



Studying of Droplet Impingement on Hydrophilic and Hydrophobic Curved Surfaces by Lattice Boltzmann Method Based on Allen-Cahn Equation

E. Ezzatneshan*, A. Khosroabadi, A. Fattahi

New Technologies Engineering Department, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

ABSTRACT: In this paper, an efficient lattice Boltzmann method is applied for the simulation of two-phase flow problems at high density and viscosity ratios. The present lattice Boltzmann method employs the Allen-Cahn equation to model the interfacial dynamics between two phases and an appropriate collision operator is implemented to ensure the stability of the numerical solutions. The performance of the numerical algorithm is examined by studying droplet dynamics at different flow conditions. Herein, the equilibrium state of a droplet on the flat and curved walls is verified by considering the wetting properties, namely the hydrophilic and hydrophobic characteristics, for solid surfaces. The multiphase flow pattern and interfacial dynamics of an impinging droplet on a cylinder surface and a semicircular cavity are also investigated and the obtained results are compared with the available data. The present study demonstrates that the curved wall considering the wettability effects significantly affects the droplet dynamics, depending on the properties of the liquid phase and the flow conditions. This work also shows that the lattice Boltzmann method with the Allen-Cahn equation is more stable for simulation of liquid-gas systems at density ratio 1000 and viscosity ratio 100 which makes this method more suitable for predicting practical flow characteristics.

Review History:

Received: Feb. 06, 2020
Revised: May. 04, 2020
Accepted: Jun. 20, 2020
Available Online: Jul. 14, 2020

Keywords:

Lattice Boltzmann method
Allen-Cahn equation
Multiphase flows
Droplet impingement dynamics
Curved surface

1. Introduction

Recently, the importance of multi-phase flows is evident in a wide range of industrial applications. Investigation of the dynamic behavior of the impacting droplet on surfaces is one of the most important topics in this field which can be seen in the aerospace industry (liquid fuel propulsion systems), the pharmaceutical industry (microfluidics), and oil and energy (water droplet separation). Therefore, the study of this type of multiphase flow problem is crucial, and many researchers are interested in studying in this area to precisely predict the dynamics of the interface between the two phases of the liquid and gas after the droplet hits the surface. The Lattice Boltzmann Method (LBM), due to its mesoscopic nature, is known as an effective and efficient numerical method for simulation of multi-phase flows [1]. Among the multi-phase LBM models, one based on the Allen-Cahn (A-C) equation is employed in the present paper to solve the droplet dynamics at high-density and high-viscosity ratios [2].

Studying the effect of the physical parameters such as hydrophilicity and geometry characteristics (convexity or concavity) on the dynamics of the droplet collision on the surface are considered in this work.

2. Governing Equations

The LBM with the A-C equation can be defined in the discretized form as follows which recovers the order parameter ϕ [2]:

$$h_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha}\delta t, t + \delta t) = h_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - \frac{h_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - \bar{h}_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau + 0.5} + F_{\alpha}^{\phi}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

Herein, h_{α} is the distribution function, \mathbf{e}_{α} is the particle velocity, τ is the relaxation time, and $c_s = 1/\sqrt{3}$ indicates the speed of sound in the present LBM. The forcing term F_{α}^{ϕ} and the equilibrium phase-field distribution function \bar{h}_{α}^{eq} are given by

$$F_{\alpha}^{\phi}(\mathbf{x}, t) = \partial t \frac{[1 - 4(\phi - \phi_0)^2]}{\xi} \omega_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (2)$$

$$\bar{h}_{\alpha}^{eq} = h_{\alpha}^{eq} - 0.5 F_{\alpha}^{\phi} \quad (3)$$

in which $h_{\alpha}^{eq} = \phi \Gamma_{\alpha}$ and Γ_{α} is defined by

$$\Gamma_{\alpha} = \omega_{\alpha} \left[1 + \frac{\mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{(\mathbf{u} \mathbf{u})}{2c_s^2} \right] \quad (4)$$

*Corresponding author's email: e_ezzatneshan@sbu.ac.ir



To recover the hydrodynamic properties of a multiphase system, including the pressure and velocity components, a new distribution function g_α is used in the LBM based on the A-C equation that reads

$$g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) + \Omega_\alpha(\mathbf{x}, t) + F_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

where Ω_α is the collision operator. Herein, a weighted multiple-relaxation-time collision model [2] is employed that is numerically stable and more accurate than the conventional single-relaxation-time collision operator:

$$\Omega_\alpha = -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{M} (g_\alpha - \bar{g}_\alpha^{eq}) \quad (6)$$

where \mathbf{M} is an orthogonal transformation matrix and $\hat{\mathbf{S}}$ is the diagonal relaxation matrix. Finally, the order parameter ϕ , normalized pressure p^* , and velocity \mathbf{u} can be obtained by

$$\phi = \sum_\alpha h_\alpha \quad (7)$$

$$p^* = \sum_\alpha g_\alpha \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \sum_\alpha g_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \frac{\mathbf{F}}{2\rho} \delta t \quad (9)$$

3. Results and Discussions

Fig. 1 shows the equilibrium state of the droplet on a circular cylinder obtained with the present A-C LBM at three different contact angles imposed on the solid wall. The density ratio and viscosity ratio of the multiphase system are set to be $\rho_H / \rho_L = 1000$ and $\mu_H / \mu_L = 100$, respectively. It can be seen that at the equilibrium condition, the interfacial tension forces tend to minimize the free energy in the system by minimizing the peripheral area. Therefore, an arc is formed by the droplet on the top of the cylinder which contacts the solid surface with a contact angle imposed by the numerical algorithm. At the hydrophilic contact angle, the liquid spreads on the cylinder surface and the height of drop decreases. When the surface is hydrophilic, the droplet almost keeps its circular shape on the cylinder after reaching the equilibrium state. It should be noted that the shape of the equilibrated droplet also depends on the drop diameter and cylinder diameter which are considered constant in the

present work.

Fig. 2 demonstrates a sequence of results obtained for the droplet collision on the circular cylinder with hydrophobic solid wall. In this case, the intensity of the collision created by the gravity acceleration overcomes the surface tension of the liquid and causes the rupture of the joint between the drop and the surrounding gas. The breaking of the droplet into smaller drops is well captured by the present A-C LBM employed which demonstrates its performance and capability for predicting such complex multiphase flow structures. It should be noted that studying this flow problem at different wetting conditions is provided in the full paper.

The efficiency and stability of the A-C LBM are evaluated by simulation of the dynamics of droplet collision into a semicircular cavity in high-density and high-viscosity ratios. Fig. 3 shows a sequence of the obtained results for this test case with two wetting conditions. Due to the strong adhesion force between the liquid phase with the hydrophilic solid surface, the bubbles are trapped inside the droplet after impacting the surface. However, this phenomenon is not seen when the solid wall is hydrophobic. The present study shows that the splashing of the liquid phase to the out of the hole after the droplet collision is more related to the impaction intensity than the wetting condition of the wall. As seen in Fig. 3, the splashing dynamics of the droplet for both the hydrophobic and hydrophilic surfaces are the same at a certain flow condition.

4. Conclusions

In the present work, the A-C LBM is employed for simulation of the dynamics of droplet collision on different flat and curved surfaces with various wetting conditions. This study shows that with specific physical parameters for the liquid phase, the droplet dynamics at the equilibrium state is affected by the hydrophilicity of the solid surface. However, the wetting condition has no significant effect on the interfacial dynamics of an impacting droplet. Instead, the impaction intensity is more dominant at this condition and the droplet dynamics significantly depend on the collision parameters, e.g. the velocity and surface geometry. The present study also demonstrates that the A-C LBM is an accurate and efficient numerical technique for the simulation of the droplet dynamics at the high-density and high-viscosity ratios which introduces this algorithm as an appropriate one for the predicting of the applied multiphase flow characteristics.

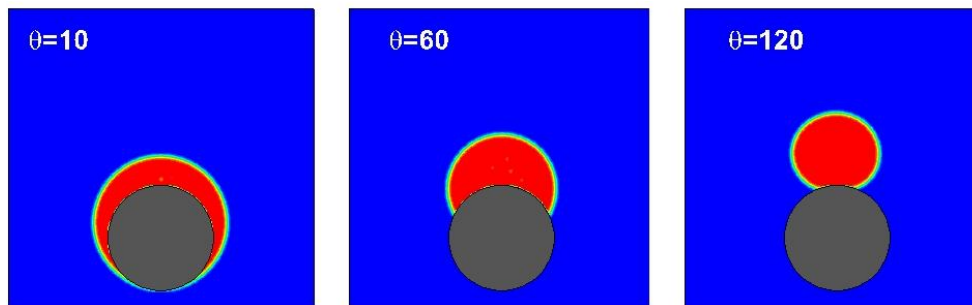


Fig. 1. Equilibrium state of a drop with density ratio 1000 and viscosity ratio 100 on a circular cylinder at three different contact angles

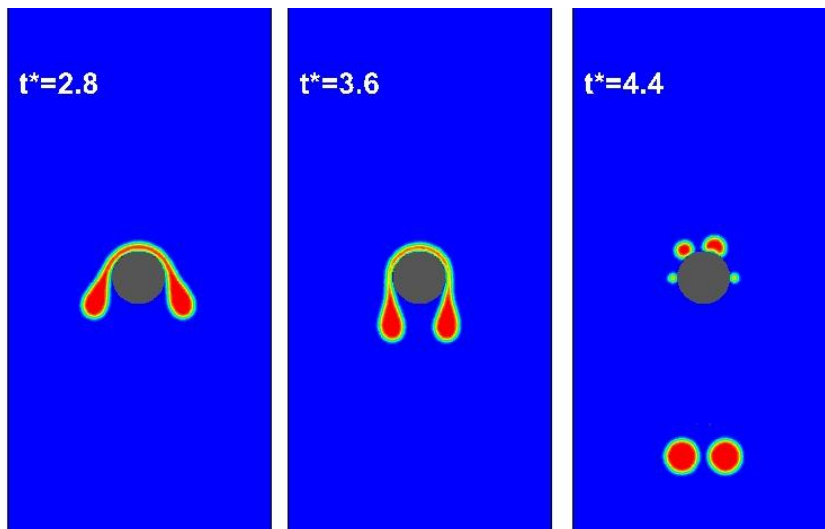


Fig. 2. Impact of a drop with a density ratio 1000 and viscosity ratio 100 on a circular cylinder with hydrophobic surface at contact angle of 170 and $Bo = 6.6$

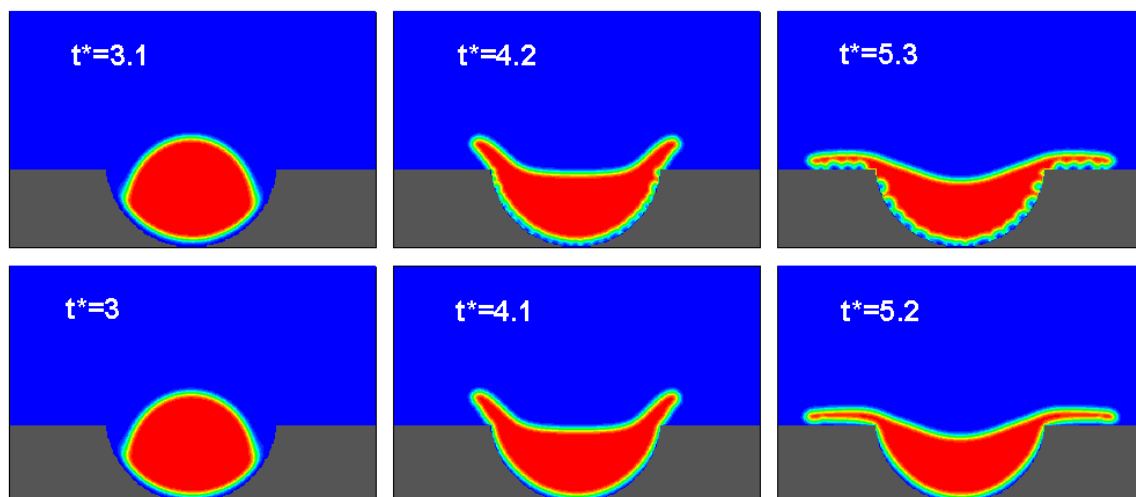


Fig. 3. Results obtained for sequence of droplet collision into a semicircular cavity with density ratio 1000, viscosity ratio 100, $Re = 80$ and $Bo = 5000$ at contact angle of 40 (top row) and 170 (bottom row).

