



Quantifying of Viscous Fingering Instability in Porous Media

M. R. Shahnazari*, A. Saberi

K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT: In this paper, nonlinear simulation of viscous fingering instability of miscible displacement involving nanofluid is investigated. Using vorticity and stream functions and the spectral method governing equations are obtained. Due to the fractality of fluid-fluid interface in instability phenomena, by using box counting method, its fractal dimension is calculated in different parameters such as deposition rate, mobility ratio and diffusion rates. The results show that increasing the deposition rate reduces the complexity of finger patterns and the diffusion rate of nanofluid has no effect on complexity of finger patterns while increasing the diffusion rate of displaced fluid has significant effect on patterns and makes it more complicated. The fractal analysis also shows that the effect of mobility ratio depends on the deposition rate. By considering deposition rate, although the mobility ratio has no effect on fractal dimension and effective time is constant and equal to 275, start time of instability is delayed by 25 units. It can be concluded that fractal analysis of viscous fingering phenomena can be considered as one of the instability characteristics.

Review History:

Received: Dec. 15, 2019
Revised: May. 27, 2020
Accepted: Jun. 20, 2020
Available Online: Jul. 02, 2020

Keywords:

Instability,
Viscous fingering,
Nanoparticle,
Fractal analysis,
Nonlinear simulation

1- Introduction

Viscous fingering instability is a natural phenomenon and takes place when a less viscous fluid is injected into a more viscous one leading to the formation of fingerlike patterns that affect the sweep efficiency of the miscible displacement process [1]. Examples of these processes are secondary and tertiary oil recovery, fixed bed regeneration in chemical processing, soil remediation and filtration. Due to the complexity in the appearance of fingerlike patterns, fractal analysis can be conducted. Fractal, introduced by Mandelbrot in 1963 [2] is a branch of geometry that explains complex, rough and random shapes and is close to several important geometrical concepts such as self-similarity, symmetry, periodicity and scale invariance.

Viscous fingering instability is a natural phenomenon and was first introduced by Hill [1] and thereafter many researchers have studied different aspects of instability. Injection of nanofluid in porous media is another aspect that has received very limited attention. Ghesmat et al. [3] conducted linear analysis of nanoparticles on the dynamics of miscible Hele-Shaw flows and Dastvareh and Azaiez numerically simulated instabilities of nanofluid flow displacements in porous media [4].

Based on the literature, quantity measuring parameters are limited to mixing length, contact area and sweep efficiency. In this paper, to characterize the complexity of fingers and their patterns, fractal analysis of viscous fingering is conducted.

2- Methodology

Fig. 1 shows a horizontal plate with width and length L used in this paper. It has been assumed that an incompressible fluid with viscosity μ_{a0} and initial concentration c_{a0} is injected from the left-hand side along x axis with constant velocity U and is attempted to displace the second fluid with viscosity μ_{b0} and initial concentration c_{b0} . Fluid (A) contains nanoparticles with the concentration c_{n0} and viscosity μ_{n0} . The equation of motion and governing equations are shown as follows:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla p = -\left(\frac{\mu}{K}\right) \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\frac{DC_a}{Dt} = \frac{\partial C_a}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C_a = \nabla \cdot D_a \nabla C_a \quad (3)$$

$$\frac{DC_b}{Dt} = \frac{\partial C_b}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C_b = \nabla \cdot D_b \nabla C_b \quad (4)$$

$$\frac{DC_n}{Dt} = \frac{\partial C_n}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C_n = \nabla \cdot D_c \nabla C_n - k_{dep} C_n \quad (5)$$

In this paper, we follow the numerical scheme described in [4]. The equations are transformed in Hartley space using the Hartley transform. A random noise of very small magnitude in the initial condition is added to the concentration at the interface in the y -direction, causes instability to start and fingers to grow.

*Corresponding author's email: Shahnazari@kntu.ac.ir



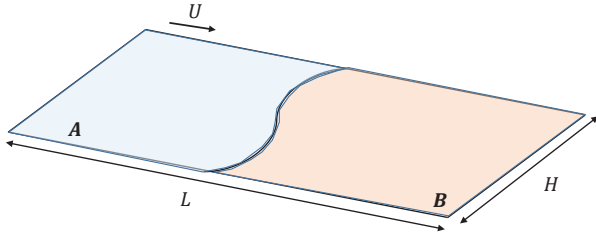


Fig. 1. Schematic geometry of the problem

Fractal dimension describes the irregular or fragmented shape of complex objects. In order to use fractal analysis, the concentration contours should all be converted to the fluid interface. The binary images are analyzed by the implementation of the box-counting method, one of the most widely used fractal dimensions.

3- Discussion and Result

In order to validate the numerical simulation, mixing length is compared with [5]. Fig. 2 demonstrates the variation

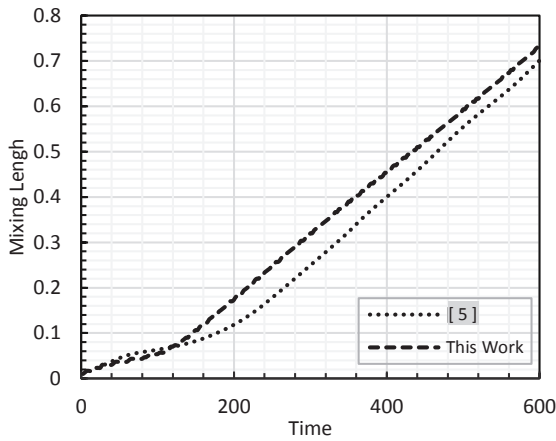


Fig. 2. Mixing length for $A_r = 2$, $\delta_b = 1$, $\delta_n = 1$, $R_n = 1$, $R_b = 6$, $R_a = 2$, $Da_{dep} = 0.01$ in comparison with [5]

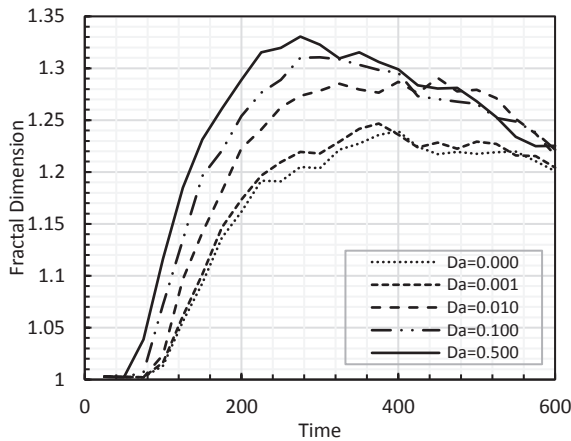


Fig. 4. Fractal dimension for $R_n = 1$, $\delta_b = 1$ and $\delta_n = 1$

of mixing length with time and the result shows good agreement.

Concentration contour of displacement fluid is superposed with variation of fractal dimension with time and is plotted in Fig. 3. It can be concluded from the figure that the fractal dimension of the image is affected by the shape and growth of the fingers.

Fig. 4 illustrated variation of fractal dimension with time for different deposition rates. It is clear that the fractal dimension increases and effective time range decrease as deposition rate is increased. It can be concluded that presence of nanoparticle deposition leads to simpler finger patterns.

Fig. 5 shows the effect of nanofluids viscosity ratio. According to this figure, the increase of $R_n H$ has no significant effect on fractal dimension and the effective time range remains constant. In other words, the decrease of nanofluids viscosity ratio only causes finger patterns to grow at earlier times. Further analysis for special case $Da_{dep} = 0$ shows that fractal dimension decreases as R_n is increased. It means that the presence of nanoparticle deposition causes the effect of R_n decrease with time.

Fig. 6 depicts the variation of fractal dimension with time for different nanoparticle diffusion rates. It can be seen δ_n has a slight effect on fractal dimension.

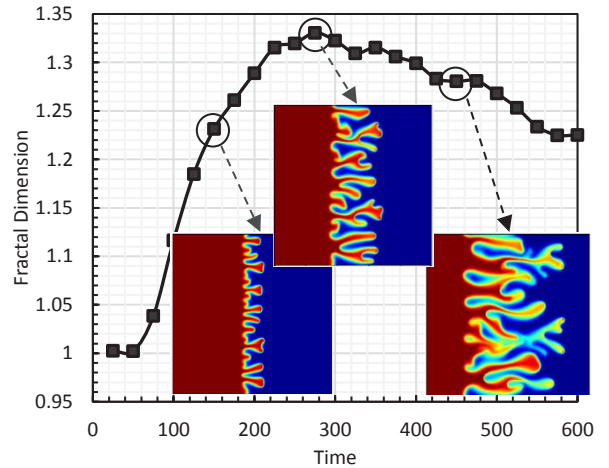


Fig. 3. Variation of fractal dimension with time

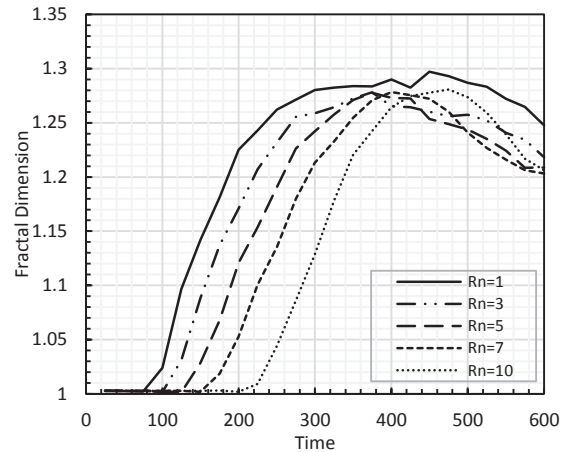


Fig. 5. Fractal dimension for $\delta_b = 1$, $\delta_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$

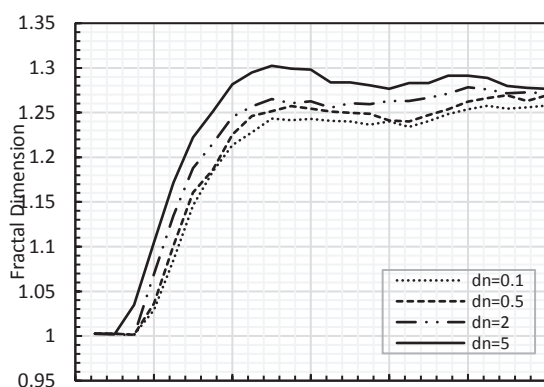


Fig. 6. Fractal dimension for $\delta_b = 1$, $R_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$

4. Conclusions

In this study, nonlinear simulation of the viscous fingering instability of a nanofluid displacement through a homogenous porous medium is conducted.

The study has focused on the fractal analysis of the mentioned instability. In addition, effect of different parameters on fractal dimension was investigated. The results show that by an increment in the value of the deposition rate, the fractal dimension and also effective time range increases. The variation of nanofluids viscosity ratio, in presence of

nanoparticle deposition, has no effect on fractal dimension. It also should be noted that the growth of fingers is delayed 25 units of time as nanofluid viscosity ratio increases 2 units. In the absence of nanoparticle deposition, fractal dimension decreases as R_n is increased. Also fractal analysis of viscous fingering instability in different values of nanoparticle and displaced fluid diffusion rate shows that although δ_n has a slight effect on fractal dimension, δ_b has significant effects. Increases in δ_b cause a decrease in fractal dimension which means less complicated finger patterns.

