نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ۴، سال ۱۴۰۰، صفحات ۲۲۸۷ تا ۲۳۰۸
DOI: 10.22060/mej.2020.17695.6649

رویکرد حسابان کسری برای خمش ورق ویسکوالاستیک با استفاده از تئوری ورق اصلاح‌شده دو متغیره

الهه نایبی[1]، سید جعفر روزگار[1*]، محمد حسین حیدری[2]

[1] دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران
[2] دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

خلاصه: در این مقاله رفتار خمشی وابسته به زمان ورق ویسکوالاستیک مستطیلی بر مبنای تئوری ورق اصلاح‌شده دومتغیره و با رویکرد حسابان کسری مورد بررسی قرار می‌گیرد. ورق مورد نظر دارای تکیه‌گاه ساده و تحت بارگذاری گسترده یکنواخت می‌باشد و برای شبیه سازی رفتار ویسکوالاستیک از مدل کسری مرچانت سه پارامتری استفاده می‌شود. با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادلات حاکم بر در دامنه زمان به دامنه لاپلاس تبدیل می‌شوند و سپس برای حل این معادلات از روش ناویر استفاده می‌شود. برای بدست‌آوردن پاسخ ورق ویسکوالاستیک از اصل تناظر الاستیک-ویسکوالاستیک استفاده می‌شود به این طریق که پاسخ ورق الاستیک هم‌ارز به مسئله ویسکوالاستیک تعمیم داده می‌شود. نتایج حاصل از این تحقیق، از جمله خیز و کرنش‌های صفحه‌ای و جانبی، با نتایج حاصل از مدل الاستیک و مدل مرچانت استاندارد مقایسه می‌شود که از مقایسه نتایج حاصل با نتایج مراجع می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی از دقت مطلوبی برخوردار است. همچنین به مطالعه تغییرات خیز در راستای ضخامت و تأثیر نسبت منظری ورق بر نتایج نیز پرداخته می‌شود. این پژوهش نشان می‌دهد که مدل کسری پیشنهادشده قابلیت شبیه‌سازی هر دو اثر میرایی و کشسانی دارد که این با طبیعت ساختاری مواد ویسکوالاستیک هماهنگی بیشتری دارد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۲۱
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۱/۱۲
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۲/۱۴
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۲/۲۵

کلمات کلیدی:
حسابان کسری
ویسکوالاستیسیته خطی
تئوری ورق اصلاح شده
خمش ورق
تبدیل لاپلاس

۱-مقدمه

حسابان کسری شاخه‌ای از علم ریاضیات است که در دهه‌های اخیر مورد توجه و کاربرد علوم مختلفی از جمله مهندسی مکانیک قرار گرفته است. گسترش روش‌های مبتنی بر اپراتورهای مرتبه کسری به واسطه توجه دانشمندان علوم مختلف به این موضوع، از ابتدای قرن حاضر آغاز شده و در سال‌های اخیر مطالعات تئوری و تجربی فراوانی در این زمینه صورت گرفته است [۱-۵]. از کاربردهای این شاخه در مهندسی می‌توان به مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک با استفاده از مشتقات مرتبه کسری اشاره کرد. از مزایای کاربرد این شاخه می‌توان نیاز به پارامترها و ضرایب کمتر برای معرفی رفتار این مواد نسبت به مدل‌سازی مرسوم اشاره کرد. کاتانیا و همکاران در ۲۰۰۶ رفتار دینامیکی تیر پلیمری با استفاده از مدل حسابان کسری را مورد بررسی قرار دادند [۶]. تانگ و لی در ۲۰۱۲ به بررسی مسیرهای تعادلی خرپای ویسکوالاستیک دو عضوی با روش حسابان کسری پرداختند [۷]. لازوپولوس و لازوپولوس در ۲۰۱۶ به کمک فضای مماسی کسری[1]، به بررسی خمش یک تیر اویلر- برنولی پرداختند. تئوری خمشی کسری تیرها را براساس اصل برنولی ایجاد کردند و در نهایت مشاهده کردند هرچه مرتبه کسری بزرگتر باشد، تیر سفت‌تر می‌باشد [۸]. اسکویی و همکاران در ۲۰۱۸ به مطالعه رفتار خمشی وابسته به زمان نانوتیرهای ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی بر مبنای تئوری محیط پیوسته غیرموضعی کسری پرداختند. آن‌ها معادله حاکم را به صورت تغییراتی، براساس اصل حداقل انرژی پتانسیل

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: rouzegar@sutech.ac.ir

1 Fractional tangent space

به دست آوردند. نهایتاً اثرات طول مشخصه، مرتبه کسری و شاخص شیب ماده را روی رفتار خمشی نانوتیر با شرایط مرزی مختلف بررسی کردند. نتایج نشان داد که اثرات غیرموضعی نقش مهمی در پاسخ خمشی نانوتیرها با اندازه کوچک ایفا می‌کند [۹].

مواد ویسکوالاستیک موادی هستند که دارای رفتار زمان‌مند بوده و تنش و کرنش در آن‌ها به شرایط بارگذاری از لحظه ابتدایی تا زمان حاضر بستگی دارد. در گذشته برای مدلسازی رفتار مواد ویسکوالاستیک از مدل‌هایی همچون کلوین یا ماکسول که ترکیبی از فنر و میراگر هستند استفاده می‌شد؛ اما در استفاده از این مدل‌های ساده تناقضات و اختلافاتی مشاهده می‌شد که گاهاً غیرقابل چشم‌پوشی نیز بوده‌اند. این مدل‌ها تنها در زمان‌های بسیار کوتاه قادر به مدلسازی رفتار واقعی مواد ویسکوالاستیک بودند. تاکنون تحقیقات فراوانی بر روی مطالعه رفتار استاتیکی و دینامیکی سازه‌های ویسکوالاستیک با استفاده از مدل‌های متداول و مرسوم صورت گرفته است [۱۰-۱۶]. راسیخین و همکاران در ۲۰۱۶ به بررسی درستی مدل‌های مشتق کسری در مسائل دینامیکی تیرها و ورق‌های ویسکوالاستیک پرداختند. آن‌ها دریافتند که با توجه به داده‌های آزمایشگاهی، اپراتور پواسون نمی‌تواند به عنوان مقداری مستقل از زمان برای توصیف پاسخ دینامیکی اجسام ویسکوالاستیک نازک در نظر گرفته شود، و اگر در توصیف رفتار اجسام نازک از اپراتور پواسون مستقل از زمان و مدل کلوین- ویت برای تعریف اپراتور یانگ استفاده شود، چنین مسئله‌ای به یک مسئله معادل در پاسخ دینامیکی یک جسم نازک الاستیک در یک محیط ویسکوالاستیک تنزل می‌یابد. همچنین آن‌ها مشاهده کردند برای برخی مواد ویسکوالاستیک می‌توان از آسایش حجمی در مقایسه با آسایش برشی صرف‌نظر کرد [۱۷]. جعفری و ازهری در ۲۰۱۹ یک روش عددی جدید برای تحلیل استاتیکی ورق‌های میندلین ویسکوالاستیک ارائه کردند. تاریخچه تحلیل خمشی ورق‌های مربعی، مستطیلی، متوازی الاضلاع، ذوزنقه‌ای و دایره‌ای شکل را با شرایط شرایط مرزی و بارگذاری گسترده در نظر گرفتند. آن‌ها نشان دادند تغییردادن پارامترهای هندسی، شکل، شرایط مرزی و نسبت ضخامت به طول ورق، ضریب تابع زمان درنظرگرفته‌شده را تغییر نمی‌دهد. همچنین این روش باعث صرفه‌جویی قابل‌توجهی در هزینه محاسباتی گردید [۱۸]. پژوهشگران فراوانی به مطالعات آزمایشگاهی و تئوری در زمینه کاربرد اپراتورهای حسابان کسری برای مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک پرداخته‌اند [۱۹]. نتایج آزمایشگاهی نشان داده است که برای معرفی خصوصیات رفتاری مواد ویسکوالاستیک، استفاده از حسابان کسری نسبت به حسابان مرتبه صحیح از دقت بالاتری برخوردار است [۲۰]. بگلی و توروبک در ۱۹۸۳ برای تحلیل رفتار میرایی در سازه‌های ویسکوالاستیک از روش حسابان کسری بهره گرفتند [۲۱]. الدرد و همکاران در ۱۹۹۶ یک معادله دیفرانسیلی برای توصیف رفتار یک میله ویسکوالاستیک بدست آوردند که خصوصیات ماده تشکیل‌دهنده میله بر پایه مشتقات کسری بیان گردید [۲۲]. پارک در ۲۰۰۱ در پژوهشی به بررسی رفتار رئولوژیکی میراگرهای ویسکوالاستیک با مدل‌های مکانیکی مختلف با استفاده از حسابان کسری پرداخت و به نتایج قابل‌قبولی در این زمینه دست پیدا کرد [۲۳]. ساسو و همکاران در ۲۰۱۱ به تحقیق در مورد کاربرد مدل‌های مشتقات کسری برای مواد دارای رفتار وابسته به زمان، همچون پلیمرها و الاستومرها پرداختند [۲۴]. دی پاولا و همکاران در ۲۰۱۳ به بررسی رفتار یک تیر اویلر- برنولی ویسکوالاستیک تحت بار استاتیکی و دینامیکی، با روش حسابان کسری پرداختند [۲۵]. ژانگ و همکاران در ۲۰۱۴ به بررسی خمش یک ورق مستطیلی قرارگرفته روی بستر ویسکوالاستیک با مدل زنر کسری[1] پرداختند [۲۶]. همچنین در پژوهش دیگری اثر متقابل بین صفحات و بسترها با مدل مرچانت کسری[2] را مطالعه کردند. آن‌ها راه حل‌های شکل بسته خیز ورق، گشتاور خمشی و عکس‌العمل بستر با استفاده از اصل تناظر ویسکوالاستیک و تبدیل لاپلاس بدست آوردند و نتایج را با مدل‌های استاندارد مقایسه کردند [۲۷]. لازوپولوس و همکاران در ۲۰۱۶ رفتار خزش و استراحت سیستم‌های مکانیکی ویسکوالاستیک را با کمک مشتق کسری لایبنیتس مورد بررسی قرار دادند و با سیستم‌های مرسوم مقایسه کردند. آن‌ها مشاهده کردند مدل‌های مبتنی بر مشتق لایبنیتس رفتار خفیف‌تری (در انحراف از مدل‌های رایج) را نسبت به مدل‌های حاصل از مشتق کاپوتو نشان می‌دهند. همچنین ادعا کردند که فرمولبندی هر مدل ویسکوالاستیک کسری باید براساس رویکرد ارائه‌شده در آن مقاله مدلسازی شود [۲۸]. تکین و کادیوگلو در ۲۰۱۷ به بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق‌های میندلین- ریزنر ویسکوالاستیک خطی ورق‌های دارای قابلیت تغییرشکل برشی با هدف گسترش یک مدل المان محدود از نوع مختلط، با مدل‌های

1 Fractional Zener model
2 Fractional Merchant model

استاندارد زنر و سه پارامتری پرداختند. آن‌ها مشاهده کردند که مدل مورد بحث از نظر محاسباتی ساده، قابل اعتماد و کارآمد بوده است، سایز مشبندی آن همگرایی خوبی دارد، برای هر دو نوع سازه نازک و ضخیم کاربردی است و دچار اثر قفل برشی در سازه های خیلی نازک نمی‌شود [۲۹]. چن و همکاران در ۲۰۱۷ یک مدل کسری برای مدل‌سازی رفتار زمانمند بستر ویسکوالاستیک پسترناک ارائه دادند. آن‌ها از المان اسکات- بلر برای مدلسازی تنش برشی وابسته به زمان استفاده کردند. آن‌ها اثر چشمگیر مرتبه کسری را روی خیز و خمش، بخصوص وقتی که بازه زمانی بزرگ باشد، مشاهده کردند [۳۰].