References

- [1] E. Ezzatneshan, Study of surface wettability effect on cavitation inception by implementation of the lattice Boltzmann method, *Physics of Fluids*, 29(11) (2017) 113304.
- [2] A. Fakhari, T. Mitchell, C. Leonardi, D. Bolster, Improved locality of the phase-field lattice-Boltzmann model for immiscible fluids at high density ratios, *Physical Review E*, 96(5) (2017).

HOW TO CITE THIS ARTICLE

E. Ezzatneshan, A. Khosroabadi, A. Fattahi, *Studying of Droplet Impingement on Hydrophilic and Hydrophobic Curved Surfaces by Lattice Boltzmann Method Based on Allen-Cahn Equation*, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(5) (2021) 677-680.

DOI: 10.22060/mej.2020.17879.6681





مطالعه دینامیک برخورد قطره به سطوح منحنی آب‌دوست و آب‌گریز در نسبت‌های چگالی و لزجت بالا با استفاده از روش شبکه بولتزمن توسعه داده شده بر اساس معادله آلن-کاهن

اسلام عزت‌نشان^{*}، علی اصغر خسروآبادی، ایوب فتاحی

دانشکده مهندسی فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۱۸
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۲/۱۵
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۳۱
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۴/۲۴

کلمات کلیدی:

روش شبکه بولتزمن
معادله آلن-کاهن
جریان چندفازی
دینامیک برخورد قطره
سطح منحنی

خلاصه: در مقاله حاضر، یک الگوریتم عددی کارآمد و موثر بر اساس روش شبکه بولتزمن جهت شبیه‌سازی دوبعدی جریان‌های چندفازی در نسبت‌های چگالی و لزجت بالا توسعه داده شده است. کارایی و دقت حل عددی حاضر جهت مدل‌سازی رفتار دینامیکی جریان‌های چندفازی با استفاده از اضافه کردن معادله آلن-کاهن برای مدل‌سازی دینامیک فصل مشترک بهبود داده شده است. همچنین، جهت افزایش کارایی روش برای حل دینامیک قطرات در گستره وسیعی از سرعت‌های برخورد، از عملگر برخورد با زمان آرامش چندگانه استفاده شده است. جهت صحت‌سنجی و ارزیابی دقت حل، حالت تعادل یک قطره روی سطح صاف آب‌دوست و آب‌گریز مطالعه شده است. سپس، برخورد قطره روی سطح یک استوانه و یک حفره با در نظر گرفتن اثر شتاب گرانش بررسی شده و نتایج به دست آمده از حل حاضر با نتایج دیگران مقایسه شده که تطابق خوبی را نشان می‌دهند. همچنین، مطالعه تغییرات ارتفاع قطره روی سطوح آب‌دوست و آب‌گریز در ضخامت‌های مختلف فصل مشترک و در زاویه‌های تماس مختلف از نتایج این مطالعه است که شناخت خوبی از فیزیک پیچیده آنها ایجاد می‌کند. نتایج حاضر نشان می‌دهد که اضافه شدن معادله آلن-کاهن به معادله روش شبکه بولتزمن در کنار استفاده از زمان آرامش چندگانه منجر به توسعه یک روش عددی کارآمدی شده که با استفاده از آن، امکان مطالعه انواع جریان‌های چندفازی کاربردی در نسبت‌های چگالی ۱۰۰۰ و نسبت‌های لزجت ۱۰۰ با دینامیک فصل مشترک پیچیده فراهم است.

۱- مقدمه

مانند روش حجم سیال^۱ است. در دهه‌های اخیر، با توجه به هزینه محاسباتی حل عددی دستگاه معادلات ناویر-استوکس و پیچیدگی توسعه الگوریتم بر اساس این معادلات، محققان به روش‌های جایگزین و در عین حال توانمند روی آورده‌اند. در این بین، روش شبکه بولتزمن^۲، به علت ماهیت مزوسکوپیک آن و دارا بودن دیدگاه جنبش مولکولی در مدل‌سازی جریان سیالات، به عنوان یک روش مؤثر و کارآمد در شبیه‌سازی فیزیک جریان‌های پیچیده مانند جریان‌های چندفازی و دینامیک فصل مشترک فازها شناخته می‌شود [۱].

برای مطالعه دینامیک قطرات با استفاده از روش شبکه بولتزمن تحقیقات زیادی صورت گرفته و مدل‌های مختلفی ارائه شده است. در مدل شان-چن [۲]، به دلیل وجود سرعت‌های غیرفیزیکی زیاد در شبیه‌سازی فصل مشترک، دقت این روش تحت تاثیر قرار گرفته و استفاده از آن برای مطالعه دینامیک پیچیده قطرات چندان کارآمد نیست. چانگ و الکساندر [۳] معادلات روش شبکه بولتزمن اینامورا

امروزه اهمیت جریان‌های چندفازی در گستره وسیعی از صنایع دارای سیستم‌های سیالاتی مشهود است. بررسی رفتار دینامیکی برخورد قطرات روی سطوح یکی از موضوعات مهم در این حوزه شناخته می‌شود که دارای کاربردهای صنعتی در صنایع هوافضا (سیستم‌های پیشران با سوخت مایع)، صنایع دارویی (ریزسیالات) و نفت و انرژی (جداسازی قطرات آب از فرآورده) است. بنابراین، مطالعه این نوع جریان‌های چندفازی اهمیت زیادی دارد و محققان زیادی همچنان علاقه‌مند به تحقیق در این حوزه هستند تا با شناخت هر چه دقیق‌تر دینامیک مرز مشترک بین دو فاز مایع و گاز بعد از برخورد قطره به سطوح، پیش‌بینی بهتری از رفتار یک سیستم سیالاتی مرتبط در فرآیند عملکردی آن داشته باشند. یکی از روش‌های مورد استفاده در شبیه‌سازی دینامیک برخورد قطره، استفاده از شبیه‌سازی عددی بر اساس حل معادلات ناویر-استوکس در کنار استفاده از مدل‌هایی

1 Volume of Fluid (VOF)
2 Lattice Boltzmann Method

^{*} نویسنده عهده‌دار مکاتبات: e_ezzatneshan@sbu.ac.ir



زمان آرامش چندگانه^۲ استفاده شده است. قابلیت و کارایی الگوریتم عددی حاضر برای شبیه‌سازی دینامیک فصل مشترک پیچیده با حل چند مسئله نمونه مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق، دینامیک برخورد قطره روی سطوح آب‌دوست و آب‌گریز و دینامیک برخورد قطره حین رهاسازی روی سطح استوانه و داخل یک حفره در حضور نیروی گرانش بررسی می‌شود. تاثیر آب‌دوستی و آب‌گریزی سطح در شرایط مختلف جریان (مانند اعداد Bo مختلف) مطالعه شده و نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی حاضر با داده‌های تحلیلی و نتایج عددی موجود مقایسه می‌شود. تطابق بسیار خوب نتایج حاصل از حل حاضر برای دینامیک قطره روی سطوح منحنی با نتایج دیگران نشان می‌دهد که الگوریتم عددی توسعه داده شده از دقت خوبی برای مدل‌سازی دینامیک فصل مشترک در نسبت‌های لزجت و چگالی بالا برخوردار است. بنابراین، امکان اعمال و استفاده از آن برای شبیه‌سازی جریان‌های چندفازی کاربردی با هندسه‌های دارای مرز منحنی فراهم است که کاربرد گسترده‌ای در صنایع هوافضا و مکانیک دارند.

۲- معادلات حاکم

در روش شبکه بولتزمن توسعه داده شده، برای تعیین مشخصات جریان سیال از تابع توزیع ذرات $h_\alpha(x, t)$ در فضای برداری با سرعت میکروسکوپی e_α در مکان x و زمان t استفاده می‌شود. با استفاده از تابع برخورد با زمان آرامش چندگانه [۷] معادله حاکم با در نظر گرفتن نیروهای خارجی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$h_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) = h_\alpha(\mathbf{x}, t) - \quad (1)$$

$$\frac{h_\alpha(\mathbf{x}, t) - \bar{h}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau + 0.5} + F_\alpha^\phi(\mathbf{x}, t)$$

که در آن، جمله نیرو به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F_\alpha^\phi(\mathbf{x}, t) = \partial t \frac{[1 - \epsilon(\phi - \phi_c)^2]}{\xi} \omega_\alpha \mathbf{e}_\alpha \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (2)$$

در این معادله، h_α تابع توزیع میدان فازی در جهت α است. نشان دهنده زمان و Δt گام زمانی است. h_α^{eq} تابع توزیع ذرات

و همکارانش را برای شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی تراکم‌ناپذیر استفاده کرده‌اند تا پاشش قطرات آب را روی سطح‌های همگن و ناهمگن مورد بررسی قرار دهند. استفاده از حل عددی معادله کاهن-هیلیارد^۱ [۴، ۵] نیز در کنار روش شبکه بولتزمن در مرجع [۶] استفاده شده که دقت بهتری نسبت به روش‌های یاد شده قبلی دارد. اما فخاری و همکاران [۷] نشان دادند که روش کاهن-هیلیارد اگرچه مشکلات ناپایداری روش شان-چن و عدم دقت روش اینامورا را ندارد، اما در شبیه‌سازی قطرات با استفاده از این روش، جرم فاز مایع حفظ نمی‌شود و مقداری از شعاع قطره به دلیل خطای گسسته‌سازی تحلیل می‌رود. آنها نشان دادند که استفاده از حل معادله آلن-کاهن^۲ به خوبی این مشکل را حل می‌کند و بقای جرم قطره در فرآیند حل تضمین می‌شود. در بین مدل‌های چندفازی روش شبکه بولتزمن، اخیراً مدل مبتنی بر حل معادله آلن-کاهن جهت تعیین دینامیک فصل مشترک مورد توجه قرار گرفته که علت آن را می‌توان در دقت بالا و پایداری این روش جهت مدل‌سازی انواع جریان‌های چندفازی با نسبت‌های بالای چگالی و لزجت بیان کرد. در تحقیق حاضر، از این روش توانمند برای تدوین و توسعه یک الگوریتم عددی برای مطالعه دینامیک برخورد قطرات به سطوح منحنی آب‌دوست و آب‌گریز در شرایط مختلف جریان استفاده شده است. نوآوری‌های مقاله حاضر نسبت به کارهای انجام شده، مطالعه تاثیر پارامترهای فیزیکی مانند آب‌دوستی و آب‌گریزی سطوح همچنین تاثیر پارامترهای هندسی مانند محدب بودن سطح منحنی (هندسه استوانه) یا مقعر بودن آن (هندسه حفره) در دینامیک برخورد قطرات سیال‌های واقعی در نسبت چگالی و نسبت لزجت بالا هستند. در این راستا، از یک الگوریتم توانمند بر اساس معادله آلن-کاهن در روش شبکه بولتزمن استفاده شده که اعمال آن برای مسائل چندفازی مورد نظر در این مقاله و اعتبارسنجی این روش عددی جزو جنبه نوین این پژوهش است.

