی و پارامتریک می‌باشد، پرداخته می‌شود. معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی صفحه مورد نظر با استفاده از روش گلرکین جداسازی شده و به صورت معادلات دیفرانسیل با دو درجه آزادی و ترم‌های غیر خطی مرتبه سه استخراج می‌شود. با بکارگیری روش مقیاس‌های چندگانه با فرض تشدید اولیه و داخلی ۱:۳ معادلات کوپل شده حل می‌گردند. صحت مدل حاضر با مقایسه نتایج حاصل و تعدادی از پژوهش‌های پیشین مورد بررسی قرار می‌گیرند.

## ۲- تعریف مسئله

همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است، صفحه‌ی نانوکامپوزیت لایه‌ای پیزوالکتریک مورد نظر که به عنوان عملگر در ریزپرنده‌ها بکار گرفته می‌شود، تحت بارهای مکانیکی، الکتریکی و آیرودینامیکی قرار دارد. سازه از سه لایه تشکیل شده است که به صورت کامل و متقارن بهم متصل شده‌اند. ضخامت کل صفحه برابر  $H$  می‌باشد و  $h_p$  ضخامت

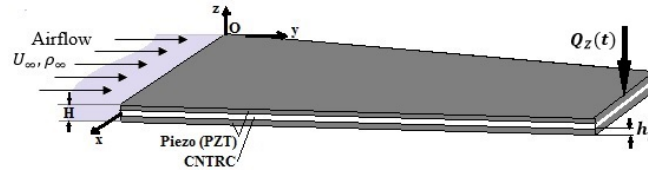


Fig. 1. The cantilever laminated CNTRC trapezoidal plate with two surface-bonded piezoelectric actuator layers subjected to a subsonic airflow and external transverse load

شکل ۱. صفحه دوزنقه‌ای نانوکامپوزیت لایه‌ای یکسرگیردار با دو لایه عملگر پیزوالکتریک صفحه‌ای در معرض جریان مادون‌صوت و بار عرضی خارجی

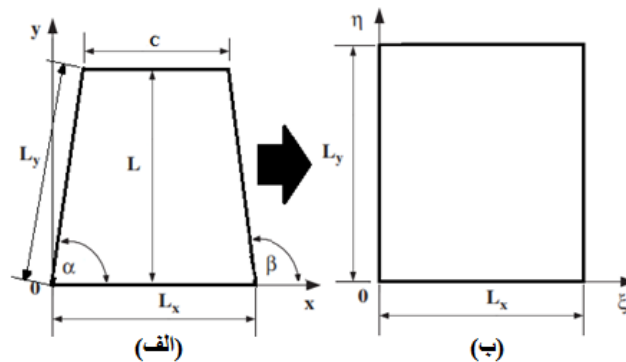


Fig. 2. Mapping of a trapezoidal plate (a) The original plate geometry, (b) The transformed model in computational domain [35]

شکل ۲: انتقال صفحه دوزنقه‌ای (الف) هندسه صفحه دوزنقه‌ای در مختصات مبدأ (ب) مدل انتقال یافته شده در حوزه محاسباتی [۳۵]



همچنین فرض شده است که ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک در

مقایسه با سایر ابعاد صفحه بسیار کوچک بوده پس می‌توان از ولتاژ خودالقاء صرف‌نظر کرد. بنابراین رابطه میدان الکتریکی ناشی از ولتاژ ورودی که به طور یکسان و همزمان به دو لایه‌ی بالایی و پایینی پیزوالکتریک وارد می‌شود بصورت رابطه (۲) می‌باشد [۴]:

$$E_z(t) = \frac{V_E(t)}{h_p} \quad (2)$$

به ترتیب  $V_A$ ،  $V_D$ ، بطوریکه  $V_E(t) = V_D + V_A \cos(\Omega_1 t)$  دامنه ولتاژهای مستقیم (DC)، متناوب (AC) و فرکانس ولتاژ متناوب می‌باشند. بنابراین برآیند نیروهای پیزوالکتریک وارد بر صفحه  $(N_1^P, N_2^P, N_{12}^P)$  از رابطه‌ی (۳) محاسبه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} N_1^P \\ N_2^P \\ N_{12}^P \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} [e]^{(k)} [E_z(t)]^{(k)} dz \quad (3)$$

ماتریس ثابت‌های پیزوالکتریک می‌باشد. بنابراین برآیند نیروهای پیزوالکتریک به صورت  $N_1^P = N_2^P = N_D^P + N_A^P \cos(\Omega_1 t)$  بدست می‌آید. از آنجایی که صفحه متقارن است برآیند گشتاورهای پیزوالکتریک برابر صفر می‌باشد.

بعلاوه عملگر مورد بررسی، در معرض جریان هوای مادون صوت محوری با چگالی ( $\rho_\infty$ ) و سرعت ( $U_\infty$ ) قرار دارد. جریان از نوع تراکم‌ناپذیر<sup>۱</sup>، بدون لزجت<sup>۲</sup> و چرخش بوده که به این نوع جریان جریان پتانسیل می‌گویند و می‌توان آن را به کمک نظریه جریان پتانسیل خطی<sup>۳</sup> مدل کرد و با کمک رابطه (۴) بدست می‌آید [۳۷]:

$$\Delta P = -\rho_\infty U_\infty^2 \left[ B_0(y) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} + \frac{2}{U_\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial Y \partial t} + \frac{1}{U_\infty^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \frac{R(y)}{\pi} \right] \quad (4)$$

در رابطه (۴) ترم‌های  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ ،  $\frac{\partial^2 w}{U_\infty \partial Y \partial t}$  و  $\frac{\partial^2 w}{\partial Y^2}$  به ترتیب مربوط به شتاب گریز از مرکز، کوریولیس و شتاب انتقالی ذرات هوا می‌باشند و برای صفحه یکسرگردار به صورت روابط (۵) و (۶) تعریف می‌شود

[۳۷]:

$$B_0(y) = \frac{L}{\pi} \left\{ \left( 1 - \frac{y}{L} \right) \left( \ln \left( 1 - \frac{y}{L} \right) - 1 \right) + \frac{y}{L} \left( \ln \frac{y}{L} - 1 \right) \right\} \quad (5)$$

$$R(y) = \left[ \frac{\partial w}{\partial Y}(L) + \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial w}{\partial t}(L) \right] L n \left( 1 - \frac{y}{L} \right) \quad (6)$$

و تابع  $L n \left( \frac{y-Y}{L} \right)$  اثر حافظه‌ی مکانی<sup>۴</sup> می‌باشد.

### ۳- خواص موثر مواد در لایه نانوکامپوزیت

خواص موثر مواد در لایه نانوکامپوزیت، مخلوط نانولوله‌های کربنی تک دیواره و پلیمر همسانگرد، بر اساس قانون اختلاط با معرفی پارامترهای موثر نانولوله‌های کربنی که به صورت مستقیم و یکنواخت در راستای ضخامت صفحه توزیع شده‌اند، به شرح زیر می‌باشد [۳]:

$$E_{11N} = \eta_1 V_{CN} E_{11}^{CN} + V_m^h E_m^h \quad (7)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22N}} = \frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}} + \frac{V_m^h}{E_m^h}$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12N}} = \frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}} + \frac{V_m^h}{G_m^h}$$

به ترتیب  $G_m^h$  و  $E_m^h$  به ترتیب مدول یانگ و مدول برشی ماده زمینه همسانگرد لایه نانوکامپوزیت  $E_{11}^{CN}$ ،  $E_{22}^{CN}$  و  $G_{12}^{CN}$  پارامترهای مربوط به نانو لوله‌های کربنی می‌باشند.  $V_{CN}$  و  $V_m^h$  ضرایب کسر حجمی ماده زمینه و نانولوله‌های کربنی می‌باشند که توسط معادلات (۸) و (۹) به یکدیگر مرتبط می‌باشند. ضرایب  $\eta_1$ ،  $\eta_2$  و  $\eta_3$  پارامترهای بهره‌وری نانولوله‌های کربنی هستند که با تطبیق مدول الاستیک نانوکامپوزیت تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی با استفاده از شبیه سازی دینامیک مولکولی و عددی از قانون اختلاط بدست می‌آیند:

$$V_{CN} = \frac{W_{CN}}{W_{CN} + (\rho_{CN} / \rho_h^m) - (\rho_{CN} / \rho_h^m) W_{CN}} \quad (8)$$

$$V_{CN} + V_m^h = 1 \quad (9)$$

که در رابطه (۸)  $W_{CN}$  کسر جرمی نانو لوله کربنی در صفحه

1 Incompressible  
2 Inviscid  
3 Linear potential flow theory

4 Spatial memory

### ۵- اصل همیلتون

از اصل همیلتون برای استخراج معادلات حرکت صفحه نانوکامپوزیت پیزوالکتریک دوزنقه‌ای بر طبق تئوری کلاسیک صفحات لایه‌ای و جابجایی‌های بزرگ ون کارمن به صورت رابطه‌ی (۱۵) استفاده شده است [۳۶]:

$$\int_0^T \delta(U+V-K)dt = 0 \quad (15)$$

که در رابطه (۱۵) انرژی کرنشی،  $V$  معرف کار انجام شده توسط نیروهای خارجی و  $K$  انرژی جنبشی می‌باشند. انرژی کرنشی، جنبشی و کار مجازی به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$\delta U = \iint_{\Omega_0} \int_{-H/2}^{H/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dz dx dy \quad (16-f)$$

$$\delta K = \iint_{\Omega_0} \int_{-H/2}^{H/2} \rho \left[ (\dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x})(\delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x}) + (\dot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y})(\delta \dot{v}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y}) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dx dy \quad (16-b)$$

$$\delta V = - \iint_{\Omega_0} Q_z(t) \delta(x-x_0, y-y_0) \quad (16-c)$$

$$\delta w_0 dx dy + \iint_{\Omega_0} \Delta P \delta w_0 dx dy$$

در رابطه (۱۶-ب) نقطه بالای حروف نمایانگر مشتق نسبت به زمان می‌باشد.  $\Omega_0$  مساحت صفحه بوده و  $Q_z(t)$  بار مکانیکی عرضی می‌باشد. این روابط با استفاده از معادلات کریشهف و معادلات ساختاری صفحه بدست می‌آیند.

### ۶- انتقال هندسه

از آنجایی که استخراج روابط حاکم بر شرایط مرزی در یک ورق دوزنقه‌ای شکل، در حالت عادی دشوار بوده و تحلیل مسئله در آن شرایط نیز بسیار سخت و بعضاً غیرممکن می‌باشد ضروریست ابتدا با یک نگاشت مناسب، میدان فیزیکی مسئله، به یک میدان محاسباتی قابل تحلیل منتقل گردد. در این بخش از سیستم مختصات پارامتری

می‌باشد. همچنین  $\rho_{CN}$  و  $\rho_m$  چگالی‌های جرمی ماده زمینه و نانولوله کربنی می‌باشند. ضریب پواسن  $\nu_{12N}$  و چگالی جرمی  $\rho_N$  که مستقل از دما فرض شده‌اند، در لایه نانوکامپوزیت تقویت‌شده به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$\nu_{12N} = V_{CN} \nu_{12}^{CN} + V_m^h \nu_h^m \quad (10)$$

$$\rho_N = V_{CN} \rho_{CN} + V_m^h \rho_h^m \quad (11)$$

$\nu_{12}^{CN}$  و  $\nu_h^m$  ضرایب پواسن مربوط به نانو لوله‌های کربنی و ماده زمینه می‌باشند.

### ۴- معادلات ساختاری

معادلات ساختاری صفحه لایه‌ای پیزوالکتریک با فرض اینکه هر صفحه دارای یک سطح متقارن الاستیک موازی با محور x-y و همچنین تحت بار الکتریکی می‌باشد، به صورت زیر بیان می‌شود [۳۶]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (12)$$

که در رابطه (۱۲)  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  تنش‌ها و  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$  کرنش‌ها و  $k$  شماره لایه‌ها می‌باشند. لایه‌ی میان دو سطح  $z = z_k$  و  $z = z_{k+1}$  لایه  $k$  ام است.  $e_{31}$  و  $e_{32}$  ثابت‌های پیزوالکتریک می‌باشند.  $Q_{ij}$  سختی الاستیک لایه نانوکامپوزیت ( $Q_{ijN}$ ) و لایه‌های پیزوالکتریک ( $Q_{ijp}$ ) برای ( $i, j=1, 2, 3$ ) به شرح زیر معرفی می‌شوند [۴]:

$$Q_{11N} = \frac{E_{11N}}{1 - \nu_{12N} \nu_{21N}}, \quad Q_{12N} = \frac{\nu_{12N} E_{22N}}{1 - \nu_{12N} \nu_{21N}}, \quad (13)$$

$$Q_{22N} = \frac{E_{22N}}{1 - \nu_{12N} \nu_{21N}}, \quad Q_{33N} = G_{12N}$$

$$Q_{11p} = Q_{22p} = \frac{E_{11p}}{1 - \nu_p^2}, \quad Q_{12p} = \frac{\nu_p E_{11p}}{1 - \nu_p^2}, \quad (14)$$

$$Q_{33p} = G_{12p} = \frac{E_{11p}}{2(1 + \nu_p)}$$

$F_{ik}()$  توابع خطی و  $\tilde{F}_k()$  توابع غیرخطی به ازاء  $(i=1, 2, 3)$  و  $(k=1, 2, 3, 4, 5)$  می‌باشند. همچنین  $\hat{F}()$  توابع مشتقات دوم بر حسب زمان،  $\hat{F}_{PL1}$  تابعی از مشتق دوم  $w_0$  نسبت به زمان بوده و  $\hat{F}_{PL2}$  تابعی از مشتق اول  $w_0$  نسبت به زمان ناشی از روابط جریان آیرودینامیک می‌باشد که در پیوست الف به طور کامل آورده شده‌اند.  $I_0$  در معادله (۱۹) ممان اینرسی جرمی می‌باشد که به شرح زیر می‌باشد:

$$I_0 = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}+h_p} \rho_p dz + \int_{\frac{H}{2}-h_p}^{\frac{H}{2}} \rho_N dz + \int_{\frac{H}{2}-h_p}^{\frac{H}{2}} \rho_p dz \quad (20)$$

شرایط مرزی صفحه که در  $\eta=0$  گیردار و در سایر وجهها شرایط مرزی آزاد دارد، با استفاده از معادلات (۱۹) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \eta=0: \quad w_0 = v_0 = u_0 = \frac{\partial w_0}{\partial \eta} = 0, \\ \eta = L_y: \quad \tilde{N}_{\eta\eta} = \tilde{N}_{\xi\xi} = \tilde{M}_{\eta\eta} = \tilde{Q}_{\eta} = 0 \\ \xi=0: \quad \tilde{N}_{\xi\eta} = \tilde{N}_{\xi\xi} = \tilde{M}_{\xi\xi} = \tilde{Q}_{\xi} + \frac{\partial \tilde{M}_{\xi\eta}}{\partial \eta} = \\ 0, \xi = L_x: \quad \tilde{N}_{\xi\eta} = \tilde{N}_{\xi\xi} = \tilde{M}_{\xi\xi} = \tilde{Q}_{\xi} + \frac{\partial \tilde{M}_{\xi\eta}}{\partial \eta} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

برآیند نیروهای صفحه‌ای، برآیند گشتاورها و برآیند نیروهای عرضی صفحه دوزنقه‌ای انتقال یافته در حوزه محاسباتی می‌باشند.