5. References

- [1] G.M. Homsy, Viscous fingering in porous media, Annual review of fluid mechanics, 19(1) (1987) 271-311.
- [2] B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature WH Freeman San Francisco USA, (1982).
- [3] K. Ghesmat, H. Hassanzadeh, J. Abedi, Z. Chen, Influence of nanoparticles on the dynamics of miscible Hele-Shaw flows, Journal of Applied Physics, 109(10) (2011) 104907.
- [4] B. Dastvareh, J. Azaiez, Instabilities of nanofluid flow displacements in porous media, Physics of Fluids, 29(4) (2017) 044101.
- [5] B. Dastvareh, Instabilities of Nanofluid Flow Displacements in Porous Media, University of Calgary, 2019.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. R. Shahnazari, A. Saberi, Quantifying of Viscous Fingering Instability in Porous Media, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(5) (2021) 681-684.

DOI: [10.22060/mej.2020.17544.6617](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17544.6617)





کمی سازی وقوع ناپایداری ویسکوز فینگرینگ جریان سیال در محیط متخلخل

محمدرضا شاه نظری*، علی صابری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

خلاصه: در این مقاله ناپایداری انگشتی لزج در فرایند جابجایی دو سیال قابل امتزاج با وجود ذرات نانو در یک محیط متخلخل همگن به صورت غیرخطی شبیه سازی و تحلیل فرکتالی شده است. با توجه به فرکتالی بودن مرز مشترک ناپایداری بین دو سیال، با معرفی بعد فرکتالی به عنوان مشخصه ناپایداری، برای پارامترهای موثر بر ناپایداری همچون ضریب رسوب، نسبت تحرک بین مولفه ها و ضرایب پخش، بعد فرکتالی در زمان های مختلف با استفاده از روش جعبه شمارنده محاسبه و در مورد آن بحث شده است. نتایج نشان می دهد که افزایش ضریب رسوب باعث کاهش پیچیدگی الگوی های انگشتی و بعد فرکتالی می شود و افزایش ضریب پخش ذرات نانو تاثیر چندانی بر بعد ندارد، این در حالی است که افزایش ضریب پخش سیال جابجاشونده به شدت بعد فرکتالی را افزایش و الگوها را پیچیده تر می کند. همچنین بررسی فرکتالی نشان می دهد در صورت وجود ضریب رسوب، افزایش مقدار نسبت تحرک سیال تاثیری بر پیچیدگی الگوها نداشته و مقدار زمان موثر ثابت و برابر ۲۷۵ باقی می ماند، اما هر دو واحد افزایش مقدار نسبت تحرک، ۲۵ واحد شروع ناپایداری را به تاخیر می اندازد. نتایج نشان می دهد که آنالیز فرکتالی می تواند در کنار سایر مشخصه ها، یکی از مواردی باشد که به تحلیل ناپایداری انگشتی کمک می کند.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۸/۰۹/۲۵
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۳/۰۷
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۳۱
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۴/۱۲

کلمات کلیدی:
ناپایداری
ویسکوز فینگرینگ
نانوذرات
فرکتال
شبیه سازی غیرخطی

۱- مقدمه

مقاله مرز مشترک در فرایند ناپایداری انگشتی لزج در فرایند جابجایی دو سیال با همراه با ذرات نانو به لحاظ مشخصه سازی با استفاده از بحث فرکتالی بررسی می شود.

کلمه فرکتال اولین بار توسط مندلبروت در سال ۱۹۷۵ معرفی شد. این کلمه که از یک کلمه لاتین به معنی شکسته^۱ نشات می گیرد، به فضایی اطلاق می شود که پیچیده تر از آن است که به سایر فضاهای شناخته شده هندسی تعلق یابد [۲]. به صورت عمومی از این کلمه زمانی استفاده می شود که هندسه مد نظر به صورت خود متشابه^۲ باشد، یعنی هر قسمتی یا بخشی از شکل، مشابه کل باشد. همچنین کلمه فرکتال را می توان به مفاهیمی همچون تشابه، تقارن، مقیاس و تناوب در شکل نیز گره زد. با توجه به اشکال متنوع، می توان فرکتال را به دو هندسه تک فرکتالی و چند فرکتالی تقسیم بندی کرد. بسیاری از هندسه های فرکتال دقیقا خود متشابه هستند اما شکل ها و فرایندهای طبیعی بسیاری هم در طبیعت وجود دارد که نمی توان

پدیده ناپایداری انگشتی لزج دارای اهمیت فراوانی در گستره بزرگی از علوم طبیعی و زیست محیطی می باشد که از جمله آنها می توان به کروماتوگرافی، چاه های ژئوترمال، سفره آب های زیرزمینی، دفع ضایعات و به ویژه در فرایند استخراج و بازیابی چاه های نفت اشاره کرد و تحقیقات گسترده ای را تا به امروز به خود اختصاص داده است. این پدیده هنگامی اتفاق می افتد که سیالی با ویسکوزیته کمتر باعث جابجایی سیالی با ویسکوزیته بیشتر شود، این نوع ناپایداری در مرز مشترک دو سیال رخ می دهد و به دلیل عدم توانایی سیال اولیه در جابجایی سیال ویسکوزتر، بجای جابجایی کل سیال، تنها مسیرهای باریکی را در آن به وجود می آورد، که به دلیل شباهت مرز مشترک دو سیال به انگشتان دست، به نام ناپایداری انگشتی لزج شناخته می شود [۱]. این مرز مشترک، به ویژه در حالت ناپایداری به لحاظ هندسی شامل انحنا و فراز و فرود غیر متناوب می گردد و با افزایش ناپایداری دارای پیچیدگی های ویژه می شود. به همین منظور در این

1 Fractus
2 Self-similarity

* نویسنده عهده دار مکاتبات: shahnazari@kntu.ac.ir



ناپایداری را شبیه‌سازی کردند و تحول عظیمی در مطالعه این نوع ناپایداری ایجاد نمودند. آنها با استفاده از این روش، الگوی‌های مختلف و جدیدی از انگشتی‌ها را مشاهده و ثبت کردند. بعد از این تلاش، توجه محققان بسیاری به سمت روش معرفی شده در مطالعه تن و حمصی [۲۰] متمرکز شد [۲۱، ۲۲]. مساله ناپایداری انگشتی‌شدن لزج در جابجایی دو سیال دارای جنبه‌های مختلفی است که محققان بسیاری به آن پرداخته‌اند. به عنوان مثال می‌توان با در نظرگیری تنش برشی در بین دو سیال [۲۳]، حالات مختلف ترکیب دوتایی نیوتونی و غیرنیوتونی دو سیال [۲۴]، حالات مختلف ناهمگنی محیط و در نظرگیری توابع مختلف [۲۲]، در نظرگیری جاذبه و تاثیر آن در جابجایی دو سیال [۲۵]، معرفی و استفاده از روش‌های عددی مختلف در حل مساله [۲۶]، تعیین تاثیر پارامترهای مختلف از جمله نسبت ابعاد، پکلت و نسبت ویسکوزیته [۲۷]، ارائه راهکارهای مختلف برای افزایش بازده جابجایی و کاهش انگشتی‌ها در فرایند ازدیاد استخراج نفت [۲۸] و همچنین در نظرگیری واکنش در حین فرایند جابجایی [۲۹] اشاره کرد که تحلیل مولتی‌فرکتالی آن توسط شاه‌نظری و همکاران [۳۰] ارائه شده‌است. یکی دیگر از مواردی که نسبت به سایر جنبه‌ها کمتر مورد توجه قرار گرفته، استفاده از نانوسیال در فرایند جابجایی در محیط متخلخل در ناپایداری است. امروزه استفاده از ذرات نانو بسیار کاربرد پیدا کرده و به دلیل تغییر خواص سیال پایه می‌تواند منجر به بهبود فرایندها شود. قسمت و همکاران [۳۱] ابتدا به صورت خطی مساله ناپایداری را همراه با نانوسیال بررسی کردند و در سال‌های بعد فرایند جابجایی نانوسیال توسط دستاورد و ازایز [۳۲] به صورت غیر خطی شبیه‌سازی شد. متر اندازه‌گیری کمی در عموم این مقالات محدود به سه پارامتر طول اختلاط، سطح تماس و بازدهی فرایند می‌باشد. تحلیل فرکتالی این پدیده نیز در کارهای تجربی زاکاد و همکاران [۳۳]، تانگ و وی [۳۴] در یک سلول هل‌شاو دایروی بررسی شده‌است.

با توجه به ادبیات موضوع می‌توان دریافت که مطالعات زیادی بر روی پدیده ناپایداری انگشتی‌شدن لزج صورت گرفته‌است، اما از منظر فرکتالی مطالعات چندانی را شاهد نیستیم، هرچند که در سال‌های اخیر تحقیقات قابل توجهی بر روی کاربردهای فرکتالی در حوزه‌های مختلفی انجام شده‌است. به همین منظور در این مقاله ضمن تحلیل غیرخطی پدیده ناپایداری انگشتی لزج در خلال جابجایی یک سیال

به صورت دقیق آنها را خود متشابه خواند، به عنوان مثال می‌توان از شکل شاخه‌های درخت، توزیع ابرها در آسمان، نمایی از رشته کوه‌ها، شکل برخی از سبزی‌ها، پراکندگی بارش، رشد جمعیت، جریان آشفته سیال، تغییرات اقتصادی در بازارهای بورس، مسائل پزشکی و غیره نام برد [۳-۷]. اما استفاده از هندسه فرکتالی و مفهوم آن در سال‌های اخیر تنها محدود به همین موارد نمی‌شود. یکی از کاربردهای آن را می‌توان در بحث‌های مهندسی [۸، ۹] مورد بررسی قرار داد که دارای کاربردهای متنوعی مانند استفاده از هندسه فرکتالی برای سطح لوله‌ها جهت انتقال حرارت بهتر در مبدل‌های حرارتی [۱۰]، بهبود حرکت جریان در پخش‌کننده‌های فرکتالی گاز [۱۱] و یا استفاده از پره‌هایی با الگوی‌های فرکتالی جهت بهبود فرایند اختلاط در کانال‌ها [۱۲] است.

یکی از مهمترین پارامترهای موجود در آنالیز فرکتالی تصاویر، بعد فرکتالی آن است. بعد فرکتالی می‌تواند به صورت عدد کسری باشد و با استفاده از این بعد می‌توان تا حدودی در مورد اندازه و پیچیدگی شکل صحبت کرد و به عبارت بهتر می‌توان گفت بعد فرکتال میزان چگالی یا درهم تنیدگی هندسه فرکتالی که فضا را اشغال کرده‌است را نشان می‌دهد [۲]. راه‌های متفاوتی برای محاسبه بعد فرکتال موجود است که از جمله آنها می‌توان به روش تشابهی^۱، هیوگچی^۲، هادزروف^۳ و جعبه‌شمارنده^۴ اشاره کرد [۱۳-۱۵]. هر کدام از این روش‌ها می‌تواند بنا به نوع مساله پاسخ‌های نسبتاً متفاوتی را ارائه کند. هر کدام از روش‌هایی که ذکر شد تنها زمانی قابل استفاده هستند که هندسه به صورت تک فرکتالی باشد. در مسائل تک‌فرکتالی تصاویر به صورت باینری^۵ هستند.