در پژوهش حاضر برای اولین بار به ارائه یک مدل کسری برای مطالعه رفتار خمشی یک ورق ویسکوالاستیک بر مبنای تئوری ورق اصلاح‌شده دومتغیره پرداخته می‌شود. مدل مرچانت کسری برای بیان رفتار ویسکوالاستیک به کار گرفته می‌شود و برای به دست آوردن معادله حاکم بر ورق مذکور از تئوری ورق اصلاح‌شده دومتغیره و همچنین تئوری کلاسیک به عنوان حالتی خاص از آن، استفاده می‌شود. تئوری ورق اصلاح شده دو متغیره که دارای فرمولبندی ساده تری نسبت به بسیاری از تئوری‌های مرتبه بالای متداول دارد برای ورق‌های نازک و ضخیم نتایج مناسبی ارائه می‌دهد. برای حل معادلات زمان‌مند به‌دست‌آمده از روش تبدیل لاپلاس در کنار روش ناویر استفاده می‌شود و سپس به بررسی صحت و دقت نتایج پرداخته می‌شود. نوآوری اصلی این تحقیق، ارائه یک مدل کسری بر مبنای تئوری ورق اصلاح‌شده دو متغیره برای مسئله خمش ورق ویسکوالاستیک می‌باشد. المان کسری استفاده‌شده برای بیان رفتار ویسکوالاستیک در این تحقیق یک المان بینابینی بین فنر و میراگر می باشد که در آن تنش با مشتق مرتبه کسری کرنش مرتبط است. درنظرگرفتن مرتبه‌های کسری برای مشتق، به شبیه‌سازی واقعی‌تر رفتار ماده ویسکوالاستیک منجر می‌شود.

۲- تئوری مسئله و فرمولبندی

در این بخش در ابتدا به معرفی تعریف مشتق کسری و مدل سه پارامتری کسری برای بیان رفتار ماده ویسکوالاستیک پرداخته می‌شود. سپس معادلات حاکم برای ورق ویسکوالاستیک بر مبنای دو تئوری ورق اصلاح‌شده دومتغیره و تئوری کلاسیک به دست می‌آید. سپس به تشریح حل معادلات حاکم با استفاده از روش تبدیل لاپلاس

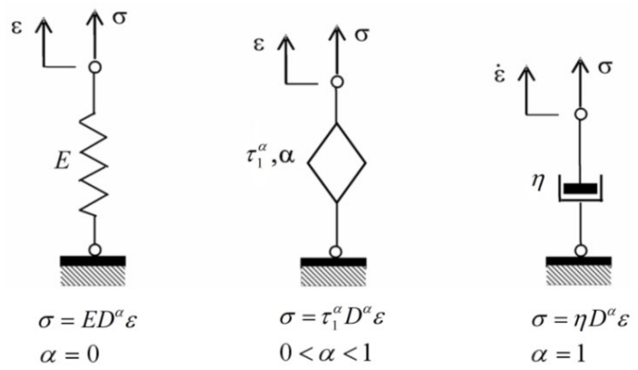


Fig. 1. Fractional derivative element in comparison with the spring and damper elements [31].

شکل ۱. المان مشتق کسری در مقایسه با المان‌های فنر و میراگر [۳۱]

در کنار روش ناویر پرداخته می‌شود.

۲-۱- مشتق کسری ریمان-لیوویل [1]

مشتق n ام (n یک عدد صحیح مثبت است) از یک تابع مناسب $f(t)$، به صورت $D^n = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ تعریف می‌شود. هرگاه n با یک عدد غیرصحیح جایگزین شود، تعریف رابطه بیان‌شده برای مشتق توسعه می‌یابد، که این مبدا حسابان کسری می‌باشد. همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌گردد، از لحاظ فیزیکی وقتی یک المان کسری را در مدل ویسکوالاستیک در نظر می‌گیریم، آن المان رفتاری میانه فنر کامل و میراگر کامل از خود نشان می‌دهد و بدین صورت رفتار جسم ویسکوالاستیک را حالتی بین الاستیک ($\alpha = 0$) و ویسکوز ($\alpha = 1$) بیان می‌کند. اساس مدل‌های رئولوژیکی کسری بر جایگزینی میراگر با این المان واسطه می‌باشد.

برای مشتق کسری تعاریف مختلفی ارائه شده است که از رایج‌ترین وپرکاربردترین آن‌ها می‌توان به تعریف مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف [2]، کاپوتو [3] و ریمان- لیوویل اشاره کرد. در این مقاله از تعریف ریمان- لیوویل برای بیان مشتق کسری استفاده شده است که به صورت زیر بیان می‌شود [۴]:

$$D_{RL}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \int_a^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}} \mathrm{d}t \qquad (۱)$$

$$(n-1 > \alpha \geq n, t > a)$$

1 Riemann-Liouville
2 Grunwald Letnikov
3 Caputo

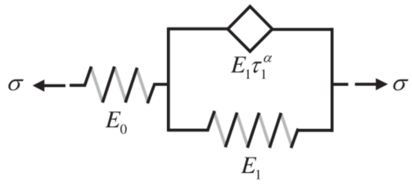


Fig. 2. Three-parameter fractional Merchant model [27].

شکل ۲. مدل سه پارامتری مرچانت کسری [۲۷]

که Γ تابع گاما[1] می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x \qquad (۲)$$

۲-۲- مدل مرچانت کسری[2] برای تعریف رفتار ماده ویسکوالاستیک خطی

رابطه تنش- کرنش برای المان‌های فنر و میراگر در مدل‌های استاندارد ویسکوالاستیک را می‌توان به شکل اپراتورهای دیفرانسیلی به صورت زیر نوشت:

$$\sigma(t) = E D_{RL}^{0} \varepsilon(t) \qquad (۳)$$
$$\sigma(t) = \eta D_{RL}^{1} \varepsilon(t)$$

که معادله اول و دوم به ترتیب بیانگر معادله ساختاری المان فنر و میراگر می‌باشند و در این روابط E و η به ترتیب مدول الاستیسیته و ضریب میرایی می‌باشند. همانگونه که مشاهده می‌شود در معادله اول تنش با مشتق صفرم کرنش و در معادله دوم فنر با مشتق اول کرنش ارتباط دارد. در مجموع می‌توان رابطه تنش با کرنش را به صورت یک حالت میانی در نظر گرفت که در آن تنش با مشتق α ام کرنش ارتباط دارد که α عددی بین صفر و یک است. یکی از مدل‌های کسری که می‌توان برای بیان رفتار ماده ویسوالاستیک از المان واسطه استفاده نمود مدل مرچانت کسری است. در شکل (۱) مدل سه پارامتری مرچانت کسری با المان واسطه مشاهده می‌شود.

به طوریکه σ تنش واردشده به سیستم، E_0 و E_1 مدول الاستیسیته دو فنر و $\tau_1 = \dfrac{\eta}{E}$ می‌باشد و به این ترتیب معادله ساختاری المان دارای مشتق کسری می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\sigma(t) = E\,\tau_1^{\alpha} D_{RL}^{\alpha} \varepsilon(t) \qquad (۴)$$
$$0 \le \alpha \le 1$$

که D_{RL}^{α} مشتق کسری تعریف‌شده در رابطه (۱) می‌باشد. هرگاه $\alpha = 0$ باشد، رابطه تبدیل به معادله ساختاری فنر می‌شود و هرگاه $\alpha = 1$ باشد معادله ساختاری میراگر را خواهیم داشت. بنابراین ثابت α یک پارامتر بی‌بعد مربوط به حافظه ماده می‌باشد.

مدل مرچانت از اتصال سری یک مدل کلوین و یک المان فنر تشکیل شده است و رابطه تنش- کرنش آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left(D_{RL}^{\alpha} + \frac{1}{t_1^{\alpha}}\right)\sigma(t) = E_0\left(D_{RL}^{\alpha} + \frac{1}{\tau_1^{\alpha}}\right)\varepsilon(t) \qquad (۵)$$

که

$$\tau_1 = \frac{\eta}{E_1} \qquad (۶)$$

$$t_1 = \frac{\tau_1}{\sqrt[\alpha]{1 + \dfrac{E_0}{E_1}}}$$

مشخص است اگر $\alpha = 1$ قرار دهیم، مدل مرچانت کسری به مدل مرچانت استاندارد تبدیل می‌شود.

۲-۳- تئوری ورق اصلاح‌شده دومتغیره

هندسه ورق مورد بررسی در این پژوهش شامل یک ورق همسانگرد مستطیل شکل دارای تکیه‌گاه ساده می‌باشد که دارای ابعاد a و b و ضخامت h می‌باشد که تحت بار گسترده عمودی $p(x,y)$ قرار دارد که در جهت محور z و روی سطح بالایی ورق اعمال می‌گردد. مبدا محورهای مختصات روی صفحه میانی و در گوشه ورق قرار گرفته است. با توجه به ضعف‌های تئوری کلاسیک و تئوری برشی مرتبه اول و پیچیدگی‌های تئوری‌های مرتبه بالا، تئوری‌های اصلاح‌شده ورق مطرح شدند که با فرمولبندی ساده‌تر، کارایی مناسبی برای تحلیل‌های مختلف ورق‌های نازک و ضخیم دارند. یکی از تئوری‌های اصلاح‌شده ورق، تئوری دومتغیره می‌باشد که در این تئوری میدان جابجایی ورق به صورت زیر بیان می‌گردد [۳۲]:

1 Gamma function
2 Fractional Merchant Model (FMM)

$$u(x,y,z) = -z\frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x}$$
$$v(x,y,z) = -z\frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y}$$
$$w(x,y) = w_b(x,y) + w_s(x,y)$$
$$f(z) = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{3}z\left(\frac{z}{h}\right)^2 \quad (۷)$$

که u، v و w به ترتیب جابجایی در راستای محورهای x، y و z می‌باشند. همانگونه که مشاهده می‌شود جابجایی عمودی ورق (w)، به دو مولفه جابجایی خمشی و برشی تقسیم شده است. تابع $f(z)$ به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که شرط بدون تنش‌بودن سطوح آزاد را ارضاء کند. همچنین خاصیت دیگر این تابع صفربودن انتگرال آن در راستای ضخامت می‌باشد که این شرط موجب عدم ایجاد کوپلینگ بین اثرات خمشی و برشی خواهد شد که نهایتاً منجر به معادلات حاکم مستقل (غیرکوپل) برای مولفه خمشی خیز (w_b) و مولفه برشی خیز (w_s)خواهد گردید. با استفاده از روابط کرنش- تغییر مکان، کرنش‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}$$
$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}$$
$$\varepsilon_z = 0$$
$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\,\partial y} - 2f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\,\partial y} \quad (۸)$$
$$\gamma_{xz} = g(z)\frac{\partial w_s}{\partial x}$$
$$\gamma_{yz} = g(z)\frac{\partial w_s}{\partial y}$$
$$g(z) = 1 - \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{5}{4} - 5\left(\frac{z}{h}\right)^2$$

۲-۴- معادله حاکم بر خمش شبه استاتیکی ورق الاستیک خطی

روابط تنش- کرنش برای ماده الاستیک خطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad (۹)$$
$$\sigma_z = 0$$
$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

که E، ν و G به ترتیب مدول الاستیسیته، نسبت پواسون و مدول برشی می‌باشند. با جایگذاری روابط کرنش از رابطه (۸) در روابط تنش- کرنش، روابط تنش- تغییرمکان برای ورق الاستیک خطی به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = -\frac{E}{(1-\nu^2)}\left(z\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\,\partial y}\end{Bmatrix} + f(z)\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\,\partial y}\end{Bmatrix}\right) \quad (۱۰)$$

منتجه گشتاورها و نیروهای برشی به صورت زیر بیان می‌شوند [۳۲]:

$$\begin{Bmatrix}M_x^b\\ M_y^b\\ M_{xy}^b\end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} z\,\mathrm{d}z \quad (۱۲)$$

$$\begin{Bmatrix}M_x^s\\ M_y^s\\ M_{xy}^s\end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} f(z)\,\mathrm{d}z \quad (۱۳)$$

$$\begin{Bmatrix}Q_{xz}^s\\ Q_{yz}^s\end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix} g(z)\,\mathrm{d}z \quad (۱۴)$$

که با جایگذاری رابطه (۱۰) در روابط (۱۲) و (۱۳)، روابط (۱۵) و (۱۶) برای گشتاور خمشی و پیچشی به دست می‌آید:

$$M_x^b = -D\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right)$$
$$M_y^b = -D\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\right) \quad (۱۵)$$
$$M_{xy}^b = -D\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}$$

$$M_x^s = -D\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) \quad (۱۶)$$

D صلبیت خمشی و برابر با $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ می‌باشد. از جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۱۴) خواهیم داشت:

$$Q_{xz}^s = \frac{5Eh}{12(1+\nu)}\frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (۱۷)$$
$$Q_{yz}^s = \frac{5Eh}{12(1+\nu)}\frac{\partial w_s}{\partial y}$$