با توجه به روند توسعه مدل‌های دوفازی توانمند برای روش شبکه بولتزمن که در بالا به آنها اشاره شد، در مطالعه حاضر از حل عددی معادله آلن-کاهن جهت شبیه‌سازی استفاده شده تا از صحت و دقت نتایج برای فیزیک مورد نظر حتی در نسبت‌های چگالی و لزجت بالا اطمینان حاصل شود. جهت بهبود کارایی روش برای حل دینامیک قطرات در گستره وسیعی از سرعت‌های برخورد، از عملگر برخورد با

1 Cahn-Hilliard

2 Allen-Cahn

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \frac{4}{9} & \alpha = 0 \\ \frac{1}{9} & \alpha = 1-4 \\ \frac{1}{36} & \alpha = 5-9 \end{cases} \quad (7)$$

بعد از حل معادلات، چگالی ماکروسکوپیک به صورت زیر محاسبه

می‌شود:

$$\phi = \sum_\alpha h_\alpha \quad (8)$$

و رابطه خطی بین چگالی میدان با چگالی فاز گاز و مایع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho = \rho_L + (\phi - \phi_L)(\rho_H - \rho_L) \quad (9)$$

معادله تابع توزیع جهت تعیین مشخصات هیدرودینامیکی جریان چندفازی شامل سرعت و فشار برای شبکه بولتزن مورد استفاده به صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) + \Omega_\alpha(\mathbf{x}, t) + F_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (10)$$

که در آن، جمله نیرو به صورت رابطه زیر بدست می‌آید:

$$F_\alpha = \nu \delta t \frac{\omega_\alpha \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{F}}{\rho c^\tau} \quad (11)$$

g_α تابع توزیع براساس سرعت و با فرض سیالات تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته شده که تابع توزیع تعادلی آن به صورت رابطه زیر است:

$$\bar{g}_\alpha^{eq} = g_\alpha^{eq} - \cdot / \Delta F_\alpha \quad (12)$$

$$g_\alpha^{eq} = p^* \omega_\alpha + (\Gamma_\alpha - \omega_\alpha) \quad (13)$$

که در آن، $p^* = \frac{p}{\rho c_s^2}$ فشار بی‌بعد شده است. در این رابطه معرف سرعت صوت در واحد شبکه بولتزن بوده و مقدار آن برابر است. برای محاسبه زمان آرامش و لزجت دینامیکی جریان از روابط

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ خطی زیر استفاده شده است:}$$

در حالت آرامش است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{h}_\alpha^{eq} = h_\alpha^{eq} - \cdot / \Delta F_\alpha^\phi \quad (3)$$

$$h_\alpha^{eq} = \phi \Gamma_\alpha \quad (4)$$

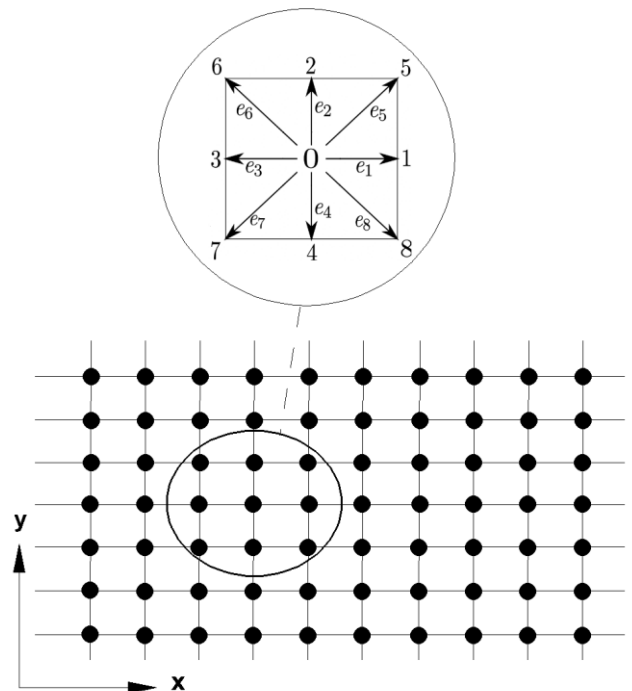
$$\Gamma_\alpha = \omega_\alpha \left[1 + \frac{\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c_s^\tau} + \frac{(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u})^\tau}{2c_s^\tau} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{2c_s^\tau} \right] \quad (5)$$

در معادله بالا، u مقدار ماکروسکوپیک بردار سرعت، W_α تابع

وزنی و $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ سرعت در واحد شبکه بولتزن است. همچنین Δx و Δt به ترتیب گام مکانی و گام زمانی هستند که مقداری واحد دارند.

در روش شبکه بولتزن دوبعدی با ۹ جهت سرعت $D2Q9$ که شماتیک آن در شکل ۱ آورده شده [۸]، مقدارهای تابع وزنی و سرعت ذرات در جهت e_α [۹] به صورت رابطه زیر است:

$$\mathbf{e}_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 0 \\ (\pm 1, 0), (0, \pm 1) & \alpha = 1-4 \\ (\pm 1, \pm 1), (0) & \alpha = 5-9 \end{cases} \quad (6)$$



شکل ۱. شماتیک شبکه بولتزن $D2Q9$

Fig. 1. Schematic of $D2Q9$ lattice

که در آن، F_s نیروی کشش سطحی، F_p نیروی فشار، F_b نیروی گرانش و F_μ نیروی لزجت هستند و به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$F_s = \mu_\phi \nabla \phi \quad (23)$$

$$F_p = -p^* c_s^* \nabla \rho \quad (24)$$

$$F_\mu = \nu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \cdot \nabla \rho \quad (25)$$

$$F_b = -\rho \mathbf{G} \quad (26)$$

در مقاله حاضر، گسسته‌سازی مشتقات هر یک از پارامترها که بصورت عبارتهای $\nabla \phi$ و $\nabla^2 \phi$ در معادلات ظاهر شده‌اند، با استفاده از روابط زیر انجام شده تا از دقت و پایداری حل عددی اطمینان حاصل شود.

$$\nabla \phi = \frac{c}{c_s^* \delta \mathbf{x}} \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \omega_{\alpha} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha} \delta t, t) \quad (27)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{2c^2}{c_s^{*2} (\delta \mathbf{x})^2} \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} [\phi(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha} \delta t, t) - \phi(\mathbf{x}, t)] \quad (28)$$

۳- نتایج و بحث

در این بخش، نتایج عددی حاصل از الگوریتم حاضر برای دینامیک برخورد قطرات در شرایط مختلف جریان ارائه می‌شود. برای اعتبارسنجی روش و اطمینان از صحت اعمال شرایط مرزی دیواره، ابتدا تعادل یک قطره روی سطح در زوایای تماس مختلف انجام شده‌است. سپس، برخورد قطره به یک استوانه مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج عددی آن با نتایج در دسترس مقایسه می‌شود. در نهایت، برخورد یک قطره به حفره نیم‌دایروی شبیه‌سازی شده و نتایج آن مورد بحث قرار گرفته‌است.

۳-۱- حالت تعادل قطره روی سطح صاف آب‌دوست و آب‌گریز

در این مطالعه، قطره‌ای نیم‌دایره روی سطح صاف قرار داده شده و حل عددی برای سه زاویه تماس 90° ، 30° ، و 150° انجام شده تا وقتی که قطره به حالت تعادل برسد. پارامترهای عددی استفاده شده برای این شبیه‌سازی شامل کشش سطحی $\sigma = 0.01$ ،

ضریب ثابت $m = 0.02$ ، نسبت چگالی $\frac{\rho_H}{\rho_L} = 1000$ و نسبت

$$\tau = \tau_L + (\phi - \phi_L)(\tau_H - \tau_L) \quad (14)$$

$$\mu = \mu_L + (\phi - \phi_L)(\mu_H - \mu_L) \quad (15)$$

که در آنها، τ_L و τ_H به ترتیب زمان آرامش برای فازهای گاز و مایع و μ_L و μ_H به ترتیب لزجت دینامیکی فازهای گاز و مایع هستند. رابطه بین لزجت دینامیکی هر یک از فازها با زمان آرامش آن فاز نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tau = \frac{\mu}{\rho c_s^* \delta t} \quad (16)$$

جهت بهبود کارایی روش شبکه بولتزمان به کار گرفته شده در کنار معادله آلن-کاهن برای شبیه‌سازی و مطالعه دینامیک برخورد قطرات در گستره وسیعی از سرعت‌های برخورد، از عملگر برخورد با زمان آرامش چندگانه استفاده شده‌است. در تحقیق حاضر عملگر برخورد برای تابع توزیع g_{α} بصورت زیر اعمال می‌شود:

$$\Omega_{\alpha} = -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{M} (g_{\alpha} - \bar{g}_{\alpha}^{eq}) \quad (17)$$

که در آن، \mathbf{M} یک ماتریس متعامد برای انتقال تابع توزیع از فضای فیزیکی به فضای ممان بوده و $\hat{\mathbf{S}}$ ماتریس ضرایب آرامش است که به صورت زیر بیان می‌شود [۱۰]:

$$\hat{\mathbf{S}} = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, S_v, S_v) \quad (18)$$

مقدار S_v بر اساس مقدار زمان آرامش محاسبه می‌شود:

$$S_v = \frac{1}{\tau + 0.5} \quad (19)$$

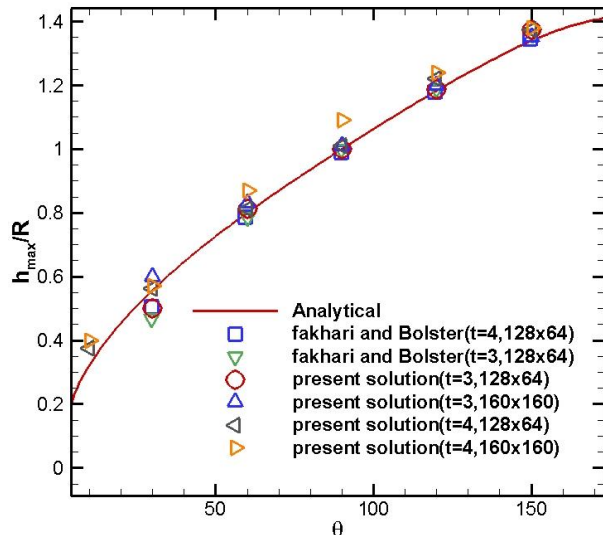
به این ترتیب، مشخصات هیدرودینامیکی میدان شامل فشار و سرعت ماکروسکوپی جریان به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$p^* = \sum_{\alpha} g_{\alpha} \quad (20)$$

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha} g_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} + \frac{\mathbf{F}}{\nu \rho} \delta t \quad (21)$$

نیروی \mathbf{F} به صورت زیر محاسبه می‌شود:

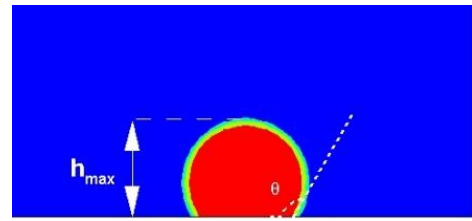
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{\mu} \quad (22)$$



شکل ۴. نمودار تغییرات ارتفاع قطره بر حسب زاویه تماس

Fig. 4. Variation of droplet height in different contact angles)

سطح برای زاویه‌های تماس مختلف محاسبه شده که نتایج آن در شکل ۴ برای دو مقدار مختلف فصل مشترک $\xi = 3$ ، $\xi = 4$ ارائه شده‌اند. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، نتایج عددی حاصل از الگوریتم توسعه داده شده در این تحقیق با داده‌های تحلیلی و عددی دیگران تطابق خوبی دارد. نتایج عددی به‌ویژه برای زاویه‌های تماس بالاتر در ضخامت فصل مشترک $\xi = 4$ دقت بیشتری نسبت به $\xi = 3$ دارد که علت آن، کاهش مقادیر سرعت غیرفیزیکی در فصل مشترک بین دو فاز با افزایش ضخامت این ناحیه در حل عددی است. بیشترین انحراف داده‌های عددی نسبت به مقادیر تحلیلی برای سطح آب‌دوست با زاویه تماس 30° درجه در ضخامت فصل مشترک $\xi = 3$ به‌دست آمده‌است. این مطالعه نشان می‌دهد که مقدار مناسب برای تعیین ضخامت فصل مشترک در حل عددی با استفاده از روش حاضر حدود $\xi = 4$ است. همچنین، مطالعه حساسیت



شکل ۲. پارامترهای اندازه‌گیری ارتفاع قطره از سطح

Fig. 2. Parameters for measuring height of a drop on solid surface)

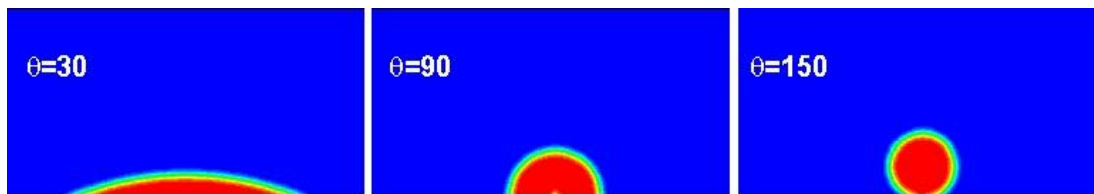
لزجت $\frac{\mu_H}{\mu_L} = 100$ هستند. شکل ۲ شماتیک مقداردهی اولیه و پارامترهای اندازه‌گیری شده در این مسئله را نشان می‌دهد. مرکز