## ۷- گسسته‌سازی معادلات حرکت

به جهت ساده‌سازی معادلات از فرم معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به فرم معادلات دیفرانسیل معمولی از روش گلرکین استفاده می‌شود. با توجه به نظر بسیاری از محققان [۱۸ و ۲۱] در نظر گرفتن دو مد، برای ارائه نتایج کیفی در کاربردهای عملی می‌تواند کافی باشد و همچنین با توجه به جهت جریان هوای مادون‌صوت وارد بر صفحه دو مد ارتعاشی (۱) و (۲) از صفحه در نظر گرفته شده است. بنابراین توابع شکل مدی که شرایط مرزی را ارضاء نمایند به صورت زیر ارائه می‌شوند [۲۸]:

$$\begin{aligned} u_0(\xi, \eta, t) &= u_1(t) \cos\left(\frac{\pi\xi}{L_x}\right) \sin\left(\frac{3\pi\eta}{2L_y}\right) \\ v_0(\xi, \eta, t) &= v_1(t) \cos\left(\frac{\pi\xi}{L_x}\right) \sin\left(\frac{3\pi\eta}{2L_y}\right) \\ w_0(\xi, \eta, t) &= w_1(t) \phi_1(\xi) \psi_1(\eta) + w_2(t) \phi_2(\xi) \psi_2(\eta) \end{aligned} \quad (22)$$

محل به جای مختصات کارتزین برای تحلیل صفحه دوزنقه‌ای استفاده می‌شود. بنابراین هر نقطه‌ای از صفحه دوزنقه‌ای در سیستم مختصات  $x-y$  به حوزه محاسباتی مستطیلی در مختصات  $\xi-\eta$  شکل ۲ با استفاده از روابط زیر منتقل می‌گردد [۲۹ و ۳۰]:

$$x = \xi + \eta \cos(\alpha) - \xi \eta \frac{\sin(\beta - \alpha)}{L_x \sin(\beta)} \quad (17-الف)$$

$$y = \eta \sin(\alpha) \quad (17-ب)$$

ماتریس ژاکوبین با استفاده از روابط (۱۷) به شرح زیر تعیین می‌گردد:

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \eta \frac{\sin(\beta - \alpha)}{L_x \sin(\beta)} & 0 \\ \cos(\alpha) - \xi \frac{\sin(\beta - \alpha)}{L_x \sin(\beta)} & \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (18)$$

با جایگذاری معادلات صفحه بر حسب تئوری صفحات کلاسیک و با فرض جابجایی‌های بزرگ ون کارمن [۳۶] و همچنین روابط (۱، ۳ و ۴) مربوط به تحریک‌های خارجی در معادله همیلتون و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت لایه‌ها و با استفاده از روابط انتقال هندسی (۱۷) و (۱۸) در رابطه (۱۵) و جمع کردن ضرایب مربوط به هر کدام از جابجایی‌های مجازی  $\delta u_0$ ،  $\delta v_0$ ،  $\delta w_0$  و مساوی صفر قراردادن آنها، معادلات ارتعاشات غیرخطی و شرایط مرزی عملگر لایه‌ای دوزنقه‌ای نانوکامپوزیت پیزوالکتریک تحت تحریک‌های مکانیکی، الکتریکی و آیرودینامیکی به صورت روابط (۱۹) بدست می‌آیند:

$$\delta u_0: F_{11}(u_0) + F_{12}(v_0) + \tilde{F}_1(w_0) = I_0 \hat{F}(u_0) \quad (19-الف)$$

$$\delta v_0: F_{21}(u_0) + F_{22}(v_0) + \tilde{F}_2(w_0) = I_0 \hat{F}(v_0) \quad (19-ب)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0: F_{33PL}(w_0) + (-N_1^p) F_{34}(w_0) + \\ (-N_2^p) F_{35}(w_0) + \tilde{F}_3(w_0) + \tilde{F}_4(u_0, w_0) + \\ \tilde{F}_5(v_0, w_0) + \hat{F}_{PL1}(w_0) + \hat{F}_{PL2}(w_0) + \\ Q_Z(t) J \delta(\xi - \bar{\xi}) \delta(\eta - \bar{\eta}) = I_0 \hat{F}(w_0) \end{aligned} \quad (19-ج)$$

بطوریکه

$$\begin{aligned} \phi_m(\xi) &= 1 \text{ if } m = 1 \\ \phi_m(\xi) &= \sqrt{3} \left(1 - 2 \frac{\xi}{L_x}\right) \text{ if } m = 2 \\ \psi_n(\eta) &= \cos \beta_n \eta - \cosh \beta_n \eta + \alpha_n (\sin \beta_n \eta - \sinh \beta_n \eta) \\ &\text{if } n \geq 1 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\alpha_n = -(\cos \beta_n L_y + \cosh \beta_n L_y) / (\sin \beta_n L_y + \sinh \beta_n L_y)$$

$$\cos \beta_n L_y \cosh \beta_n L_y + 1 = 0, \beta_n L_y = 1.8751, 4.6941, 7.8547, \dots$$

در ادامه روابط (۲۲ و ۲۳) در معادلات (۱۹) جایگذاری می‌شوند و با بکارگیری روش گلرکین معادلات حرکت دو درجه آزادی بدست می‌آیند. از آنجاییکه حل تحلیلی معادلات با کمک روش‌های اغتشاشی انجام می‌پذیرد، بهتر است این روش‌ها در قالب معادلات بی‌بعد اعمال گردند تا جملات از نظر مرتبه قابل مقایسه باشند. با توجه به اینکه نسبت ضخامت به سایر ابعاد در صفحه مورد بررسی کوچک می‌باشد، پارامتر کوچک بدون بعد  $\varepsilon$  به صورت رابطه (۲۴) تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{H}{\sqrt{L_x L_y}} \quad (24)$$

و سپس سایر پارامترهای معادلات با توجه به  $\varepsilon$  و با کمک روابط (۲۵) بی‌بعد سازی می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_0 &= L_x \bar{u}_0, v_0 = L_y \bar{v}_0, w_0 = H \bar{w}_0, t = \left(\frac{\rho_p L_x L_y}{E_{11N}}\right)^{-1/2} \bar{t}, \\ A_{ij} &= \frac{E_{11N} H^2}{(L_x L_y)^{1/2}} \bar{A}_{ij}, B_{ij} = \frac{E_{11N} H^3}{(L_x L_y)^{1/2}} \bar{B}_{ij}, \\ D_{ij} &= \frac{E_{11N} H^4}{(L_x L_y)^{1/2}} \bar{D}_{ij}, \xi = L_x \bar{\xi}, \eta = L_y \bar{\eta}, \\ I_0 &= (L_x L_y)^{1/2} \rho_p \bar{I}_0, \Omega_i = \left(\frac{\rho_p L_x L_y}{E_{11N}}\right)^{1/2} \bar{\Omega}_i, \\ Q_z &= \frac{E_{11N} H^7}{(L_x L_y)^{7/2}} \bar{Q}_z, N_i^p = \frac{E_{11N} H^2}{(L_x L_y)^{1/2}} \bar{N}_i^p, \\ \mu_p &= \frac{\rho_\infty H}{\rho_p (L_x L_y)^{1/2}}, \lambda_p = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{E_{11N}} \end{aligned} \quad (25)$$

از آنجایی که صفحه دوزنقه‌ای یکسرگردار مورد نظر دارای ضخامت کمی می‌باشد، اثرات ترم‌های اینرسی بر  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  کوچکتر از ترم اینرسی خمشی می‌باشند و با دقت قابل قبولی می‌توان از آنها صرف‌نظر کرد و با جایگذاری مختصه‌های جابجایی‌های درون صفحه‌ای که از روابط (۱۹-الف) و (۱۹-ب) بدست می‌آیند، در ترم‌های سختی غیرخطی معادله حرکت عرضی در رابطه (۱۹-ج)، در نهایت معادلات دیفرانسیل دو درجه آزادی بی‌بعد در حوزه زمان حاکم بر حرکت عرضی صفحه لایه‌ای نانوکامپوزیت پیزوالکتریک دوزنقه‌ای

یکسرگردار با ترم‌های غیرخطی مرتبه سه به صورت روابط (۲۶)

$$\begin{aligned} &\text{بدست می‌آیند. برای سادگی از نماد بی‌بعد } \dot{\ }^{-2} \text{ صرف‌نظر شده است.} \\ \dot{w}_1 + \mu_{11} \dot{w}_1 + d_{10} w_1 + (F_{01}^p + F_{11}^p \cos(\Omega_1 t)) w_1 + \\ &d_{11} w_1^3 + d_{12} w_1^2 w_2 + d_{13} w_1 w_2^2 + d_{14} w_2^3 + \\ &(d_{15} + F_{02}^p + F_{12}^p \cos(\Omega_1 t)) w_2 + \mu_{12} \dot{w}_2 = \\ &q_{z1} \cos(\Omega_2 t + \tau_1) \\ &\dot{w}_2 + \mu_{22} \dot{w}_2 + d_{20} w_2 + (F_{03}^p + F_{21}^p \cos(\Omega_1 t)) w_2 + \\ &d_{21} w_2^3 + d_{22} w_2^2 w_1 + \\ &d_{23} w_2 w_1^2 + d_{24} w_1^3 + (d_{25} + F_{04}^p + F_{22}^p \cos(\Omega_1 t)) w_1 + \\ &\mu_{21} \dot{w}_1 = q_{z2} \cos(\Omega_2 t + \tau_2) \end{aligned} \quad (26)$$

$\tau_1$  و  $\tau_2$  ثابت هستند و سایر ضرایب در پیوست ب قابل مشاهده می‌باشند.

## ۸- تحلیل اغتشاشی معادلات حرکت

تحلیل‌های اغتشاشی عموماً زمانی که سیستم‌های غیرخطی ضعیف و با دامنه نوسان محدود باشند، مناسب خواهد بود. در این مقاله از روش مقیاس‌های چندگانه برای حل معادلات حرکت استفاده می‌شود. برای بکارگیری این روش، ابتدا از پارامتر کوچک و بی‌بعد  $\varepsilon$  (۲۴) که در رابطه (۲۴) معرفی شد، استفاده می‌شود و متغیر مستقل جدید  $T_n = \varepsilon^n t$  به ازای  $n = 0, 1, 2$  معرفی می‌شود. بدین صورت که مقیاس زمانی سریع  $T_0 = t$ ، بصورت  $T_0 = t$  و مقیاس زمانی کند بصورت  $T_2 = \varepsilon^2 t$  تعریف می‌شود. مشتقات زمانی مرتبه اول و دوم بر حسب مقیاس‌های زمانی متفاوت به فرم روابط (۲۷) بسط داده می‌شوند.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{dT_2}{dt} \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

که در روابط (۲۷)،  $D_n$ ، بصورت  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$  تعریف می‌شود. پارامتر دامنه  $w_i$  را می‌توان با بسط زیر جایگزین کرد:

$$\begin{aligned} w_i &= \varepsilon z_i \\ z_i(t; \varepsilon) &= z_{i0}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \\ &\varepsilon z_{i1}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 z_{i2}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

حل عمومی معادلات خطی (۳۱) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$z_{i0} = A_{i0}(T_1, T_2) \exp(i\omega_i T_0) + \bar{A}_{i0}(T_1, T_2) \exp(-i\omega_i T_0) \quad (i=1,2) \quad (34)$$

بطوریکه  $A_{i0}$  توابع مختلط نامعلوم از  $T_1$  و  $T_2$  می‌باشند و  $\bar{A}_{i0}$  مزدوج مختلط  $A_{i0}$  می‌باشد. در ادامه رابطه (۳۴) در روابط (۳۲) جایگذاری می‌شود. پس از حل و اعمال شرایط حل‌پذیری  $z_{11}$ ،  $D_1 A_{10} = 0 \rightarrow A_{10} = A_{10}(T_2)$ ،  $D_1 A_{20} = 0 \rightarrow A_{20} = A_{20}(T_2)$  و  $z_{21}$  به صورت روابط (۳۵) حاصل می‌شوند:

$$z_{11} = -\frac{\overline{F_{11}^p} A_{10}}{2[\omega_1^2 - (\omega_1 + \Omega_1)^2]} \exp(i(\omega_1 + \Omega_1)T_0) - \frac{\overline{F_{11}^p} A_{10}}{2[\omega_1^2 - (\omega_1 - \Omega_1)^2]} \exp(i(\omega_1 - \Omega_1)T_0) - \frac{\overline{F_{12}^p} A_{20}}{2[\omega_1^2 - (\omega_2 + \Omega_1)^2]} \exp(i(\omega_2 + \Omega_1)T_0) - \frac{\overline{F_{12}^p} A_{20}}{2[\omega_1^2 - (\omega_2 - \Omega_1)^2]} \exp(i(\omega_2 - \Omega_1)T_0) + cc \quad (35)$$

$$z_{21} = -\frac{\overline{F_{21}^p} A_{20}}{2[\omega_2^2 - (\omega_2 + \Omega_1)^2]} \exp(i(\omega_2 + \Omega_1)T_0) - \frac{\overline{F_{21}^p} A_{20}}{2[\omega_2^2 - (\omega_2 - \Omega_1)^2]} \exp(i(\omega_2 - \Omega_1)T_0) - \frac{\overline{F_{22}^p} A_{10}}{2[\omega_2^2 - (\omega_1 + \Omega_1)^2]} \exp(i(\omega_1 + \Omega_1)T_0) - \frac{\overline{F_{22}^p} A_{10}}{2[\omega_2^2 - (\omega_1 - \Omega_1)^2]} \exp(i(\omega_1 - \Omega_1)T_0) + cc$$

حال با جایگذاری روابط (۳۴) و (۳۵) در معادلات (۳۳) و برابر

صفر قرار دادن ترم‌های منفرد معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$-(2D_2 A_{10} i\omega_1 + C_{11} A_{10} i\omega_1 + 3d_{11} A_{10}^2 \bar{A}_{10} + \frac{(F_{11}^p)^2 A_{10}}{4[\omega_1^2 - (\omega_1 + \Omega_1)^2]} - \frac{\overline{F_{11}^p} A_{10}}{(F_{11}^p)^2 A_{10}} - \frac{\overline{F_{12}^p} \overline{F_{22}^p} A_{10}}{4[\omega_1^2 - (\omega_1 - \Omega_1)^2]} - \frac{\overline{F_{12}^p} \overline{F_{22}^p} A_{10}}{4[\omega_2^2 - (\omega_1 - \Omega_1)^2]}) - d_{12} \bar{A}_{10}^2 A_{20} \exp(i\sigma_2 T_2) = \dots \quad (36)$$

