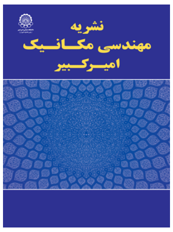


Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(7) (2021) 981-984
DOI: 10.22060/mej.2020.18399.6809

Multiscale simulation of flow in fractured porous media using unstructured grids

Z. Mehrdoost

Department of Mechanical Engineering, Ahvaz Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran

ABSTRACT: In this paper for flow simulation in fractured porous media, a multiscale finite volume method on unstructured grids is developed. To this end, algorithms for generating coarse scale unstructured grids for the matrix and fracture networks are presented independently. The presented algorithms for generating coarse scale unstructured grids are adaptable based on local changes in permeability field. Unstructured grid adaption based on permeability field has significant effect on improving the multiscale solution results in highly heterogeneous permeability fields. For the first time in this research, applying adaptive unstructured grids in fractured porous media is done. Coarse scale grid cells are generated such that strong variation of permeability along their boundaries and also the placement of coarse scale vertices in low permeability region are prevented. To reduce the computational cost, fracture-matrix coupling is considered only for the calculation of basis functions in the matrix domain. In order to evaluate the proposed algorithms, various 2D test cases are designed and solved. Finally, it is shown that the multiscale finite volume method with the proposed algorithms is an efficient numerical method for flow simulation in heterogeneous fractured porous media.

Review History:

Received: May. 10, 2020
Revised: Jun. 26, 2020
Accepted: Aug. 18, 2020
Available Online: Aug. 24, 2020

Keywords:

Multiscale finite volume method
Fractured porous media
Unstructured grids
Discrete fracture model

1. INTRODUCTION

Flow simulation in fractured reservoirs is an important and challenging issue in the oil and gas industry. Various numerical methods have been proposed to investigate the behavior of fractured reservoirs. One of the numerical methods that has been considered is discrete fracture modeling, where fractures are modeled as elements with one dimension less than the matrix [1]. In discrete fracture model using unstructured grids, fractures are placed at the interface between matrix cells [2,3]. In this method due to using unstructured grids, complex geological features including fracture networks are better described. However, for real field application that leads to large linear systems which cannot be solved with the existing classical method. To resolve this problem, multiscale methods have been developed [4].

Although promising progress has been made in recent years, the challenge of generating flexible multiscale unstructured grids for discrete fracture modeling has not yet been addressed. In this paper, the multiscale finite volume method for discrete fracture modeling on unstructured grids is developed. To this end, algorithms for generating adaptive unstructured coarse grids are presented. Generation of unstructured coarse grids is based on local changes in permeability field. Numerical results show that the multiscale finite volume method using adaptive unstructured coarse grids predicts fine-scale solution with high accuracy without using iterative methods.

*Corresponding author's email: z.mehrdoost@iauahvaz.ac.ir

2. METHODOLOGY

For incompressible flow in porous media with discrete fractures, the pressure equation is described using Darcy's law as:

$$-\nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla p) = q \quad (1)$$

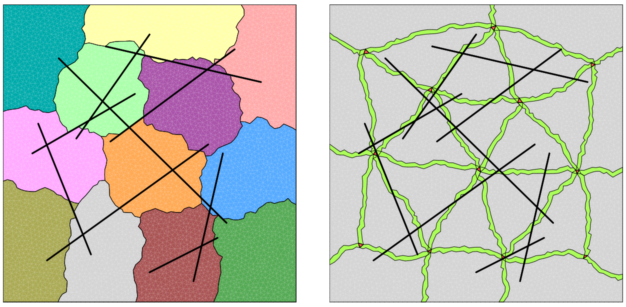
where λ is the mobility, p is pressure and q represents injection and production wells. Eq. (1) is solved to obtain the pressure field in fractured porous media using discrete fracture modeling where in this model, fractures are considered one dimension less than the matrix (as a line in a two-dimensional matrix and as a surface in a three-dimensional matrix).