قطره در $(\frac{L}{4}, 0)$ قرار داده شده‌است که L طول ابعاد میدان حل

بوده و قطر قطره برابر $D = 2R = \frac{L}{4}$ است. در این شبیه‌سازی که از اثر نیروی گرانش صرف‌نظر شده، تنها عامل حرکت قطره روی سطح، کشش سطحی است. اگر زاویه تماس $\theta < 90^\circ$ باشد، دیواره آب‌دوست خواهد بود، و به همین دلیل سطح تماس قطره با دیواره تا رسیدن به حالت تعادل افزایش می‌یابد. از طرفی دیگر، اگر زاویه تماس قطره با دیواره جامد $\theta > 90^\circ$ باشد، دیواره جامد آب‌گریز خواهد بود و سطح تماس قطره با دیواره تا رسیدن به حالت تعادل کاهش می‌یابد. نتایج عددی این دو حالت در شکل ۳ نشان داده شده‌است. برای صحت‌سنجی نتایج حاصل از الگوریتم عددی حاضر، نتایج به‌دست‌آمده برای ارتفاع قطره با نتایج شبیه‌سازی عددی و داده‌های تحلیلی مرجع [۱۱] مقایسه و ارزیابی شده‌است. رابطه تحلیلی مورد استفاده برای تعیین ارتفاع قطره به‌صورت زیر بیان می‌شود:

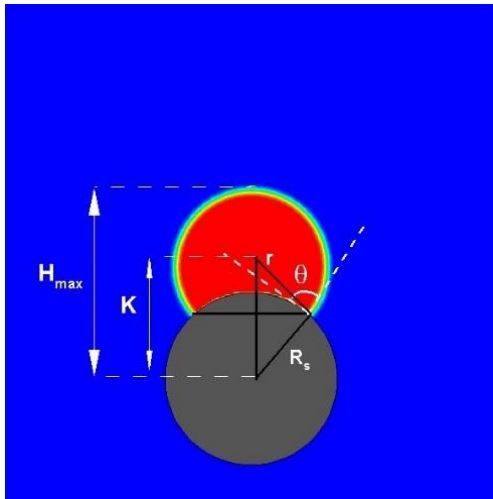
ارتفاع قطره حاصل از حل عددی حاضر در حالت تعادل روی

$$\frac{h_{max}}{R} = (1 - \cos \theta) \sqrt{\frac{\pi}{2\theta - \sin 2\theta}} \quad (29)$$



شکل ۳. نتایج شبیه‌سازی تعادل قطره روی سطح صاف برای سه زاویه تماس 30° ، 90° ، 150°

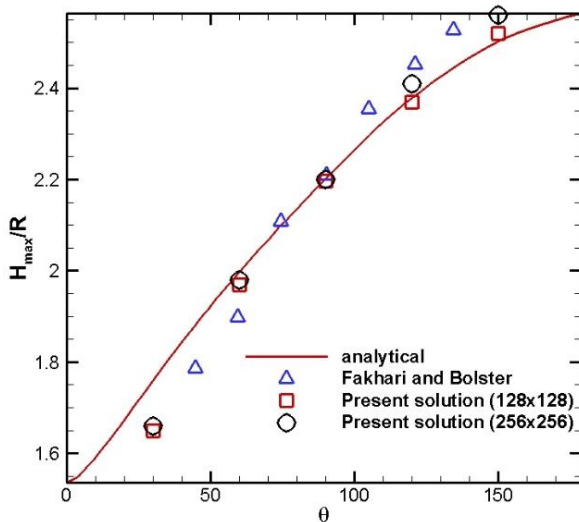
Fig. 3. Results obtained for equilibrium state of droplet on flat surface with contact angles 30° , 90° , 150°)



شکل ۵. شماتیک هندسی تعریف متغیرها برای مطالعه تعادل یک قطره بر روی استوانه

Fig. 5. Geometrical schematic of variable definition for studying equilibrium state of a drop on a cylinder)

استوانه پخش شده و کاملاً آن را می‌پوشاند. در زاویه‌های تماس بالاتر مشاهده می‌شود که به دلیل آب‌گریز شدن سطح، قطره روی استوانه جمع شده و به حالت تعادل رسیده‌است. تطابق بسیار خوب نتایج حاصل از حل حاضر برای تعادل قطره روی سطح منحنی استوانه با نتایج دیگران نشان می‌دهد که الگوریتم عددی توسعه داده شده از دقت خوبی برای مدل‌سازی دینامیک فصل مشترک در نسبت‌های لزجت و چگالی بالا بر روی سطوح منحنی برخوردار است. بنابراین،



شکل ۶. مقایسه ارتفاع قطره بر روی استوانه حاصل از حل عددی حاضر با نتایج حل تحلیلی و عددی موجود در زاویه تماس‌های مختلف

Fig. 6. Comparison of droplet height on cylinder obtained based on present Allen-Cahn LBM with available theoretical and numerical data at different contact angles)

نتایج حل حاضر به تعداد نقاط شبکه در شکل ۴ نشان می‌دهد که با استفاده از شبکه 160×160 ، دقت روش ارائه شده بیشتر شده و مقادیر حل عددی به مقادیر تحلیلی نزدیک تر می‌شود.

۳-۲- تعادل قطره روی سطح آب‌دوست و آب‌گریز یک استوانه

برای بررسی دقت و کارایی الگوریتم عددی حاضر بر اساس روش شبکه بولتزمن چندفازی و معادله آلن-کاهن روی سطوح انحنا دار، تعادل یک قطره روی سطح استوانه با صرف نظر کردن از نیروی گرانش شبیه‌سازی شده‌است. این مطالعه در گستره‌ای از زاویه‌های تماس بین $10^\circ < \theta < 180^\circ$ انجام شده‌است. شماتیک هندسی میدان حل در

شکل ۵ نشان داده شده که یک استوانه به قطر $D = 2R_s = \frac{L_x}{3}$ و

مرکز $(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{4})$ در وسط میدان حل قرار گرفته‌است. سپس قطره‌ای

به شعاع $r = R_s$ و مرکز $(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{4} + R_s)$ روی سطح استوانه بدون

اعمال گرانش قرار داده شده که مشخصات سیال آن $\frac{\rho_H}{\rho_L} = 1.000$

و $\frac{\mu_H}{\mu_L} = 1.0$ تعیین شده‌است. در شکل ۶، نتایج به دست آمده از حل

عددی حاضر برای ارتفاع قطره $H_{max} = r + k$ بعد از رسیدن به

تعادل بر روی استوانه با داده‌های رابطه تحلیلی همچنین با نتایج حل

عددی مرجع [۱۱] مقایسه شده‌است. برای محاسبه پارامتر هندسی

k از رابطه زیر استفاده شده‌است:

$$k = \sqrt{r^2 + R_s^2 - 2R_s r \cos \theta} \quad (30)$$

در شکل ۶، ارتفاع قطره نسبت به شعاع اولیه قطره بی‌بعد

شده‌است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش زاویه

تماس ارتفاع قطره افزایش یافته‌است. افزایش ارتفاع به این علت است

که با آب‌گریز شدن سطح استوانه، قطره اولیه به علت کاهش کشش

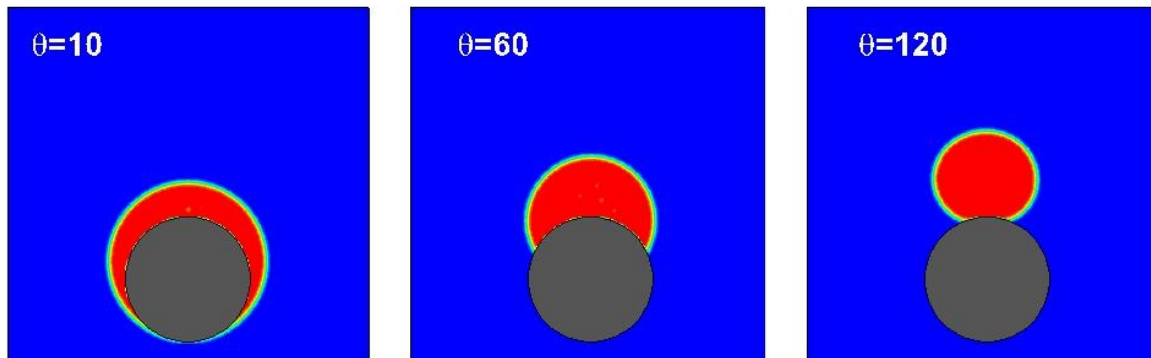
سطحی شروع به بالا رفتن روی سطح منحنی استوانه می‌کند تا در

نهایت به تعادل برسد. در این مطالعه، دو اندازه شبکه مختلف برای

حل عددی استفاده شده که تطابق خوب نتایج شبکه ریزتر با نتایج

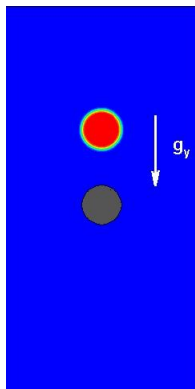
دیگران مشهود است. حالت تعادل قطره روی استوانه در سه زاویه

تماس 60° ، 10° ، و 120° درجه در شکل ۷ نشان داده شده‌است. واضح است که در حالت آب‌دوستی سطح، قطره تقریباً روی سطح



شکل ۷. حالت تعادل یک قطره با نسبت چگالی ۱۰۰۰ و نسبت لزجت ۱۰۰ بر روی یک استوانه در سه زاویه تماس مختلف

Fig. 7. Equilibrium state of a drop with density ratio 1000 and viscosity ratio 100 on a cylinder at three different contact angles)



شکل ۸. میدان حل جهت مطالعه برخورد یک قطره به استوانه در حین سقوط

Fig. 8. Flow domain for studying a falling droplet impact on a cylinder)

صورت $Re_g = \rho_H \sqrt{\frac{g_y D^3}{\mu_H^2}}$ و عدد باند نیز به صورت رابطه

$$Bo = \frac{g_y D^2 (\rho_H - \rho_L)}{\sigma}$$

تعریف می‌شود. مقادیر عددی نسبت

چگالی و لزجت به ترتیب برابر $\frac{\rho_H}{\rho_L} = 1000$ و $\frac{\mu_H}{\mu_L} = 100$

و عدد رینولدز بر اساس مقدار شتاب گرانش برابر $Re_g = 25$ در

نظر گرفته شده‌اند. سپس، شبیه‌سازی‌های عددی برای اعداد Bo مختلف به ازای خاصیت‌های آب‌گریزی و آب‌دوستی سطح استوانه انجام شده‌است. نتایج حاصل از حل عددی حاضر با زمان بی‌بعد ارائه

شده که از رابطه $t^* = \frac{(t - t_i) u_i}{D}$ محاسبه می‌شود. در این رابطه،

u_i سرعت و t_i زمان در لحظه برخورد قطره به سطح استوانه

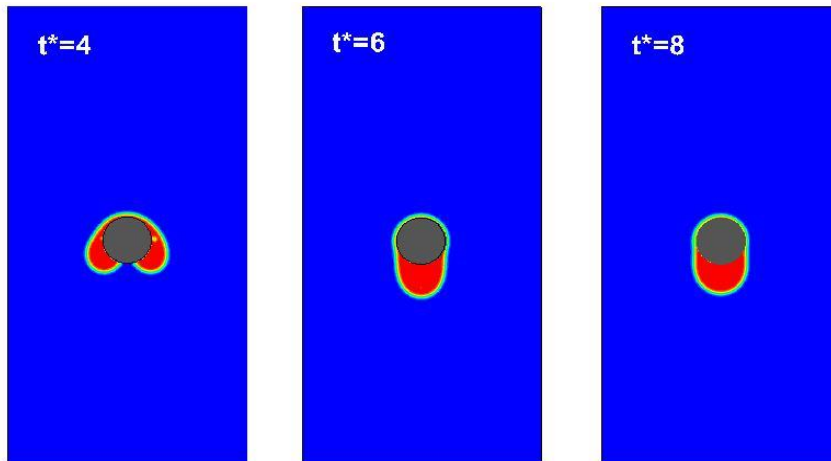
امکان اعمال آن برای شبیه‌سازی جریان‌های چندفازی کاربردی با هندسه‌های دارای مرز منحنی فراهم است.