ارتعاشات عملگر ذوزنقه‌ای در حالت تشدید اولیه و داخلی ۱:۳

مورد بررسی قرار گرفته شده است بنابراین روابط فرکانس تحریک خارجی و فرکانس‌های سیستم به صورت معادلات (۲۹) می‌باشد:

$$\Omega_2 = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_1, \quad \omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 \quad (29)$$

بطوریکه  $\varepsilon$  پارامتر کوچک اغتشاشی،  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  دو پارامتر بهره‌وری می‌باشند. بنابراین می‌توان معادلات (۲۶) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\ddot{z}_1 + \varepsilon^2 C_{11} \dot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 + \varepsilon F_{11} \cos(\Omega_1 t) z_1 + \varepsilon^2 d_{11} z_1^3 + \varepsilon^2 d_{12} z_1^2 z_2 + \varepsilon^2 d_{13} z_1 z_2^2 + \varepsilon^2 d_{14} z_2^3 + \varepsilon^2 (d_{15} + F_{02}) z_2 + \varepsilon F_{12} \cos(\Omega_1 t) z_2 + \varepsilon^2 C_{12} \dot{z}_2 = \varepsilon^2 q_{z1} \cos(\Omega_2 t + \tau_1) \quad (30)$$

$$\ddot{z}_2 + \varepsilon^2 C_{22} \dot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 + \varepsilon F_{21} \cos(\Omega_1 t) z_2 + \varepsilon^2 d_{21} z_2^3 + \varepsilon^2 d_{22} z_2^2 z_1 + \varepsilon^2 d_{23} z_2 z_1^2 + \varepsilon^2 d_{24} z_1^3 + \varepsilon^2 (d_{25} + F_{04}) z_1 + \varepsilon F_{22} \cos(\Omega_1 t) z_1 + \varepsilon^2 C_{21} \dot{z}_1 = \varepsilon^2 q_{z2} \cos(\Omega_2 t + \tau_2)$$

بطوریکه در روابط (۳۰)  $\overline{F_{ij}^p} = \varepsilon^{-1} F_{ij}^p$ ،  $C_{ij} = \varepsilon^{-2} \mu_{ij}$ ،  $\overline{q_{zi}} = \varepsilon^{-3} q_{zi}$  (۳۰)  $(i=1,2, j=1,2)$  برای  $\overline{d_{is}} = \varepsilon^{-2} d_{is}$  و  $\overline{F_{04}^p} = \varepsilon^{-2} F_{04}^p$ ،  $\overline{F_{02}^p} = \varepsilon^{-2} F_{02}^p$ ، می‌باشند. با جایگذاری روابط (۲۷) و (۲۸) در روابط (۳۰) و جداسازی مرتبه‌های مختلف  $\varepsilon$  معادلات (۳۱) تا (۳۳) به شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$D_0^2 z_{10} + \omega_1^2 z_{10} = 0 \quad (31)$$

$$D_0^2 z_{20} + \omega_2^2 z_{20} = 0$$

$$D_0^2 z_{11} + \omega_1^2 z_{11} = -2D_0 D_1 z_{10} - \overline{F_{11}^p} \cos(\Omega_1 t) z_{10} - \overline{F_{12}^p} \cos(\Omega_1 t) z_{20} \quad (32)$$

$$D_0^2 z_{21} + \omega_2^2 z_{21} = -2\overline{D_{21}^p} D_1 z_{20} - \overline{F_{21}^p} \cos(\Omega_1 t) z_{20} - \overline{F_{22}^p} \cos(\Omega_1 t) z_{10}$$

$$D_0^2 z_{12} + \omega_1^2 z_{12} = -C_{11} D_0 z_{10} - \overline{F_{11}^p} \cos(\Omega_1 t) z_{11} - 2D_0 D_2 z_{10} - D_1^2 z_{10} - 2D_0 D_1 z_{11} - \overline{d_{11}^p} z_{10}^3 - \overline{d_{12}^p} z_{10}^2 z_{20} - \overline{d_{13}^p} z_{10} z_{20}^2 - \overline{d_{14}^p} z_{20}^3 - (d_{15} + F_{02}) z_{20} - \overline{F_{12}^p} \cos(\Omega_1 t) z_{21} - C_{12} D_0 z_{20} + q_{z1} \cos(\Omega_2 T_0 + \tau_1) \quad (33)$$

$$D_0^2 z_{22} + \omega_2^2 z_{22} = -C_{22} D_0 z_{20} - \overline{F_{21}^p} \cos(\Omega_1 t) z_{21} - 2D_0 D_2 z_{20} - D_1^2 z_{20} - 2D_0 D_1 z_{21} - \overline{d_{21}^p} z_{20}^3 - \overline{d_{22}^p} z_{20}^2 z_{10} - \overline{d_{23}^p} z_{20} z_{10}^2 - \overline{d_{24}^p} z_{10}^3 - (d_{25} + F_{04}) z_{10} - \overline{F_{22}^p} \cos(\Omega_1 t) z_{11} - C_{21} D_0 z_{10} + q_{z2} \cos(\Omega_2 T_0 + \tau_2)$$

ماندگار دامنه‌ها و فازها ثابت هستند. بنابراین دامنه‌ها و فازها در حالت ماندگار رابطه‌ی  $(a'_i = \delta'_i = 0, (i = 1, 2))$  را ارضاء می‌کنند. بنابراین با حل معادلات (۳۷) در حالت ماندگار و شبیه‌سازی عددی، رفتار دینامیک غیرخطی و پاسخ‌های حالت ماندگار صفحه دوزنقه‌ای نانوکامپوزیت پیزوالکتریک یکسرگیردار بدست می‌آید.

### ۹- نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از تحلیل ارتعاشات غیرخطی صفحه نانوکامپوزیت تقویت شده دوزنقه‌ای با دو لایه پیزوالکتریک در معرض جریان مادون صوت تحت بار مکانیکی و ولتاژ الکتریکی بررسی می‌شود. خواص موثر مواد نانوکامپوزیت، مخلوط نانولوله‌های کربنی تک دیواره و پلیمر همسانگرد، همچنین پیزوالکتریک استفاده شده در این مقاله در جدول ۱ آورده شده‌اند. پارامترهای بهره‌وری نانولوله‌های کربنی  $\eta_j$  بر طبق قانون اختلاط قابل محاسبه هستند. برای مورد  $V_{CN} = 0/11$ ،  $\epsilon_1 = 0/149$ ،  $\epsilon_r = 0/934$  برای  $V_{CN} = 0/14$ ،  $\epsilon_1 = 0/149$ ،  $V_{CN} = 0/17$  و برای  $\epsilon_r = 0/941$  و  $\epsilon_1 = 0/15$ ،  $\epsilon_r = 1/381$  در نظر گرفته شده است [۳۸]. ابعاد صفحه با توجه به شکل ۲ به صورت  $L = 10 \text{ mm}$  و  $L_x = 5 \text{ mm}$  انتخاب شده است و ضخامت کل صفحه و ضخامت لایه نانو کامپوزیت به ترتیب  $H = 120 \text{ }\mu\text{m}$  و  $h = 100 \text{ }\mu\text{m}$  در نظر گرفته شد. سایر پارامترهای مورد نیاز به صورت موردی در ادامه هر شکل آورده شده است. نتایج ارائه شده از شبیه سازی مدل بدست آمده برای صفحه مورد نظر و با نرم افزار متلب بدست آورده شده است.

در ابتدا به جهت بررسی دقت و صحت مدل صفحه چند لایه دوزنقه‌ای، فرکانس طبیعی مد اول بدست آمده از نرم‌افزار متلب با مثال ساده‌تر از مراجع پیشین و شبیه‌سازی انجام شده در نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه می‌شود. به جهت اعتبارسنجی معادلات مدل حاضر، فرکانس طبیعی صفحه دوزنقه‌ای یکسرگیردار همسانگرد محاسبه شد و با نتایج عددی بر پایه دیدگاه رایلی- ریتز در مطالعه انجام شده توسط لیو و لم [۲۴] و همچنین با مدل این مثال در نرم افزار آباکوس، در جدول ۲ مقایسه گردید. داده‌های محاسباتی در این مثال عبارتند از  $E_1 = E_r = 1 \text{ GPa}$ ،  $G_r = 0/385 \text{ GPa}$ ،  $i = 0/3$ ،  $L/L_x = 1$  دو فرکانس طبیعی بی‌بعد خطی به صورت  $D = EH^3/12(1 - \nu^2)$  در نظر گرفته شده که در آن  $iL_x^2/2\delta(\dot{n}H/D)^{0.5}$

$$\begin{aligned} & + \exp(i\sigma_1 T_2) \exp(i\tau_1) \frac{q_{z1}}{2} = 0 \\ & - (2D_2 A_{20} i\omega_2 + C_{22} A_{20} \frac{i\omega_2}{\omega_1}) + 3d_{21} A_{20}^2 \bar{A}_{20} + \\ & 2d_{23} A_{20} A_{10} \bar{A}_{10} - \frac{(F_{12})^2 A_{20}}{4[\omega_2^2 - (\omega_2 + \Omega_1)^2]} - \\ & \frac{(F_{12})^2 A_{20}}{F_{22} F_{12} A_{20}} - \\ & \frac{4[\omega_2^2 - (\omega_2 - \Omega_1)^2]}{4[\omega_1^2 - (\omega_2 + \Omega_1)^2]} - \\ & \frac{F_{22} F_{12} A_{20}}{4[\omega_1^2 - (\omega_2 - \Omega_1)^2]} - d_{24} A_{10}^3 \exp(-i\sigma_2 T_2) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

با وارد کردن دامنه‌های  $A_{10}$  و  $\bar{A}_{10}$  به فرم قطبی  $\bar{A}_{10}(T_2) = \frac{1}{2} a_{10}(T_2) \exp(-ib_{10}(T_2))$  و  $A_{10}(T_2) = \frac{1}{2} a_{10}(T_2) \exp(ib_{10}(T_2))$  در معادلات و جداسازی جملات حقیقی و موهومی معادلات (۳۷) حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} a'_{10} &= -\frac{C_{11} a_{10}}{2} - \frac{d_{12}}{8\omega_1} a_{20} a_{10}^2 \sin(\delta_2) + \frac{q_{z1}}{2\omega_1} \sin(\delta_1) \\ a'_{20} &= -\frac{C_{22}}{2} a_{20} + \frac{d_{24}}{8\omega_2} a_{10}^3 \sin(\delta_2) \\ \delta'_{10} a_{10} &= \sigma_1 a_{10} - \frac{3d_{11}}{8\omega_1} a_{10}^3 - \frac{d_{13}}{4\omega_1} a_{10} a_{20}^2 + \\ & \frac{(\bar{F}_{11}^P)^2 a_{10}}{8\omega_1 [\omega_1^2 - (\omega_1 + \Omega_1)^2]} + \frac{(\bar{F}_{11}^P)^2 a_{10}}{8\omega_1 [\omega_1^2 - (\omega_1 - \Omega_1)^2]} + \\ & \frac{\bar{F}_{12}^P \bar{F}_{22}^P a_{10}}{8\omega_1 [\omega_2^2 - (\omega_1 + \Omega_1)^2]} + \frac{\bar{F}_{12}^P \bar{F}_{22}^P a_{10}}{8\omega_1 [\omega_2^2 - (\omega_1 - \Omega_1)^2]} - \\ & \frac{d_{12}}{8\omega_1} a_{20} a_{10}^2 \cos(\delta_2) + \frac{q_{z1}}{2\omega_1} \cos(\delta_1) \\ (\delta'_2 - 3\delta'_1) a_{20} &= (\sigma_2 - 3\sigma_1) a_{20} + \frac{3}{8\omega_2} d_{21} a_{20}^3 + \\ & \frac{d_{23}}{4\omega_2} a_{20} a_{10}^2 - \frac{a_{20} (\bar{F}_{21}^P)^2}{8\omega_2 [\omega_2^2 - (\omega_2 + \Omega_1)^2]} - \\ & \frac{a_{20} (\bar{F}_{21}^P)^2}{8\omega_2 [\omega_2^2 - (\omega_2 - \Omega_1)^2]} - \frac{\bar{F}_{22}^P \bar{F}_{12}^P a_{20}}{8\omega_2 [\omega_1^2 - (\omega_2 + \Omega_1)^2]} - \\ & \frac{\bar{F}_{22}^P \bar{F}_{12}^P a_{20}}{8\omega_2 [\omega_1^2 - (\omega_2 - \Omega_1)^2]} + \frac{d_{24}}{8\omega_2} a_{10}^3 \cos(\delta_2) \end{aligned} \quad (37)$$

در معادلات قبل  $a_{10}$  و  $b_{10}$  بترتیب دامنه‌ها و فازهای حالت ماندگار می‌باشند. همچنین  $\delta_1$  و  $\delta_2$  فازهای جدید می‌باشند که به صورت  $\delta_1 = \sigma_1 T_2 - b_{10} + \tau_1$  و  $\delta_2 = b_{20} - 3b_{10} + \sigma_2 T_2$  تعریف شده‌اند. معادلات (۳۷) معادلات خودمختار می‌باشند و در حالت

جدول ۱: خواص مواد نانوکامپوزیت و پیزوالکتریک

Table 1. The material properties of nanocomposite and piezoelectric

پارامترها	پیزوالکتریک [۴] PZT-5A	ماده زمینه [۳۸] PmPv	نانولوله کربنی تک دیواره [۳۸] (۳۰۰ K)
$\rho$ (kg / m <sup>3</sup> )	۷۶۰۰	۱۱۵۰	۱۴۰۰
$E_{11}$ (GPa)	۶۳	۲/۱	۵۶۴۶/۶
$E_{22}$ (GPa)	۶۳	۲/۱	۷۰۸۰
$E_{33}$ (GPa)	۶۳	۲/۱	۷۰۸۰
$G_{12}$ (GPa)	۲۴/۲۳	۰/۷۸۳۶	۱۹۴۴/۵
$G_{13}$ (GPa)	۲۴/۲۳	۰/۷۸۳۶	۱۹۴۴/۵
$G_{23}$ (GPa)	۲۴/۲۳	۰/۷۸۳۶	۱۹۴۴/۵
$\nu_{12}$	۰/۳	۰/۳۴	۰/۱۷۵
$\nu_{13}$	۰/۳	۰/۳۴	۰/۱۷۵
$\nu_{23}$	۰/۳	۰/۳۴	۰/۱۷۵
$e_{31}$ (C / m <sup>2</sup> )	۱۷/۶	۰	۰
$e_{32}$ (C / m <sup>2</sup> )	۱۷/۶	۰	۰
$d_{11} / d_0$ (F / m) <sup>*</sup>	۱۷۲۸	۱۰	۲۰۰۰
$d_{22} / d_0$ (F / m)	۱۷۲۸	۱۰	۲۰۰۰
$d_{33} / d_0$ (F / m)	۱۶۹۴	۱۰	۲۰۰۰

(\* $d_0$  ضریب نفوذ پذیری دی الکتریک در فضای آزاد می باشد.)