The discretized form of Eq. (1) for matrix and fractures can be written as:

$$\begin{bmatrix} A_{mm} & A_{mf} \\ A_{fm} & A_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_m \\ p_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_m \\ q_f \end{bmatrix} \quad (2)$$

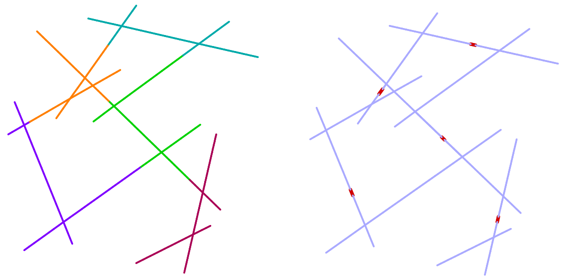
where subscript m and f are intended for the matrix and the fracture, respectively.

Solving the system of Eq. (2) for real-field simulations will have a high computational cost. To resolve this problem,



(a) (b)

Fig. 1. (a) Primal coarse grid, (b) dual coarse grid in matrix domain



(a) (b)

Fig. 2. (a) Primal coarse grid, (b) dual coarse grid in fracture networks

multiscale methods have been introduced. In this paper, the multiscale finite volume method is used to solve the above linear system by providing efficient algorithms.

The multiscale finite volume method uses a Prolongation operator $\mathcal{P}$ to solve the system of Eq. (2). If p^c and p^{ms} are pressure fields on coarse-scale and fine-scale, respectively:

$$p^{ms} = \mathcal{P} p^c \tag{3}$$

To solve the coarse-scale system, a restriction operator $\mathcal{R}$ is defined that describes the mapping from fine to coarse space:

$$\underbrace{(\mathcal{R} A \mathcal{P})}_{A^c} p^c = \underbrace{\mathcal{R} q}_{q^c} \tag{4}$$

Finally, the multiscale pressure solution is calculated as:

$$p_f \approx p^{ms} = \underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{R} A \mathcal{P})^{-1} \mathcal{R}}_{M_{ms}^{-1}} q \tag{5}$$

The multiscale finite volume method uses two types of primal and dual coarse grids to calculate the restriction and prolongation operators. In this paper, a multilevel tabu search algorithm is used to generate primal coarse grid. The primal coarse grids for the matrix and fracture domains are generated independently.

At each iteration of the algorithm, the subset with the maximum weight is selected. Then, the boundary vertex with the maximum gain is chosen for migration to the preferred subset. The gain $g(v,n)$ of vertex v for migration to the neighboring subset S_n is defined as

$$g(v,n) = ED[v]_n - ID[v] \tag{6}$$

where $ED[v]_n$ is the sum of common edge weights between vertex v and its neighboring vertices located in the subset S_n, and $ID[v]$ is the sum of common edge weights between vertex v and its neighboring vertices in the same subset. After moving each vertex, the gain of the vertex and its neighbors are updated. The algorithm continues until stopping criteria are met.

The proposed algorithm for generating dual coarse grid employs the equivalent graph of unstructured grids. The first step is to specify the vertex cells within each primal coarse cell. Since the presence of vertex cells in a low-permeability region causes nonphysical peaks, the fine cell whose centroid is closest to the mean centroid is selected and its permeability value is checked. If the selected cell is located in a low permeability region, it will be removed from the list of candidate cells. Then, the algorithm searches for the next fine cell and this process continues until the closest cell to the mean centroid with acceptable permeability value is identified. The next step is to assign the edge cells. Dijkstra's algorithm is employed to find the shortest path between the two vertex cells of coarse blocks, so that the strong permeability contrasts along the path of edge cells are minimized. Finally, the interior cells are assigned as the cells that do not belong to the edge and vertex categories.