۳-۳- برخورد قطره روی سطح استوانه در حضور نیروی گرانش

این مطالعه به منظور نشان دادن کارایی و پایداری الگوریتم ارائه‌شده بر اساس روش شبکه بولتزن در کنار معادله آلن-کاهن برای شبیه‌سازی دینامیک پیچیده فصل مشترک در نسبت‌های چگالی و لزجت بالا در یک جریان چندفازی انجام شده‌است. به این منظور، دینامیک برخورد یک قطره در حین سقوط بر اثر نیروی گرانش به سطح منحنی یک استوانه مد نظر قرار گرفته‌است. بررسی و ارزیابی نتایج حل حاضر با در نظر گرفتن داده‌های تجربی مرجع [۱۲] انجام می‌شود. شماتیک هندسی برای مطالعه برخورد قطره به استوانه در حضور نیروی گرانش در شکل ۸ نشان داده شده که در آن

قطره‌ای به شعاع $R = \frac{D}{2} = \frac{L_1}{10}$ در نقطه $(\frac{L_1}{2}, \frac{3L_1}{2})$ از میدان حل در نظر گرفته شده‌است. هندسه استوانه با شعاع $R = R_s$

در مرکز میدان حل $(\frac{L_1}{2}, L_1)$ قرار دارد. در شروع حل، قطره به دلیل نیروی گرانش به سمت استوانه حرکت می‌کند که در روش شبکه بولتزن، اثر نیروی گرانش از طریق نیروی حجمی به صورت $F_b = -\rho g_y$ به قطره اعمال می‌شود [۱۱]. در رابطه ذکر شده، g_y مقدار شتاب گرانش است و عدد رینولدز براساس مقدار آن به



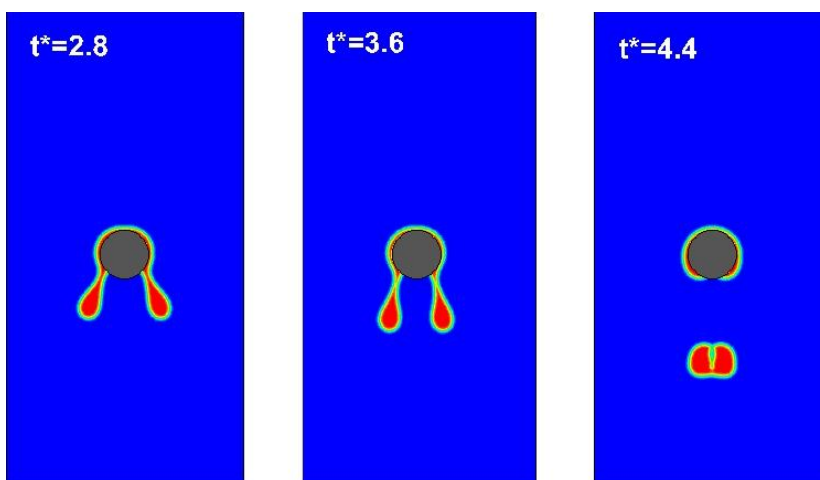
شکل ۹. نتایج حل عددی حاضر برای برخورد قطره روی سطح آب دوست استوانه با $\theta = 40^\circ$ و $Bo = 2/2$ در سه زمان بی بعد مختلف

Fig. 9. Present numerical results obtained for a droplet impact on hydrophilic surface of a cylinder with contact angle) 40° and $Bo = 2.2$ at three different dimensionless times)

نشان می دهد. همانطور که در این شکل مشخص است، با افزایش عدد باند، اثرات نیروی گرانش بر کشش سطحی غالب شده و سبب می شود که بخشی از قطره بعد از برخورد به سطح آب دوست استوانه، از آن جدا شده و به پایین استوانه سقوط کند. اگر چه، آب دوستی سطح سبب می شود که لایه ای از فاز مایع بر روی سطح استوانه باقی بماند. مقایسه نتایج حاصل از حل عددی حاضر در شکل های ۹ و ۱۰ برای برخورد یک قطره در دو شرایط جریان مختلف به سطح آب دوست یک استوانه با زاویه تماس $\theta = 40^\circ$ نشان می دهد که دینامیک قطره بعد از برخورد به دو نیروی موثر حاصل از کشش سطحی و گرانش بستگی دارد. همچنین، این نتایج تایید می کنند که با وجود

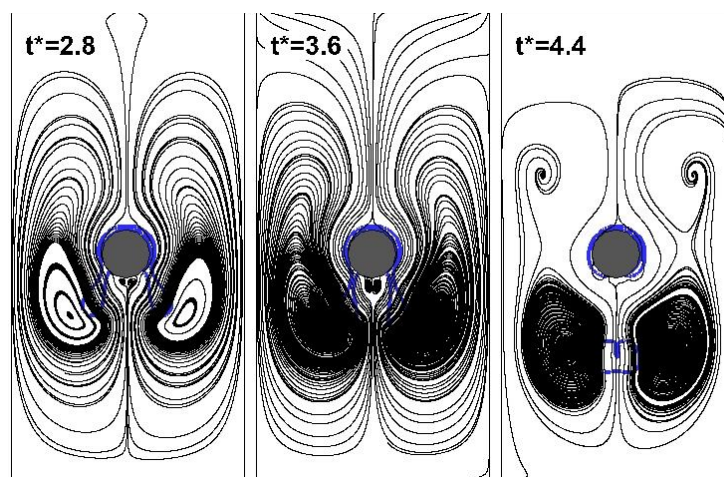
هستند.

شکل ۹ برخورد قطره به سطح آب دوست استوانه با زاویه تماس $\theta = 40^\circ$ در شرایط جریان با $Bo = 2/2$ را در سه زمان بی بعد مختلف نشان می دهد. با توجه به این که عدد باند پایین است، برخورد قطره به سطح استوانه به آرامی صورت گرفته و به علت آب دوستی سطح، قطره بعد از برخورد به استوانه چسبیده و به آرامی به تعادل می رسد. به عبارتی، نیروی گرانش در این حالت نسبت به نیروی کشش سطحی بین قطره و سطح استوانه ضعیف تر بوده و غالب بودن نیروی کشش سطحی مانع از جدا شدن قطره از سطح استوانه شده است. شکل ۱۰، تکرار این مطالعه را با افزایش عدد باند به مقدار $6/6$



شکل ۱۰. نتایج حل عددی حاضر برای برخورد قطره روی سطح آب دوست استوانه با $\theta = 40^\circ$ و $Bo = 6/6$ در سه زمان بی بعد مختلف

Fig. 10. Present numerical results obtained for a droplet impact on hydrophilic surface of a cylinder with contact angle) 40° and $Bo = 6.6$ at three different dimensionless times)



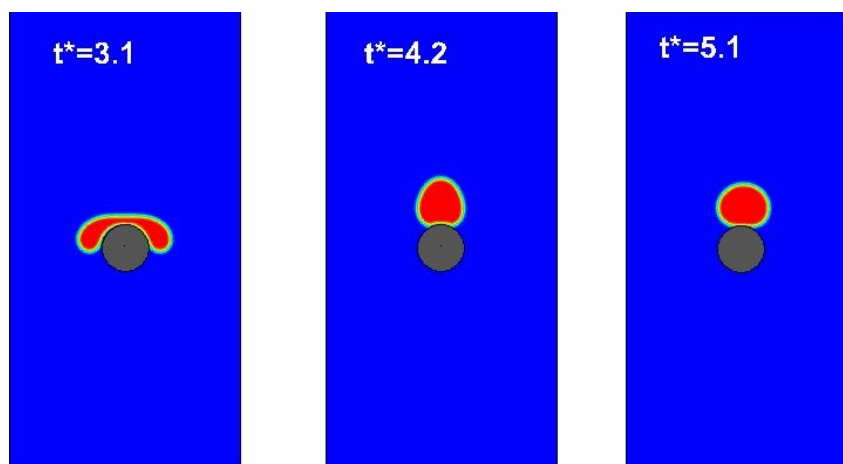
شکل ۱۱. خطوط جریان حل حاضر برای برخورد قطره روی سطح آب دوست استوانه با $\theta = 40^\circ$ و $Bo = 2.2$ در سه زمان بی بعد مختلف

Fig. 11. Present numerical results obtained for streamlines around a impacting droplet on hydrophilic surface of a) cylinder with contact angle 40° and $Bo = 2.2$ at three different dimensionless times)

برخورد در مسیر سقوط خود به پایین به همدیگر متصل می شوند. در ادامه، جهت مطالعه تاثیر آب دوستی و آب گریزی سطح استوانه بر دینامیک بعد از برخورد قطره، این مطالعه با در نظر گرفتن زاویه تماس $\theta = 170^\circ$ در سه شرایط جریان $Bo = 2/2, 3/3, 6/6$ انجام شده است. در واقع سطح استوانه در این مطالعه بصورت فوق آب گریز در نظر گرفته شده که کاربرد گسترده ای در صنایع مختلف دارد و مطالعه دینامیک جریان های چندفازی در اندرکنش با این نوع سطوح یکی از چالش های استفاده از روش های عددی است. در این مطالعه نشان داده شده که الگوریتم عددی حاضر به خوبی قابلیت مدل سازی آن را دارا است. نتایج حاصل از این مطالعه در شکل های ۱۲ تا ۱۴

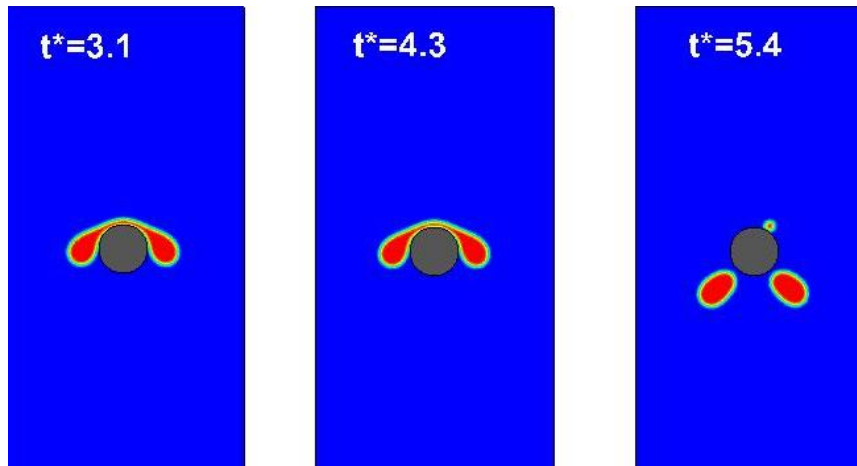
در نظر گرفتن نسبت چگالی و لزجت بالا برای شبیه سازی این جریان چندفازی، الگوریتم توسعه داده شده از پایداری خوبی برای پیش بینی دینامیک فصل مشترک برخوردار است.

خطوط جریان در اطراف استوانه بعد از برخورد قطره به سطح آن در زاویه تماس $\theta = 40^\circ$ و در شرایط جریان $Bo = 6/6$ در شکل ۱۱ و در سه زمان بی بعد مختلف نشان داده شده است. همانطور که در این شکل مشاهده می شود، در اثر جدایش قطره بعد از برخورد به استوانه، یک جفت گردابه متقارن در پایین دست استوانه شکل می گیرد که دینامیک و شکل قطرات جدا شده را تعیین می کنند. در اثر وجود این گردابه های جریان است که دو قطره جدا شده بعد از



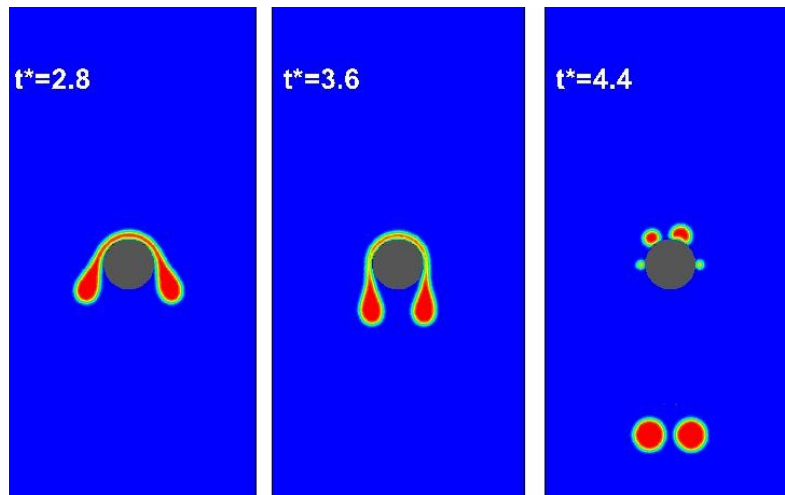
شکل ۱۲. نتایج حاصل از حل حاضر برای برخورد قطره روی سطح آب گریز استوانه با $\theta = 170^\circ$ و $Bo = 2/2$ در سه زمان بی بعد مختلف

Fig. 12. Present numerical results obtained for a droplet impact on hydrophobic surface of a cylinder with contact) angle 170° and $Bo = 2.2$ at three different dimensionless times)



شکل ۱۳. نتایج حاصل از حل حاضر برای برخورد قطره روی سطح آب‌گریز استوانه با $\theta = 170^\circ$ و $Bo = 3/3$ در سه زمان بی‌بعد مختلف