برای به‌دست‌آوردن معادلات حاکم از اصل حداقل‌سازی انرژی پتانسیل کل استفاده می‌شود که به صورت رابطه زیر تعریف می‌گردد:

$$\delta\Pi = \delta(U + W) = 0 \quad (۱۸)$$

که Π انرژی پتانسیل کل، U انرژی کرنشی ذخیره‌شده در جسم و W انرژی پتاسیل مربوط به کار نیروهای خارجی می‌باشند. مقدار انرژی پتانسیل کل برای مسئله حاضر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Pi = \iiint_V \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz})\mathrm{d}V \quad (۱۹)$$
$$+\iint_A p(x,y) w \mathrm{d}A$$

در نهایت معادلات حاکم خمش ورق الاستیک خطی با بهره‌گیری از روابط فوق به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D\nabla^4 w_b = p(x,y) \quad (۲۰)$$

$$\frac{1}{84}D\nabla^4 w_s - \frac{5Gh}{2}\nabla^2 w_s = p(x,y) \quad (۲۱)$$

که در این روابط G مدول برشی و برابر با $G = E/(2(1+\nu))$ می‌باشد. همچنین شرایط مرزی برای ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$w_b = 0 \quad x = 0,a:$$
$$M_x^s = 0 \quad w_s = 0 \quad M_x^b = 0$$
$$y = 0,b: \quad w_b = 0 \quad (۲۲)$$
$$M_y^s = 0 \quad w_s = 0 \quad M_y^b = 0$$

برای حل ورق با شرایط مرزی ذکرشده می‌توان از روش ناویر استفاده کرد که در پی آن روابط اجزاء خمشی و برشی و نیز نیروی واردشده به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$w_b(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^b \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (۲۳)$$

$$w_s(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^s \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (۲۴)$$

$$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (۲۵)$$

w_{mn}^b، w_{mn}^s و p_{mn} ثوابتی هستند که باید محاسبه شود. در صورتی که بار اعمالی به صورت یکنواخت یعنی $p(x,y) = p_0$ باشد روابط زیر برای خیز خمشی و برشی ورق الاستیک بدست خواهد آمد:

$$w_b(x,y) = \frac{16p_0}{D\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}}{k^2 mn} \quad (۲۶)$$

$$w_s(x,y) = \frac{16p_0}{D\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}}{mn\left[\frac{D\pi^4}{84}k^2+\frac{5Gh\pi^2}{6}k\right]} \quad (۲۷)$$

که

$$k=\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2 \quad (۲۸)$$

می‌توان تئوری کلاسیک را به عنوان حالت خاصی از تئوری ورق اصلاح‌شده دومتغیره بیان کرد. بدین منظور کافی است تنها مولفه خمشی خیز را در معادلات فوق در نظر گرفت و از مولفه برشی خیز صرفنظر کرد. در اینصورت معادله حاکم بر ورق به صورت رابطه (۲۳) بیان می‌گردد.

بارگذاری مطرح‌شده در روابط (۲۰) و (۲۱) می‌تواند به صورت زمان‌مند در نظر گرفته شود و در اینصورت می‌توان با شکستن زمان به بازه‌های زمانی کوچک و انجام یک سری حل استاتیکی، به تحلیل خمش شبه استاتیکی ورق الاستیک دست یافت. چنانچه بارگذاری بصورت یک بار پله‌ای یکنواخت $p_0(t)$ در نظر گرفته شود که این بارگذاری در لحظه $t=0$ شروع می‌شود می‌توان آن را با رابطه زیر بیان کرد:

$$p_0(t)=p_0H(t) \quad (۲۹)$$

که p_0 بار گسترده یکنواخت است که روی سطح بالایی ورق اعمال می‌گردد و $H(t)$ تابع هویساید[1] می‌باشد که برای زمانهای $t<0$ مقدار صفر و برای زمانهای $t\geq 0$ مقدار یک اختیار می‌کند. دراینصورت روابط (۲۰) و (۲۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$D\nabla^4 w_b(x,y,t)=p_0(t) \quad (۳۰)$$

$$\frac{1}{84}D\nabla^4 w_s(x,y,t)-\frac{5Gh}{2}\nabla^2 w_s(x,y,t)=p_0(t) \quad (۳۱)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادلات فوق می‌توان معادلات را از دامنه زمان به دامنه مکان تبدیل کرد:

$$D\nabla^4 \overline{w}_b(x,y,s)=p_0(s) \quad (۳۲)$$

$$\frac{1}{84}D\nabla^4 \overline{w}_s(x,y,s)-\frac{5Gh}{2}\nabla^2 \overline{w}_s(x,y,s)=p_0(s) \quad (۳۳)$$

حال می‌توان پس از بدست‌آوردن $\overline{w}_b$ و $\overline{w}_s$ در دامنه لاپلاس، با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس $\overline{w}_b$ و $\overline{w}_s$ را در دامنه زمان به دست آورد.

۲-۵-حل معادلات حاکم بر خمش شبه استاتیکی ورق ویسکوالاستیک

در این تحقیق برای به‌دست‌آوردن معادلات حاکم بر خمش ورق ویسکوالاستیک از اصل تناظر الاستیک- ویسکوالاستیک عمومی[2] استفاده می‌شود. بر مبنای این اصل می‌توان با جایگزینی Dو G در معادلات حاکم بر ورق الاستیک از روابط (۳۲) و (۳۳) با $D(s)$ و $G(s)$ مربوط به ورق ویسکوالاستیک هم‌ارز از لحاظ هندسه، شرایط مرزی و بارگذاری، معادلات حاکم بر خمش ورق ویسکوالاستیک را به دست آورد. سپس معادلات حاصل در حوزه لاپلاس را می‌توان با استفاده از روش ناویر حل نمود. در نهایت با معکوس‌کردن حل به‌دست‌آمده، حل معادلات ورق ویسکوالاستیک در حوزه زمان حاصل می‌گردد [۳۳].

در ابتدا لازم است با استفاده از مدل کسری بیان‌شده، متغیرهای $D(s)$ و $G(s)$ برای ورق ویسکوالاستیک در حوزه لاپلاس بدست آیند. با جایگزینی جزء خمشی رابطه (۱۰) در رابطه (۵) و ضرب‌کردن طرفین رابطه در z و همچنین انتگرال‌گیری در راستای ضخامت ورق، رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\left(D_{RL}^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}\right)\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}z\,\mathrm{d}z = -\left(D_{RL}^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}\right)\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E_0 z^2}{(1-\nu^2)}\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\,\partial y}\end{Bmatrix}\mathrm{d}z \quad (۳۴)$$

1 Heaviside function

2 General elastic-viscoelastic correspondence principle

رابطه فوق طبق تعریف انجام‌شده در رابطه (۱۲) به صورت رابطه زیر بازنویسی می‌شود:

$$\left(D_{RL}^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}\right)\begin{Bmatrix} M_x^b(t) \\ M_y^b(t) \\ M_{xy}^b(t)\end{Bmatrix}= -\frac{E_0h^3}{12(1-\nu^2)}\left(D_{RL}^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}\right)\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\,\partial y}\end{Bmatrix} \quad (۳۵)$$

سپس با استفاده از روش تبدیل لاپلاس، روابط در دامنه s به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\xrightarrow{L}\left(s^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}\right)\begin{Bmatrix} \overline{M}_x^b(s) \\ \overline{M}_y^b(s) \\ \overline{M}_{xy}^b(s)\end{Bmatrix}= -\frac{E_0h^3}{12(1-\nu^2)}\left(s^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}\right)\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2 \overline{w}_b}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 \overline{w}_b}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2 \overline{w}_b}{\partial x\,\partial y}\end{Bmatrix} \quad (۳۶)$$

به طوریکه s^{α} تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه α می‌باشد. بنابراین رابطه گشتاورهای خمشی در دامنه s به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\begin{Bmatrix} \overline{M}_x^b(s) \\ \overline{M}_y^b(s) \\ \overline{M}_{xy}^b(s)\end{Bmatrix}= -D(s)\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2 \overline{w}_b}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 \overline{w}_b}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2 \overline{w}_b}{\partial x\,\partial y}\end{Bmatrix} \quad (۳۷)$$

$$D(s)=\frac{E_0h^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{s^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}}{s^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}}\right) = D\left(\frac{s^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}}{s^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}}\right) \quad (۳۸)$$

به طوریکه $D(s)$ سفتی خمشی کسری ورق ویسکوالاستیک در دامنه s می‌باشد. همچنین به طرز مشابه، با جایگزینی جزء برشی رابطه (۱۰) در رابطه (۵) و ضرب‌کردن طرفین رابطه در $f(z)$ و همچنین انتگرال‌گیری در راستای ضخامت، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left(D_{RL}^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}\right)\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}f(z)\,\mathrm{d}z = -\left(D_{RL}^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}\right)\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E_0(f(z))^2}{(1-\nu^2)}\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\,\partial y}\end{Bmatrix}\mathrm{d}z \quad (۳۹)$$

بنابراین طبق تعریف رابطه (۱۳) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left(D_{RL}^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}\right)\begin{Bmatrix} M_x^s(t) \\ M_y^s(t) \\ M_{xy}^s(t)\end{Bmatrix}= -\frac{E_0h^3}{1008(1-\nu^2)}\left(D_{RL}^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}\right)\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\,\partial y}\end{Bmatrix} \quad (۴۰)$$

سپس با کمک تبدیل لاپلاس رابطه زیر در دامنه s به دست خواهد آمد:

$$\xrightarrow{L}\left(s^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}\right)\begin{Bmatrix}\overline{M}_x^s(s)\\ \overline{M}_y^s(s)\\ \overline{M}_{xy}^s(s)\end{Bmatrix}$$

$$=-\frac{E_0h^3}{1008(1-\nu^2)}\left(s^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}\right)\begin{bmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\ 0&0&\frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2\overline{w}_s}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2\overline{w}_s}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2\overline{w}_s}{\partial x\,\partial y}\end{Bmatrix} \tag{۴۱}$$

بنابراین رابطه جزء برشی گشتاورها را در دامنه s می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{Bmatrix}\overline{M}_x^s(s)\\ \overline{M}_y^s(s)\\ \overline{M}_{xy}^s(s)\end{Bmatrix}=-\frac{D(s)}{84}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\ 0&0&\frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2\overline{w}_s}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2\overline{w}_s}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2\overline{w}_s}{\partial x\,\partial y}\end{Bmatrix} \tag{۴۲}$$

به طریق مشابه، با جایگزینی رابطه (۱۱) در رابطه (۵) و ضرب‌کردن طرفین رابطه در $g(z)$ و انتگرال‌گیری از طرفین در راستای ضخامت رابطه (۴۳) به دست می‌آید:

$$\left(D_{RL}^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}\right)\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix}g(z)\mathrm{d}z$$

$$=\left(D_{RL}^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}\right)\int_{-h/2}^{h/2}(g(z))^2\frac{E_0}{2(1+\nu)}\begin{Bmatrix}\frac{\partial w_s}{\partial x}\\ \frac{\partial w_s}{\partial y}\end{Bmatrix}\mathrm{d}z \tag{۴۳}$$

با جایگذاری تعریف انجام‌شده در رابطه (۱۴) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\left(D_{RL}^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}\right)\begin{Bmatrix}Q_{xz}^s(t)\\ Q_{yz}^s(t)\end{Bmatrix}$$

$$=\left(D_{RL}^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}\right)\frac{5E_0h}{12(1+\nu)}\begin{Bmatrix}\frac{\partial w_s}{\partial x}\\ \frac{\partial w_s}{\partial y}\end{Bmatrix} \tag{۴۴}$$

سپس با استفاده از روش تبدیل لاپلاس، روابط در دامنه s به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\xrightarrow{L}\left(s^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}\right)\begin{Bmatrix}\overline{Q}_{xz}^s(s)\\ \overline{Q}_{yz}^s(s)\end{Bmatrix}$$

$$=\left(s^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}\right)\frac{5E_0h}{12(1+\nu)}\begin{Bmatrix}\frac{\partial\overline{w}_s}{\partial x}\\ \frac{\partial\overline{w}_s}{\partial y}\end{Bmatrix} \tag{۴۵}$$

رابطه نیروهای برشی را در دامنه s می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{Bmatrix}\overline{Q}_{xz}^s(s)\\ \overline{Q}_{yz}^s(s)\end{Bmatrix}=\frac{5hG(s)}{6}\begin{Bmatrix}\frac{\partial\overline{w}_s}{\partial x}\\ \frac{\partial\overline{w}_s}{\partial y}\end{Bmatrix} \tag{۴۶}$$

که:

$$G(s)=\frac{E_0}{2(1+\nu)}\left(\frac{s^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}}{s^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}}\right)$$

$$=G\left(\frac{s^{\alpha}+\frac{1}{\tau_1^{\alpha}}}{s^{\alpha}+\frac{1}{t_1^{\alpha}}}\right) \tag{۴۷}$$

به طوریکه $G(s)$ مدول برشی کسری ورق ویسکوالاستیک در دامنه s می‌باشد.