الگوی‌های انگشتی در مساله ناپایداری به صورت تصادفی ایجاد می‌شوند که دارای فراز و نشیب و پیچیدگی‌هایی می‌باشند که توسط تحلیل فرکتالی قابل بررسی هستند. مساله ناپایداری به صورت کلی برای اولین بار توسط هیل و همکاران [۱۶] مشاهده شد و بعد از آن تلاش‌های گسترده‌ای برای شناخت، بررسی و شبیه‌سازی این پدیده صورت گرفت [۱۷-۱۹]. اما برای اولین بار در سال ۱۹۸۸ با استفاده از روش‌های شبه‌طیفی و الگوریتم تفاضل محدود، تن و حمصی [۲۰]

- 1 Similarity Dimension
- 2 Higuchi methods
- 3 Hausdorff Dimension
- 4 Box-counting
- 5 Binary

که در روابط بالا $\mathbf{u} = (u, v)$ میدان سرعت، p فشار و D_i تانسور پراکنش همسانگرد است؛ همچنین K/μ تحرک سیال تعریف می‌شود که حاصل نسبت ضریب نفوذپذیری محیط K به ویسکوزیته سیال μ است. k_{dep} نیز بیانگر نرخ رسوب است که بیشتر در نظریه فیلتراسیون ذرات کلوئیدی کاربرد دارد. با توجه به ادبیات موضوع، می‌توان معادلات حاکم را با استفاده از پارامتر پراکنش بی‌بعد کرد. لذا در این روش، طول را با D_a/U ، زمان را با D_a/U^2 ، سرعت را با سرعت اولیه، ویسکوزیته را با استفاده از ویسکوزیته سیال جابجاکننده μ_a ، فشار را با $\mu_a D_a/K$ و در نهایت برای غلظت، از غلظت سیال استفاده کرد؛ لذا غلظت سیال یک و دو مقدار عددی یک می‌شود؛ همچنین برای اینکه بتوان تغییرات مرز را به سهولت مشاهده نمود، دستگاه مختصات را در حالت لاگرانژی در نظر گرفته و فرض می‌شود، دستگاه مختصات نیز با سرعت ثابت U در حال حرکت است؛ یعنی:

$$\mathbf{x}^* = (x^*, y^*) = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{it}^* \quad (6-1)$$

$$\mathbf{u}^* = (u^*, v^*) = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{i} \quad (6-2)$$

و در نهایت معادلات بی‌بعد به صورت زیر خواهند شد:

$$\nabla \mathbf{u}^* = 0 \quad (7)$$

$$\nabla p^* = -\mu^* (\mathbf{u}^* + \mathbf{i}) \quad (8)$$

$$\frac{\partial C_a^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial C_a^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C_a^*}{\partial y^*} \quad (9)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 C_a^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C_a^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

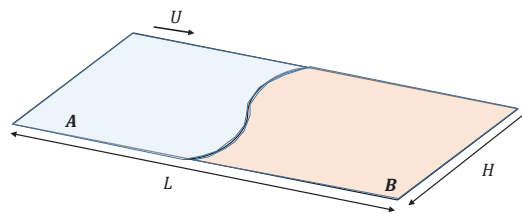
$$\frac{\partial C_b^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial C_b^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C_b^*}{\partial y^*} \quad (10)$$

$$= \delta_b \left(\frac{\partial^2 C_b^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C_b^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$\frac{\partial C_n^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial C_n^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C_n^*}{\partial y^*} \quad (11)$$

$$= \delta_n \left(\frac{\partial^2 C_n^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C_n^*}{\partial y^{*2}} \right) - Da_{dep} C_n^*$$

که در این معادلات $Da_{dep} = (k_{dep} D_a) / U^2$ عدد بی‌بعد نرخ رسوب است. همچنین δ_b و δ_n نرخ انتشار سیال دوم و همچنین



شکل ۱. تصویری الگو وار از هندسه مسئله

Fig. 1. Schematic geometry of the problem

توسط سیالی با ویسکوزیته کمتر و بررسی تاثیر مشخصات ذرات نانو محلول بر آن، از آنالیز فرکتالی به منظور تعیین نحوه تاثیر مشخصات فرایند بر ناپایداری استفاده شده است. به همین منظور با توجه به رابطه بعد فرکتالی مرز مشترک با میزان پیچیدگی و در نتیجه کیفیت ناپایداری، وابستگی تغییر کمیات بر تغییرات بعد فرکتالی بررسی شده است.

۲- مدل سازی

مطابق شکل ۱ در یک محیط متخلخل همگن دو بعدی به طول L و عرض H با ضریب تخلخل و گذردهی ثابت سیال اولیه‌ای در حال جابجایی سیال ثانویه در جهت طول صفحه می‌باشد. فرض می‌شود سیال A (جابجاکننده) دارای ویسکوزیته μ_{a0} و غلظت اولیه C_{a0} و سیال دوم B (جابجاشونده) نیز مقدار غلظت و ویسکوزیته آن برابر μ_{b0} و C_{b0} می‌باشد و سرعت اولیه آنها برابر U است. در این مساله فرض شده است که سیال جابجاکننده به صورت یکنواخت دارای ذرات نانو نیز می‌باشد که مشخصات آن به صورت C_{n0} و μ_{n0} در نظر گرفته می‌شود.

۱-۲ معادلات حاکم

معادلات حاکم بر مساله را می‌توان به صورت معادله پیوستگی، معادله داری و معادله جابجایی نفوذ در نظر گرفت، لذا داریم:

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla p = - \left(\frac{\mu}{K} \right) \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\frac{DC_a}{Dt} = \frac{\partial C_a}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C_a = \nabla \cdot D_a \nabla C_a \quad (3)$$

$$\frac{DC_b}{Dt} = \frac{\partial C_b}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C_b = \nabla \cdot D_b \nabla C_b \quad (4)$$

$$\frac{DC_n}{Dt} = \frac{\partial C_n}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C_n = \nabla \cdot D_c \nabla C_n - k_{dep} C_n \quad (5)$$

این رابطه همزمان شرط پیوستگی را ارضا می‌کند؛ با اجرای عملگر کرل بر رابطه (۸) و بکارگیری رابطه (۱۴)، ترم فشار حذف شده و رابطه دیگری برای گردابه بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \omega = & R_a \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial C_a}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + 1 \right) \left(\frac{\partial C_a}{\partial y} \right) \right) \\ & + R_b \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial C_b}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + 1 \right) \left(\frac{\partial C_b}{\partial y} \right) \right) \\ & + R_n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial C_n}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + 1 \right) \left(\frac{\partial C_n}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

همچنین روابط (۹) تا (۱۱) نیز به فرم زیر تبدیل خواهند شد:

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial C_a}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial C_a}{\partial y} \right) \right) = \nabla^2 C_a \quad (19)$$

$$\frac{\partial C_b}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial C_b}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial C_b}{\partial y} \right) \right) = \delta_b \nabla^2 C_b \quad (20)$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial C_n}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial C_n}{\partial y} \right) \right) = \quad (21)$$

$$\delta_n \nabla^2 C_n - Da_{dep} C_n$$

مجموعه معادلات (۱۷) تا (۲۱) تحت معادلات نهایی حاکم برای شبیه‌سازی مساله به روش طیفی، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳- بعد فرکتالی

مرز مشترک بین دو سیال، به ویژه در حالت ناپایداری به لحاظ هندسی شامل انحنا و فراز و فرود غیر متناوب می‌گردد و با افزایش ناپایداری دارای پیچیدگی‌های ویژه می‌شود. این موضوع امکان بررسی آن را در دیدگاه فرکتالی می‌دهد. همانطور که ذکر شد، تمامی فرکتال‌ها به صورت دقیق خود متشابه نیستند، برخی از آنها در قسمتی از جز می‌توانند به صورت تشابهی از کل باشند. بعد تشابهی تنها زمانی قابل استفاده است که شکل به صورت کامل خود متشابه باشد که در این صورت این مقدار را با D_s نمایش می‌دهند. در این حالت در هر مرحله یک جسم N بار خودش را با یک مقیاس کوچکتر $r < 1$ تولید می‌کند. لذا می‌توان با استفاده از قانون توانی رابطه بین

ذرات نانو با توجه به سیال جابجاکننده هستند. در ادامه برای راحتی در خوانش علامت ستاره از معادلات حذف می‌شود. شرایط مرزی زیر را نیز می‌توان برای حل مساله در نظر داشت:

$$at \ x=0, \ u=U, \ v=0, \quad (12-1)$$

$$C_a=1, \ C_b=0, \ C_n=np_0 \quad (12-2)$$

$$at \ x=L, \ u=U, \ v=0, \ C_a=0, \ C_b=1, \ C_n=0$$

$$(u, v, C_a, C_b, C_n)(x, 0, t) \quad (12-3)$$

$$= (u, v, C_a, C_b, C_n)(x, H, t)$$

شرایط مرزی نشان می‌دهد ذرات نانو تنها در سیال جابجاکننده وجود دارد و با گذر زمان با توجه به ضریب ترسیب کاهش خواهد یافت. همچنین برای تکمیل روابط باید رابطه‌ای را نیز برای وابستگی ویسکوزیته به غلظت نوشت. تاکنون روابط زیادی برای این کار مطرح شده‌است، که از رابطه (۱۳) استفاده می‌شود [۳۱]:

$$\mu = e^{(R_a C_a + R_b C_b + R_n C_n)} \quad (13)$$

که در آن‌ها R_a ، R_b و R_n لگاریتم نسبت تحرک هستند.

$$R_a = \ln \left(\frac{\mu_{a0}}{\bar{\mu}} \right), \ R_b = \ln \left(\frac{\mu_{b0}}{\bar{\mu}} \right), \ R_n = \ln \left(\frac{\mu_{n0}}{\bar{\mu}} \right). \quad (14)$$

جهت حذف ترم فشار از معادلات، از تابع جریان و گردابه برای شبیه‌سازی مساله استفاده شده‌است. با در نظر گرفتن تابع جریان و گردابه به صورت زیر:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (15)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (16)$$

و با جایگذاری رابطه (۱۵) در (۱۶)، می‌توان رابطه (۱۷) را نوشت:

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (17)$$

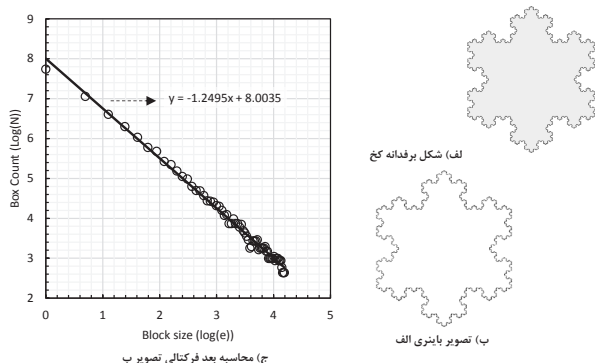
این پارامترها را به صورت زیر نوشت:

$$N = r^{-D_s} \quad (22)$$

یکی از روش‌های محاسبه بعد فرکتالی استفاده از روش مینکوفسکی-بولیگانده^۱، یا جعبه شمارنده است. این روش که به افتخار دانشمند آلمانی و فرانسوی در سال ۱۹۸۰ به این نام شناخته می‌شود، به دلیل بکارگیری مفهومی و قابل درک، یکی از پرکاربردترین روش‌ها در محاسبه بعد فرکتالی محسوب می‌شود [۳۵]. برای استفاده از روش جعبه‌شمارنده، با در نظرگیری یک محیط فرکتالی S ، ابتدا باید شکل به صورت شبکه‌بندی‌های مربعی در نظر گرفته شود. با تقسیم شکل به n خط افقی و m خط عمودی و مربعی در نظر گرفتن شبکه‌ها، طول هر المان برابر ε خواهد شد. در این روش تعداد خانه‌هایی که بخشی از تصویر مد نظر در آن قرار گرفته است شمارش می‌شود که مقدار آن برابر $N(\varepsilon)$ در نظر گرفته می‌شود. با کوچک‌تر کردن ε ، در هر مرحله تعداد خانه‌های پر شمارش می‌شود. سپس منحنی با محور افقی آن $\log(1/\varepsilon)$ و محور عمودی آن $\log(N(\varepsilon))$ قابل ترسیم است. مقدار شیب خط منحنی برابر با بعد فرکتالی خواهد بود. به عبارت بهتر می‌توان آن را به صورت زیر تعریف کرد که همان قانون توانی^۲ است [۳۵]:

$$Dim_{box} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)} \quad (23)$$

به منظور محاسبه بعد فرکتالی مساله ناپایداری از روش جعبه شمارنده استفاده شده است. همچنین برای بررسی کد نوشته شده جهت محاسبه بعد، ابتدا سه شکل فرکتالی برف‌دانه کخ، مثلث سرپینسکی و فرش سرپینسکی که به صورت تحلیلی بعد آن‌ها قابل محاسبه است مورد استفاده قرار می‌گیرند. شکل ۲-الف شماتیک خم فرکتالی و شکل ۲-ب تصویر باینری آن را با استفاده از یک مقیاس مناسب در پردازش تصویر نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که تصویر دارای ۲۸۰ پیکسل در عرض و طول می‌باشد و هر پیکسل بعد از باینری شدن دارای مقدار یک یا صفر است. جهت محاسبه



شکل ۲. آنالیز تصویر و محاسبه بعد فرکتالی

Fig. 2. Image processing and fractal dimension calculation

بعد فرکتالی، تصویر با مربع‌هایی با ابعاد ۱ در ۱ تا ۱۲۰ در ۱۲۰ پوشانده می‌شود که اگر پیکسل‌های داخل مربع خالی باشند، مربع عدد صفر و اگر دارای حداقل یک پیکسل پر باشد، عدد یک به آن تعلق می‌گیرد. شکل ۲-ج منحنی لگاریتمی تعداد جعبه‌های پر را به ازای اندازه جعبه نشان می‌دهد که شیب این منحنی بیانگر عدد بعد فرکتالی شکل است. مقدار تحلیلی بعد فرکتالی شکل مد نظر برابر ۱/۲۶۲ می‌باشد که مقدار محاسبه شده آن با روش عددی ۱/۲۴۹ است. جدول ۱ مقایسه نتایج تحلیلی و عددی را به نمایش می‌گذارد که نشان می‌دهد خطای محاسبات زیر ۲/۵ درصد است، لذا می‌توان از آن جهت بررسی و محاسبه بعد فرکتالی استفاده کرد.

۴- نتایج و بحث

در این مقاله شبکه‌های ۱۲۸×۱۲۸، ۲۵۶×۲۵۶ و همچنین ۵۱۲×۵۱۲ مورد بررسی قرار گرفت و با بررسی تعداد انگشتی‌ها و طول اختلاط در هر حالت و با توجه به ثابت بودن نسبت ابعاد و عدد پیکل در تمامی شبیه‌سازی‌ها از شبکه ۲۵۶×۲۵۶ استفاده شد. همچنین برای بررسی دقت شبیه‌سازی، برای طول اختلاط با مرجع [۳۶] مقایسه شد. شکل ۳ مقایسه نتایج حاصل از مقایسه طول اختلاط را به نمایش می‌گذارد.

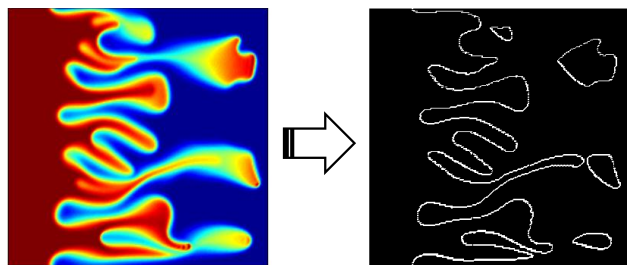
در ادامه مقاله تمامی نتایج مقادیر لگاریتم نسبت تحرک $\gamma = 7$ و $R_b = 3$ و R_a انتخاب شده‌اند تا ناپایداری همواره وجود داشته باشد. همچنین نسبت ابعاد $A_b = 1$ در نظر گرفته شده است. شکل ۴ نحوه چگونگی تبدیل کانتورهای غلظت به مرز مشترک جهت تحلیل فرکتالی را به نمایش می‌گذارد. برای انتخاب مرز ابتدا پیکسل‌هایی که شدتی در بازه‌ای مناسب دارند انتخاب و مرز با توجه به آن تعیین

1 Minkowski-Bouligand
2 Power law

جدول ۱. مقایسه روش عددی و تحلیلی

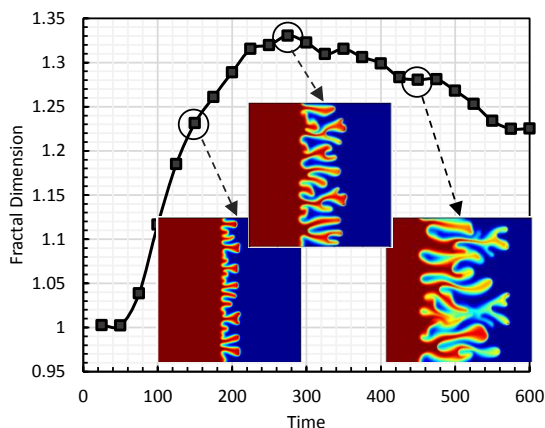
Table 1. Comparison between analytical and numerical method

خطا (درصد)	بعد فرکتالی (عددی)	بعد فرکتالی (تحلیلی)	شکل
2/52	1/545	1/585	مثلث سرپینسکی
1/14	1/871	1/892	فرش سرپینسکی
1/03	1/249	1/262	برفدانه کج



شکل ۴. نحوه تبدیل کانتور غلظت مساله ناپایداری به مرز مشترک دو سیال

Fig. 4. Converting concentration contour to fluids interface



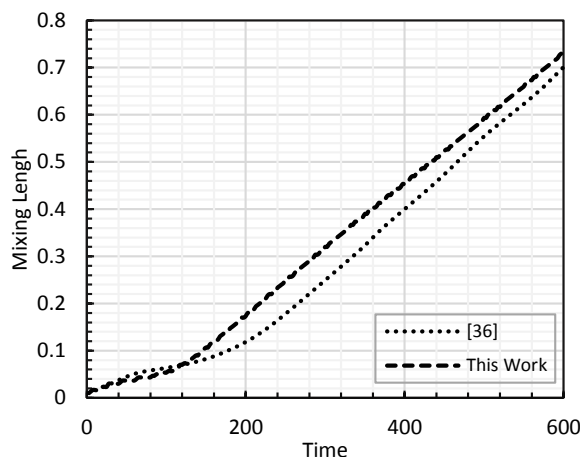
شکل ۵. بعد فرکتالی در زمان‌های مختلف

Fig. 5. Variation of fractal dimension with time

محو شدن و به هم آمیختگی می‌باشد. پدیده محو شدن باعث می‌شود انگشتی‌ها ناپدید شوند و پدیده به هم آمیختگی از کنارها نیز باعث ترکیب شاخه‌ها شده و از پیچیدگی آن می‌کاهد. کانتور غلظت در شکل ۵ در زمان ۴۵۰ و مقایسه آن با دو زمان دیگر به خوبی این مساله را نشان می‌دهد. در ادامه این مقاله فاصله زمانی بین بعد فرکتالی یک که شروع انگشتی‌ها است و بیشینه بعد فرکتالی که پایان ایجاد الگوی‌های پیچیده است، فاصله زمانی موثر نامیده می‌شود.

۴-۱ تاثیر ضریب ترسیب

ضریب ترسیب میزان رسوب ذرات نانو را نشان می‌دهد. با افزایش این ضریب انتظار می‌رود حجم بیشتری از نانوذرات رسوب کرده و تاثیرگذاری آن بر فرایند کاهش یابد. شکل ۶ کانتورهای غلظت سیال

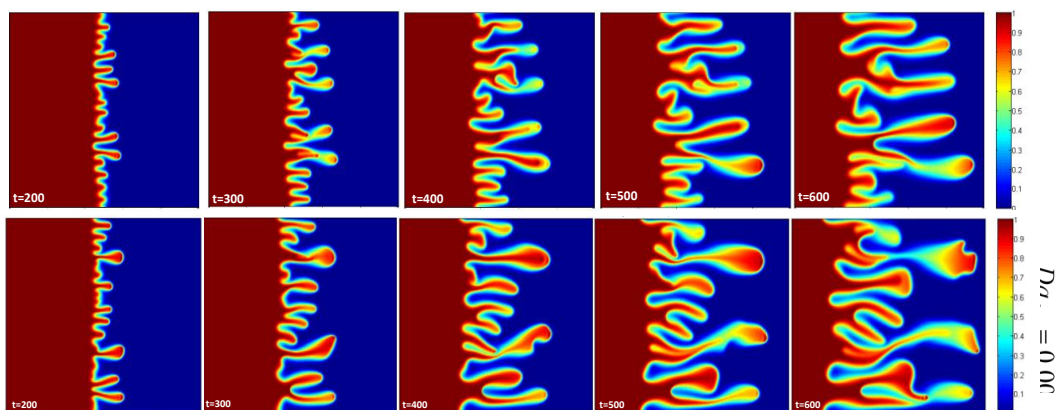


شکل ۳. مقایسه طول اختلاط به ازای شرایط $A_s = 2, \delta_s = 1, \delta_s = 1, R_s = 1, R_s = 6, R_s = 2$ و $Da_{sep} = 0.01$ با مرجع [۳۶]

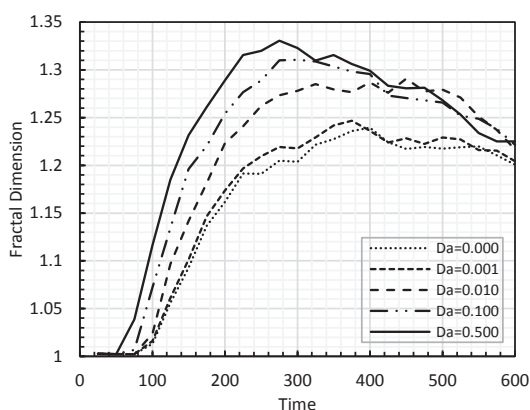
Fig. 3. Mixing length for $A_s = 2, \delta_s = 1, \delta_s = 1, R_s = 1, R_s = 6, R_s = 2$ and $Da_{sep} = 0.01$ in comparison with [36]

می‌شود. در این مقاله مقدار 0.35 برای غلظت برای تعیین مرز دو سیال انتخاب شده‌است.