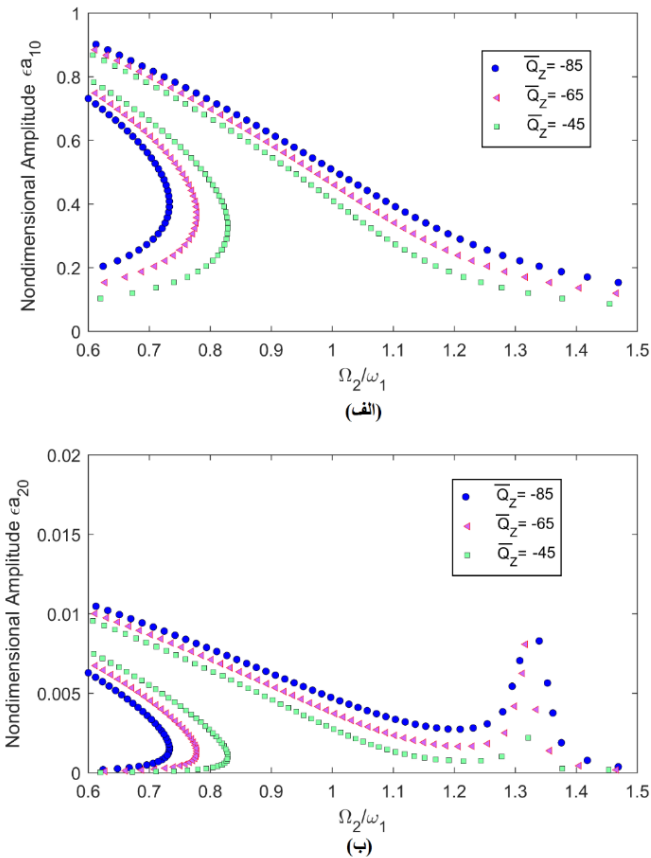
جدول ۲: مقایسه فرکانس طبیعی خطی بی بعد  $\omega L_x^2 / 2\pi(\rho H / D)^{0.5}$  یک صفحه دوزنقه‌ای همسانگرد یکسرگردار با مدل حاضر

Table 2. Comparison of the linear non-dimensional frequency  $\omega L_x^2 / 2\pi(\rho H / D)^{0.5}$  of a cantilever isotropic trapezoidal plate

منابع				
$\frac{C}{L_x}$	لیو و لم [۲۴]	مدل حاضر	نرم افزار آباکوس	خطای نسبی %
۱	۰/۵۵	۰/۵۵۹۶	۰/۵۵۴۵	۰/۹۱~
۰/۹	---	۰/۵۶۱۰	۰/۵۶۹۳	۱/۴۵~
۰/۸	۰/۵۹	۰/۵۷۰۲	۰/۵۹۱۵	۳/۳۵~

در مثالی دیگر، منحنی پاسخ فرکانسی تشدید اولیه مد اول در شکل ۳ ارائه شده است. شکل ۳ منحنی تغییرات پارامتر بی بعد دامنه  $(a_{10} = \varepsilon a_{10})$ ، بر حسب نسبت فرکانس تحریک خارجی

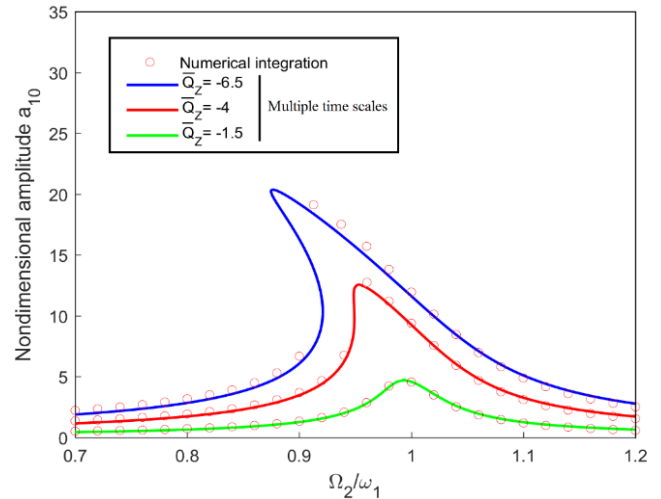
می‌توان مشاهده کرد که نتایج بدست آمده از مدل حاضر برای نسبت‌های مختلف  $C / L_x$  در مقایسه با حل عددی و شبیه سازی آباکوس خطای قابل قبولی دارد.



**Fig. 4. Effect of amplitude of external excitation on frequency-response curves of the plate in the presence of aerodynamic load, parametric and external excitations, (a) mode (1, 1), (b) mode (2, 2)**

شکل ۴: اثر دامنه تحریک خارجی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی صفحه در حضور بار آیرودینامیکی، تحریک‌های پارامتریک و خارجی. (الف) مد (۱، ۱)، (ب) مد (۲، ۲)

عملگر دوزنقه‌ای پرداخته می‌شود. با تغییر ولتاژ DC و محاسبه فرکانس‌های هر دو مد، مشاهده می‌شود هنگامیکه  $V_D = 14 \text{ V}$  قرار داده شود تشدید داخلی ۱:۳ رخ می‌دهد. شکل ۴ (الف) و (ب) منحنی‌های پاسخ فرکانسی صفحه را به ازای دامنه‌های مختلف تحریک خارجی ( $\bar{Q}_z = -85, -65, -45$ )، در حضور بار آیرودینامیکی و تحریک پارامتریک نشان می‌دهد. پارامترهای مختلف به صورت ( $H = 12 \text{ i m}$ ،  $\rho_\infty = 1/225 \text{ kg/m}^3$ ،  $U_\infty = 35 \text{ m/s}$ ،  $C/L_x = 0/8$ ،  $V_D = 14 \text{ V}$ ،  $\Omega_1 = 0/4\omega_1$ ،  $V_{CN} = 0/11$ ،  $h_p/h = 0/1$ ،  $L/L_x = 2$ ،  $\omega_1 \approx 3\omega_2$ ،  $\Omega_2 \approx \omega_1$ ،  $V_A = 3 \text{ V}$ )، در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به شکل ۴ مشاهده می‌شود سیستم با پارامترهای در نظر گرفته شده رفتار نرم‌شوندگی از خود نشان می‌دهد. بعلاوه می‌توان دید با افزایش دامنه‌ی تحریک خارجی عرضی سیستم رفتار غیرخطی‌تری از خود



**Fig. 3. Comparison of frequency-response curves of mode (1, 1) for the primary resonances using Multiple time scales and numerical integration**

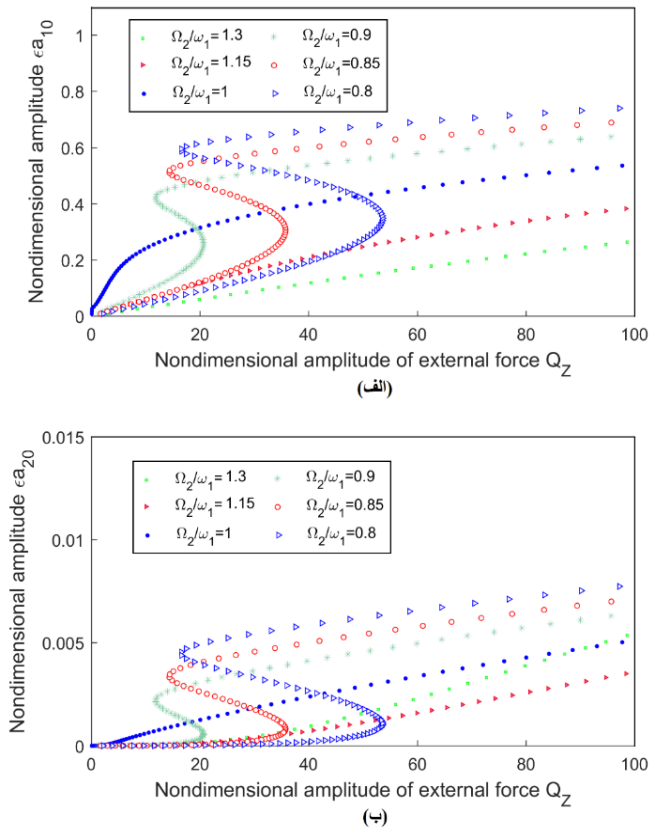
شکل ۳: مقایسه منحنی‌های پاسخ فرکانسی مد اول (۱، ۱) در حالت تشدید اولیه با استفاده از دو روش مقیاس‌های چندگانه و انتگرال عددی

به فرکانس طبیعی مد اول  $\dot{U}_2/\omega_1$  صفحه لایه‌ای پیزوالکتریک نانوکامپوزیت یکسرگیردار دوزنقه‌ای در معرض جریان مادون‌صوت (  $\rho_\infty = 1/225 \text{ kg/m}^3$ ،  $U_\infty = 25 \text{ m/s}$  ) به ازای مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد دامنه‌ی تحریک خارجی را نشان می‌دهد.

در شرایطی که فرکانس طبیعی بی‌بعد مد اول برابر ( $\omega_1 = 0/009$ ) و پارامتر کوچک اغتشاشی برابر ( $\varepsilon = 0/017$ ) و همچنین فرکانس تحریک در نزدیکی فرکانس مد اول ( $\dot{U}_2 \approx \omega_1$ ) در نظر گرفته شده‌اند. منحنی پاسخ فرکانسی شکل ۳ با بکارگیری روش مقیاس‌های زمانی چندگانه (رابطه ۳۷) و انتگرال‌گیری عددی از روابط (۲۶) حاصل شده است. خواص مواد پیزوالکتریک و نانوکامپوزیت در جدول ۱ لیست شده‌اند و ضریب کسر حجمی نانولوله‌های کربنی  $V_{CN} = 0/11$  می‌باشد. ابعاد صفحه مورد بررسی به صورت  $L = 10 \text{ mm}$ ،  $h_p/h = 0/1$ ،  $L/L_x = 2$ ،  $C/L_x = 0/8$ ،  $H = 12 \text{ i m}$  می‌باشند. بعلاوه ولتاژهای ورودی برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند ( $V_D = V_A = 0$ ). همانطور که مشاهده می‌شود توافق خوبی بین دو روش برقرار است که صحت روابط مربوط به روش مقیاس‌های چندگانه را تأیید می‌کند.

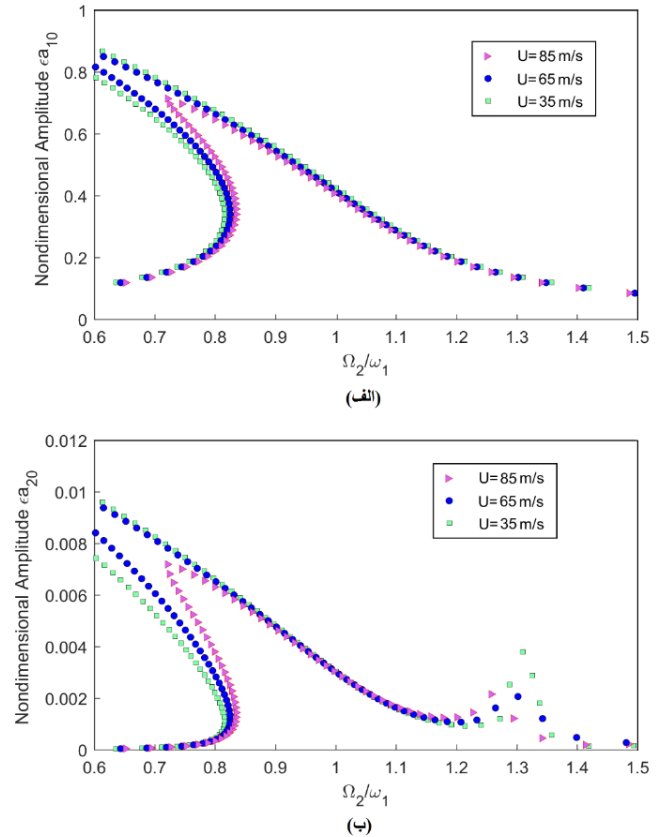
در ادامه با در نظر گرفتن تشدید داخلی سه به یک بین دو مد مفروض و تحریک‌های همزمان الکتریکی و مکانیکی به تحلیل رفتار





**Fig. 6. Figure 6. Amplitude of response of (a) mode (1, 1), (b) mode (2, 2), versus amplitude of the external excitation for several frequency ratios in the presence of aerodynamic load, parametric excitation**

شکل ۶: پاسخ دامنه‌ی (الف) مد (۱، ۱)، (ب) مد (۲، ۲) بر حسب دامنه تحریک خارجی به ازای نسبت‌های مختلف فرکانسی در حضور بار آیرودینامیک و تحریک پارامتریک



**Fig. 5. Effect of different flow velocities on frequency-response curves of the plate in the presence of aerodynamic load, parametric and external excitations, (a) mode (1,1), (b) mode (2,2)**

شکل ۵: اثر سرعت‌های مختلف جریان بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی صفحه دوزنقه‌ای در حضور جریان، تحریک‌های پارامتریک و خارجی مد (۱، ۱)، (ب) مد (۲، ۲)

آمدن تشدیدهای داخلی تبادل انرژی بین مدهای مختلف می‌باشد. زمانیکه نسبت یا رابطه‌ی خاصی بین دو فرکانس طبیعی خطی بوجود می‌آید پاسخ‌های غیرخطی با دامنه‌ی بالا اتفاق می‌افتد.

اثر سرعت جریان هوا ( $U_\infty = 35 \text{ m/s}$ ،  $65 \text{ m/s}$  و  $85 \text{ m/s}$ ) بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی صفحه‌ی دوزنقه‌ای لایه‌ای در حضور تحریک‌های پارامتریک و خارجی در شکل ۵ (الف) و (ب) به ازای  $h_p/h = 0.1$ ،  $L/L_x = 2$ ،  $C/L_x = 0.18$ ،  $\rho_\infty = 1/225 \text{ kg/m}^3$ ،  $\Omega_2 = \omega_1$ ،  $V_A = 3 \text{ V}$ ،  $V_D = 14 \text{ V}$ ،  $\Omega_1 = 0.4\omega_1$ ،  $V_{CN} = 0.11$ ،  $\bar{Q}_Z = -50$ ،  $\omega_r = 3\omega_1$ ، مورد بررسی قرار گرفته شد. با توجه به سرعت جریان بازه دامنه‌ی ارتعاشات محدود می‌شود و بیشینه دامنه ارتعاشات کم شده در نتیجه رفتار غیرخطی کاهش می‌یابد. همچنین

نشان می‌دهد.