همانطور که پیش‌تر اشاره شد بارگذاری اعمال‌شده به صورت پله‌ای می‌باشد که پس از اعمال تبدیل لاپلاس رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$p_0(t)=p_0H(t)\xrightarrow{L}p_0(s)=\frac{p_0}{s} \quad (۴۸)$$

با جایگذاری $D(s)$ و $G(s)$ از روابط (۳۸) و (۴۷) به جای D و G در روابط (۳۲) و (۳۳)، معادلات حاکم بر خمش ورق ویسکوالاستیک درحوزه s بدست می‌آید:

$$D(s)\nabla^4\overline{w}_b(x,y,s)=p_0(s) \quad (۴۹)$$

$$\frac{1}{84}D(s)\nabla^4\overline{w}_s(x,y,s)-\frac{5G(s)h}{2}\nabla^2\overline{w}_s(x,y,s)=p_0(s) \quad (۵۰)$$

که در این روابط $p_0(s)$ برای بار پله‌ای یکنواخت از رابطه (۴۸) بدست می‌آید. برای حل این معادلات با استفاده از روش ناویر می‌توان سری‌های زیر را برای $\overline{w}_b(x,y,s)$ و $\overline{w}_s(x,y,s)$ در نظر گرفت:

$$\overline{w}_b(x,y,s)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{w}_{mn)b}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (۵۱)$$

$$\overline{w}_s(x,y,s)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{w}_{mn)s}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (۵۲)$$

همچنین با نوشتن سری فوریه دوگانه برای بار یکنواخت $p_0(s)$ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$p_0(s)=\frac{p_0}{s}=\frac{16p_0}{s\pi^2}\sum_{m=1,3,...}^{\infty}\sum_{n=1,3,...}^{\infty}\frac{1}{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (۵۳)$$

با جایگذاری روابط (۵۱) تا (۵۳) در روابط (۴۹) و (۵۰) و محاسبه $\overline{w}_{mn)b}(s)$ و $\overline{w}_{mn)s}(s)$ در نهایت روابط زیر برای $\overline{w}_b(x,y,s)$ و $\overline{w}_s(x,y,s)$ بدست می‌آیند:

$$\overline{w}_b(x,y,s)=\frac{16p_0}{D(s)\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{k^2mns}=\frac{16p_0}{D\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{k^2mn\left(\frac{s^\alpha+\frac{1}{\tau_1^\alpha}}{s^\alpha+\frac{1}{t_1^\alpha}}\right)s} \quad (۵۴)$$

$$\overline{w}_s(x,y,s)=\frac{16p_0}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn\left[\frac{D\pi^4}{84}k^2+\frac{5Gh\pi^2}{6}k\right]\left(\frac{s^\alpha+\frac{1}{\tau_1^\alpha}}{s^\alpha+\frac{1}{t_1^\alpha}}\right)s} \quad (۵۵)$$

حال با اعمال لاپلاس معکوس از روابط (۵۴) و (۵۵)، روابط تغییرمکان عمودی وابسته به زمان به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$w_b(x,y,t)=\frac{16p_0}{D\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{k^2mn}\left[\begin{array}{l}E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)\\+\left(1+\frac{E_0}{E_1}\right)\\\left[1-E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)\right]\end{array}\right] \quad (۵۶)$$

$$w_s(x,y,t)=\frac{16p_0}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\left[E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)+\left(1+\frac{E_0}{E_1}\right)\left[1-E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)\right]\right]}{mn\left[\frac{D\pi^4}{84}k^2+\frac{5Gh\pi^2}{6}k\right]} \qquad (۵۷)$$

که تابع E_α تابع میتاگ- لفلر[1] است که در حسابان کسری کاربرد فراوان دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_\alpha(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{\Gamma(\alpha n+1)} \qquad (۵۸)$$

لازم به ذکر است که تابع میتاگ- لفلر به ازاء $\alpha=1$ برابر با e^t می‌شود و نتایج حل ویسکوالاستیک با مرتبه صحیح حاصل خواهد شد.

حال طبق رابطه (۸)، با مشتق‌گیری از روابط به‌دست‌آمده برای خیز خمشی و برشی، و ضرب‌کردن در z و $f(z)$ روابط کرنش صفحه‌ای به صورت به دست می‌آید:

$$\varepsilon_x(x,y,t)=16p_0\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m}{a}\right)^2\frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn}\left[\frac{z}{Dk^2}+\frac{f(z)}{\frac{D\pi^4}{84}k^2+\frac{5Gh\pi^2}{6}k}\right]\left[E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)+\left(1+\frac{E_0}{E_1}\right)\left[1-E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)\right]\right] \qquad (۵۹)$$

$$\varepsilon_y(x,y,t)=16p_0\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{b}\right)^2\frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn}\left[\frac{z}{Dk^2}+\frac{f(z)}{\frac{D\pi^4}{84}k^2+\frac{5Gh\pi^2}{6}k}\right]\left[E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)+\left(1+\frac{E_0}{E_1}\right)\left[1-E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)\right]\right] \qquad (۶۰)$$

$$\gamma_{xy}(x,y,t)=32p_0\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{mn}{ab}\right)\frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn}\left[\frac{z}{Dk^2}+\frac{f(z)}{\frac{D\pi^4}{84}k^2+\frac{5Gh\pi^2}{6}k}\right]\left[E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)+\left(1+\frac{E_0}{E_1}\right)\left[1-E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)\right]\right] \qquad (۶۱)$$

همچنین به طرز مشابه برای کرنش‌های عرضی حاصل می‌شود:

$$\gamma_{xz}(x,y,t)=\frac{16p_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}g(z)\left(\frac{n}{b}\right)\frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn\left[\frac{D\pi^4}{84}k^2+\frac{5Gh\pi^2}{6}k\right]}\left[E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)+\left(1+\frac{E_0}{E_1}\right)\left[1-E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)\right]\right] \qquad (۶۲)$$

$$\gamma_{yz}(x,y,t)=\frac{16p_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}g(z)\left(\frac{m}{a}\right)\frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn\left[\frac{D\pi^4}{84}k^2+\frac{5Gh\pi^2}{6}k\right]}\left[E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)+\left(1+\frac{E_0}{E_1}\right)\left[1-E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1^\alpha}\right)\right]\right] \qquad (۶۳)$$

روابط گشتاورهای خمشی و پیچشی به علت ثابت‌بودن نیروی گسترده وابسته به زمان نخواهند شد و در صورت بازنویسی روابط (۳۷) و (۴۲) مشاهده می‌شود که با ساده‌شدن $D(s)$ عبارت زمان‌مند حذف شده و روابط گشتاور بدون وابستگی به زمان به دست خواهند آمد.

۳-تحلیل و نتایج

در این بخش برای بررسی صحت روابط حاصل از پژوهش صورت‌گرفته، به حل یک مثال از پژوهش انجام‌شده توسط وانگ

1 Mittag-Leffler function

و تسای [۱۰] که از تئوری مرتبه اول و روش المان محدود برای تحلیل ورق ویسکوالاستیک استفاده کرده‌اند پرداخته شده است. به این منظور یک ورق مستطیل شکل به ابعاد ۱۰×۱۰ متر و ضخامت ۱ متر، دارای چهار تکیه‌گاه ساده در چهار طرف، تحت بارگذاری گسترده یکنواخت به میزان ۱۰ N/m^2 در نظر گرفته می‌شود. مشخصات مادی ورق در رابطه زیر مشخص شده است.

$$\begin{aligned} E_0 &= 9.8\times10^7\,N/m^2 \\ E_1 &= 2.45\times10^7\,N/m^2 \\ \upsilon &= 0.35 \\ \eta &= 2.744\times10^8\,Ns/m^2 \end{aligned} \qquad (۶۴)$$

در شکل ۳ تاریخچه زمانی خیز مرکز صفحه میانی ورق با درنظرگرفتن مرتبه کسری (α) صفر و یک بر مبنای تئوری دومتغیره و کلاسیک با نتایج موجود در مرجع [۱۰] مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌گردد، نتایج به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی بسیار نزدیک به نتیجه مرجع بوده و از دقت مطلوبی برخوردار است، در حالی که تئوری کلاسیک به علت درنظرنگرفتن اثرات برشی دارای خطای بیشتری می‌باشد.

در شکل ۴ نمودارهای خیز مرکز ورق بر حسب زمان با مقدار α های مختلف با درنظرگرفتن دو تئوری کلاسیک و دو متغیره مشاهده می‌گردد که α مرتبه مشتق کسری را نشان می‌دهد. با درنظرگرفتن مقادیر $\alpha=0$ و $\alpha=1$ نتایج به ترتیب مربوط به ورق الاستیک و ویسکوالاستیک استاندارد خواهند شد. با توجه به این شکل، تغییر

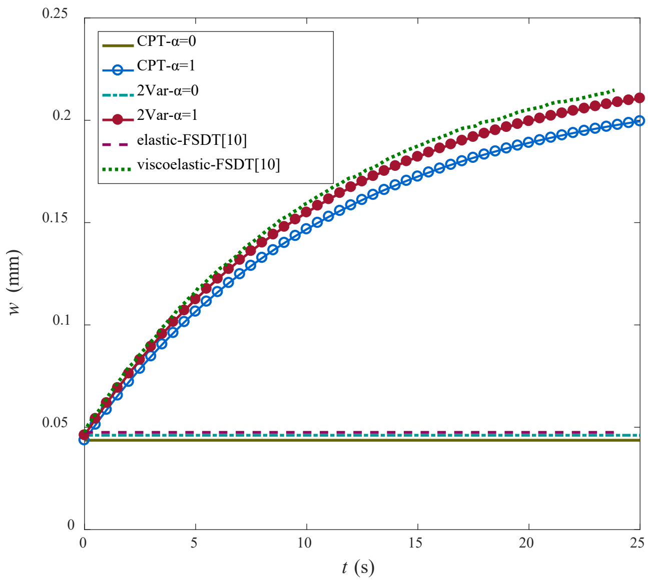
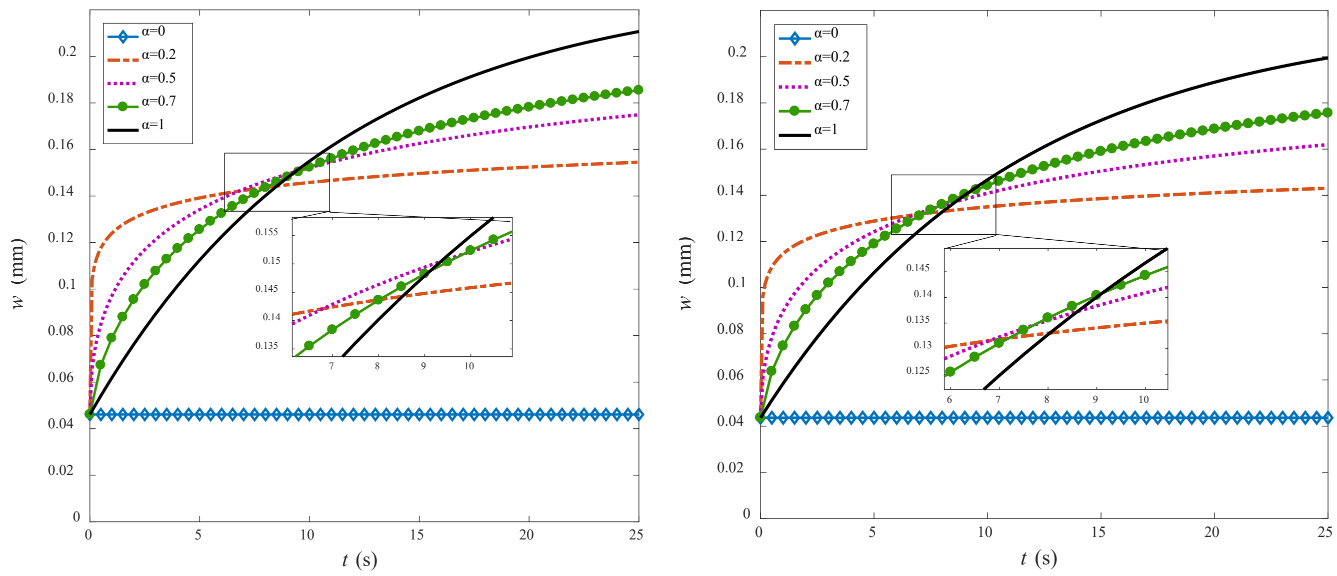


Fig. 3. Comparison of the deflection results obtained by the classical plate theory and two-variable plate theory in elastic and viscoelastic cases.