برای درک بهتر چگونگی تغییرات بعد فرکتالی، شکل ۵ نمونه‌ای از بعد فرکتالی مرز مشترک بین دو سیال در فرایند جابجایی در محیط متخلخل را نشان می‌دهد. همچنین در سه زمان مختلف نیز کانتورهای غلظت در کنار آن ترسیم شده‌اند. با توجه به این منحنی می‌توان لحظه آغاز ناپایداری را شناسایی کرد، چرا که مرز مشترک از خط مستقیم (بعد فرکتالی ۱) شروع به ایجاد انگشتی‌هایی می‌کند. همانطور که در شکل نیز مشخص است تا زمان ۲۷۵، بعد فرکتالی با شیب زیادی در حال افزایش است، این در حالی است که از آن پس مقدار آن با شدت کمتری کاهش می‌یابد. با توجه به کانتورهای غلظت می‌توان دریافت تا آن زمان انگشتی‌ها در حال ایجاد الگوی‌های پیچیده‌ای هستند اما از آن زمان به بعد تنها به طول این الگوها اضافه شده و پیچیدگی جدیدی را پدید نمی‌آورند. افزایش طول بدنه انگشتی‌ها باعث کاهش بعد فرکتالی می‌شود و این به این دلیل است که طول بیشتر باعث می‌شود مرز مشترک به خطوط صاف و با پیچیدگی کمتر منتهی شود. یکی دیگر از مواردی که از این زمان به بعد باعث کاهش بعد فرکتالی مرز مشترک می‌شود ایجاد پدیده



شکل ۶. کانتور غلظت سیال جابجاکننده به ازای $R_n = 1$, $\delta_b = 1$, $\delta_n = 1$ و مقادیر مختلف عدد رسوب
Fig. 6. Contours of C_a for $R_n = 1$, $\delta_b = 1$, $\delta_n = 1$ and different deposition rate



شکل ۷. بعد فرکتالی به ازای $R_n = 1$, $\delta_b = 1$ و $\delta_n = 1$
Fig. 7. Fractal dimension for $R_n = 1$, $\delta_b = 1$ and $\delta_n = 1$

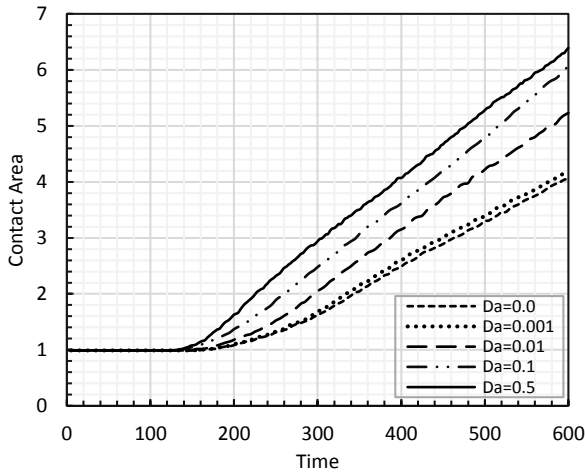
را تشکیل و سریعاً نیز این الگوها به علت زیاد شدن انگشتی‌ها با هم مخلوط شده و در بعضی شاخه‌ها نیز محو می‌شوند، لذا دیگر الگوی خاصی ایجاد نمی‌کنند. با استفاده از تحلیل‌های موجود می‌توان به این مساله اشاره کرد که افزایش عدد رسوب علاوه بر ایجاد تاخیر اندک در آغاز فرایند ناپایداری، از الگوی‌های پیچیده نیز جلوگیری می‌کند. برای مقایسه بهتر، دو مشخصه طول اختلاط و طول تماس مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای محاسبه طول تماس مجموعه نقاط دارای غلظت 0.35 نسبت به عرض صفحه در نظر گرفته می‌شود تا به عنوان مرز لحاظ شوند. همچنین برای طول اختلاط، طول انگشتی‌ها در میانگین غلظت عرضی نسبت به طول کل صفحه (Pe) ترسیم شده‌است، لذا عددی بین صفر و یک خواهد داشت. شکل ۸ و شکل ۹ این دو منحنی را نشان می‌دهد. همانطور که پیش‌بینی می‌شود افزایش عدد رسوب تاثیر زیادی بر سطح تماس داشته اما طول اختلاط را به میزان اندکی افزایش می‌دهد.

جابجاکننده را در زمان‌های مختلف و به ازای اعداد Da_{dep} متفاوت به نمایش می‌گذارد. در این شکل‌ها مقدار اغتشاش اولیه وارده به سیستم یکسان در نظر گرفته شده‌است. با توجه به شکل ۶ می‌توان گفت که با افزایش عدد رسوب ناپایداری افزایش می‌یابد. علت این امر را می‌توان به دلیل افزایش مقدار رسوب نسبت داد. به عبارت دیگر افزایش عدد Da_{dep} باعث کاهش مقدار حضور ذرات نانو شده و کاهش ذرات نانو نیز که تاثیر مستقیم بر کاهش ویسکوزیته سیال جابجاکننده دارد باعث افزایش ناپایداری می‌شود. به عنوان مثال در $Da_{dep} = 0$ انگشتی‌ها مسیر مستقیمی را طی می‌کنند و در بعضی زمان‌ها تنها الگوی بهم آمیختگی تک سویه دارند، اما با افزایش اندک مقدار ضریب ترسیب به عدد 0.01 ، حتی در زمان ۲۰۰ نیز می‌توان الگوی دوشاخه‌ای شدن را مشاهده کرد. همین روند برای $Da_{dep} = 0.1$ نیز برقرار است. دو مشخصه طول اختلاط و سطح تماس هر کدام به ترتیب نمایشگر طول پیشروی و طول انگشتی‌ها است. در این مقاله بعد فرکتالی به عنوان مشخصه‌ای جهت بررسی میزان پیچیدگی شکل انگشتی‌ها معرفی می‌شود. شکل ۷ بعد فرکتالی رشد انگشتی‌ها را در زمان به ازای پنج ضریب ترسیب مختلف نشان می‌دهد. با افزایش عدد رسوب، بعد فرکتالی آن همواره بیشتر می‌شود.

نکته دیگری که با توجه به بعد فرکتالی می‌توان به آن اشاره کرد این است که برای مقادیر بالای عدد رسوب فاصله زمانی موثر کوتاه‌تر از این فاصله برای اعداد رسوب کمتر است. مقدار فاصله زمانی موثر از مقدار ۲۱۵ برای بیشترین مقدار عدد رسوب شروع شده و تا ۳۲۵ برای کمترین عدد رسوب ادامه می‌یابد. علت این امر آن است که در اعداد رسوب بالا، انگشتی‌ها در همان لحظات اولیه الگوی‌های پیچیده

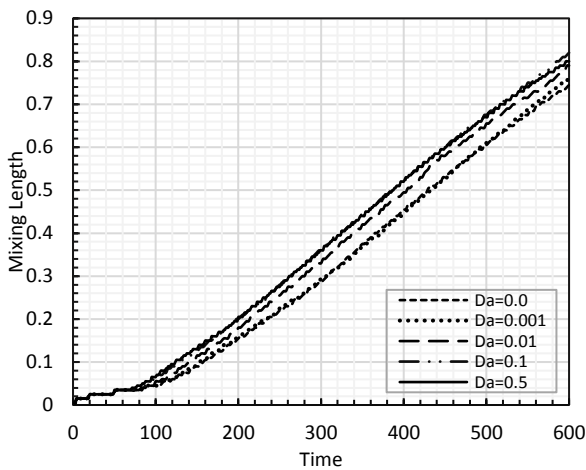
۲-۴ تاثیر عدد R_n

عدد R_n لگاریتم نسبت ویسکوزیته نانوذرات را نسبت به ویسکوزیته پایه نشان می‌دهد. افزایش مقدار آن به معنای افزایش ویسکوزیته نانوذرات می‌باشد که در مجموع ویسکوزیته سیال جابجاکننده را افزایش می‌دهد که انتظار می‌رود به پایدارتر شدن جریان کمک کند. کل ۱۰ مقایسه‌ای را با توجه به کانتورهای غلظت به ازای R_n مختلف به نمایش گذاشته‌است. در این شکل‌ها نیز اغتشاش اولیه مقدار ثابتی در نظر گرفته شده‌اند تا بتوان به لحاظ کیفی و کمی نیز الگوی‌های انگشتی را با یکدیگر مقایسه کرد. با توجه به شکل‌ها می‌توان اینطور گزارش کرد که افزایش مقدار R_n باعث کاهش تعداد الگوها شده و شکل‌های ساده‌تری را ایجاد می‌کند و در نتیجه ناپایداری کاهش می‌یابد. به عنوان مثال در زمان ۴۰۰ انگشتی در بالای صفحه در $R_n = 1$ چهار شاخه و در $R_n = 3$ سه شاخه و در $R_n = 5$ تنها دارای دو شاخه است که در حال گسترش می‌باشد. اما با بررسی فرکتالی مرز مشترک بین دو سیال در این حالات، می‌توان گفت که نتیجه برداشت شده از کانتورهای غلظت کامل نیست. با توجه به شکل ۱۱ مشخص است که تغییرات R_n تاثیر محسوسی در بیشینه بعد فرکتالی ندارد و تنها تغییر در زمان وقوع ناپایداری است. به عبارت دیگر تحلیل فرکتالی مرز مشترک نشان می‌دهد که بر خلاف نتایج ارائه شده، افزایش مقدار R_n باعث کاهش ناپایداری نمی‌شود، بلکه تنها باعث می‌شود ناپایداری در زمان‌های دیرتری آغاز شود. با توجه به منحنی می‌توان گفت فاصله زمانی موثر



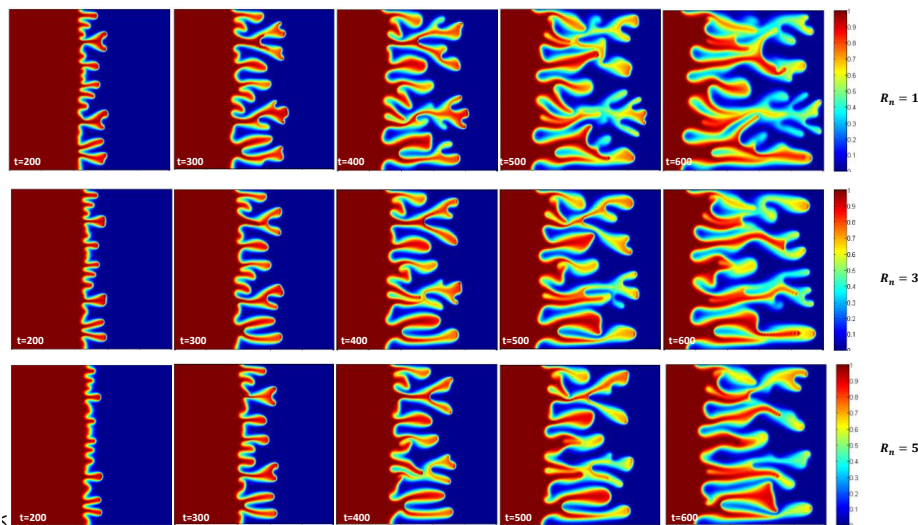
شکل ۸. مقایسه طول تماس به ازای $R_n = 1$ ، $\delta_b = 1$ و $\delta_n = 1$ و مقادیر مختلف Da_{dep}

Fig. 8. Contact area for, $R_n = 1$, $\delta_b = 1$ and $\delta_n = 1$ different Da_{dep}