در شکل ۴ (ب) نوعی رفتار غیرخطی نرم‌شوندگی پیچیده‌ای با دو قله در مد بالاتر مشاهده می‌شود. این نوع از رفتار غیرخطی بدلیل وجود تشدید داخلی بین مدهای مفروض می‌باشد. قله اول از پاسخ فرکانسی شکل ۴ (ب) زمانی ظاهر می‌شود که فرکانس تحریک در نزدیکی فرکانس طبیعی مد اول باشد در حالیکه قله دوم زمانیکه  $\Omega_p = 1/32\omega_1$  باشد ظاهر می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود اولین قله رفتار نرم‌شوندگی قوی از خود نشان می‌دهد در حالیکه قله دوم رفتار سخت‌شوندگی بسیار ضعیفی را در دامنه‌های بالای ارتعاشات که در نتیجه‌ی تحریک بالای خارجی بوجود می‌آید، را از خود نشان می‌دهد. این رفتار به دلیل حضور برهم‌کنش‌های مودال در سیستم‌های دینامیک غیرخطی پدیدار می‌شود. یکی از دلایل بوجود

ناپایدار و دو شاخه دیگر پایدار می‌باشند. زمانیکه دو پاسخ پایدار در حل حالت ماندگار وجود دارد، شرایط اولیه مشخص می‌کند کدامیک از پاسخ‌ها، پاسخ واقعی سیستم می‌باشد. با توجه به این نکته می‌توان نتیجه گرفت که حل حالت پایدار سیستم‌های غیرخطی برخلاف سیستم‌های خطی وابسته به شرایط اولیه سیستم می‌باشند. همچنین با توجه به منحنی‌های شکل ۶ این نکته قابل توجه هست که رفتار منحنی به ازای  $\Omega_r \approx 1/3\omega_1$  در شکل ۶ (الف) با رفتار آنها در شکل ۶ (ب) تفاوت دارد. این اختلاف بدلیل حضور تشدید داخلی ۱:۳ و رفتار غیرخطی پیچیده با دو قله برای مد بالاتر می‌باشد.

همچنین اثر دامنه‌ی تحریک پارامتریک ( $V_A = 14\text{ V}, 15\text{ V}, 16\text{ V}$ ) بر پاسخ‌های زمانی دو مد ارتعاشی صفحه دوزنقه‌ای با استفاده از انتگرال‌گیری عددی از روابط (۲۶) به ازای شرایط اولیه  $w_1 = w_2 = 0$ ،  $\dot{w}_1 = \dot{w}_2 = 0$ ،  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  و پارامترهای  $(U_\infty = 25\text{ m/s}, \rho_\infty = 1/225\text{ kg/m}^3, h_p/h = 0/1, L/L_x = 2, C/L_x = 0/8, \Omega_r \approx 1/4\omega_1, \omega_r = 3\omega_1, V_D = 14\text{ V}, \Omega_1 \approx 0/4\omega_1, V_{CN} = 0/11, \bar{Q}_Z = -10)$  بررسی شد. همانطور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود هنگامیکه ولتاژ AC ورودی برابر  $V_A = 16\text{ V}$  می‌شود، دامنه پاسخ‌ها به صورت نمایی افزایش می‌یابد و نوسانات بیکران اتفاق می‌افتد و بنابراین ناپایداری دینامیکی رخ می‌دهد. دلیل ناپایداری این است که بر طبق رابطه (۲۶) با افزایش دامنه‌ی تحریک پارامتریک سختی دینامیکی سیستم تغییر می‌کند.

در شکل‌های ۸ و ۹ اثر فرکانس تحریک پارامتریک بر پاسخ زمانی دو مد ارتعاشی به ازای  $(\Omega_1 \approx 1/75\omega_1, 0.85)$ ،  $(\Omega_1 \approx 1/8\omega_1, 1/9)$ ، شرایط اولیه  $w_1 = w_2 = 0$ ،  $\dot{w}_1 = \dot{w}_2 = 0$ ،  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  و پارامترهای  $(U_\infty = 25\text{ m/s}, \rho_\infty = 1/225\text{ kg/m}^3, h_p/h = 0/1, L/L_x = 2, C/L_x = 0/8, \Omega_r \approx 1/4\omega_1, \omega_r = 3\omega_1, V_A = 14\text{ V}, V_D = 14\text{ V}, V_{CN} = 0/11, \bar{Q}_Z = -10)$  مورد بررسی قرار گرفت.

### ۱۰- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، مدل تئوری غیرخطی از یک عملگر دوزنقه‌ی نازک یکسرگیردار با یک لایه نانوکامپوزیت و دو لایه پیزوالکتریک در بالا و پایین آن، در معرض جریان مادون صوت و تحت تحریک‌های همزمان پارامتریک و خارجی ارائه گردید. از تئوری پتانسیل جریان

در شکل ۵ (ب) مشاهده می‌شود به ازای سرعت‌های بالای جریان هوا اثر تشدید داخلی هم کاهش می‌یابد. دلیل این رفتار این است که با افزایش سرعت جریان هوا ضریب میرایی سیستم افزایش می‌یابد و با توجه به منحنی‌ها مشاهده می‌شود که افزایش این ضریب مستقیماً بر دامنه ارتعاشات صفحه اثر می‌گذارد.

شکل ۶ (الف) و (ب) تغییرات پاسخ دامنه‌های دو مد ارتعاشی بر حسب دامنه تحریک خارجی و به ازای نسبت‌های مختلف فرکانس تحریک به فرکانس خطی صفحه، در حضور بار آیرودینامیک و تحریک پارامتریک را برای  $(U_\infty = 35\text{ m/s}, \rho_\infty = 1/225\text{ kg/m}^3, V_{CN} = 0/11, h_p/h = 0/1, L/L_x = 2, C/L_x = 0/8, \omega_r \approx 3\omega_1, V_A = 3\text{ V}, V_D = 14\text{ V}, \Omega_1 \approx 0/4\omega_1)$  نشان می‌دهد. واضح است که بسته به مقدار  $\Omega_2/\omega_1$ ، تعدادی از منحنی‌ها تک‌مقداره هستند در حالیکه سایر آنها چند مقدار می‌باشند که منجر به پدیده پرش می‌شود. در منحنی‌های چندمقداره شاخه میانی

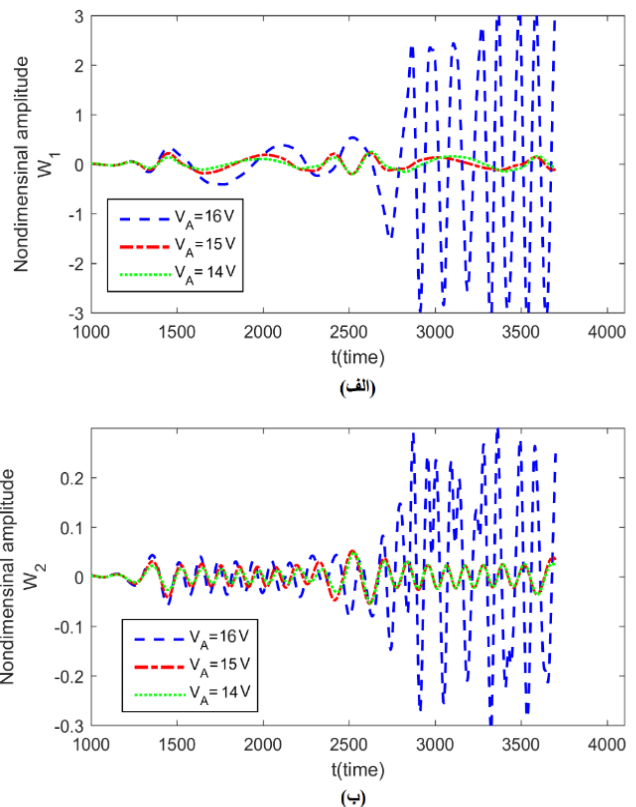
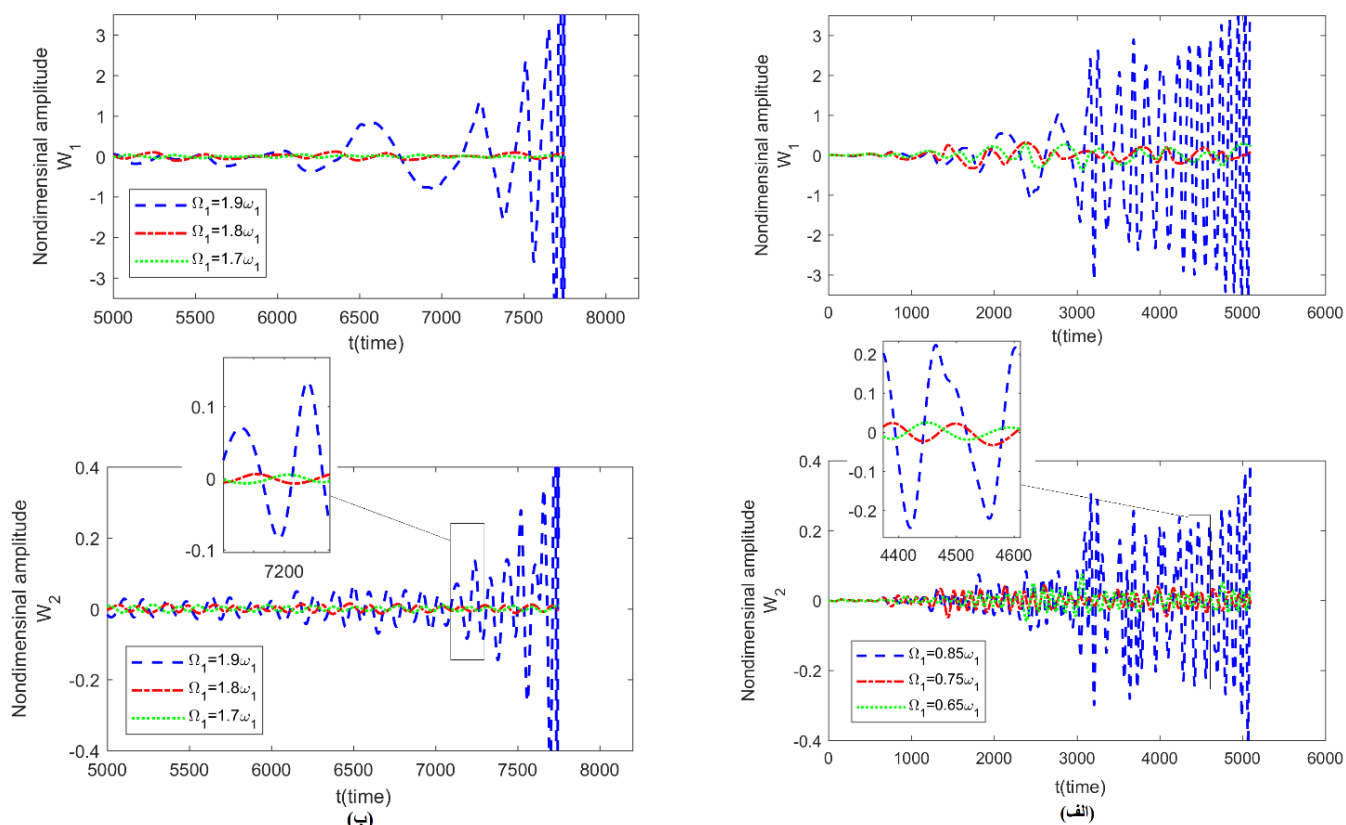


Fig. 7. Figure 7. Effect of the amplitude of electrical excitation on time response of (a) mode (1, 1), (b) mode (2, 2)

شکل ۷: اثر دامنه تحریک الکتریکی بر پاسخ زمانی (الف) مد (۱، ۱)، (ب) مد (۲، ۲)



**Fig. 8. Effect of the frequency of the electrical excitation on time responses of mode (1, 1) and mode (2, 2) for the case (a) frequency of parametric excitation is near fundamental frequency (b) near two times of fundamental frequency**

شکل ۸. اثر فرکانس تحریک پارامتریک بر پاسخ زمانی مد (۱، ۱) و مد (۲، ۲)، (الف) در نزدیکی فرکانس اساسی مد اول (ب) در نزدیکی دو برابر فرکانس اساسی مد اول

- سیستم رفتار غیرخطی نرم‌شوندگی از خود نشان می‌دهد. با توجه به منحنی‌های پاسخ فرکانسی دو قله در مد بالاتر مشاهده می‌شود. اولین قله با رفتار نرم‌شوندگی قوی، در فرکانسی نزدیک به فرکانس طبیعی مد اول سیستم اتفاق می‌افتد در حالیکه قله دوم زمانیکه  $\Omega_p \approx 1/32\omega_1$  باشد ظاهر می‌شود. قله دوم رفتار سخت‌شوندگی ضعیفی را در دامنه‌های بالای ارتعاشات که در نتیجه‌ی تحریک بالای خارجی بوجود می‌آید، از خود نشان می‌دهد. دلیل این امر تشدید داخلی می‌باشد که به دلیل تداخل مودال در دو مد ارتعاشی به وجود آمده است.

- سرعت جریان هوا و دامنه‌ی تحریک خارجی اثر مهمی بر دامنه ارتعاشات صفحه دوزنقه‌ای دارد. با افزایش سرعت جریان مادون‌صوت، دامنه ارتعاشات کاهش می‌یابد و همچنین از اثرات غیرخطی سیستم کاسته می‌شود. در صورتی که با افزایش دامنه‌ی تحریک خارجی دامنه ارتعاشات افزایش می‌یابد.