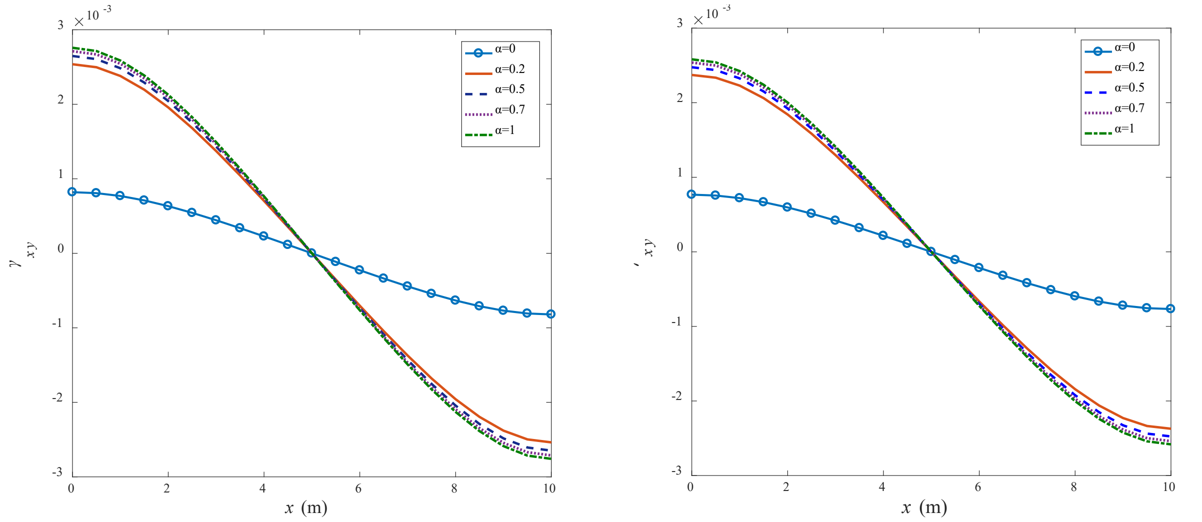
شکل ۳. مقایسه نتایج خیز با استفاده از تئوری کلاسیک و دومتغیره در دو حالت الاستیک و ویسکوالاستیک



(ب) (الف)

Fig. 4. Comparison of the time history of the central deflection of the plate with different α using a) Classical theory and b) Two-variable plate theory.

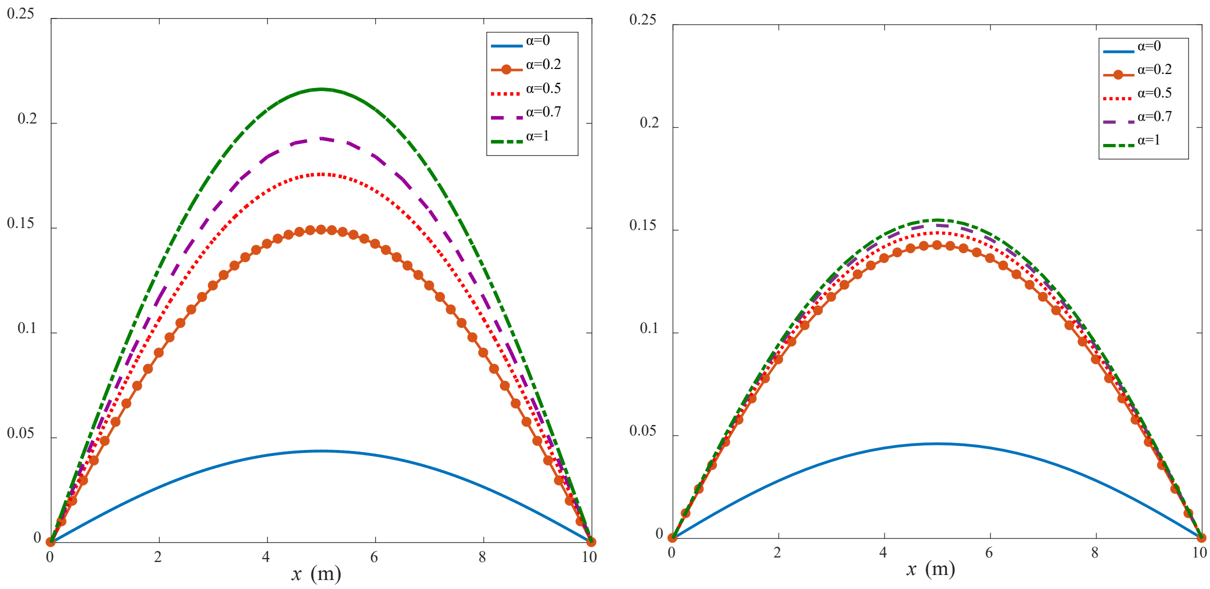
شکل ۴. مقایسه تاریخچه زمانی خیز مرکز ورق با αهای مختلف الف) تئوری کلاسیک ب) تئوری دو متغیره



(ب) (الف)

Fig. 5. Comparison of the in-plane strain γ_{xy} of the plate with different α using a) Classical theory and b) Two-variable plate theory (*t*=10s).

شکل ۵. مقایسه کرنش صفحه‌ای γ_{xy} با αهای مختلف در زمان ۱۰ ثانیه الف) تئوری کلاسیک ب) تئوری دومتغیره



(ب) (الف)

Fig. 6. The plate deflection considering the classical plate theory and different α, a) *t*=10s and b) *t*=50s.

شکل ۶. مقایسه خیز ورق با تئوری کلاسیک و αهای مختلف در زمان‌های الف) ۱۰ و ب) ۵۰ ثانیه

مقدار مرتبه کسری تأثیری در مقدار اولیه خیز در هر تئوری ندارد. همچنین می‌توان ملاحظه کرد که برای مقدار αهای کوچکتر نمودار در ابتدا دارای شیب بیشتری بوده و با گذشت زمان به یک مقدار حدی میل می‌کند، در حالی که برای αهای بزرگتر تغییرات شیب روند متعادل‌تری دارد و نرخ تغییر شیب و وابستگی تغییر مکان نسبت به زمان کندتر می‌باشد. بدین معناکه αهای کوچکتر معرف ماده با خاصیت الاستیسیته بیشتر و ماده با αهای بزرگتر نشان دهنده ماده با خاصیت میرایی بزرگتر می‌باشد که رفتار آن وابستگی بیشتری به

زمان دارد.

در شکل ۵ تغییرات کرنش صفحه‌ای γ_{xy} روی خط $y=b/4$ ورق مربعی دارای ضخامت $h=2\text{m}$ در زمان ۱۰ ثانیه، با مقدار α های مختلف با درنظرگرفتن دو تئوری کلاسیک و دومتغیره مشاهده می‌شود و α نشان‌دهنده مقدار مرتبه مشتق کسری می‌باشد. همانطور که از نمودارها مشاهده می‌گردد، تئوری ورق اصلاح‌شده دومتغیره به طور کلی مقادیر بزرگتری را برای این کرنش به دست آورده است، در حالی که تئوری کلاسیک با درنظرگرفتن اثرات تغییرشکل برشی دارای خطای بیشتری بوده و مقادیر کوچکتری را به دست آورده است. با درنظرگرفتن مرتبه کسری صفر ورق کاملا الاستیک می‌باشد و با افزایش مقدار مرتبه کسری خاصیت ویسکوزیته ورق بیشتر شده و لذا تغییرات کرنش (شیب نمودار) در طول ورق با افزایش مرتبه کسری افزایش می‌یابد. همچنین می‌توان مشاهده کرد که در این زمان، مقدار کرنش در مقادیر مرتبه کسری به هم نزدیک می‌باشند.

در شکل‌های ۶ و ۷ به مقایسه تغییر مکان نقطه مرکزی صفحه میانی ورق به ترتیب با تئوری‌های کلاسیک و دومتغیره، در زمان‌های ۱۰ و ۵۰ ثانیه با αهای مختلف پرداخته شده است. تئوری ورق اصلاح‌شده دومتغیره تغییر مکان بیشتری را برای ورق پیش‌بینی می‌کند در حالی که تئوری کلاسیک با درنظرگرفتن اثرات تغییر شکل برشی دارای خطای بیشتری بوده و مقدار خیز کمتری را به دست آورده است. با گذشت زمان افزایش خیز کند می‌شود، لذا اختلاف خیز کمی بین نمودار های شکل‌های ۶ و ۷ مشاهده می‌شود. با درنظرگرفتن مرتبه کسری صفر ورق کاملا الاستیک بوده و خیز نسبتا کمی دارد، با افزایش مقدار مرتبه کسری خاصیت ویسکوزیته ورق بیشتر شده و لذا خیز و تغییرات آن (شیب نمودار) با افزایش مرتبه کسری افزایش می‌یابد.

در شکل ۸ به مقایسه نمودار کرنش برشی γ_{xz} ورق مربعی با ضخامت $h=2\text{m}$ در دو زمان ۱۰ و ۵۰ ثانیه بر حسب فاصله از صفحه میانی، با مقدار αهای مختلف پرداخته شده است. از آنجا که در تئوری کلاسیک مقدار کرنش‌های برشی صفر فرض می‌شود، فقط به بررسی آن با استفاده از تئوری ورق اصلاح‌شده دومتغیره پرداخته شده است. در $\alpha=0$ ورق مورد بحث معادل با ورق الاستیک بوده و در هر دو زمان دارای کرنش برابری می‌باشد. با درنظرگرفتن مقادیر مرتبه کسری بزرگتر، ورق دارای خاصیت ویسکوزیته بیشتری شده و میزان کرنش برشی افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش زمان، به طور کلی مقدار کرنش برشی بزرگتر می‌گردد.

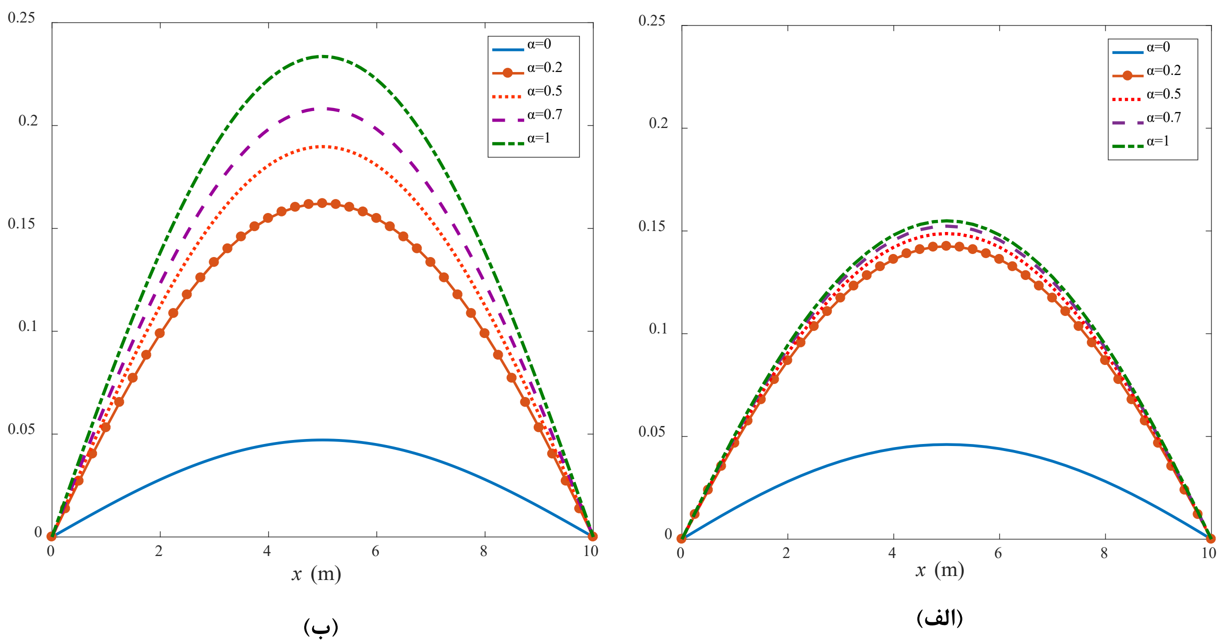
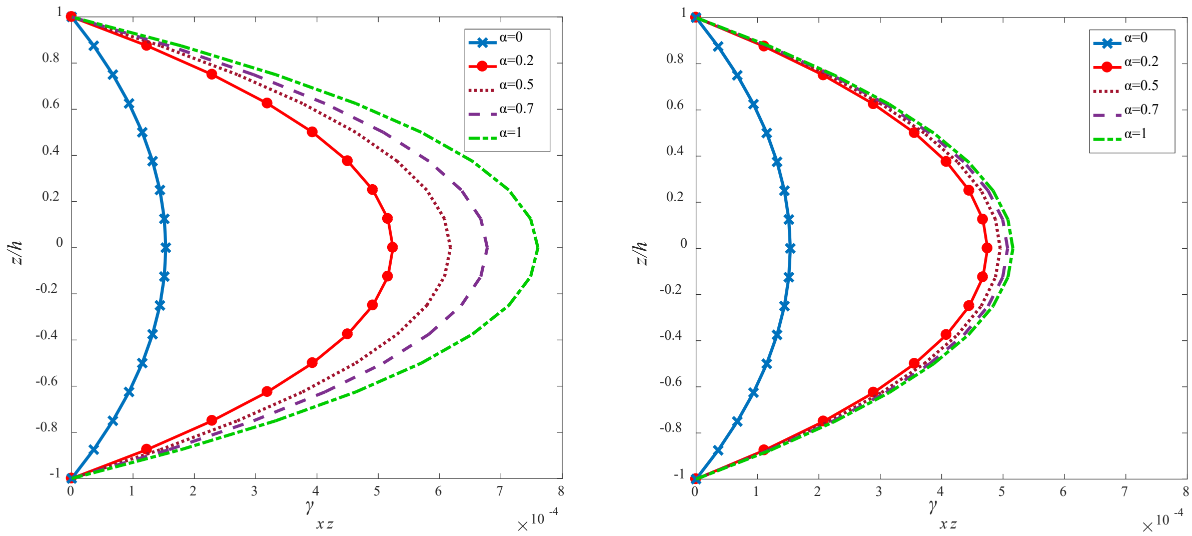