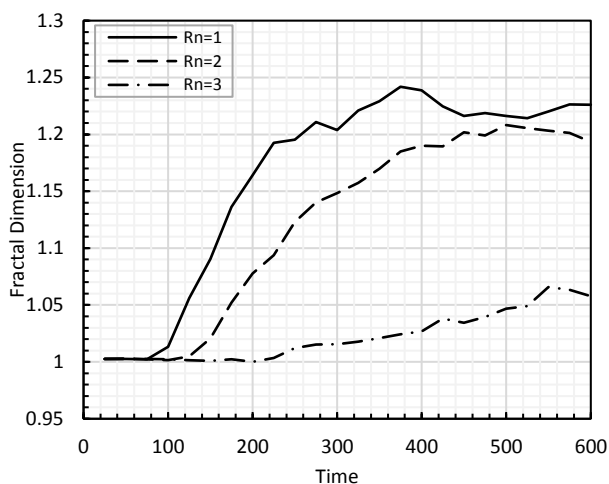
شکل ۹. مقایسه طول اختلاط به ازای $R_n = 1$ ، $\delta_b = 1$ و $\delta_n = 1$ و مقادیر مختلف Da_{dep}

Fig. 9. Mixing length for, $R_n = 1$, $\delta_b = 1$ and $\delta_n = 1$ different Da_{dep}

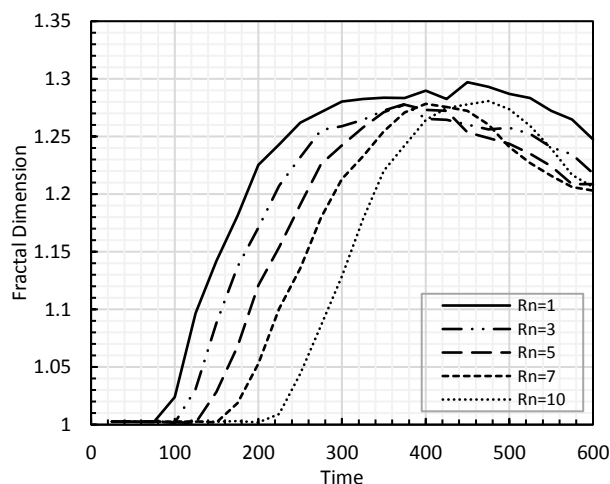


شکل ۱۰. کانتور غلظت سیال جابجاکننده به ازای $\delta_n = 1$ ، $\delta_b = 1$ و $Da_{dep} = 0.01$

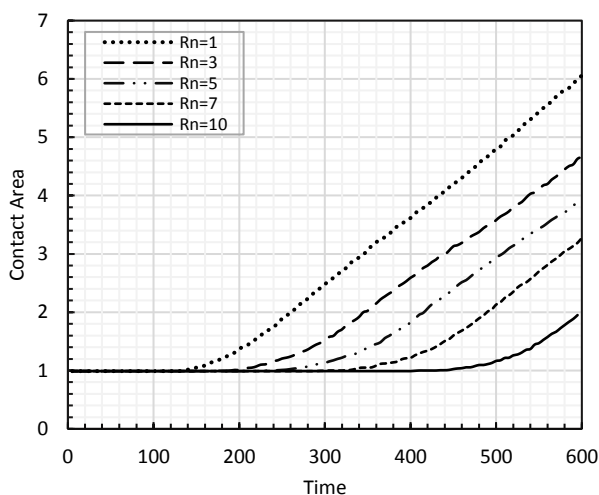
Fig. 10. Contours of c_n for $\delta_b = 1$, $\delta_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$



شکل ۱۲. بعد فرکتالی به ازای $\delta_b = 1$ ، $\delta_n = 1$ و $Da_{dep} = 0.0$
Fig. 12. Fractal dimension for $\delta_b = 1$, $\delta_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.0$



شکل ۱۱. بعد فرکتالی به ازای $\delta_b = 1$ ، $\delta_n = 1$ و $Da_{dep} = 0.01$
Fig. 11. Fractal dimension for $\delta_b = 1$, $\delta_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$



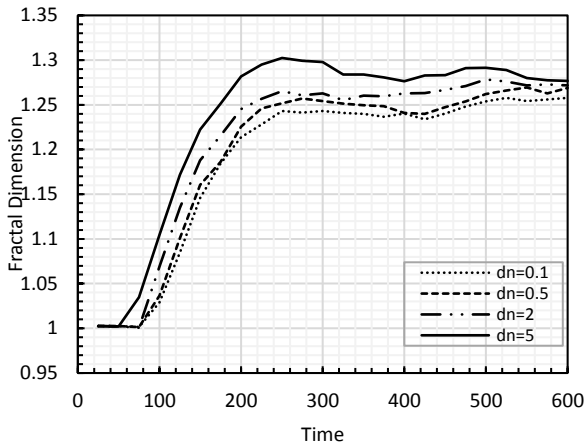
شکل ۱۳. سطح تماس به ازای $\delta_b = 1$ ، $\delta_n = 1$ و $Da_{dep} = 0.01$
Fig. 13. Contact area for $\delta_b = 1$, $\delta_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$

در تمامی این حالات با یکدیگر حدودا برابر و مساوی مقدار ۲۷۵ است. بررسی آنالیز فرکتالی نشان می‌دهد به ازای هر دو واحد تغییر در مقدار R_n ، ناپایداری به اندازه ۲۵ واحد زمانی به تاخیر می‌افتد. نکته قابل توجه دیگری که باید به آن اشاره کرد این است که به ازای تغییر پارامترهای دیگر، شکل و تعداد انگشتی‌ها متفاوت خواهد بود، اما در این حالت (تغییر R_n) می‌توان گفت که شکل انگشتی‌ها تقریباً یکسان بوده و تنها با تاخیر از هم به وجود می‌آیند (کل ۱۰). برای بررسی علت این مساله شبیه‌سازی ناپایداری انگشتی لزج برای مقدار ضریب رسوب صفر نیز تکرار شده‌است. شکل ۱۲ بعد فرکتالی را در زمان‌های مختلف بر حسب R_n مختلف نشان می‌دهد. در این منحنی مقدار ضریب ترسیب صفر در نظر گرفته شده‌است، لذا با مقایسه این منحنی با منحنی شکل ۱۱ می‌توان مشاهده کرد که علاوه بر تاخیر در ایجاد فرایند ناپایداری، فاصله زمانی موثر را نیز افزایش داده و میزان پیچیدگی انگشتی‌ها نیز بسیار تحت تاثیر قرار گرفته و کم می‌شود. با مقایسه دو منحنی ۱۱ و ۱۲ علت این امر را می‌توان در این مساله جستجو کرد که هرچند که مقدار R_n افزایش می‌یابد، اما وجود ضریب رسوب باعث می‌شود بعد از مدتی تاثیر R_n کاهش یابد.

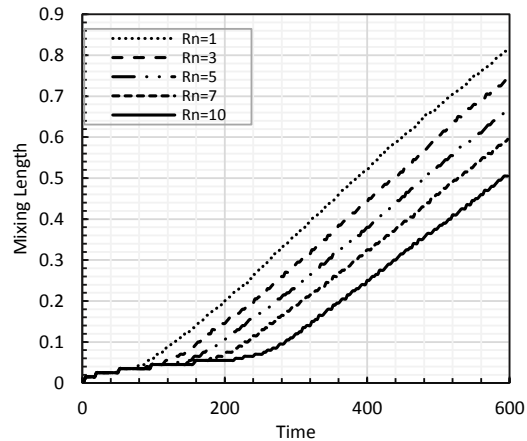
لازم به توجه است که فارغ از مقدار R_n ، با توجه به معادله (۱۴) جابجایی زمانی که $R_b > R_a$ باشد ناپایدار است و افزایش مقدار R_n سیستم را پایدارتر می‌کند اما توانایی ایجاد سیستمی کاملا پایدار را ندارد. به عبارتی زمانی که Da_{dep} مخالف صفر است، هرچقدر

بزرگتر باشد سیستم پایدارتر است. اما اگر از $R = R_a + R_n - R_b$ فقط نظر شود، به ازای $R > 0$ سیستم پایدار و $R < 0$ سیستم ناپایدار است [۳۱]. به همین منظور در شکل ۱۲ با توجه به انتخاب مقادیر $R_a = 3$ و $R_b = 7$ ، برای وجود ناپایداری تنها حالت مجاز، انتخاب مقدار R_n کوچکتر از ۴ می‌باشد.

همچنین شکل ۱۳ طول سطح تماس و طول اختلاط را در زمان‌های مختلف برای حالات متفاوت به نمایش می‌گذارد. علاوه بر اینکه در طول زمان مقدار سطح تماس و طول اختلاط در مقادیر R_n کوچکتر همواره بیشتر بوده‌است، زمان شروع ناپایداری (جایی که منحنی شروع به تغییر از مقدار یک می‌کند) نیز سریع تر اتفاق



شکل ۱۶. بعد فرکتالی به ازای $R_n = 1$, $\delta_b = 1$ و $Da_{dep} = 0.01$
Fig. 16. Fractal dimension for $\delta_b = 1$, $R_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$



شکل ۱۴. طول اختلاط به ازای $\delta_n = 1$, $\delta_b = 1$ و $Da_{dep} = 0.01$
Fig. 14. Mixing length for $\delta_b = 1$, $\delta_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$

منحنی بعد فرکتالی در شکل ۱۵ نیز همین مساله را به صورت کمی تایید می‌کند. با کاهش نسبت ضریب نفوذ زمان آغاز ناپایداری اندکی به تاخیر افتاده و زمان موثر کاهش می‌یابد. شکل ۱۶ و شکل ۱۷ نیز به ترتیب منحنی سطح تماس و طول اختلاط را به نمایش می‌گذارند. با بررسی این نمودارها می‌توان مشاهده کرد که افزایش مقدار δ_n به میزان اندکی باعث پیچیده‌تر شدن الگوها می‌شود. در مورد طول اختلاط هم مشاهده می‌شود که انگشتی‌ها تغییری در رشد خود نداده و تقریباً طول اختلاط ثابت می‌ماند.

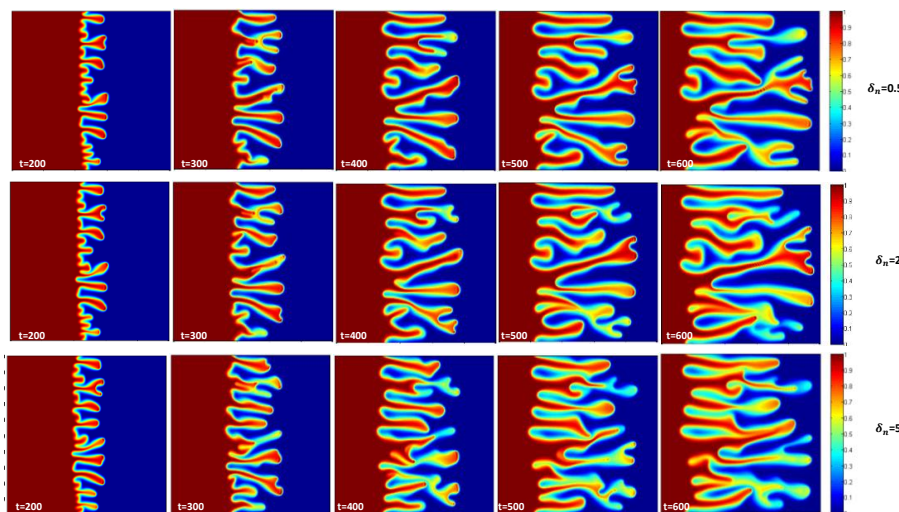
۴-۴ تاثیر عدد δ_b

پارامتر δ_b نیز نسبت ضریب نفوذ سیال جابجاشونده به سیال جابجاکننده را نشان می‌دهد. شکل ۱۹ کانتور غلظت را به ازای دو

می‌افتد.