خطی برای مدل کردن فشار آیرودینامیک وارد بر صفحه استفاده شد. معادلات حرکت با کمک تئوری کلاسیک صفحه و جابجایی‌های بزرگ ون کارمن و با استفاده از اصل همپلتون مدل گردید. در ادامه هندسه صفحه دوزنقه‌ای به مختصات محاسباتی انتقال داده شد و روش گلرکین برای تبدیل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی به معادلات دیفرانسیل معمولی با دو درجه آزادی و ترم‌های غیرخطی مرتبه سه بکار گرفته شد. با تغییر ولتاژ DC، تشدید داخلی ۱:۳ بین دو مد رؤیت گردید و سپس با فرض تشدید اولیه و تشدید داخلی ۱:۳، از روش مقیاس‌های چندگانه برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل غیرخطی جفت شده استفاده شد و در نتیجه آن منحنی‌های پاسخ فرکانسی عملگر دوزنقه‌ای ترسیم گردید. در ادامه اثرات دامنه و فرکانس تحریک پارامتریک بر ناپایداری دینامیکی سیستم، مورد بررسی و بحث قرار گرفت. مهمترین نتایج مقاله را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

- 69.
- [8] H.-S. Shen, Thermal postbuckling of shear-deformable laminated plates with piezoelectric actuators, *Composites science and technology*, 61(13) (2001) 1931-1943.
- [9] C. Lim, L. He, A. Soh, Three-dimensional electromechanical responses of a parallel piezoelectric bimorph, *International Journal of Solids and Structures*, 38(16) (2001) 2833-2849.
- [10] C. Lim, L. He, Exact solution of a compositionally graded piezoelectric layer under uniform stretch, bending and twisting, *International Journal of Mechanical Sciences*, 43(11) (2001) 2479-2492.
- [11] M. Donadon, S.d. Almeida, A. De Faria, Stiffening effects on the natural frequencies of laminated plates with piezoelectric actuators, *Composites Part B: Engineering*, 33(5) (2002) 335-342.
- [12] G. Liu, K. Dai, K. Lim, Static and vibration control of composite laminates integrated with piezoelectric sensors and actuators using the radial point interpolation method, *Smart materials and structures*, 13(6) (2004) 1438.
- [13] C. Lim, C. Lau, A new two-dimensional model for electro-mechanical response of thick laminated piezoelectric actuator, *International journal of solids and structures*, 42(20) (2005) 5589-5611.
- [14] F. Heidary, M.R. Eslami, Piezo-control of forced vibrations of a thermoelastic composite plate, *Composite structures*, 74(1) (2006) 99-105.
- [15] A. Fernandes, J. Pouget, Structural response of composite plates equipped with piezoelectric actuators, *Computers & structures*, 84(22-23) (2006) 1459-1470.
- [16] Z.K. Kusculuoglu, T.J. Royston, Nonlinear modeling of composite plates with piezoceramic layers using finite element analysis, *Journal of Sound and Vibration*, 315(4-5) (2008) 911-926.
- [17] W. Zhang, Z. Yao, M. Yao, Periodic and chaotic dynamics of composite laminated piezoelectric rectangular plate with one-to-two internal resonance, *Science in China Series E: Technological Sciences*, 52(3) (2009) 731-742.
- [18] M. Yao, W. Zhang, Multi-pulse chaotic motions of high-dimension nonlinear system for a laminated composite piezoelectric rectangular plate, *Meccanica*, 49(2) (2014) 365-392.

- دامنه‌ی ارتعاشات صفحه بر حسب نسبت فرکانسی مد اول بر فرکانس تحریک خارجی و به ازای دامنه‌های مختلف تحریک بررسی گردید و مشاهده شد به ازای مقادیری از دامنه‌های تحریک و نسبت‌های فرکانسی سیستم چندمقداره می‌باشد و پدیده پرش در سیستم اتفاق می‌افتد.

- دامنه و فرکانس تحریک الکتریکی اثر مهمی بر پایداری دینامیکی سیستم می‌گذارد. در شرایط ذکر شده با افزایش دامنه تحریک پارامتریک تا ۱۶ ولت و با نزدیکی فرکانس تحریک الکتریکی به فرکانس اساسی و همچنین با نزدیکی به دو برابر فرکانس اساسی مد اول سیستم، دامنه ارتعاشات از حالت کراندار خارج شده و سیستم ناپایدار می‌گردد.

## مراجع

- [1] H.-S. Shen, Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Structures*, 91(1) (2009) 9-19.
- [2] A. Shooshtari, M. Rafiee, Vibration characteristics of nanocomposite plates under thermal conditions including nonlinear effects, *Int J Appl Res Mech Eng*, 1(1) (2011) 60-69.
- [3] Z.-X. Wang, H.-S. Shen, Nonlinear vibration and bending of sandwich plates with nanotube-reinforced composite face sheets, *Composites Part B: Engineering*, 43(2) (2012) 411-421.
- [4] M. Rafiee, X. He, K. Liew, Non-linear dynamic stability of piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates with initial geometric imperfection, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 59 (2014) 37-51.
- [5] R. Kolahchi, M. Safari, M. Esmailpour, Dynamic stability analysis of temperature-dependent functionally graded CNT-reinforced visco-plates resting on orthotropic elastomeric medium, *Composite Structures*, 150 (2016) 255-265.
- [6] X. Guo, W. Zhang, Nonlinear vibrations of a reinforced composite plate with carbon nanotubes, *Composite Structures*, 135 (2016) 96-108.
- [7] M. Krommer, H. Irschik, A Reissner-Mindlin-type plate theory including the direct piezoelectric and the pyroelectric effect, *Acta Mechanica*, 141(1-2) (2000) 51-

- analysis of trapezoidal plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(12) (2010) 1588-1596.
- [30] M. Zamani, A. Fallah, M. Aghdam, Free vibration analysis of moderately thick trapezoidal symmetrically laminated plates with various combinations of boundary conditions, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 36 (2012) 204-212.
- [31] P. Malekzadeh, A. Zarei, Free vibration of quadrilateral laminated plates with carbon nanotube reinforced composite layers, *Thin-Walled Structures*, 82 (2014) 221-232.
- [32] K. Torabi, H. Afshari, F.H. Aboutalebi, Vibration and flutter analyses of cantilever trapezoidal honeycomb sandwich plates, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 21(8) (2019) 2887-2920.
- [33] W. Tian, Z. Yang, Y. Gu, X. Wang, Analysis of nonlinear aeroelastic characteristics of a trapezoidal wing in hypersonic flow, *Nonlinear Dynamics*, 89(2) (2017) 1205-1232.
- [34] W. Tian, Z. Yang, T. Zhao, Analysis of Nonlinear Vibrations and Dynamic Responses in a Trapezoidal Cantilever Plate Using the Rayleigh-Ritz Approach Combined with the Affine Transformation, *Mathematical Problems in Engineering*, 2019(1) (2019) 1-23.
- [35] F. Bakhtiari-Nejad, M. Noroozi, Nonlinear Vibrations of Piezoelectric Carbon Nanotube-Reinforced Composite Trapezoidal Actuator Under Strong Electric Field, in: *ASME 2017 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, American Society of Mechanical Engineers*, 2017, pp. V04BT05A039-V004BT005A039.
- [36] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, CRC press, 2003.
- [37] R.L. Bisplinghoff, H. Ashley, R.L. Halfman, *Aeroelasticity*, Courier Corporation, 2013.
- [38] P. Zhu, Z. Lei, K.M. Liew, Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory, *Composite Structures*, 94(4) (2012) 1450-1460.
- [19] M. Saviz, An optimal approach to active damping of nonlinear vibrations in composite plates using piezoelectric patches, *Smart Materials and Structures*, 24(11) (2015) 115024.
- [20] Y. Li, E.s. Pan, Static bending and free vibration of a functionally graded piezoelectric microplate based on the modified couple-stress theory, *International Journal of Engineering Science*, 97 (2015) 40-59.
- [21] Y. Zhang, W. Zhang, Z. Yao, Analysis on nonlinear vibrations near internal resonances of a composite laminated piezoelectric rectangular plate, *Engineering Structures*, 173 (2018) 89-106.
- [22] K. Khorshidi, M. Karimi, Flutter analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets in thermal environment, *Aerospace Science and Technology*, 95 (2019) 105461.
- [23] R. Srinivasan, B. Babu, Free vibration of cantilever quadrilateral plates, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 73(3) (1983) 851-855.
- [24] K. Liew, K. Lam, A Rayleigh-Ritz approach to transverse vibration of isotropic and anisotropic trapezoidal plates using orthogonal plate functions, *International Journal of Solids and Structures*, 27(2) (1991) 189-203.
- [25] K. Liew, Y. Xiang, S. Kitipornchai, Transverse vibration of thick rectangular plates—I. Comprehensive sets of boundary conditions, *Computers & structures*, 49(1) (1993) 1-29.
- [26] S. Kitipornchai, Y. Xiang, K. Liew, M. Lim, A global approach for vibration of thick trapezoidal plates, *Computers & structures*, 53(1) (1994) 83-92.
- [27] C. Chen, S. Kitipornchai, C. Lim, K. Liew, Free vibration of cantilevered symmetrically laminated thick trapezoidal plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 41(6) (1999) 685-702.
- [28] S. Shokrollahi, F. Bakhtiari-Nejad, Limit cycle oscillations of swept-back trapezoidal wings at low subsonic flow, *Journal of aircraft*, 41(4) (2004) 948-953.
- [29] I. Shufrin, O. Rabinovitch, M. Eisenberger, A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear

پیوست الف

توابع روابط (۱۹) به شرح زیر می‌باشند:

$$F_{11}(u_0) = (A_{11} \left( \frac{J_{22}^2}{J} \right) + A_{33} \left( \frac{J_{21}^2}{J} \right)) u_{0,\xi\xi} + A_{33} \left( \frac{-2J_{11}J_{21}}{J} \right) u_{0,\xi\eta} + A_{33} \left( \frac{J_{11}^2}{J} \right) u_{0,\eta\eta} + A_{33} \left( \frac{2J_{21}J_{21,\xi}}{J^2} \right) u_{0,\xi} \quad \text{(الف-۱)}$$

$$F_{12}(v_0) = (A_{12} + A_{33}) \left( \frac{-J_{22}J_{21}}{J} \right) v_{0,\xi\xi} + (A_{12} + A_{33}) v_{0,\xi\eta} + (A_{12} + A_{33}) \left( \frac{-J_{22}J_{21,\xi}}{J} \right) v_{0,\xi} \quad \text{(الف-۲)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(w_0) = & ((A_{12} + 2A_{33}) \left( \frac{J_{22}J_{21}^2}{J^2} \right) + A_{11} \left( \frac{J_{22}^3}{J^2} \right)) w_{0,\xi} w_{0,\xi\xi} + (A_{12} + 3A_{33}) \left( \frac{J_{22}J_{21}J_{21,\xi}}{J^2} \right) w_{0,\xi}^2 + \\ & ((A_{33} + A_{12}) \left( \frac{J_{11}}{J} \right)) w_{0,\eta} w_{0,\xi\eta} + ((A_{12} + 3A_{33}) \left( \frac{-J_{21}}{J} \right)) w_{0,\xi} w_{0,\xi\eta} + ((A_{12} + A_{33}) \left( \frac{-J_{21}}{J} \right)) w_{0,\eta} w_{0,\xi\xi} \\ & + (A_{12} + A_{33}) \left( \frac{-J_{21,\xi}}{J} \right) w_{0,\xi} w_{0,\eta} + A_{33} \left( \frac{J_{11}}{J} \right) w_{0,\xi} w_{0,\eta\eta} \end{aligned} \quad \text{(الف-۳)}$$

$$\hat{F}(u_0) = J\ddot{u}_0 \quad \text{(الف-۴)}$$

$$F_{21}(u_0) = (A_{12} + A_{33}) \left( \frac{-J_{22}J_{21}}{J} \right) u_{0,\xi\xi} + (A_{12} + A_{33}) u_{0,\xi\eta} + (A_{12} + A_{33}) \left( \frac{-J_{22}J_{21,\xi}}{J} \right) u_{0,\xi} \quad \text{(الف-۱-۲)}$$

$$F_{22}(v_0) = (A_{22} \left( \frac{J_{21}^2}{J} \right) + A_{33} \left( \frac{J_{22}^2}{J} \right)) v_{0,\xi\xi} + A_{22} \left( \frac{-2J_{11}J_{21}}{J} \right) v_{0,\xi\eta} + A_{22} \left( \frac{J_{11}^2}{J} \right) v_{0,\eta\eta} + A_{22} \left( \frac{2J_{21}J_{21,\xi}}{J} \right) v_{0,\xi} \quad \text{(الف-۲-۲)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(w_0) = & ((A_{12} + 2A_{33}) \left( \frac{-J_{21}J_{22}^2}{J^2} \right) + A_{22} \left( \frac{-2J_{21}^3}{J^2} \right)) w_{0,\xi} w_{0,\xi\xi} + \left( \frac{A_{12}}{2} + A_{33} \right) \left( \frac{-J_{21,\xi}J_{22}^2}{J^2} \right) + \frac{A_{22}}{2} \left( \frac{-7J_{21,\xi}J_{22}^2}{J^2} \right) w_{0,\xi}^2 \\ & + A_{22} \left( \frac{-2J_{21}J_{11}^2}{J^2} \right) w_{0,\eta} w_{0,\xi\eta} + \left( (A_{12} + A_{33}) \left( \frac{J_{22}}{J} \right) + A_{22} \left( \frac{2J_{11}J_{21}^2}{J^2} \right) \right) w_{0,\xi} w_{0,\xi\eta} + (A_{22} \left( \frac{J_{11}J_{21}^2}{J^2} \right) + A_{33} \left( \frac{J_{22}}{J} \right)) w_{0,\eta} w_{0,\xi\xi} \\ & + A_{22} \left( \frac{2J_{11}J_{21}J_{21,\xi}}{J^2} \right) w_{0,\xi} w_{0,\eta} + A_{22} \left( \frac{-J_{21}J_{11}^2}{J^2} \right) w_{0,\xi} w_{0,\eta\eta} + A_{22} \left( \frac{J_{11}^3}{J^2} \right) w_{0,\eta} w_{0,\eta\eta} \end{aligned} \quad \text{(الف-۲-۳)}$$