Fig. 7. The plate deflection considering the two-variable plate theory and different α, a) *t*=10s and b) *t*=50s.

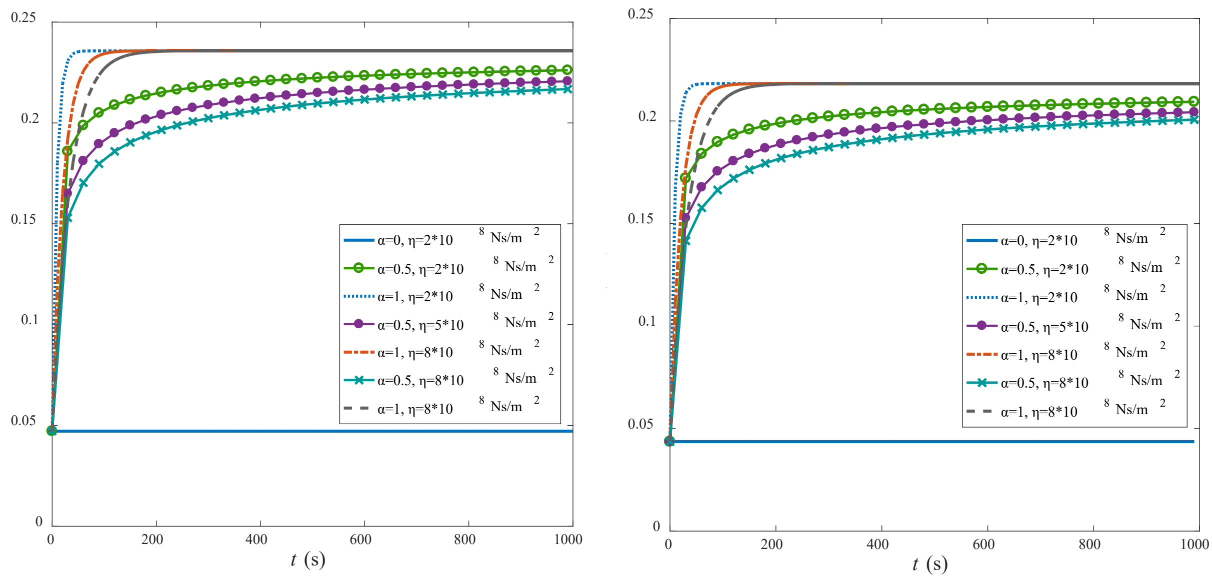
شکل ۷. مقایسه خیز ورق با تئوری دو متغیره و αهای مختلف در زمان‌های الف) ۱۰ و ب) ۵۰ ثانیه



(ب) (الف)

Fig. 8. The in-plane shear strain γ_{xy} considering the two-variable plate theory and different α, a) *t*=10s and b) *t*=50s.

شکل ۸. مقایسه کرنش برشی در راستای ضخامت ورق با αهای مختلف در زمان‌های الف) ۱۰ و ب) ۵۰ ثانیه



(ب) (الف)

Fig. 9. The plate deflection considering different α and η , a) Classical theory and b) Two-variable plate theory.

شکل ۹. مقایسه خیز ورق با ηها و αهای مختلف در مرکز ورق الف) تئوری کلاسیک ب) تئوری دومتغیره

همانطور که انتظار می‌رود تئوری ورق استفاده‌شده، کرنش برشی جانبی را به صورت سهمی در راستای ضخامت پیش بینی می‌کند.

در شکل ۹ به مقایسه خیز ورق با مقادیر ضریب میرایی و مرتبه کسری مختلف، با دو تئوری کلاسیک و دومتغیره، پرداخته شده است به طوریکه α مرتبه مشتق کسری و η ضریب میرایی ورق ویسکوالاستیک می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود برای

ورق ویسکوالاستیک استاندارد ($\alpha = 1$)، مقادیر خیز اولیه و خیز نهایی برای هر سه حالت یکسان است. در حالی که مدل کسری ورق ویسکوالاستیک مقادیر متفاوتی را برای خیز نهایی در این سه حالت پیش‌بینی می‌کند، به طوریکه ماده دارای ضریب میرایی بزرگتر خیز نهایی کوچکتری خواهد داشت. مشابه موارد پیشین در مقایسه با تئوری دومتغیره، تئوری کلاسیک مقدار خیز کمتری را برای ورق پیش‌بینی می‌کند. همچنین ملاحظه می‌گردد ورق با ضریب میرایی کوچکتر، زودتر به حد نهایی خیز می‌رسد، در حالی که هرچه ضریب میرایی بزرگتر باشد، زمان بیشتری لازم است تا ورق به خیز نهایی برسد.

به منظور اطمینان از نتایج به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی برای ورقهای ضخیم در جدول ۱ جابجایی عمودی نقطه مرکزی ورق

جدول ۱. مقایسه خیز ورق‌های ضخیم به‌دست‌آمده از تئوری دومتغیره و کلاسیک و مرجع [۲۹]

Table 1. Comparison of central deflection of a thick plate obtained by the two-variable and classical theories and Ref. [29]

a/h	خیز (mm)		
	تئوری کلاسیک	تئوری اصلاح شده	تئوری مرتبه اول [۲۹]
۵	۰/۰۱۵	۰/۰۱۹	۰/۰۲۰
۴	۰/۰۰۶	۰/۰۱۱	۰/۰۱۲
۲/۵	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۳۷

ویسکوالاستیک (با درنظرگرفتن مرتبه کسری (α) برابر با یک) با نسبت طول به ضخامت ۵، ۴ و ۲/۵ به‌دست‌آمده از تئوری دومتغیره اصلاح‌شده و کلاسیک با نتایج موجود در مرجع [۲۹]، مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌گردد تئوری مورد استفاده در این پژوهش از دقت خوبی برخوردار است و نتایج به نتایج تئوری مرتبه اول به کار رفته در مرجع نزدیک می‌باشد. برای جزئیات بیشتر در مورد این مسئله می‌توان به مرجع اشاره‌شده مراجعه نمود.

از آنجا که تئوری برشی ورق دومتغیره اصلاح‌شده برای ورق‌های ضخیم‌تر نیز پاسخ مناسب می‌دهد در این قسمت به بررسی نتایج برای مسئله ابتدایی مطرح‌شده در این بخش با نسبت طول به ضخامت ۵، ۱۰ و ۱۰۰ پرداخته شده است. رابطه زیر جهت بی‌بعدسازی خیز ارائه شده است.

$$\bar{w} = \frac{100Eh^3}{q_0 a^4} w \qquad (۶۵)$$

در جدول ۲ نتایج خیز بی‌بعد و کرنش برای ورق با مرتبه کسری صفر دارای نسبت‌های منظری و همچنین نسبت‌های طول به ضخامت مختلف ارائه شده است. با این مرتبه کسری، ورق رفتاری الاستیک دارد و خیز و کرنش به زمان بستگی نخواهند داشت. مشاهده می‌شود در ورق ضخیم با نسبت طول به ضخامت ۵ اختلاف بین نتایج تئوری کلاسیک و دو متغیره بیشترین است چراکه تئوری کلاسیک قابلیت پیش‌بینی اثرات تغییرشکل‌های برشی (که در ورقهای ضخیم اهمیت بالایی دارد) را ندارد. جهت صحت‌سنجی، مقادیر به‌دست‌آمده با نتایج

جدول ۲. مقادیر خیز و کرنش بی‌بعد ورق الاستیک دارای نسبت‌های منظری و نسبت‌های طول به ضخامت مختلف

Table 2. Dimensionless deflection and strain values for an elastic plate with different aspect ratios and length-to-thickness

		a/b=۰/۲		a/b=۰/۵		a/b=۱	
		خیز بی‌بعد	کرنش	خیز بی‌بعد	کرنش	خیز بی‌بعد	کرنش
a/h=۵	تئوری دومتغیره	۱۵/۷۷	۰/۰۰۱۷	۱۲/۴۸	۰/۰۰۱۳	۵/۳۵	۰/۰۰۰۵
	تئوری کلاسیک	۱۴/۲	۰/۰۰۱۶۸	۱۱/۰۶	۰/۰۰۱۲۷	۴/۴۴	۰/۰۰۰۴۹
a/h=۱۰	تئوری دومتغیره	۱۴/۵۹	۰/۰۰۶۷	۱۱/۴۱	۰/۰۰۵۲	۴/۶۷	۰/۰۰۲
	تئوری دومتغیره [۳۴]	-	-	۱۱/۴۱	-	-	-
	تئوری کلاسیک	۱۴/۱۹	۰/۰۰۶۷	۱۱/۰۶	۰/۰۰۵۲	۴/۴۴	۰/۰۰۲
	تئوری کلاسیک [۳۴]	-	-	۱۱/۰۶	-	-	-
a/h=۱۰۰	تئوری دومتغیره	۱۴/۲	۰/۶۶۸۹	۱۱/۰۶	۰/۵۱۸۲	۴/۴۴	۰/۱۹۷۹
	تئوری کلاسیک	۱۴/۱۹	۰/۶۶۸۹	۱۱/۰۶	۰/۵۱۸۲	۴/۴۴	۰/۱۹۷۹

خیز ورق الاستیک با نسبت منظری ۰/۵ و نسبت طول به ضخامت ۱۰ از مرجع [۳۴] مقایسه شده است و مشاهده می‌شود که نتایج در این حالت از دقت خوبی برخوردار است. در مورد ورق نازک با نسبت طول به ضخامت ۱۰۰ دو تئوری تطابق قابل‌قبولی با هم دارند. مشاهده می‌شود که با بزرگترشدن نسبت منظری، به طور کلی مقادیر خیز و کرنش کوچکتری را شاهد خواهیم بود.