۳-۴ تاثیر عدد δ_n

یکی دیگر از پارامترهایی که باید مورد بررسی قرار گیرد کمیت نسبت ضریب نفوذ است. δ_n . نسبت ضریب پخش ذرات نانو به ضریب پخش سیال جابجاکننده است. شکل ۶ کانتورهای غلظت به ازای $\delta_n = 1$ را نشان دادند. لذا برای بررسی بیشتر تغییرات الگوهای انگشتی به ازای مقادیر دیگر $0.5/2$ و 5 نیز کانتورهای غلظت ترسیم شده‌اند (شکل ۱۴). با مقایسه نتایج حاصل از تغییرات δ_n می‌توان شاهد تغییرات اندکی در الگوی انگشتی بود، هرچند این تغییرات بسیار جزئی و اندک هستند. به عبارت دیگر می‌توان گفت که δ_n تاثیر اندکی در الگوی انگشتی به ازای $Da_{dep} = 0.01$ دارد.

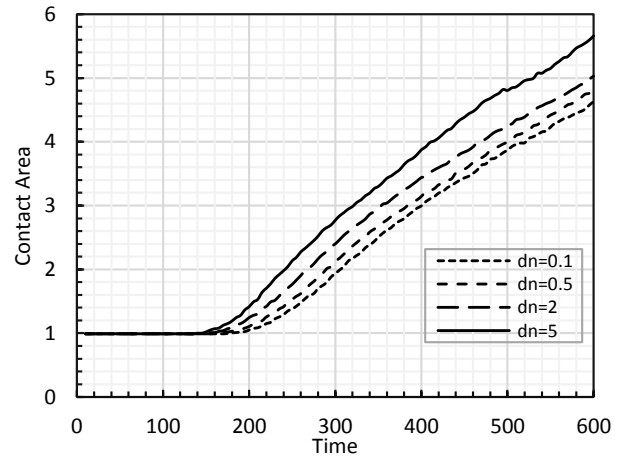


شکل ۱۵. کانتور غلظت سیال جابجاکننده به ازای $R_n = 1$, $\delta_b = 1$ و $Da_{dep} = 0.01$
Fig. 15. Contours of c_n for $\delta_b = 1$, $R_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$

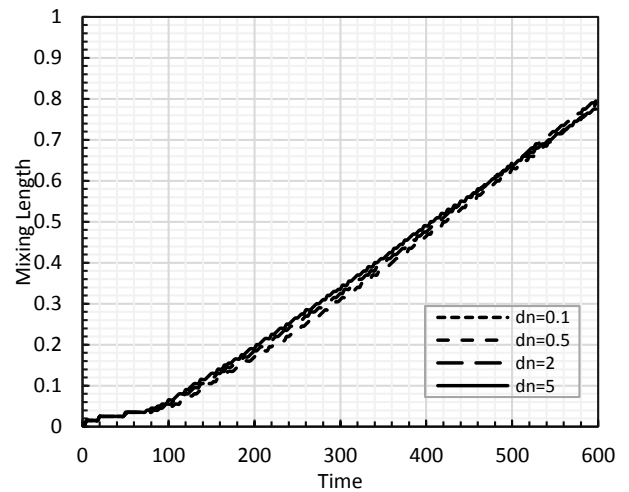
حالت نمونه مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل می‌توان گفت تغییرات مقدار δ_b تاثیر به سزایی بر روی تعداد و همچنین الگوی‌های ایجاد شده دارد و با کوچک شدن این مقدار، تعداد انگشتی‌ها بسیار افزایش می‌یابد. شکل ۶ نیز که پیشتر نمایش داده شده بود، به ازای مقدار $\delta_b = 1$ کانتورهای غلظت را نشان می‌دهد.

برای کمی کردن اطلاعات مربوط به پیچیدگی کانتور غلظت، بعد فرکتالی این حالات در شکل ۱۹ بر حسب زمان بررسی شده است. در تمامی حالات بررسی شده، هنگامی که مقدار $\delta_b = 0.5$ است، بعد فرکتالی بیشترین مقدار خود را دارد و به عدد 1.37 می‌رسد. این در حالی است که افزایش آن باعث کاهش بعد فرکتالی یا به عبارت دیگر کاهش پیچیدگی انگشتی‌ها شده است. همچنین می‌توان مشاهده کرد که افزایش δ_b زمان شروع ناپایداری را نیز به تاخیر می‌اندازد. به عبارت دیگر با افزایش این ضریب، سیال جابجاشونده بیشتری در سیال جابجاکننده نفوذ می‌کند که باعث می‌شود لایه تشکیل شده دارای ویسکوزیته بیشتری نسبت به سیال اولیه باشد که خود کمک به پایدار شدن فرایند می‌کند.

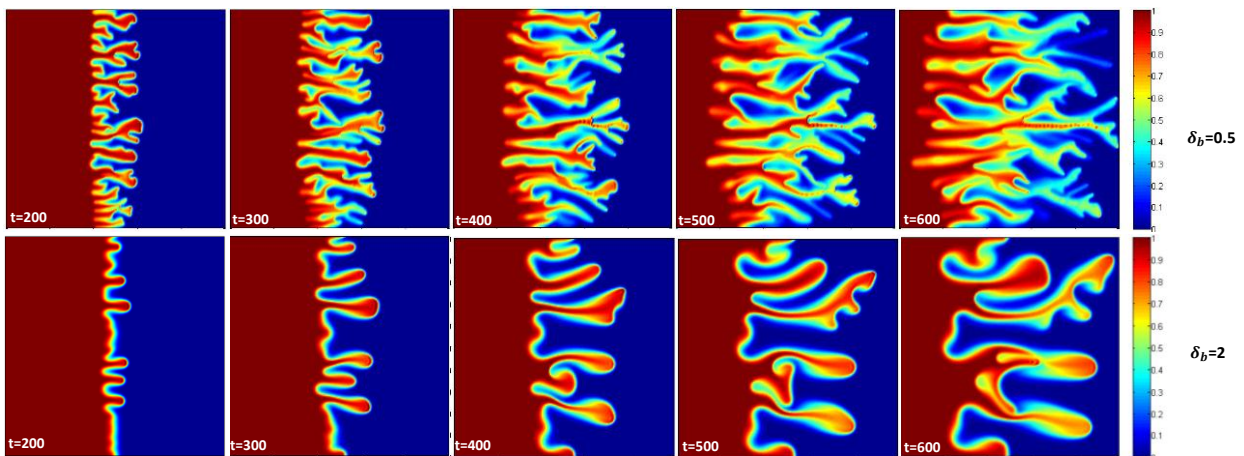
همچنین منحنی‌های طول اختلاط و سطح تماس در شکل ۲۰ و شکل ۲۱ آمده است. همانطور که مشخص است سطح تماس در حالتی که $\delta_b = 0.5$ است در زمان حدود ۵۰۰ برابر عرض کانال می‌باشد، این درحالی است که بیشترین مقدار سطح تماس در حالت $\delta_b = 2$ حدود ۶ برابر عرض مقطع است. با توجه به شکل ۲۱ تا زمان ۵۵۰ مقدار طول اختلاط به ازای مقدار مقادیر کوچکتر δ_b بیشتر است، اما در زمان انتهایی مقدار آنها به یکدیگر نزدیک می‌شود. می‌توان علت



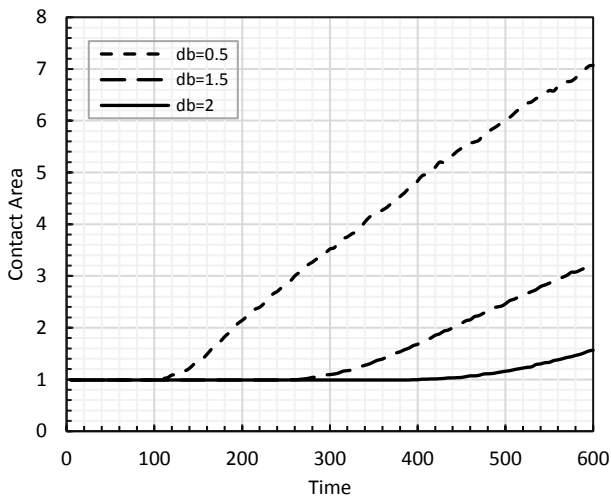
شکل ۱۷. طول سطح تماس به ازای $\delta_b = 1$ ، $R_n = 1$ و $Da_{dep} = 0.01$
 Fig. 17. Contact area for $\delta_b = 1$ ، $R_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$



شکل ۱۸. طول اختلاط به ازای $\delta_b = 1$ ، $R_n = 1$ و $Da_{dep} = 0.01$
 Fig. 18. Mixing length for $\delta_b = 1$ ، $R_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$



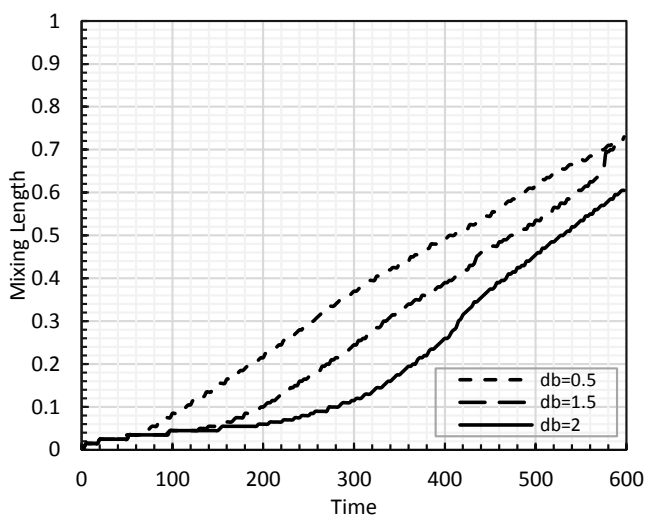
شکل ۱۹. کانتور غلظت سیال جابجاکننده به ازای $\delta_b = 1$ ، $R_n = 1$ و $Da_{dep} = 0.01$
 Fig. 19. Contours of c_a for $\delta_b = 1$ ، $R_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$



شکل ۲۱. طول سطح تماس به ازای $\delta_n = 1$ ، $R_n = 1$ و $Da_{dep} = 0.01$

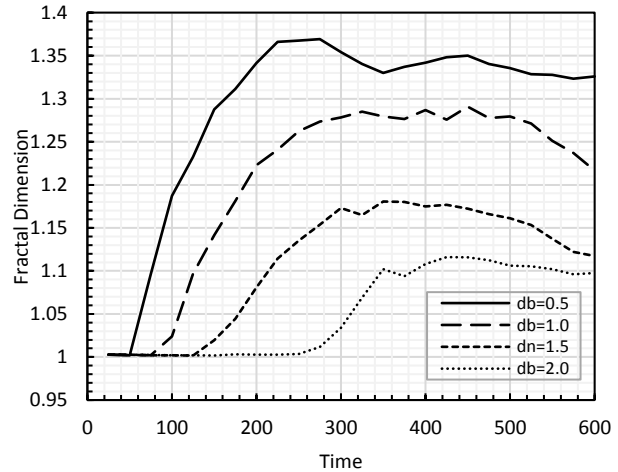
Fig. 21. Contact area c_n for $\delta_n = 1$, $R_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$