$$\hat{F}(v_0) = J\ddot{v}_0 \quad \text{(الف-۲-۴)}$$

$$\begin{aligned} F_{\dots}(\underline{w}_0) = & (D \left( \frac{-J_{22}^4}{J^3} \right) + 2(D_{12} + 2D_{33}) \left( \frac{-J_{22}^2J_{21}^2}{J^3} \right) + D \left( \frac{-J_{21}^4}{J^3} \right)) w_{\xi\xi\xi\xi} + (2(D_{12} + 2D_{33}) \left( \frac{-1}{J} \right) + \\ & 6D_{22} \left( \frac{-J_{11}^2J_{21}^2}{J^3} \right)) w_{0,\xi\xi\eta\eta} + D_{22} \left( \frac{-J_{11}^4}{J^3} \right) w_{0,\eta\eta\eta\eta} + (4(D_{12} + 2D_{33}) \left( \frac{J_{21}J_{22}}{J^2} \right) + 4D_{22} \left( \frac{J_{11}J_{21}^3}{J^3} \right)) w_{0,\xi\xi\xi\eta} + \\ & 2D_{22} \left( \frac{J_{21}J_{11}^3}{J^3} \right) w_{0,\xi\eta\eta\eta} + (12(D_{12} + 2D_{33}) \left( \frac{-J_{21}J_{22}^2J_{21,\xi}}{J^3} \right) + 12D_{22} \left( \frac{-J_{11,\eta}J_{21}^3}{J^3} \right)) w_{0,\xi\xi\xi} + (8(D_{12} + 2D_{33}) \left( \frac{J_{22}J_{21,\xi}}{J^2} \right) + \\ & 24D_{22} \left( \frac{J_{11}J_{21}J_{21,\xi}}{J^3} \right)) w_{0,\xi\xi\eta} + 12D_{22} \left( \frac{-J_{21}J_{11}^2J_{21,\xi}}{J^3} \right) w_{0,\xi\eta\eta} + (14(D_{12} + 2D_{33}) \left( \frac{-J_{22}^2J_{21,\xi}^2}{J^3} \right) + 72D_{22} \left( \frac{-J_{21}^2J_{21,\xi}^2}{J^3} \right)) w_{0,\xi\xi} + B_0(\eta) L\rho_\infty U_\infty^2 \left( \frac{J_{21}^2}{J} \right) w_{0,\xi\xi} + \\ & (24D_{22} \left( \frac{J_{21,\xi}^2J_{21}J_{11}}{J^3} \right) - B_0(\eta) L\rho_\infty U_\infty^2 \left( \frac{2J_{21}J_{11}}{J} \right)) w_{0,\xi\eta} + (B_0(\eta) L\rho_\infty U_\infty^2 \left( \frac{J_{11}^2}{J} \right)) w_{0,\eta\eta} + (24D_{22} \left( \frac{-J_{21,\xi}^3J_{21}}{J^3} \right) + \\ & B_0(\eta) L\rho_\infty U_\infty^2 \left( \frac{2J_{21}J_{21,\xi}}{J} \right)) w_{0,\xi} - \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\pi} [-J_{21}w_{0,\xi}(L_y) + J_{11}w_{0,\eta}(L_y)] Ln \left( 1 - \frac{\eta}{L_y} \right) \end{aligned} \quad \text{(الف-۳-۱)}$$

$$F_{34}(w_0) = \left( \frac{J_{22}^2}{J} \right) w_{0,\xi\xi} \quad \text{(الف-۳-۲)}$$

$$F_{35}(w_0) = \left(\frac{J_{21}^2}{J}\right)w_{0,\xi\xi} + \left(\frac{-2J_{21}J_{11}}{J}\right)w_{0,\xi\eta} + \left(\frac{J_{11}^2}{J}\right)w_{0,\eta\eta} + \left(\frac{2J_{21}J_{21,\xi}}{J}\right)w_{0,\xi} \quad \text{(الف-۳)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_3(w_0) &= (3(2A_{33} + A_{12})\left(\frac{J_{21}J_{21,\xi}J_{22}^2}{J^3}\right) + 3A_{22}\left(\frac{J_{11,\eta}J_{21}^3}{J^3}\right))w_{0,\xi}^3 + (3(2A_{33} + A_{12})\left(\frac{J_{22}^2J_{21}^2}{J^3}\right) + \frac{3}{2}A_{11}\left(\frac{J_{22}^4 + J_{21}^4}{J^3}\right))w_{0,\xi}^2w_{0,\xi\xi} + \\ & \left(\left(A_{33} + \frac{A_{12}}{2}\right)\left(\frac{1}{J}\right) + \frac{3}{2}A_{22}\left(\frac{J_{21}^2J_{21}^2}{J^3}\right)\right)w_{0,\eta}^2w_{0,\xi\xi} + (2(2A_{33} + A_{12})\left(\frac{-J_{22}J_{21,\xi}}{J^2}\right) + 6A_{22}\left(\frac{-J_{21}^2J_{11}J_{21,\xi}}{J^3}\right))w_{0,\xi}^2w_{0,\eta} + (3(2A_{33} + A_{12}) \end{aligned} \quad \text{(الف-۴)}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-J_{22}J_{21}}{J^2}\right) + 3A_{22}\left(\frac{-J_{21}^3J_{11}}{J^3}\right))w_{0,\xi}^2w_{0,\xi\eta} + \left(\left(A_{33} + \frac{A_{12}}{2}\right)\left(\frac{1}{J}\right) + \frac{3}{2}A_{22}\left(\frac{J_{11}^2J_{21}^2}{J^3}\right)\right)w_{0,\xi}^2w_{0,\eta\eta} + \\ & 3A_{22}\left(\frac{-J_{11}^3J_{21}}{J^3}\right)w_{0,\eta}^2w_{0,\xi\eta} + \frac{3}{2}A_{22}\left(\frac{J_{11}^4}{J^3}\right)w_{0,\eta}^2w_{0,\eta\eta} + 3A_{22}\left(\frac{J_{11}^2J_{21,\xi}J_{21}}{J^3}\right)w_{0,\eta}^2w_{0,\xi} + (2(2A_{33} + A_{12})\left(\frac{1}{J}\right) + \\ & 6A_{22}\left(\frac{J_{11}^2J_{21}^2}{J^3}\right))w_{0,\xi}w_{0,\eta}w_{0,\xi\eta} + (3(2A_{33} + A_{12})\left(\frac{-J_{22}J_{21}}{J^2}\right) + 3A_{22}\left(\frac{-J_{21}^3J_{11}}{J^3}\right))w_{0,\xi}w_{0,\eta}w_{0,\xi\xi} + 3A_{22}\left(\frac{-J_{11}^3J_{21}}{J^3}\right)w_{0,\xi}w_{0,\eta}w_{0,\eta\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_4(w_0, u_0) &= (5A_{33} + 3A_{12})\left(\frac{J_{22}J_{21}J_{21,\xi}}{J^2}\right)w_{0,\xi}u_{0,\xi} + ((2A_{33} + A_{12})\left(\frac{J_{22}J_{21}^2}{J^2}\right) + A_{11}\left(\frac{J_{22}^2}{J^2}\right) + \\ & (A_{33} + A_{12})\left(\frac{-2J_{21}}{J}\right))w_{0,\xi\xi}u_{0,\xi} + A_{33}\left(\frac{-J_{21}}{J}\right)w_{0,\xi\xi}u_{0,\eta} + (A_{11}\left(\frac{J_{22}^2}{J^2}\right) + (2A_{33} + A_{12})\left(\frac{J_{21}^2J_{22}}{J^2}\right))w_{0,\xi}u_{0,\xi\xi} \\ & + (2A_{33} + A_{12})\left(\frac{-J_{21}}{J}\right)w_{0,\xi}u_{0,\xi\eta} + (A_{33} + A_{12})\left(\frac{-2J_{21,\xi}}{J}\right)w_{0,\eta}u_{0,\xi} + (A_{33} + A_{12})\left(\frac{-J_{21}}{J}\right)w_{0,\xi\eta}u_{0,\xi} + \\ & (A_{33} + A_{12})\left(\frac{-2J_{21}}{J}\right)w_{0,\eta}u_{0,\xi\xi} + A_{33}\left(\frac{2J_{11}}{J}\right)w_{0,\xi\eta}u_{0,\eta} + A_{33}\left(\frac{J_{11}}{J}\right)w_{0,\xi}u_{0,\eta\eta} + A_{12}\left(\frac{J_{11}}{J}\right)w_{0,\eta\eta}u_{0,\xi} + \\ & (A_{33} + A_{12})\left(\frac{J_{11}}{J}\right)w_{0,\eta}u_{0,\xi\eta} \end{aligned} \quad \text{(الف-۵)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_5(w_0, v_0) &= ((2A_{33} + A_{12})\left(\frac{-J_{22}^2J_{21}}{J^2}\right) + A_{22}\left(\frac{-J_{21}^3}{J^2}\right))w_{0,\xi\xi}v_{0,\xi} + (A_{12}\left(\frac{J_{22}}{J}\right) + A_{22}\left(\frac{J_{11}J_{21}^2}{J^2}\right))w_{0,\xi\xi}v_{0,\eta} + \\ & A_{22}\left(\frac{-J_{11}^2J_{21}}{J^2}\right)w_{0,\eta\eta}v_{0,\xi} + (A_{22}\left(\frac{-4J_{21,\xi}J_{21}^2}{J^2}\right) + A_{33}\left(\frac{-3J_{22}^2J_{21,\xi}}{J^2}\right) + A_{12}\left(\frac{-J_{21,\xi}J_{22}^2}{J^2}\right))w_{0,\xi}v_{0,\xi} + \\ & A_{22}\left(\frac{J_{11}^3}{J^2}\right)w_{0,\eta\eta}v_{0,\eta} + ((2A_{33} + A_{12})\left(\frac{-J_{22}^2J_{21}}{J^2}\right) + A_{22}\left(\frac{-J_{21}^3}{J^2}\right))w_{0,\xi}v_{0,\xi\xi} + ((A_{33} + A_{12})\left(\frac{J_{22}}{J}\right) + \\ & A_{22}\left(\frac{2J_{21}^2J_{11}}{J^2}\right))w_{0,\xi}v_{0,\xi\eta} + A_{22}\left(\frac{-J_{11}^2J_{21}}{J^2}\right)w_{0,\xi}v_{0,\eta\eta} + (A_{33}\left(\frac{J_{22}}{J}\right) + A_{22}\left(\frac{J_{21}J_{11}}{J^2}\right))w_{0,\eta}v_{0,\xi\xi} + \\ & A_{22}\left(\frac{J_{11}^3}{J^2}\right)w_{0,\eta}v_{0,\eta\eta} + (A_{33}\left(\frac{2J_{22}}{J}\right) + A_{22}\left(\frac{2J_{11}J_{21}^2}{J^2}\right))w_{0,\xi\eta}v_{0,\xi} + A_{22}\left(\frac{-2J_{21}J_{11}^2}{J^2}\right)w_{0,\xi\eta}v_{0,\eta} + A_{22}\left(\frac{-2J_{21}J_{11}^2}{J^2}\right)w_{0,\eta}v_{0,\xi\eta} \end{aligned} \quad \text{(الف-۶)}$$

$$\hat{F}(w_0) = J\dot{w}_0 \quad \text{(الف-۷)}$$

$$F_{PL1}(w_0) = LB(\eta)\rho_\infty J\dot{w}_0 \quad \text{(الف-۸)}$$

$$F_{PL2}(w_0) = 2U_\infty\rho_\infty LB(\eta)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{-J_{21}}{J}w_{0,\xi} + \frac{J_{11}}{J}w_{0,\eta}\right) - \frac{J\rho_\infty U_\infty^2}{\pi}\left[\frac{1}{U_\infty}\dot{w}_0(L_y)\right]Ln\left(1 - \frac{\eta}{L_y}\right) \quad \text{(الف-۹)}$$

پیوست ب

ضرایب رابطه (۲۶) به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \frac{(I_{12}C_{21} - I_{22}C_{11})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, d_{10} = \frac{(I_{12}\Gamma_{21} - I_{22}\Gamma_{11})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, \tilde{F}_{11}^P = \frac{(I_{12}f_{21}^P - I_{22}f_{11}^P)}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, d_{11} = \frac{(I_{12}\Lambda_{12} - I_{22}\Lambda_{11})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, \\ d_{12} &= \frac{(I_{12}\Lambda_{22} - I_{22}\Lambda_{12})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, d_{13} = \frac{(I_{12}\Lambda_{23} - I_{22}\Lambda_{13})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, d_{14} = \frac{(I_{12}\Lambda_{24} - I_{22}\Lambda_{14})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, d_{15} = \frac{(I_{12}\Gamma_{22} - I_{22}\Gamma_{12})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, \end{aligned} \quad (1-1-ب)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{12}^P &= \frac{(I_{12}f_{22}^P - I_{22}f_{12}^P)}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, \mu_{12} = \frac{(I_{12}C_{22} - I_{22}C_{12})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, q_{z1} = \frac{\tilde{q}_{z1}I_{22} - \tilde{q}_{z2}I_{12}}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, \\ \tilde{F}_{11}^P &= F_{01}^P + F_{11}^P \cos(\Omega_1 t), \tilde{F}_{12}^P = F_{02}^P + F_{12}^P \cos(\Omega_1 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{22} &= \frac{(I_{11}C_{22} - I_{12}C_{12})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, d_{20} = \frac{(I_{11}\Gamma_{22} - I_{12}\Gamma_{12})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, \tilde{F}_{21}^P = \frac{(I_{12}f_{22}^P - I_{22}f_{12}^P)}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, d_{21} = \frac{(I_{11}\Lambda_{24} - I_{12}\Lambda_{14})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, \\ d_{22} &= \frac{(I_{11}\Lambda_{23} - I_{12}\Lambda_{13})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, d_{23} = \frac{(I_{11}\Lambda_{22} - I_{12}\Lambda_{12})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, d_{24} = \frac{(I_{11}\Lambda_{12} - I_{12}\Lambda_{11})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, d_{25} = \frac{(I_{11}\Gamma_{21} - I_{12}\Gamma_{11})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, \end{aligned} \quad (2-1-ب)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{22}^P &= \frac{(I_{11}f_{21}^P - I_{12}f_{11}^P)}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, \mu_{21} = \frac{(I_{11}C_{21} - I_{12}C_{11})}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, q_{z2} = \frac{\tilde{q}_{z2}I_{11} - \tilde{q}_{z1}I_{12}}{(I_{22}I_{11} - I_{12}^2)}, \\ \tilde{F}_{21}^P &= F_{03}^P + F_{21}^P \cos(\Omega_1 t), \tilde{F}_{22}^P = F_{04}^P + F_{22}^P \cos(\Omega_1 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= \int_0^1 \int_0^1 (E_{11N}L)(C_1^A + CR_1^A) \bar{\phi}_1 \bar{\psi}_1 L_x L_y d\bar{\xi} d\bar{\eta}, C_{12} = \int_0^1 \int_0^1 (E_{11N}L)(C_2^A + CR_2^A) \bar{\phi}_1 \bar{\psi}_1 L_x L_y d\bar{\xi} d\bar{\eta} \\ C_{21} &= \int_0^1 \int_0^1 (E_{11N}L)(C_1^A + CR_1^A) \bar{\phi}_2 \bar{\psi}_2 L_x L_y d\bar{\xi} d\bar{\eta}, C_{22} = \int_0^1 \int_0^1 (E_{11N}L)(C_2^A + CR_2^A) \bar{\phi}_2 \bar{\psi}_2 L_x L_y d\bar{\xi} d\bar{\eta} \end{aligned} \quad (1-2-ب)$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^1 \int_0^1 E_{11N} \left( \frac{H}{(L_x L_y)^{1/2}} \bar{I}_0 - \frac{L}{(L_x L_y)} B(\bar{\eta}) \mu_p \right) J \bar{\phi}_1 \bar{\psi}_1 \bar{\phi}_1 \bar{\psi}_1 L_x L_y d\bar{\xi} d\bar{\eta} \\ I_{12} &= \int_0^1 \int_0^1 E_{11N} \left( \frac{H}{(L_x L_y)^{1/2}} \bar{I}_0 - \frac{L}{(L_x L_y)} B(\bar{\eta}) \mu_p \right) J \bar{\phi}_1 \bar{\psi}_1 \bar{\phi}_2 \bar{\psi}_2 L_x L_y d\bar{\xi} d\bar{\eta} \\ I_{22} &= \int_0^1 \int_0^1 E_{11N} \left( \frac{H}{(L_x L_y)^{1/2}} \bar{I}_0 - \frac{L}{(L_x L_y)} B(\bar{\eta}) \mu_p \right) J \bar{\phi}_2 \bar{\psi}_2 \bar{\phi}_2 \bar{\psi}_2 L_x L_y d\bar{\xi} d\bar{\eta} \end{aligned} \quad (2-2-ب)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{E_{11N} H^4}{(L_x L_y)^{1/2}} (L2_1^w + L3_1^w + L5_1^w + L7_1^w + L8_1^w + L9_1^w + L10_1^w + L11_1^w) + \right. \\ &\left. (E_{11N} L)(P1_1^A + P2_1^A + P3_1^A + P4_1^A + PR_1^A) \right) \bar{\phi}_1 \bar{\psi}_1 L_x L_y d\bar{\xi} d\bar{\eta} \end{aligned} \quad (1-3-ب)$$