در جدول ۳ و ۴ مقادیر بدون‌بعد خیز و کرنش برای ورق با نسبت منظری ۰/۲ و مرتبه کسری به ترتیب برابر با ۰/۵ و ۰/۷ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که با زیادشدن مرتبه کسری خصوصیت میرایی به تدریج زیاد می‌شود، لذا وابستگی به زمان تغییرات خیز و کرنش با افزایش مرتبه کسری افزایش پیدا کرده و همچنین مقادیر آن‌ها با افزایش زمان نیز افزایش می‌یابد. همچنین در ورق با نسبت طول به ضخامت ۵ بیشترین اختلاف بین نتایج دو تئوری مشاهده می‌گردد، زیرا ورق ضخیم بوده و تئوری کلاسیک برای این ورق‌ها دارای خطای بیشتری است. در ورق با نسبت طول به ضخامت ۱۰ اختلاف بین نتایج دو تئوری کاهش می‌یابد. در نتایج مربوط به ورق

جدول ۳. مقادیر خیز بی‌بعد و کرنش ورق دارای نسبت منظری a/b=۰/۲ و α=۰/۵ در زمان‌های مختلف

Table 3. Dimensionless deflection and strain values of a plate with a/b=0.2 and α=0.5 in different times.

		خیز بی‌بعد				کرنش			
		t=۰	t=۵	t=۱۰	t=۲۰	t=۰	t=۵	t=۱۰	t=۲۰
a/h=۵	تئوری دومتغیره	۱۵/۷۷	۴۴/۸۷	۵۰/۹	۵۶/۷۴	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۶۲
	تئوری کلاسیک	۱۴/۲	۴۰/۳۹	۴۵/۸۲	۵۱/۰۷	۰/۰۰۱۶۸	۰/۰۰۴۸	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۶
	درصد خطا	۹/۹۵	۹/۹۸	۹/۹۸	۹/۹۹	۱/۱۷	۲/۰۴	۶/۸۹	۳/۲۲
a/h=۱۰	تئوری دومتغیره	۱۴/۵۹	۴۱/۵۱	۴۷/۰۹	۵۲/۴۹	۰/۰۰۶۷	۰/۰۱۹۱	۰/۰۲۱۷	۰/۰۲۴۲
	تئوری کلاسیک	۱۴/۱۹	۴۰/۳۹	۴۵/۸۲	۵۱/۰۷	۰/۰۰۶۷	۰/۰۱۹	۰/۰۲۱۶	۰/۰۲۴۱
	درصد خطا	۲/۷۴	۲/۷	۲/۷	۲/۷	۰	۰/۵۲	۰/۴۶	۰/۴۱
a/h=۱۰۰	تئوری دومتغیره	۱۴/۲	۴۰/۴	۴۵/۸۳	۵۱/۰۹	۰/۶۶۸۹	۱/۹۰۳۲	۲/۱۵۸۹	۲/۴۰۶۵
	تئوری کلاسیک	۱۴/۲	۴۰/۳۹	۴۵/۸۲	۵۱/۰۷	۰/۶۶۸۹	۱/۹۰۳۳	۲/۱۵۹	۲/۴۰۶۶
	درصد خطا	۰	۰/۰۲۵	۰/۰۲۲	۰/۰۳۹	۰	-۰/۰۰۵	-۰/۰۰۵	-۰/۰۰۵

جدول ۴: مقادیر خیز بی‌بعد و کرنش ورق دارای نسبت منظری a/b=۰/۲ و α=۰/۷ در زمان‌های مختلف

Table 4. Dimensionless deflection and strain values of a plate with a/b=0.2 and α=0.7 in different times.

		خیز بی‌بعد				کرنش			
		t=۰	t=۵	t=۱۰	t=۲۰	t=۰	t=۵	t=۱۰	t=۲۰
a/h=۵	تئوری دومتغیره	۱۵/۷۷	۴۲/۹۷	۵۲/۱۳	۶۰/۹۶	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۴۷	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۶۷
	تئوری کلاسیک	۱۴/۲	۳۸/۶۸	۴۶/۹۳	۵۴/۸۷	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۵۵	۰/۰۰۶۵
	درصد خطا	۹/۹۵	۹/۹۸	۹/۹۷	۹/۹۹	۰	۲/۱۳	۳/۵۱	۲/۹۸
a/h=۱۰	تئوری دومتغیره	۱۴/۵۹	۳۹/۷۵	۴۸/۲۳	۵۶/۳۹	۰/۰۰۶۷	۰/۰۱۸۳	۰/۰۲۲۲	۰/۰۲۶
	تئوری کلاسیک	۱۴/۱۹	۳۸/۶۸	۴۶/۹۳	۵۴/۸۷	۰/۰۰۶۷	۰/۰۱۸۲	۰/۰۲۲۱	۰/۰۲۵۹
	درصد خطا	۲/۷۴	۲/۶۹	۲/۷	۲/۶۹	۰	۰/۵۵	۰/۴۵	۰/۳۸
a/h=۱۰۰	تئوری دومتغیره	۱۴/۲	۳۸/۶۹	۴۶/۹۴	۵۴/۸۸	۰/۶۶۸۹	۱/۸۲۲۴	۲/۲۱۱۲	۲/۵۸۵۳
	تئوری کلاسیک	۱۴/۱۹	۳۸/۶۸	۴۶/۹۳	۵۴/۸۷	۰/۶۶۸۹	۱/۸۲۲۵	۲/۲۱۱۳	۲/۵۸۵۴
	درصد خطا	۰/۰۷	۰/۰۲۶	۰/۰۲۱	۰/۰۱۸	۰	-۰/۰۰۵	-۰/۰۰۴	-۰/۰۰۳۸

جدول ۵. مقادیر خیز بی‌بعد و کرنش ورق دارای نسبت منظری ۰/۵=*a/b* و ۰/۵=α در زمان‌های مختلف

Table 5. Dimensionless deflection and strain values of a plate with *a*/*b*=0.5 and α=0.5 in different times.

		خیز بی‌بعد				کرنش			
		t=۰	t=۵	t=۱۰	t=۲۰	t=۰	t=۵	t=۱۰	t=۲۰
a/h=۵	تئوری دومتغیره	۱۲/۴۸	۵۳/۵۲	۴۰/۲۹	۴۴/۹۲	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۴۸
	تئوری کلاسیک	۱۱/۰۶	۳۱/۴۷	۳۵/۷	۳۹/۸	/۰۰۱۲۷	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۴۷
	درصد خطا	۱۱/۳۸	۴۱/۲	۱۱/۳۹	۱۱/۴	۲/۳۱	۲/۶۳	۲/۳۲	۲/۰۸
a/h=۱۰	تئوری دومتغیره	۱۱/۴۱	۳۲/۴۹	۳۶/۸۵	۴۱/۰۸	۰/۰۰۵۲	۰/۰۱۴۸	۰/۰۱۶۸	۰/۰۱۸۷
	تئوری کلاسیک	۱۱/۰۶	۳۱/۴۷	۳۵/۷	۳۹/۸	۰/۰۰۵۲	۰/۰۱۴۷	۰/۰۱۶۷	۰/۰۱۸۶
	درصد خطا	۳/۰۷	۳/۱۴	۳/۱۲	۳/۱۲	۰	۰/۶۷	۰/۵۹	۰/۵۳
a/h=۱۰۰	تئوری دومتغیره	۱۱/۰۶	۳۱/۴۸	۳۵/۷۱	۳۹/۸۱	۰/۵۱۸۲	۱/۴۷۴۵	۱/۶۷۲۵	۱/۸۶۴۴
	تئوری کلاسیک	۱۱/۰۶	۳۱/۴۷	۳۵/۷	۳۹/۸	۰/۵۱۸۲	۱/۴۷۴۵	۱/۶۷۲۶	۱/۸۶۴۵
	درصد خطا	۰	۰/۰۳۲	۰/۰۲۸	۰/۰۲۵	۰	۰	-۰/۰۰۶	-۰/۰۰۵

جدول ۶. مقادیر خیز بی‌بعد و کرنش ورق دارای نسبت منظری ۰/۵=*a/b* و ۰/۷=α در زمان‌های مختلف

Table 6. Dimensionless deflection and strain values of a plate with *a*/*b*=0.5 and α=0.7 in different times

		خیز بی‌بعد				کرنش			
		t=۰	t=۵	t=۱۰	t=۲۰	t=۰	t=۵	t=۱۰	t=۲۰
a/h=۵	تئوری دومتغیره	۱۲/۴۸	۳۴/۰۱	۴۱/۲۷	۴۸/۲۵	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۴۴	۰/۰۰۵۲
	تئوری کلاسیک	۱۱/۰۶	۳۰/۱۴	۳۶/۵۷	۴۲/۷۵	۰/۰۰۱۲۷	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۵
	درصد خطا	۱۱/۳۸	۱۱/۳۸	۱۱/۳۹	۱۱/۴	۲/۳۱	۵/۴	۲/۲۷	۳/۸۵
a/h=۱۰	تئوری دومتغیره	۱۱/۴۱	۳۱/۱۱	۳۷/۷۴	۴۴/۱۳	۰/۰۰۵۲	۰/۰۱۴۲	۰/۰۱۷۲	۰/۰۲۰۱
	تئوری کلاسیک	۱۱/۰۶	۳۰/۱۴	۳۶/۵۷	۴۲/۷۵	۰/۰۰۵۲	۰/۰۱۴۱	۰/۰۱۷۱	۰/۰۲
	درصد خطا	۳/۰۷	۳/۱۲	۳/۱	۳/۱۳	۰	۰/۷	۰/۵۸	۰/۵
a/h=۱۰۰	تئوری دومتغیره	۱۱/۰۶	۳۰/۱۵	۳۶/۵۸	۴۲/۷۷	۰/۵۱۸۲	۱/۴۱۱۹	۱/۷۱۳۱	۲/۰۰۲۹
	تئوری کلاسیک	۱۱/۰۶	۳۰/۱۴	۳۶/۵۷	۴۲/۷۵	۰/۵۱۸۲	۱/۴۱۱۹	۱/۷۱۳۱	۲/۰۰۳
	درصد خطا	۰	۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۰۵	۰	۰	۰	-۰/۰۰۵

نازک کمترین اختلاف بین دو تئوری کلاسیک و دومتغیره مشاهده می‌شود. در نتایج ورق‌های ویسکوالاستیک اختلاف نتایج دو تئوری جهت مشاهده بهتر اختلاف و دقت تئوری‌ها به صورت درصد خطا با رابطه زیر ارائه شده است.

(۶۶) (نتیجه تئوری کلاسیک- نتیجه تئوری اصلاح‌شده) = درصد خطا
۱۰۰ * (نتیجه تئوری اصلاح شده) /

در جدول ۵ و ۶ مقادیر بدون‌بعد خیز و کرنش ورق دارای نسبت منظری ۰/۵ و مرتبه کسری به ترتیب برابر با ۰/۵ و ۰/۷ ارائه شده است. همانند قبل مشاهده می‌شود که با زیادشدن مرتبه کسری خصوصیت ویسکوزیته نیز افزایش یافته، بنابراین وابستگی به زمان تغییرات خیز و کرنش در آن‌ها با افزایش مرتبه کسری افزایش پیدا کرده و با افزایش زمان مقادیر آن‌ها افزایش می‌یابد. همچنین در ورق با نسبت طول به ضخامت ۵ نیز نتایج مشابهی مشاهده می‌گردد. می‌توان مشاهده کرد با افزایش نسبت منظری کاهش مقادیر به‌دست‌آمده خیز بدون بعد و کرنش، کاهش می‌یابد. در جدول ۷ و ۸ مقادیر بی‌بعد خیز و کرنش ورق دارای نسبت منظری ۱ و مرتبه کسری به ترتیب برابر با ۰/۵ و ۰/۷ ارائه شده است و مجدداً نتایج مشابهی مشاهده می‌گردد.

جدول ۷. مقادیر خیز بی‌بعد و کرنش ورق دارای نسبت منظری a/b=۱ و α=۰/۵ در زمان‌های مختلف
Table 7. Dimensionless deflection and strain values of a plate with a/b=1 and α=0.5 in different times.