Fig. 13. Present numerical results obtained for a droplet impact on hydrophobic surface of a cylinder with contact angle 170° and $Bo = 3.3$ at three different dimensionless times)



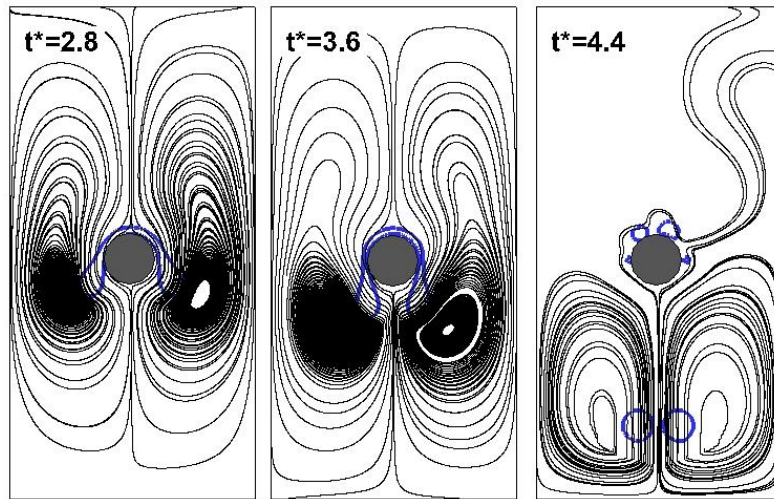
شکل ۱۴. نتایج حاصل از حل حاضر برای برخورد قطره روی سطح آب‌گریز استوانه با $\theta = 170^\circ$ و $Bo = 6/6$ در سه زمان بی‌بعد مختلف

Fig. 14. Present numerical results obtained for a droplet impact on hydrophobic surface of a cylinder with contact angle 170° and $Bo = 6.6$ at three different dimensionless times)

تفاوت که وقتی سطح آب‌دوست است، قطره روی سطح استوانه پخش می‌شود، ولی وقتی سطح آب‌گریز است، سطح استوانه خیس نمی‌شود و قطره در بالای استوانه باقی می‌ماند.

همانطور که در شکل ۱۳ دیده می‌شود، با افزایش عدد باند به مقدار ، قطره بعد از برخورد به سطح فوق‌آب‌گریز استوانه به دو قطره کوچک‌تر شکسته شده و از دو طرف استوانه به پایین دست سقوط می‌کند. در این حالت، شدت برخورد به علت نیروی حاصل از شتاب گرانش بر نیروهای کشش سطحی غلبه کرده و سبب گسیختگی فصل

نشان داده شده‌اند. همانطور که در شکل ۱۲ مشخص است، در اثر غالب بودن کشش سطحی نسبت به شتاب گرانش در $Bo = 2/2$ ، قطره بعد از برخورد به سطح منحنی فوق‌آب‌گریز استوانه دوباره جمع شده و در قسمت بالای استوانه به تعادل می‌رسد. این فیزیک تقریباً مشابه دینامیک برخورد قطره به سطح آب‌گریز صاف است که در آن نیز قطره از هم نمی‌پاشد. مقایسه شکل ۱۲ با شکل ۹ نشان می‌دهد که در یک عدد باند مشخص و پایین، مستقل از اینکه سطح آب‌دوست باشد یا آب‌گریز، قطره از استوانه جدا نمی‌شود. با این



شکل ۱۵. خطوط جریان حاصل از نتایج حل عددی حاضر برای برخورد قطره روی سطح آب‌گریز استوانه با $\theta = 170^\circ$ و $Bo = 6/6$ در سه زمان بی‌بعد مختلف

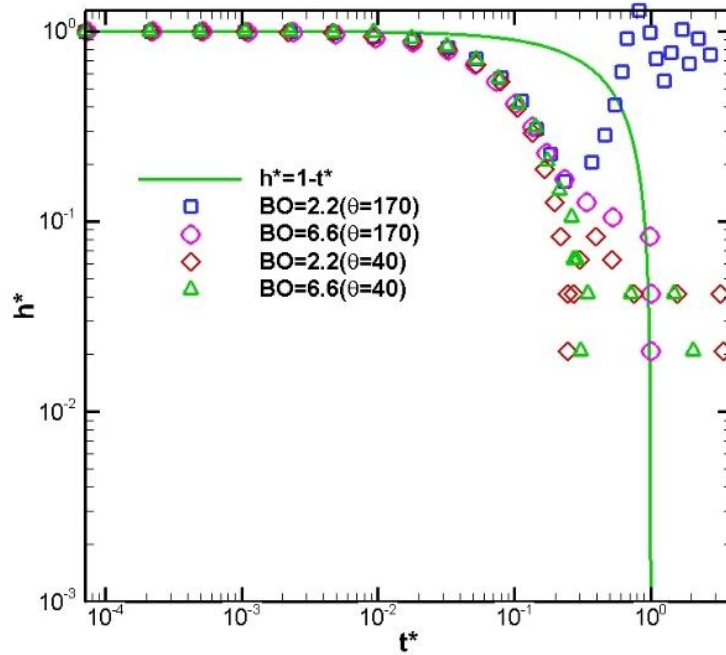
Fig. 15. Present numerical results obtained for streamlines around an impacting droplet on hydrophobic surface of a) cylinder with contact angle 170° and $Bo = 6.6$ at three different dimensionless times)

بحث‌شده در مطالعه تجربی مرجع [۱۲] مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. در این تعریف، h_i ارتفاع قطره در لحظه تماس با استوانه و $h_f(t)$ تغییرات زمانی ارتفاع قطره در فرآیند برخورد با استوانه است. نتایج تجربی مرجع [۱۲] نشان می‌دهند که تغییرات زمانی ارتفاع قطره h^* در حین برخورد به استوانه باید از یک رابطه برازش‌شده به صورت $h^* = 1 - t^*$ تبعیت کند. شکل ۱۶ مقایسه بین نتایج حل حاضر با رابطه برازش‌شده را برای دو زاویه تماس $\theta = 40^\circ$ و $\theta = 170^\circ$ به ازای شرایط جریان با $Bo = 2/2$ و $Bo = 6/6$ نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشهود است، رفتار نتایج حاصل از حل حاضر در شرایطی که قطره روی سطح استوانه پخش می‌شود کاملاً رفتار رابطه برازش‌شده را دنبال می‌کنند. در ابتدای فرآیند برخورد قطره به سطح استوانه، نیروی اینرسی نسبت به نیروی لزجت غالب است، اما با گذشت زمان، نیروهای لزجت در دینامیک قطره موثر شده و در اندرکنش با نیروی شتاب‌گرانش رفتار قطره را تعیین می‌کنند. به همین دلیل، در زمان‌های اولیه برخورد، نتایج حاصل از حل عددی با رابطه تحلیلی $h^* = 1 - t^*$ تطابق دارد، اما با گذشت زمان و در توازن بین نیروهای حاصل از لزجت و شتاب‌گرانش، رفتار قطره پیچیده شده و از رابطه تحلیلی پیروی نمی‌کند. در شرایط جریان $Bo = 2/2$ برای سطح فوق‌آب‌گریز $\theta = 170^\circ$ ، نوسان ارتفاع قطره بعد از برخورد به سطح استوانه و جمع شدن آن تا رسیدن به شرایط تعادل ($h^* = 1$) مشخص است. انحراف‌های که در نمودار دیده می‌شود، به دلیل ماهیت متفاوت نتایج حاصل از

مشترک بین قطره و گاز اطراف آن می‌شود. در $Bo = 6/6$ که نتایج آن در شکل ۱۴ نشان داده شده، شکسته شدن قطره به قطرات کوچکتر به خوبی مشهود است که نشان‌دهنده شدت برخورد بالای قطره به سطح فوق‌آب‌گریز استوانه است. دینامیک فصل مشترک در این حالت پیچیده است و نتایج حل حاضر نشان می‌دهد که الگوریتم عددی توسعه داده شده به خوبی این رفتار از جریان چندفازی مورد مطالعه را در نسبت چگالی ۱۰۰۰ و نسبت لزجت ۱۰۰ پیش‌بینی کرده است. شکل ۱۵، خطوط جریان را برای برخورد قطره به سطح آب‌گریز استوانه با زاویه تماس $\theta = 170^\circ$ در $Bo = 6/6$ و در سه زمان بی‌بعد مختلف نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، آب‌گریز بودن سطح سیلندر سبب شکسته شدن قطره اصلی به دو قطره مجزا شده که به سمت پایین‌دست حرکت می‌کنند. از حرکت این دو قطره کوچک، گردابه‌های متقارن در پایین‌دست استوانه شکل گرفته که طول آنها در مقایسه با شکل ۱۱ بیشتر شده است. علت این افزایش طول، افزایش شدت برخورد قطره به سطح استوانه و شکل گرفتن جریان قدرتمندی از فاز گاز در اطراف قطره است که با افزایش عدد باند ایجاد شده است.

جهت اعتبارسنجی نتایج حل عددی حاضر برای برخورد قطره به سطح استوانه، تغییرات زمانی ارتفاع قطره روی استوانه با اندازه‌گیری

ضخامت فیلم مایع با رابطه $h^*(t) = \frac{h_f(t)}{h_i}$ رسم شده و با نتایج



شکل ۱۶. تغییرات زمانی ضخامت فیلم بالای استوانه بعد از برخورد قطره به آن

Fig. 16. Time variation of liquid film thickness on cylinder after droplet impaction

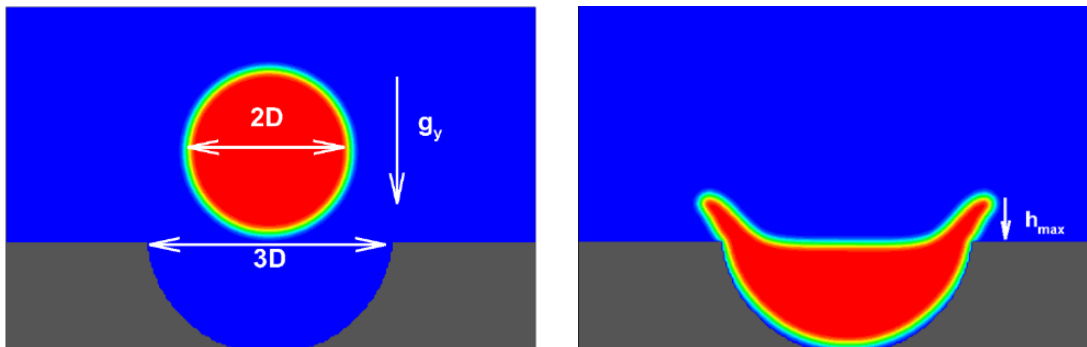
نیم‌دایره در نسبت‌های چگالی و لزجت بالا مطالعه شده‌است. به این

منظور، قطره‌ای به قطر $D = 2R$ و در فاصله $\frac{3D}{2}$ از یک حفره نیم‌دایروی مطابق شکل ۱۷ در نظر گرفته شده، بطوری که قطر حفره $3D$ و ابعاد میدان حل $6D \times 4D$ است. قطره تحت تاثیر نیروی گرانش به سمت حفره سقوط می‌کند و بر اساس شدت برخورد و آب‌دوستی و آب‌گریزی سطح حفره، دینامیک متفاوتی حاصل می‌شود. در مطالعه حاضر، قطر حفره $D = 40$ در واحد شبکه در نظر گرفته شده و دینامیک قطره بعد از برخورد با اندازه‌گیری ارتفاع لبه فصل مشترک قطره در بیرون از حفره بررسی شده که در شکل ۱۷ با h_{max} مشخص شده‌است.

حل عددی دوبعدی قطره‌است، در حالی که نمودار برازش شده بر اساس رفتار قطره واقعی در فضای سه‌بعدی استخراج شده‌است. با این حال، کارآیی حل حاضر در پیش‌بینی رفتار کلی تغییرات زمانی ارتفاع قطره بر روی سطح استوانه نشان‌دهنده توانایی الگوریتم عددی توسعه داده‌شده برای شبیه‌سازی و تعیین مشخصات فصل مشترک جریان‌های چندفازی با دینامیک پیچیده است.