$$f_{11}^P = \int_0^1 \int_0^1 \frac{E_{11N} H^2}{(L_x L_y)^{1/2}} (F1_1^{TP} + F2_1^{TP} + F3_1^{TP} + F4_1^{TP}) \bar{\phi}_1 \bar{\psi}_1 L_x L_y d\bar{\xi} d\bar{\eta}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{E_{11N} H^4}{(L_x L_y)^{1/2}} (L2_2^w + L3_2^w + L5_2^w + L7_2^w + L8_2^w + L9_2^w + L10_2^w + L11_2^w) + \right. \\ &\left. (E_{11N} L)(P1_2^A + P2_2^A + P3_2^A + P4_2^A + PR_2^A) \right) \bar{\phi}_1 \bar{\psi}_1 L_x L_y d\bar{\xi} d\bar{\eta} \end{aligned} \quad (2-3-ب)$$

$$f_{12}^P = \int_0^1 \int_0^1 \frac{E_{11N} H^2}{(L_x L_y)^{1/2}} (F1_2^{TP} + F2_2^{TP} + F3_2^{TP} + F4_2^{TP}) \bar{\phi}_1 \bar{\psi}_1 L_x L_y d\bar{\xi} d\bar{\eta}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{E_{11N} H^2}{(L_x L_y)^{1/2}} (NL8_{11}^w + S_{111} (NL18_{11}^{ww} + NL20_{11}^{ww} + NL23_{11}^{ww})) + \right. \\ &\left. S_{211} (NL26_{11}^{wv} + NL29_{11}^{wv} + NL30_{11}^{wv} + NL34_{11}^{wv} + NL35_{11}^{wv} + NL38_{11}^{wv}) \right) \bar{\phi}_1 \bar{\psi}_1 L_x L_y d\bar{\xi} d\bar{\eta} \end{aligned} \quad (3-3-ب)$$



$$\Lambda_{22} = \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{E_{11N} H^2}{L_x L_y} \right) (NL7_{12}^w + NL8_{12}^w + NL9_{12}^w + NL12_{12}^w + S_{111} (NL13_{11}^{wu} + NL16_{11}^{wu} + NL17_{11}^{wu} + NL18_{12}^{wu} + NL19_{11}^{wu} + NL20_{12}^{wu} + NL21_{11}^{wu} + NL22_{11}^{wu} + NL23_{12}^{wu}) + (S_{112} + S_{121}) (NL18_{11}^{wu} + NL20_{11}^{wu} + NL23_{11}^{wu}) + S_{211} (NL26_{12}^{wv} + NL27_{11}^{wv} + NL28_{11}^{wv} + NL29_{12}^{wv} + NL30_{12}^{wv} + NL31_{11}^{wv} + NL32_{11}^{wv} + NL33_{11}^{wv} + NL34_{12}^{wv} + NL35_{12}^{wv} + NL36_{11}^{wv} + NL37_{12}^{wv} + NL38_{12}^{wv}) + (S_{212} + S_{221}) (NL26_{11}^{wv} + NL29_{11}^{wv} + NL30_{11}^{wv} + NL34_{11}^{wv} + NL35_{11}^{wv} + NL38_{11}^{wv})) \bar{\varphi}_2 \bar{\psi}_2 L_x L_y d\xi d\bar{\eta} \quad (4-3)$$

$$\begin{aligned} L2_1^w &= \alpha_2 \phi_{1,\xi\xi} \psi_{1,\eta\eta}, L2_2^w = \alpha_2 \phi_{2,\xi\xi} \psi_{2,\eta\eta}, L3_1^w = \alpha_3 \phi_1 \psi_{1,\eta\eta\eta\eta}, L3_2^w = \alpha_3 \phi_2 \psi_{2,\eta\eta\eta\eta}, \\ L5_1^w &= \alpha_5 \phi_{1,\xi} \psi_{1,\eta\eta\eta}, L5_2^w = \alpha_5 \phi_{2,\xi} \psi_{2,\eta\eta\eta}, L7_1^w = \alpha_7 \phi_{1,\xi\xi} \psi_{1,\eta}, L7_2^w = \alpha_7 \phi_{2,\xi\xi} \psi_{2,\eta}, \\ L8_1^w &= \alpha_8 \phi_{1,\xi} \psi_{1,\eta\eta}, L8_2^w = \alpha_8 \phi_{2,\xi} \psi_{2,\eta\eta}, L9_1^w = \alpha_9 \phi_{1,\xi\xi} \psi_1, L9_2^w = \alpha_9 \phi_{2,\xi\xi} \psi_2, \\ L10_1^w &= \alpha_{10} \phi_{1,\xi} \psi_{1,\eta}, L10_2^w = \alpha_{10} \phi_{2,\xi} \psi_{2,\eta}, L11_1^w = \alpha_{11} \phi_{1,\xi} \psi_1, L11_2^w = \alpha_{11} \phi_{2,\xi} \psi_2 \end{aligned} \quad (4-4)$$

$$\begin{aligned} F1_1^{TP} &= f_1^{TP} \phi_{1,\xi\xi} \psi_1, F1_2^{TP} = f_1^{TP} \phi_{2,\xi\xi} \psi_2, F2_1^{TP} = f_2^{TP} \phi_{1,\xi} \psi_{1,\eta}, F2_2^{TP} = f_2^{TP} \phi_{2,\xi} \psi_{2,\eta}, F3_1^{TP} = f_3^{TP} \phi_{1,\xi} \psi_1, \\ F3_2^{TP} &= f_3^{TP} \phi_{2,\xi} \psi_2, F4_1^{TP} = f_4^{TP} \phi_1 \psi_{1,\eta\eta}, F4_2^{TP} = f_4^{TP} \phi_2 \psi_{2,\eta\eta} \\ P1_1^A &= p_1^A B(\bar{\eta}) \phi_{1,\xi\xi} \psi_1, P1_2^A = p_1^A B(\bar{\eta}) \phi_{2,\xi\xi} \psi_2, P2_1^A = p_2^A B(\bar{\eta}) \phi_{1,\xi} \psi_{1,\eta}, P2_2^A = p_2^A B(\bar{\eta}) \phi_{2,\xi} \psi_{2,\eta}, \\ P3_1^A &= p_3^A B(\bar{\eta}) \phi_{1,\xi} \psi_1, P3_2^A = p_3^A B(\bar{\eta}) \phi_{2,\xi} \psi_2, P4_1^A = p_4^A B(\bar{\eta}) \phi_1 \psi_{1,\eta\eta}, P4_2^A = p_4^A B(\bar{\eta}) \phi_2 \psi_{2,\eta\eta}, \\ PR_1^A &= p_r^A B(\bar{\eta}) \dot{w}'_1(1), PR_2^A = p_r^A B(\bar{\eta}) \dot{w}'_2(1) \\ C_1^A &= B(\bar{\eta}) (c_1^A \phi_{1,\xi} \psi_1 + c_2^A \phi_1 \psi_{1,\eta}), C_2^A = B(\bar{\eta}) (c_1^A \phi_{2,\xi} \psi_2 + c_2^A \phi_2 \psi_{2,\eta}), \\ CR_1^A &= c_r^A Ln(1-\eta) \dot{w}_1(1), CR_2^A = c_r^A Ln(1-\eta) \dot{w}_2(1) \end{aligned} \quad (5-1)$$

### پیوست ج

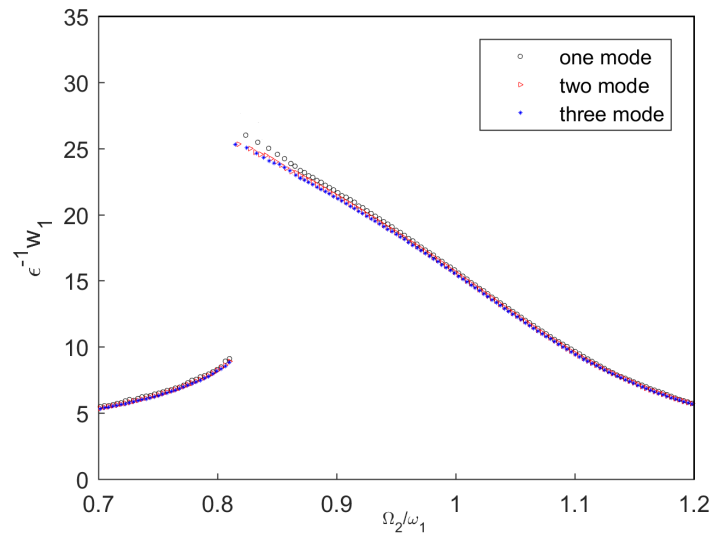
به منظور ارزیابی اثرات مدهای بالاتر معادلات صفحه برای سه مد استخراج گردید. بر همین اساس می‌توان  $w(\xi, \eta, t)$  با بسط سه مد به صورت زیر نوشت:

$$w_0(\xi, \eta, t) = w_1(t) \phi_1(\xi) \psi_1(\eta) + w_2(t) \phi_2(\xi) \psi_2(\eta) + w_3(t) \phi_3(\xi) \psi_3(\eta) \quad (ج-الف)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (ج-الف) در معادله (۱۹-ج) و با کمک روش گلرکین معادلات حرکت سه درجه آزادی حاصل می‌شوند:


$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + \mu_{11} \dot{w}_1 + b_{10} w_1 + (B_{011}^p + B_{11}^p \cos(\Omega_1 t)) w_1 + b_{11} w_1^3 + b_{12} w_2^3 + b_{13} w_3^3 + b_{14} w_1^2 w_2 + b_{15} w_1 w_2^2 + b_{16} w_2^2 w_3 + b_{17} w_2 w_3^2 + \\ b_{18} w_1^2 w_3 + b_{19} w_1 w_3^2 + b_{10} w_1 w_2 w_3 + (b_{111} + B_{012}^p + B_{12}^p \cos(\Omega_1 t)) w_2 + (b_{112} + B_{013}^p + B_{13}^p \cos(\Omega_1 t)) w_3 + \mu_{12} \dot{w}_2 + \\ \mu_{13} \dot{w}_3 = q_1 \cos(\Omega_2 t + \tau_1) \\ \ddot{w}_2 + \mu_{22} \dot{w}_2 + b_{20} w_2 + (B_{022}^p + B_{22}^p \cos(\Omega_2 t)) w_2 + b_{21} w_1^3 + b_{22} w_2^3 + b_{23} w_3^3 + b_{24} w_1^2 w_2 + b_{25} w_1 w_2^2 + b_{26} w_2^2 w_3 + b_{27} w_2 w_3^2 + \\ b_{28} w_1^2 w_3 + b_{29} w_1 w_3^2 + b_{210} w_1 w_2 w_3 + (b_{211} + B_{021}^p + B_{21}^p \cos(\Omega_2 t)) w_1 + (b_{212} + B_{023}^p + B_{23}^p \cos(\Omega_2 t)) w_3 + \mu_{21} \dot{w}_1 + \\ \mu_{23} \dot{w}_3 = q_2 \cos(\Omega_2 t + \tau_1) \\ \ddot{w}_3 + \mu_{33} \dot{w}_3 + b_{30} w_3 + (B_{033}^p + B_{33}^p \cos(\Omega_3 t)) w_3 + b_{31} w_1^3 + b_{32} w_2^3 + b_{33} w_3^3 + b_{34} w_1^2 w_2 + b_{35} w_1 w_2^2 + b_{36} w_2^2 w_3 + b_{37} w_2 w_3^2 + \\ b_{38} w_1^2 w_3 + b_{39} w_1 w_3^2 + b_{310} w_1 w_2 w_3 + (b_{311} + B_{031}^p + B_{31}^p \cos(\Omega_3 t)) w_1 + (b_{312} + B_{032}^p + B_{32}^p \cos(\Omega_3 t)) w_2 + \mu_{31} \dot{w}_1 + \\ \mu_{32} \dot{w}_2 = q_3 \cos(\Omega_2 t + \tau_1) \end{aligned} \quad (ج-ب)$$

منحنی پاسخ فرکانسی صفحه دوزنقه‌ای با تقریب یک، دو و سه مد با کمک روش رنگ کوتاه بررسی گردید همانطور که مشاهده می‌شود تا زمانیکه دامنه بی‌بعد  $\varepsilon^{-1} w_1$  کمتر از ۲۲ می‌باشد نمودار پاسخ فرکانسی با تقریب یک، دو و سه مد تقریباً بر هم منطبق می‌باشند ولی با افزایش دامنه مشاهده می‌شود نمودار پاسخ فرکانسی با تقریب یک مد رفتار نرم شوندگی کمتری از خود نشان می‌دهد. همچنین مشاهده می‌شود نمودارهای پاسخ فرکانسی با تقریب دو و سه مد همچنان با اختلاف کمی بر هم منطبق می‌باشند که نشان دهنده اثر کم مدهای بالاتر در پاسخ سیستم می‌باشد.



شکل ج-۱ منحنی‌های پاسخ فرکانسی صفحه دوزنقه‌ای به ازای تحلیل برای یک، دو و سه مد ارتعاشی

S می‌توان نتیجه گرفت از آنجاییکه دامنه مدهای بالاتر در مقایسه با دامنه مد اول کوچکتر می‌باشند نتایج حاصل از بسط با دو مد قابل قبول می‌باشند .

<p>چگونه به این مقاله ارجاع دهیم <i>M. Noroozi, F. Bakhtiari-Nejad, Nonlinear Electro-aero-elastic Vibration Analysis of a Nanocomposite Laminated Trapezoidal Actuator. AmirKabir J. Mech Eng., 53(special issue 2) (2021) 1137-1158.</i> DOI: <a href="https://doi.org/10.22060/mej.2020.17292.6564">10.22060/mej.2020.17292.6564</a></p>	
---	---