کرنش				خیز بی‌بعد					
t=۲۰	t=۱۰	t=۵	t=۰	t=۲۰	t=۱۰	t=۵	t=۰		
۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۰۵	۱۹/۲۷	۱۷/۲۸	۱۵/۲۴	۵/۳۵	تئوری دومتغیره	a/h=۵
۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۰۴۹	۱۵/۹۶	۱۴/۳۲	۱۲/۶۲	۴/۴۴	تئوری کلاسیک	
۵/۲۶	۵/۸۸	۶/۶۷	۲	۱۷/۱۸	۱۷/۱۳	۱۷/۱۹	۱۷	درصد خطا	
۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۲	۱۶/۷۹	۱۵/۰۶	۱۳/۲۸	۴/۶۷	تئوری دومتغیره	a/h=۱۰
۰/۰۰۷۱	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۵۶	۰/۰۰۲	۱۵/۹۶	۱۴/۳۲	۱۲/۶۲	۴/۴۴	تئوری کلاسیک	
۱/۳۹	۱/۵۶	۱/۷۵	۰	۴/۹۴	۴/۹۱	۴/۹۷	۴/۹۲	درصد خطا	
۰/۷۱۱۹	۰/۶۳۸۷	۰/۵۶۳	۰/۱۹۷۹	۱۵/۹۷	۱۴/۳۲	۱۲/۶۳	۴/۴۴	تئوری دومتغیره	a/h=۱۰۰
۰/۷۱۲	۰/۶۳۸۸	۰/۵۶۳۱	۰/۱۹۷۹	۱۵/۹۶	۱۴/۳۲	۱۲/۶۲	۴/۴۴	تئوری کلاسیک	
-۰/۰۱۴	-۰/۰۱۶	-۰/۰۱۸	۰	۰/۰۶	۰	۰/۰۸	۰	درصد خطا	

جدول ۸. مقادیر خیز بی‌بعد و کرنش ورق دارای نسبت منظری a/b=۱ و α=۰/۷ در زمان‌های مختلف
Table 8. Dimensionless deflection and strain values of a plate with a/b=1 and α=0.7 in different times.

کرنش				خیز بی‌بعد					
t=۲۰	t=۱۰	t=۵	t=۰	t=۲۰	t=۱۰	t=۵	t=۰		
۰/۰۰۲	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۰۵۲	۲۰/۷	۱۷/۷	۱۴/۵۹	۵/۳۵	تئوری دومتغیره	a/h=۵
۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۰۴۹	۱۷/۱۵	۱۴/۶۶	۱۲/۰۹	۴/۴۴	تئوری کلاسیک	
۵	۵/۸۸	۵/۸۸	۵/۷۷	۱۷/۱۵	۱۷/۱۷	۱۷/۱۳	۱۷/۰۱	درصد خطا	
۰/۰۰۷۷	۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۲	۱۸/۰۳	۱۵/۴۳	۱۲/۷۱	۴/۶۷	تئوری دومتغیره	a/h=۱۰
۰/۰۰۷۶	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۲	۱۷/۱۵	۱۴/۶۶	۱۲/۰۹	۴/۴۴	تئوری کلاسیک	
۱/۳	۱/۵۱	۰	۰	۴/۸۸	۴/۹۹	۴/۸۸	۴/۹۲	درصد خطا	
۰/۷۶۴۸	۰/۶۵۴۱	۰/۵۳۹۱	۰/۱۹۷۹	۱۷/۱۵	۱۴/۶۷	۱۲/۰۹	۴/۴۴	تئوری دومتغیره	a/h=۱۰۰
۰/۷۶۴۹	۰/۶۵۴۲	۰/۵۳۹۲	۰/۱۹۷۹	۱۷/۱۵	۱۴/۶۶	۱۲/۰۹	۴/۴۴	تئوری کلاسیک	
-۰/۰۱۳	۰/۰۱۵	-۰/۰۱۸	۰	۰	۰/۰۷	۰	۰	درصد خطا	

می‌توان مشاهده کرد برای ورق مربعی کمترین مقدار خیز بدون‌بعد و کرنش بدست می‌آید.

۴-نتیجه‌گیری

به منظور حل معادلات حاکم بر ورق ویسکوالاستیک، طبق اصل تناظر، ابتدا مسئله الاستیک معادل آن از نظر هندسه ورق، شرایط مرزی و نیز نوع بارگذاری حل شد، سپس با استفاده از معادله تنش-کرنش و تبدیل لاپلاس، روابط سفتی خمشی و مدول برشی برحسب مشتقات کسری، در دامنه s به دست آمده و برای تعیین خیز و پاسخ خمشی ورق ویسکوالاستیک استفاده شده است. در این بین برای تبدیل روابط به روابط زمان‌مند از لاپلاس معکوس بهره گرفته شده است. گاهاً برای حل مسئله ورق ویسکوالاستیک مجبور به کاربرد تعداد پارامترهای زیادی می‌شویم که سرعت انجام محاسبات را کم و حجم آن را زیاد می‌کند، ولی در این مقاله با استفاده از یک مدل سه پارامتری و مشتقات کسری حجم محاسبات کاهش داده شده است. در نهایت با درنظرگرفتن ورق‌ها با نسبت‌های منظری، مرتبه کسری و ضخامت‌های مختلف تاثیر این پارامترها بر نتایج مورد بررسی قرار گرفت. از پژوهش انجام‌شده می‌توان نتیجه گرفت تئوری به‌کاررفته

علاوه بر ورق‌های نازک، برای ورق های ضخیم نیز نتایج مطلوبی ارائه می‌دهد. با استفاده از روش حسابان کسری و تعریف مشتق ریمان- لیوویل می‌توان حجم محاسبات را تا حد زیادی کم کرده و رفتار ویسکوالاستیک را به صورت واقعی‌تر شبیه‌سازی نمود. مشاهده می‌شود هرچه مرتبه مشتق کسری کوچکتر باشد، خاصیت میرایی کاهش می‌یابد و به علت کاهش رفتار خزشی، مقدار خیز و کرنش در ورق با سرعت بیشتری به مقدار نهایی خود نزدیک می‌گردد و بالعکس، هرچه مقدار مرتبه مشتق کسری بزرگتر باشد رفتار خزشی بیشتری مشاهده می‌شود و در نتیجه وابستگی به زمان در ورق بیشتر می‌شود و خیز و کرنش بیشتری در طول زمان اتفاق می‌افتد. از مقایسه و صحت‌سنجی نتایج به‌دست‌آمده با نتایج مراجع [۱۰, ۳۴] اولاً تفاوت‌های بین نتایج تئوری‌های کلاسیک و دو متغیره به خوبی مشاهده می‌گردد. ثانیاً می‌توان نتیجه گرفت روش به‌کاررفته و استفاده از رویکرد حسابان کسری و مشتقات مرتبه کسری دقت خوبی داشته و می‌توان از این روش برای تحلیل مسائل پیچیده‌تر استفاده نمود. همچنین روش پیشنهادی به علت استفاده از تعداد پارامترهای مجهول کمتر، می‌تواند سرعت حل مسایل را نیز افزایش دهد.

مراجع

[1] G.W. Leibniz, G.F.A. L'Hopital, Letter from Hanover, Germany, to G.F.A. L'Hopital, September 30, reprinted 1962, Olms verlag, Hildesheim, Germany, Mathematische Schriften, 2 (1962) 301-302.

[2] P. Nabonnand, L. Rollet, Les Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux Écoles polytechnique et normale, Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis, (2012) 1-10.

[3] B. Ross, The development of fractional calculus 1695–1900, Historia Mathematica, 4(1) (1977) 75-89.

[4] I. Podlubny, An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, 1999.

[5] A. Loverro, Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer, Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering, (2004) 1-28.

[6] G. Catania, S. Sorrentino, Fractional derivative linear models for describing the viscoelastic dynamic behaviour of polymeric beams, in: 24th Conference and Exposition on Structural Dynamics 2006, IMAC-XXIV, Society for Experimental Mechanics (SEM), 2006.

[7] M.Q. Tang, Y.P. Li, Equilibrium paths of a fractional order viscoelastic two-member truss, in: Advanced Materials Research, Trans Tech Publ, 2012, pp. 963-968.

[8] K. Lazopoulos, A. Lazopoulos, On fractional bending of beams, Archive of Applied Mechanics, 86(6) (2016) 1133-1145.

[9] M.F. Oskouie, R. Ansari, H. Rouhi, Bending analysis of functionally graded nanobeams based on the fractional nonlocal continuum theory by the variational Legendre spectral collocation method, Meccanica, 53(4-5) (2018) 1115-1130.

[10] Y. Wang, T. Tsai, Static and dynamic analysis of a viscoelastic plate by the finite element method, Applied Acoustics, 25(2) (1988) 77-94.

[11] S. Subramanian, Dynamic Stability of Viscoelastic Plates Subjected to Ramdomly Varying In-Plane Loads, in: Engineering Mechanics, ASCE, 1995, pp. 191-194.

[12] Y. Sun, H. Ma, Z. Gao, On the stability of anisotropic viscoelastic thin plates, Chinese Journal of Aeronautics, 10(1) (1997) 18-21.

[13] H. Hu, Y.-m. Fu, Nonlinear dynamics analysis of cracked rectangular viscoelastic plates, Journal of Central South University of Technology, 14(1) (2007) 336-341.

[14] J. Soukup, F. Valeš, J. Volek, J. Skočilas, Transient vibration of thin viscoelastic orthotropic plates, Acta Mechanica Sinica, 27(1) (2011) 98-107.

[15] A. Zenkour, H. El-Mekawy, Bending of inhomogeneous sandwich plates with viscoelastic cores, Journal of Vibroengineering, 16(7) (2014) 3260-3272.

[16] R. Kolahchi, A comparative study on the bending, vibration and buckling of viscoelastic sandwich nano-plates based on different nonlocal theories using DC, HDQ and DQ methods, Aerospace Science and Technology, 66 (2017) 235-248.

[17] Y.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, A.I. Krusser, To the

Structures, 50 (2013) 3505-3510.

[26] C.-C. Zhang, H.-H. Zhu, B. Shi, G.-X. Mei, Bending of a rectangular plate resting on a fractionalized Zener foundation, Structural Engineering and Mechanics, 52(6) (2014) 1069-1084.

[27] C. Zhang, H. Zhu, B. Shi, L. Liu, Theoretical investigation of interaction between a rectangular plate and fractional viscoelastic foundation, Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 6(4) (2014) 373-379.

[28] K. Lazopoulos, D. Karaoulanis, A. Lazopoulos, On fractional modelling of viscoelastic mechanical systems, Mechanics Research Communications, 78 (2016) 1-5.

[29] G. Tekin, F. Kadıoğlu, Viscoelastic behavior of shear-deformable plates, International Journal of Applied Mechanics, 9(06) (2017) 1750085.

[30] W. Cai, W. Chen, W. Xu, Fractional modeling of Pasternak-type viscoelastic foundation, Mechanics of Time-Dependent Materials, 21(1) (2017) 119-131.

[31] A. Zbiciak, W. Grzesikiewicz, Characteristics of fractional rheological models of asphalt-aggregate mixtures, Logistyka, (6) (2011).

[32] R.P. Shimpi, Refined plate theory and its variants, AIAA journal, 40(1) (2002) 137-146.

[33] H.F. Brinson, L.C. Brinson, Polymer engineering science and viscoelasticity, 2008.

[34] J. Rouzegar, R.A. Sharifpoor, Flexure of thick plates resting on elastic foundation using two-variable refined plate theory, Archive of Mechanical Engineering, 62(2) (2015) 181-203.

question on the correctness of fractional derivative models in dynamic problems of viscoelastic bodies, Mechanics Research Communications, 77 (2016) 44-49.

[18] N. Jafari, M. Azhari, Time-dependent static analysis of viscoelastic Mindlin plates by defining a time function, Mechanics of Time-Dependent Materials, (2019) 1-18.

[19] K. Adolfsson, M. Enelund, Fractional derivative viscoelasticity at large deformations, Nonlinear dynamics, 33(3) (2003) 301-321.

[20] Z. Xu, W. Chen, A fractional-order model on new experiments of linear viscoelastic creep of Hami Melon, Computers & Mathematics with Applications, 66(5) (2013) 677-681.

[21] R.L. Bagley, P.J. Torvik, Fractional calculus-a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, AIAA journal, 21(5) (1983) 741-748.

[22] L. Eldred, W. Baker, A. Palazotto, Numerical application of fractional derivative model constitutive relations for viscoelastic materials, Computers & structures, 60(6) (1996) 875-882.

[23] S. Park, Rheological modeling of viscoelastic passive dampers, in: Smart Structures and Materials 2001: Damping and Isolation, International Society for Optics and Photonics, 2001, pp. 343-354.

[24] M. Sasso, G. Palmieri, D. Amodio, Application of fractional derivatives models to time-dependent materials, in: Time Dependent Constitutive Behavior and Fracture/ Failure Processes, Volume 3, Springer, 2011, pp. 213-221.

[25] M. Di Paola, R. Heuer, Fractional visco-elastic Euler–Bernoulli beam, International Journal of Solids and

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

E. Nayebi, J. Rouzegar, M.H. Heydari, Fractional calculus approach for bending of viscoelastic plate using two-variable refined plate theory, AmirKabir J. Mech Eng., 53(4) (2021) 2287-2308.

DOI: 10.22060/mej.2020.17695.6649

این صفحه عمداً خالی است