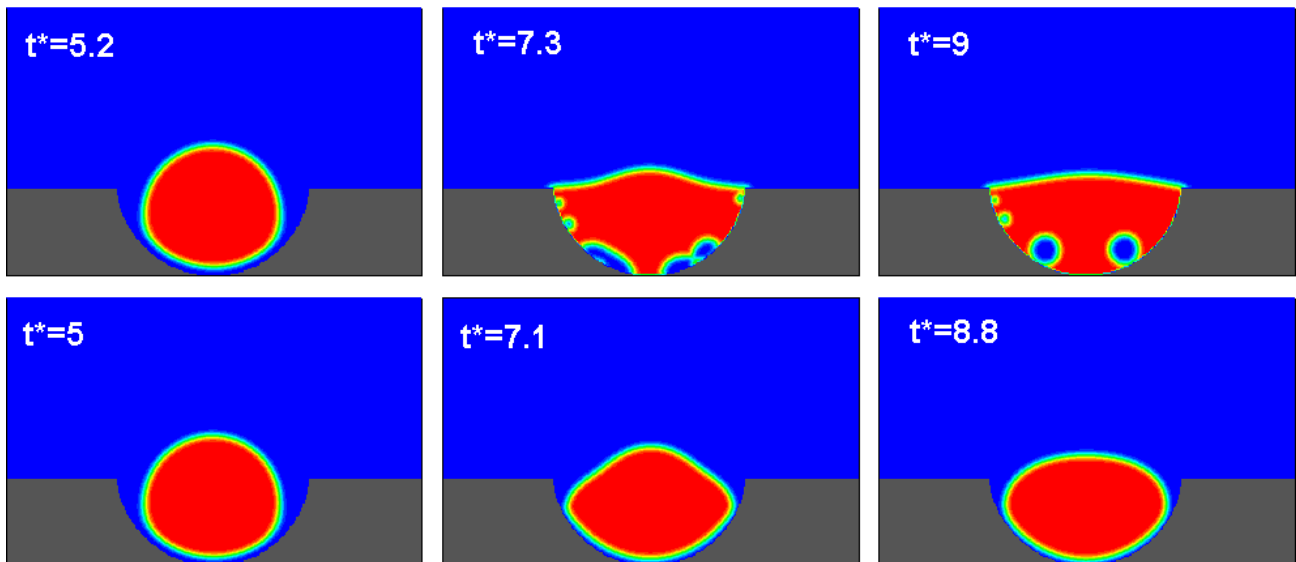
۳-۴- برخورد قطره به حفره نیم‌دایره در حضور نیروی گرانش

کارآیی و پایداری روش شبکه بولتزمان ارائه‌شده براساس معادله آلن-کاهن با شبیه‌سازی دینامیک برخورد قطره به داخل یک حفره



شکل ۱۷. مشخصات هندسی میدان حل جهت مطالعه برخورد قطره به داخل حفره نیم‌دایروی

Fig. 17. Geometrical parameters for studying a droplet impaction into a semicircular cavity



شکل ۱۸. نتایج حاصل از حل عددی حاضر برای برخورد قطره به داخل حفره نیم‌دایره با نسبت چگالی ۱۰۰۰ و نسبت لزجت ۱۰۰ در $Re = 25$ و $Bo = 6/6$ در زاویه تماس $\theta = 40^\circ$ (ردیف بالا) و $\theta = 170^\circ$ (ردیف پایین) در سه زمان بی‌بعد مختلف

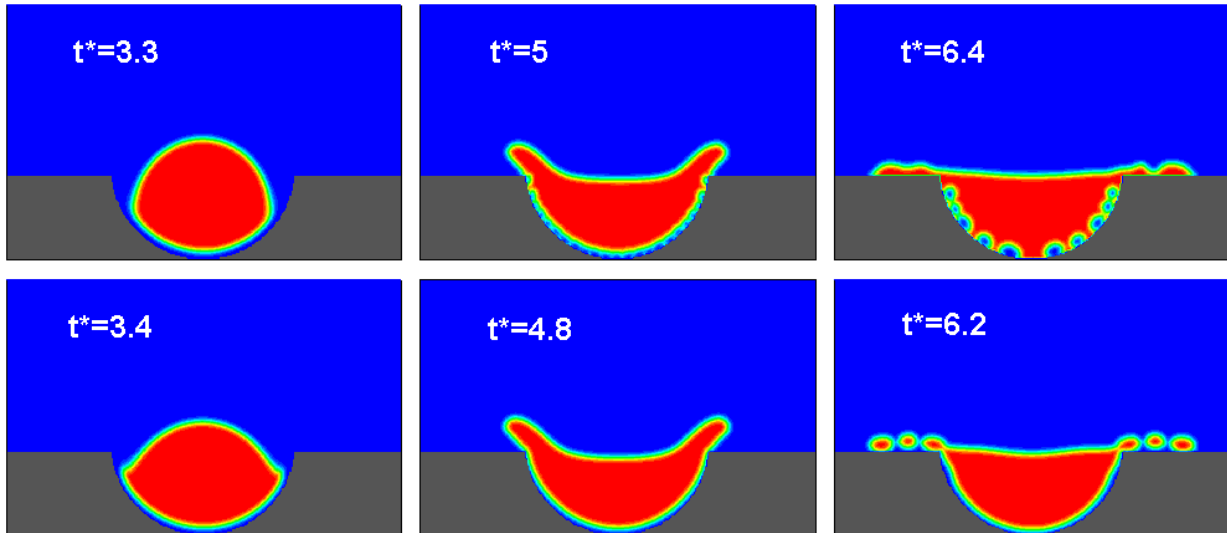
Fig. 18. Present results obtained for a sequence of impacting droplet into a semicircular cavity with density ratio 1000 and viscosity ratio 100 at $Re = 25$, $Bo = 6.6$, and contact angle of 40° (top row) and 170° (bottom row)

خاصیت آب‌گریزی داشته باشد تا از حبس فاز گاز در داخل فاز مایع جلوگیری نماید.

شکل ۱۹ مطالعه مشابهی را در شرایط جریان (ب) $Bo = 5000$ و $Re = 40$ نشان می‌دهد که در آن هر دو عدد بی‌بعد موثر بطور قابل توجهی افزایش داده شده‌اند. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که بعد از برخورد قطره به داخل حفره در این حالت، لبه‌های فصل مشترک بین دو فاز از حفره بالا آمده و فاز مایع به بیرون از حفره ریخته شده‌است. حداکثر ارتفاع بالا آمدن لبه‌های فاز مایع در ادامه بررسی خواهد شد. دینامیک ارائه‌شده در شکل ۱۹ موید حبس شدن حباب‌های گاز در داخل فاز مایع برای سطح آب‌دوست حفره حتی در اعداد باند و رینولدز بالا است. با این تفاوت که، اندازه حباب‌ها ریزتر شده و توزیع آنها تقریباً یک‌دست است. نتایج حاضر نشان می‌دهند که وقتی سطح جامد آب‌گریز است، حبابی در داخل فاز مایع حبس نمی‌شود و فاز مایع بالا آمده از حفره، به دلیل فوق‌آب‌گریز بودن سطح بیرون، به‌صورت قطرات ریز تغییر شکل داده‌اند.

با افزایش عدد رینولدز به مقدار $Re = 80$ ، ارتفاع بالا آمدن لبه فاز مایع از سطح حفره بعد از برخورد قطره به داخل آن افزایش می‌یابد. دینامیک این حالت از برخورد قطره به سطح آب‌دوست و آب‌گریز حفره نیم‌دایره در شکل ۲۰ نشان داده شده‌است. به

دینامیک قطره در برخورد با حفره نیم‌دایره با در نظر گرفتن زاویه‌های تماس 170° و 40° و در سه شرایط جریان (الف) $Bo = 6/6, Re = 25$ و (ب) $Bo = 5000, Re = 40$ ، و (ج) $Bo = 5000, Re = 80$ مطالعه شده تا تاثیر آب‌دوستی و آب‌گریزی سطح همچنین اثرات دو عدد بی‌بعد Re و Bo در دینامیک فصل مشترک ارزیابی شود. شکل ۱۸ نتایج حاصل از حل عددی حاضر بر مبنای روش شبکه بولتزمن را برای برخورد قطره به حفره نیم‌دایروی در حالت (الف) و در سه زمان بی‌بعد نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشهود است، قطره بعد از برخورد به داخل حفره با سطح آب‌دوست و آب‌گریز، در داخل حفره محبوس می‌شود و فاز مایع به بیرون از حفره پاشیده نمی‌شود. علت این دینامیک را می‌توان به پایین بودن عدد باند و در نتیجه شدت پایین برخورد مرتبط دانست. نتایج حاصل از حل حاضر نشان می‌دهد که در حالت آب‌دوست، بخشی از فاز گاز داخل حفره در حین برخورد قطره به داخل آن، بین قطره و دیواره محبوس شده و به صورت حباب‌های کوچک نمایان می‌شوند. اما، حبس شدن حباب‌های فاز گاز در فاز مایع برای حالتی که سطح حفره آب‌گریز باشد، اتفاق نمی‌افتد. مشاهده این پدیده نشان می‌دهد که جهت اطمینان از همگن ماندن یک قطره بعد از برخورد به سطح در کاربری‌های مختلف، نیاز است جنس سطح

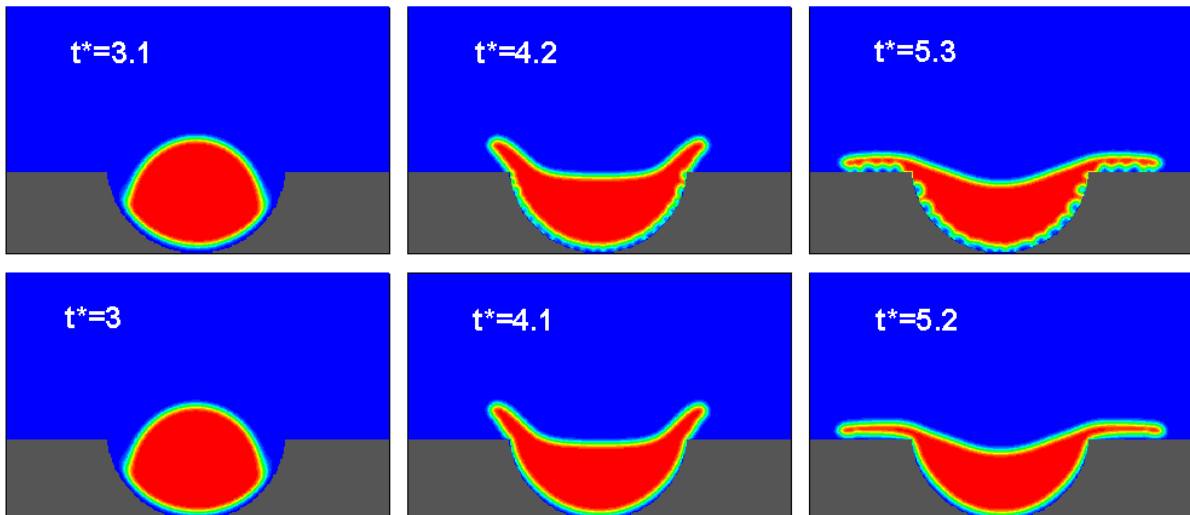


شکل ۱۹. نتایج حاصل از حل عددی حاضر برای برخورد قطره به داخل حفره نیم‌دایره با نسبت چگالی ۱۰۰۰ و نسبت لزجت ۱۰۰ در $Re = 40$ و $Bo = 5000$ در سه زمان بی‌بعد مختلف و در زاویه تماس $\theta = 40^\circ$ (ردیف بالا) و $\theta = 170^\circ$ (ردیف پایین)

Fig. 19. Present results obtained for a sequence of impacting droplet into a semicircular cavity with density ratio 1000 and viscosity ratio 100 at $Re = 40$, $Bo = 5000$, and contact angle of 40° (top row) and 170° (bottom row)

کاهش لزجت مایع مرتبط است. این مطالعه نشان می‌دهد که با در نظر گرفتن یک قطره با قطر مشخص، مقادیر اعداد بی‌بعد بر دینامیک برخورد آن به یک حفره نیم‌دایره‌ای تأثیر بسزایی دارند. بطوری که اگر در کاربرد مشخصی، ممانعت از پاشیدگی قطره و یا همگن ماندن آن مد نظر باشد، در نظر گرفتن خاصیت آبدوستی و آب‌گریزی سطوح همچنین شدت برخورد قطره و مشخصات فیزیکی آن اهمیت دارند.