بر افزایش زمان آغاز ناپایداری، زمان موثر و بعد فرکتالی را افزایش داده و الگوی‌های انگشتی پیچیده‌تر می‌کند. همچنین نتایج نشان می‌دهد نسبت ضریب پراکندگی ذرات نانو تاثیر چندانی در تغییر بعد فرکتالی ندارد اما نسبت ضریب پراکندگی سیال جابجاشونده بسیار تاثیرگذار بوده و کاهش آن علاوه بر افزایش پیچیدگی و بعد فرکتالی، زمان شروع ناپایداری را نیز به تاخیر می‌اندازد، این در حالی است که زمان موثر به میزان اندکی کاهش می‌یابد. به صورت کلی می‌توان گفت که روش فرکتالی روشی مناسب برای تحلیل مساله ناپایداری و



شکل ۲۲. طول اختلاط به $\delta_n = 1$ ، $R_n = 1$ و $Da_{dep} = 0.01$

Fig. 22. Mixing length for c_n for $\delta_n = 1$, $R_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$



شکل ۲۰. بعد فرکتالی در زمان در $\delta_n = 1$ ، $R_n = 1$ و $Da_{dep} = 0.01$

Fig. 20. Variation of fractal dimension with time for c_n for $\delta_n = 1$, $R_n = 1$ and $Da_{dep} = 0.01$

این امر را اینطور ذکر کرد که هرچند تعداد انگشتی‌ها و الگوی آنها در مقدار δ_b کوچک بیشتر است، اما عرض انگشتی‌ها کمتر می‌شود، همین مساله در مقادیر δ_b بزرگ‌تر برعکس است، تعداد انگشتی‌های کمتر اما دارای عرض بیشتر و به دنبال آن غلظت بیشتری هستند.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله مساله ناپایداری انگشتی لزج در جابجایی سیال شامل نانوذرات به صورت غیرخطی شبیه‌سازی شد و با استفاده از نتایج آن تحلیل فرکتالی صورت پذیرفت. همچنین تحلیل پارامترهای موثر بر روی ناپایداری سیستم مورد بررسی قرار گرفتند و در کنار طول اختلاط و بازده جاروبی سیستم، بعد فرکتالی به عنوان یکی دیگر از مشخصه‌ها معرفی شد که با استفاده از تعریف فاصله زمانی موثر نتایج غیرخطی تحلیل شدند. نتایج نشان می‌دهد افزایش نرخ رسوب باعث افزایش ناپایداری در سیستم شده و بعد فرکتالی را افزایش می‌دهد. همچنین زمان موثر نیز افزایش می‌یابد. این در حالی است که تغییر در مقدار ویسکوزیته نانوذرات با فرض رسوب، تغییر چندانی در ناپایداری را ایجاد نمی‌کند و تنها زمان آغاز ناپایداری را تحت شعاع قرار می‌دهد. به ازای هر دو واحد تغییر در نسبت ویسکوزیته، شروع ناپایداری ۲۵ واحد زمانی به تغییر می‌افتد. این در حالی است در صورت عدم فرض رسوب در جریان، افزایش نسبت ویسکوزیته علاوه

۷- مراجع

- [1] G.M. Homsy, Viscous fingering in porous media, Annual review of fluid mechanics, 19(1) (1987) 271-311.
- [2] B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature WH Freeman San Francisco USA, (1982).
- [3] K. Arakawa, E. Krotkov, Fractal modeling of natural terrain: Analysis and surface reconstruction with range data, Graphical Models and Image Processing, 58(5) (1996) 413-436.
- [4] D. Labat, A. Mangin, R. Ababou, Rainfall-runoff relations for karstic springs: multifractal analyses, Journal of Hydrology, 256(3-4) (2002) 176-195.
- [5] A. Lagarias, Fractal analysis of the urbanization at the outskirts of the city: models, measurement and explanation, Cybergeog: European Journal of Geography, (2007).
- [6] S. Emamikoupaee, S. Zamani, M.R. Shahnazari, A. Heidarzadeh, A. Saberi, Development and Comparison of Methods Based on Grey and Fractal Models for Predicting Natural Gas Prices, Quarterely Energy Economics Review, 15(62) (2019) 1-18.
- [7] M.A. Mohammed, B. Al-Khateeb, A.N. Rashid, D.A. Ibrahim, M.K.A. Ghani, S.A. Mostafa, Neural network and multi-fractal dimension features for breast cancer classification from ultrasound images, Computers & Electrical Engineering, 70 (2018) 871-882.
- [8] B. Yu, Analysis of flow in fractal porous media, Applied Mechanics Reviews, 61(5) (2008) 050801.
- [9] F. Zhu, S. Cui, B. Gu, Fractal analysis for effective thermal conductivity of random fibrous porous materials, Physics letters A, 374(43) (2010) 4411-4414.
- [10] A. Gomez, Thermal Performance of a Double-Pipe Heat Exchanger with a Koch Snowflake Fractal Design, (2017).

مشخصه‌سازی میزان پیچیدگی این فرایند است.

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی

A	سیال جابجاکننده
A_r	نسبت ابعاد
B	سیال جابجاشونده
C	غلظت سیال (/)
D	ضریب پراکندگی، (m^2s^{-1})
D_s	بعد تشابهی
Da	نرخ رسوب (بی‌بعد)
H	عرض صفحه (m)
K	قابلیت نفوذپذیری (m^2)
k_{dep}	ضریب رسوب (s^{-1})
L	طول صفحه (m)
np	غلظت ذرات نانو (بی‌بعد)
p	فشار (Nm^{-2})
R	لگاریتم نسبت ویسکوزیته (بی‌بعد)
t	زمان (s)
u	سرعت دارسی (ms^{-1})
U	سرعت اولیه سیال (ms^{-1})

علائم یونانی

μ	لزجت دینامیکی، ($kgm^{-1}s^{-1}$)
$\bar{\mu}$	لزجت دینامیکی سیال پایه
ω	گردابه (s^{-1})
ψ	تابع جریان (m^2s^{-1})
δ	نسبت انتشار سیال به سیال جابجاکننده
ε	طول المان

زیرنویس

a	سیال جابجاکننده
b	سیال جابجاشونده
n	نانوذرات
0	حالت پایه

بالانویس

*	شرایط بی‌بعد
---	--------------

- [22] A. De Wit, G. Homsy, Viscous fingering in periodically heterogeneous porous media. II. Numerical simulations, *The Journal of chemical physics*, 107(22) (1997) 9619-9628.
- [23] S. Pramanik, M. Mishra, Nonlinear simulations of miscible viscous fingering with gradient stresses in porous media, *Chemical Engineering Science*, 122 (2015) 523-532.
- [24] S. Sin, T. Suekane, Y. Nagatsu, A. Patmonoaji, Three-dimensional visualization of viscous fingering for non-Newtonian fluids with chemical reactions that change viscosity, *Physical Review Fluids*, 4(5) (2019) 054502.
- [25] D. Moissis, M. Wheeler, C. Miller, Simulation of miscible viscous fingering using a modified method of characteristics: effects of gravity and heterogeneity, *SPE Advanced Technology Series*, 1(01) (1993) 62-70.
- [26] M. Islam, J. Azaiez, Fully implicit finite difference pseudo-spectral method for simulating high mobility-ratio miscible displacements, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47(2) (2005) 161-183.
- [27] A.I. Maleka, A. Saberi, M. R. Shahnazari, Simulation and nonlinear instability investigation of two miscible fluid flow in homogeneous porous media, *Petroleum Research*, 27(95) (2017) 147-162. (in Persian)
- [28] M. Shahnazari, I. Maleka Ashtiani, A. Saberi, Linear stability analysis and nonlinear simulation of the channeling effect on viscous fingering instability in miscible displacement, *Physics of Fluids*, 30(3) (2018) 034106.
- [29] K. Ghesmat, J. Azaiez, Miscible displacements of reactive and anisotropic dispersive flows in porous media, *Transport in porous media*, 77(3) (2009) 489.
- [30] M.R. Shahnazari, A. Saberi, Fractal Analysis of Viscous Fingering Instability of Two Reactive
- [11] S. Wang, X. Sun, C. Xu, J. Bao, C. Peng, Z. Tang, Investigation of a circulating turbulent fluidized bed with a fractal gas distributor by electrostatic-immune electrical capacitance tomography, *Powder Technology*, (2019).
- [12] S. Zhang, X. Chen, Z. Wu, Y. Zheng, Numerical study on stagger Koch fractal baffles micromixer, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 133 (2019) 1065-1073.
- [13] B. Mandelbrot, How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension, *science*, 156(3775) (1967) 636-638.
- [14] T. Higuchi, Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 31(2) (1988) 277-283.
- [15] M.A. Ibrahim, Multifractal techniques for analysis and classification of emphysema images, (2017).
- [16] S. Hill, Channeling in packed columns, *Chemical Engineering Science*, 1(6) (1952) 247-253.
- [17] D. Peaceman, H. Rachford Jr, Numerical calculation of multidimensional miscible displacement, *Society of Petroleum Engineers Journal*, 2(04) (1962) 327-339.
- [18] M. Christie, D. Bond, Multidimensional flux-corrected transport for reservoir simulation, in: *SPE Reservoir Simulation Symposium*, Society of Petroleum Engineers, 1985.
- [19] T.F. Russell, M.F. Wheeler, C. Chiang, Large-scale simulation of miscible displacement by mixed and characteristic finite element methods, *Mathematical and computational methods in seismic exploration and reservoir modeling*, (1986) 85-107.
- [20] C. Tan, G. Homsy, Simulation of nonlinear viscous fingering in miscible displacement, *The Physics of fluids*, 31(6) (1988) 1330-1338.
- [21] C.T. Tan, G. Homsy, Viscous fingering with permeability heterogeneity, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(6) (1992) 1099-1101.

- A Fractal Approach, *Int J Sci Res*, 6(10) (2015).
- [34] S. Tang, Z. Wei, Fractal characteristics of viscous fingering, *Fractals*, 5(02) (1997) 221-227.
- [35] K. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, 2004.
- [36] B. Dastvareh, *Instabilities of Nanofluid Flow Displacements in Porous Media*, University of Calgary, 2019.
- Miscible Fluids through Homogeneous Porous Media, *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, 9(1) (2019) 265-278. (in Persian)
- [31] K. Ghesmat, H. Hassanzadeh, J. Abedi, Z. Chen, Influence of nanoparticles on the dynamics of miscible Hele-Shaw flows, *Journal of Applied Physics*, 109(10) (2011) 104907.
- [32] B. Dastvareh, J. Azaiez, Instabilities of nanofluid flow displacements in porous media, *Physics of Fluids*, 29(4) (2017) 044101.
- [33] K. Zakade, R. Gh, A. Khan, Y.H. Shaikh, Temporal Evolution of Viscous Fingering in Hele Shaw Cell:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

M. R. Shahnazari, A. Saberi, *Quantifying of Viscous Fingering Instability in Porous Media*, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(5) (2021) 2887-2902.

DOI: [10.22060/mej.2020.17544.6617](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17544.6617)