علت افزایش شدت برخورد قطره به سطح آبدوست داخل حفره، حباب‌های محبوس شده در داخل قطره ریزتر شده‌اند، به طوری که در زمان بی‌بعد $t^* = 5/3$ حباب‌های ریزی بین فصل مشترک قطره و سطح داخل حفره مشاهده می‌شود. در نتایج به دست آمده از حل حاضر مشهود است که لبه مایع بیرون پاشیده شده از حفره کشیدگی بیشتری در عدد $Re = 80$ نسبت به $Re = 40$ دارد که به



شکل ۲۰. نتایج حاصل از حل عددی حاضر برای برخورد قطره به داخل حفره نیم‌دایره با نسبت چگالی ۱۰۰۰ و نسبت لزجت ۱۰۰ در $Re = 80$ و $Bo = 5000$ در سه زمان بی‌بعد مختلف و در زاویه تماس $\theta = 40^\circ$ (ردیف بالا) و $\theta = 170^\circ$ (ردیف پایین)

Fig. 20. Present results obtained for a sequence of impacting droplet into a semicircular cavity with density ratio 1000 and viscosity ratio 100 at $Re = 80$, $Bo = 5000$, and contact angle of 40° (top row) and 170° (bottom row)

جدول ۱. مقایسه ارتفاع بالا آمدن لبه فاز مایع از سطح حفره نیم‌دایره برای مطالعه برخورد قطره به داخل آن در شرایط مختلف جریان

Table 1. Comparison of splashing height of liquid phase obtained for droplet impaction into semicircular cavity at different flow conditions)

حالت	مشخصات جریان	زاویه تماس θ	h_{max}/D
(الف)	$Bo = 6/6$ $Re = 25$	40° 170°	\cdot \cdot
(ب)	$Bo = 5000$ $Re = 40$	40° 170°	$\cdot/375$ $\cdot/401$
(ج)	$Bo = 5000$ $Re = 80$	40° 170°	$\cdot/428$ $\cdot/502$

گاز بین قطره و سطح آب‌گریز، امکان پاشش آن به سطح بیرون از حفره بیشتر از سطح آب‌دوست است. همچنین نتایج حاصل از این تحقیق نشان‌دهنده کارایی و توانمندی الگوریتم توسعه داده‌شده برای شبیه‌سازی دینامیک پیچیده فصل مشترک در جریان‌های چندفازی با نسبت‌های چگالی و لزجت بالاست.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک الگوریتم عددی با استفاده از روش شبکه بولتزمن بر اساس معادله آلن-کاهن جهت شبیه‌سازی جریان‌های چندفازی با دینامیک پیچیده فصل مشترک در نسبت‌های بالای چگالی و لزجت توسعه داده شده‌است. جهت بهبود کارایی روش و حفظ پایداری حل عددی در سرعت‌های بالا از عملگر برخورد با زمان آرامش چندگانه استفاده شد. دقت و کارایی الگوریتم توسعه داده‌شده با ارزیابی نتایج حاصل از آن برای شبیه‌سازی چند مسئله مرتبط با دینامیک برخورد قطرات بر روی سطوح منحنی با در نظر گرفتن اثرات آب‌دوستی و آب‌گریزی سطح بررسی شد. جمع‌بندی نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که:

(الف) نتایج حاصل از حل عددی حاضر با روابط تحلیلی، نتایج عددی و داده‌های تجربی تطابق خوبی دارند که نشان‌دهنده دقت و صحت الگوریتم توسعه داده‌شده بر اساس روش شبکه بولتزمن است.
(ب) روش حاضر پایداری خوبی در پیش‌بینی رفتار فصل مشترک جریان‌های چندفازی با نسبت چگالی و لزجت بالا در دو شرایط حالت تعادل و حالت دینامیکی دارد. اعتبارسنجی نتایج حاصل از شبیه‌سازی تعادل یک قطره روی سطوح صاف و منحنی و برخورد یک قطره به

برای کمی‌سازی ارتفاع بالا آمدن فاز مایع از سطح حفره بعد

از برخورد آن به داخل حفره، مقدار $\frac{h_{max}}{D}$ در سه حالت جریان (الف-ج) در جدول ۱ ارائه شده‌است. نتایج حاصل از حل عددی حاضر بر مبنای روش شبکه بولتزمن با ادغام معادله آلن-کاهن نشان می‌دهد که در شرایط جریان (الف) با $Bo = 6/6$ و $Re = 25$ ، مقدار نسبت ارتفاع بالا آمدگی قطره به شعاع قطره صفر است. زیرا در این حالت مقدار کشش سطحی قطره بالا بوده و با توجه به پایین بودن مقدار شتاب گرانش اثر کشش سطحی بر شدت برخورد غلبه می‌کند که این امر مانع از پیشروی قطره به سمت بالای لبه‌های حفره می‌شود که در نتایج به‌دست‌آمده از حل حاضر در شکل ۱۸ این موضوع به‌وضوح نشان داده شد. با افزایش عدد باند به ، شدت برخورد افزایش می‌یابد و غلبه اینرسی فاز مایع بعد از برخورد بر کشش سطحی سطح قطره سبب پاشیدن فاز مایع به بیرون از حفره می‌شود. داده‌های آورده‌شده در جدول ۱ نشان می‌دهد که حداکثر ارتفاع بالا آمدن لبه فاز مایع از سطح آب‌دوست حفره کمتر از سطح آب‌گریز است. دلیل این الگوی جریان به اندرکنش نیروهای بین فصل مشترک سیال گاز-مایع با سطح جامد مرتبط است. وقتی سطح حفره آب‌دوست در نظر گرفته شده، نیروی چسبندگی فاز مایع از طرف سطح جامد بیشتر می‌شود که بخشی از اینرسی سیال را در فرآیند بعد از برخورد مضمحل می‌کند. برعکس این حالت، فاز مایع بعد از برخورد به سطح آب‌گریز با نیروی دافعه سطح جامد مواجه می‌شود که اینرسی حاصل از شدت برخورد را مقداری افزایش می‌دهد. این مطالعه نشان می‌دهد که با جود حبس نشدن حباب‌های فاز

قطر قطره	D	سطح استوانه و داخل حفره نشان‌دهنده کارآیی الگوریتم حاضر است.
شعاع قطره	R	(ج) رفتار دینامیکی بعد از برخورد قطره به سطوح به مقادیر
شتاب گرانش در جهت Y	g_y	نیروهای حاصل از کشش سطحی، اندرکنش بین فاز مایع و سطح
نیروی گرانش	F_g	جامد و نیروی برخورد حاصل از شتاب گرانش وابسته است. اگر
مجموع نیروهای حاصل از غلظت در جهات مختلف	F_α^ϕ	کشش سطحی نیروی غالب باشد (عدد باند پایین)، قطره از سطح جدا نمی‌شود. ولی اگر برخورد حاصل از شتاب گرانش غالب باشد
ضرایب تابع وزنی	w_α	(عدد باند بالا)، بر اساس نوع هندسه سطح، قطره شکسته شده و تشکیل قطرات ریز را می‌دهد.
جهت‌های مختلف	e_α	(د) اگر سطحی که قطره به آن برخورد می‌کند آب‌دوست باشد،
تابع توزیع آرامش غلظت	$\overline{h_\alpha^{eq}}, h_\alpha^{eq}$	فاز مایع به سطح چسبیده و آن را خیس می‌کند. شکسته شدن قطره
ماتریس زمان آرامش چندگانه	M	در این حالت حتی در اعداد باند بالا، منجر به از هم پاشیدن قطره نمی‌شود. اما اگر سطح فوق‌آب‌گریز باشد، قطره به سطح نچسبیده و
زمان بی‌بعد	*t	در اعداد باند بالا، به صورت قطرات ریزتر از هم می‌پاشد.
زمان شرایط اولیه	t_i	(ه) روش شبکه بولتزمن مبتنی بر معادله آلن-کاهن توانمندی
سرعت شرایط اولیه	u_i	بسیار خوبی برای شبیه‌سازی دینامیک جریان‌های چندفازی در
ابعاد میدان	L.	نسبت‌های چگالی و لزجت بالا دارد و امکان استفاده از آن برای
تابع توزیع آرامش سرعت و فشار	$\overline{g_\alpha^{eq}}, g_\alpha^{eq}$	پیش‌بینی رفتار جریان‌های چندفازی کاربردی در صنایع هوافضا و
ماتریس قطری زمان آرامش چندگانه در جهات مختلف	S	مکانیک فراهم است. در این راستا، توسعه روش عددی حاضر برای
ضریب مویبلیتی	m	حل جریان‌های چندفازی در میدان سه‌بعدی مد نظر است که در
تغییرات زمانی ارتفاع قطره در فرآیند برخورد به استوانه	h_f	مقاله‌های بعدی به آن پرداخته خواهد شد.
ارتفاع قطره در لحظه برخورد به استوانه	h_i	
ارتفاع بی‌بعد	*h	

فهرست علائم

		جهت‌های محورهای مختصات	x,y
		تابع توزیع غلظت	h_α
		تابع توزیع سرعت و فشار	g_α
		سرعت در شبکه بولتزمن	c
		سرعت صوت در شبکه بولتزمن	c_s
		فشار	p
		فشار بی‌بعد	*p
		سرعت در جهت X	u
		سرعت در جهت Y	v
		عدد بی‌بعد باند	Bo
		عدد بی‌بعد رینولدز	Re
		بیشینه ارتفاع قطره	h_{max}
علائم یونانی			
چگالی	ρ		
لزجت دینامیکی	μ		
لزجت سینماتیکی	ν		
زاویه تماس	θ		
غلظت	ϕ		
غلظت اولیه	ϕ_i		
ضخامت فصل مشترک	ζ		
گام مکانی و زمانی	$\Delta x, \Delta t$		
تابع توزیع بی‌بعد	Γ_α		
کشش سطحی	σ		

عملگر برخورد

Ω_α

زمان آرامش

τ

مراجع

- Analysis and Applications, 344(2) (2008) 703-725.
- [7] A. Fakhari, T. Mitchell, C. Leonardi, D. Bolster, Improved locality of the phase-field lattice-Boltzmann model for immiscible fluids at high density ratios, *Physical Review E*, 96(5) (2017).
- [8] E. Ezzatneshan, H. Vaseghnia, Evaluation of equations of state in multiphase lattice Boltzmann method with considering surface wettability effects, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 541 (2020) 123258.
- [9] X. He, L.-S. Luo, Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation, *Physical Review E*, 56(6) (1997) 6811-6817.
- [10] P. Lallemand, L.S. Luo, Theory of the lattice boltzmann method: dispersion, dissipation, isotropy, galilean invariance, and stability, *Phys Rev E Stat Phys Plasmas Fluids Relat Interdiscip Topics*, 61(6 Pt A) (2000) 6546-6562.
- [11] A. Fakhari, D. Bolster, Diffuse interface modeling of three-phase contact line dynamics on curved boundaries: A lattice Boltzmann model for large density and viscosity ratios, *Journal of Computational Physics*, 334 (2017) 620-638.
- [12] S. Bakshi, I.V. Roisman, C. Tropea, Investigations on the impact of a drop onto a small spherical target, *Physics of Fluids*, 19(3) (2007) 032102.
- [1] E. Ezzatneshan, Study of surface wettability effect on cavitation inception by implementation of the lattice Boltzmann method, *Physics of Fluids*, 29(11) (2017) 113304.
- [2] S. Chen, G. Ye, Z. Xiao, L. Ding, Efficient and thermally stable polymer solar cells based on a 54π -electron fullerene acceptor, *Journal of Materials Chemistry A*, 1(18) (2013) 5562.
- [3] Q. Chang, J.I.D. Alexander, Analysis of single droplet dynamics on striped surface domains using a lattice Boltzmann method, *Microfluidics and Nanofluidics*, 2(4) (2006) 309-326.
- [4] J.W. Cahn, J.E. Hilliard, Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy, *The Journal of Chemical Physics*, 28(2) (1958) 258-267.
- [5] F. Magaletti, F. Picano, M. Chinappi, L. Marino, C.M. Casciola, The sharp-interface limit of the Cahn–Hilliard/Navier–Stokes model for binary fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, 714 (2013) 95-126.
- [6] A.N. Carvalho, T. Dlotko, Dynamics of the viscous Cahn–Hilliard equation, *Journal of Mathematical*

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

E. Ezzatneshan, A. Khosroabadi, A. Fattahi, *Studying of Droplet Impingement on Hydrophilic and Hydrophobic Curved Surfaces by Lattice Boltzmann Method Based on Allen-Cahn Equation*, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(5) (2021) 2869-2886.

DOI: [10.22060/mej.2020.17879.6681](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17879.6681)