3. NUMERICAL SIMULATION

In this section, the multiscale flow simulation results in fractured porous media using the proposed algorithms for generating multiscale unstructured grids are presented and compared with the fine-scale reference solution. The test case consists of a $1[m]\times 1[m]$ homogeneous matrix with 9 fractures and $k_f = 1000 k_m$. Dirichlet boundary conditions are applied on the left and right boundaries with normalized pressures of 1 and 0, respectively and no-flow boundary conditions are specified on the top and bottom boundaries. The fine-scale grid has 10226 matrix and 306 fracture cells and the coarse scale grid contains 12 matrix and 5 fracture cells. Figs. 1(a) and 1(b) present the primal and dual coarse grids for matrix domain. The primal and dual coarse grids for fracture networks are illustrated in Figs. 2(a) and 2(b) respectively.

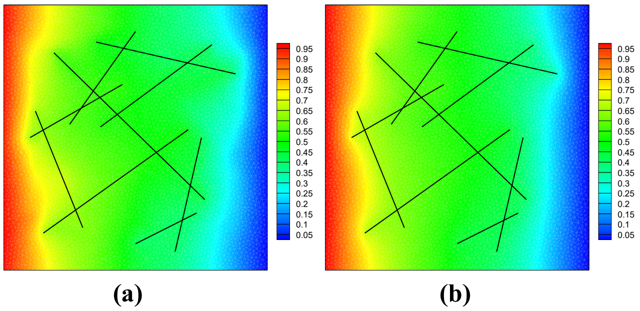


Fig. 3. Pressure contours obtained by the (a) MSFV method, (b) fine reference solution

Figs. 3(a) and 3(b) present the multiscale and fine-scale pressure results. The multiscale finite volume predicts the pressure distribution with relative error e_p=6.48×10^{-2}. It is clear that the MSFV solution agrees well with the fine-scale reference solutions.

4. CONCLUSIONS

In this paper, the multiscale finite volume method for discrete fracture modeling on unstructured grids is developed. Algorithms for generating adaptive unstructured coarse grids are presented. Unstructured coarse-scale grid adaptation based on local changes in permeability field can significantly improve the multiscale solution results in highly heterogeneous permeability fields. Numerical results show that the multiscale finite volume method with the proposed algorithms is an efficient numerical method for flow simulation in heterogeneous fractured porous media.

REFERENCES

[1] J. Noorishad, M. Mehran, An upstream finite element method for solution of transient transport equation in fractured porous media, Water Resources Research, 18(3) (1982) 588-596.

[2] L. Li, S.H. Lee, Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media, SPE Reservoir Evaluation & Engineering, 11(04) (2008) 750-758.

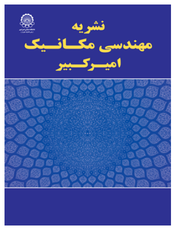
[3] H. Hajibeygi, D. Karvounis, P. Jenny, A hierarchical fracture model for the iterative multiscale finite volume method, Journal of Computational Physics, 230(24) (2011) 8729-8743.

[4] P. Jenny, S.H. Lee, H.A. Tchelepi, Adaptive fully implicit multi-scale finite-volume method for multi-phase flow and transport in heterogeneous porous media, Journal of Computational Physics, 217(2) (2006) 627-641.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

Z. Mehrdoost, Multiscale simulation of flow in fractured porous media using unstructured grids, Amirkabir J. Mech Eng., 53(7) (2021) 981-984.

DOI: 10.22060/mej.2020.18399.6809



نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ۷، سال ۱۴۰۰، صفحات ۴۱۳۳ تا ۴۱۵۲
DOI: 10.22060/mej.2020.18399.6809

شبیه‌سازی چندمقیاسی جریان در محیط متخلخل شکاف‌دار با استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان

زهرا مهردوست*

گروه مهندسی مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

خلاصه: در این مقاله برای شبیه‌سازی جریان در محیط متخلخل شکاف‌دار، روش حجم محدود چند مقیاسی در شبکه‌های بی‌سازمان توسعه داده شده‌است. بدین منظور، الگوریتم‌هایی برای تولید شبکه‌های درشت مقیاس بی‌سازمان برای دامنه ماتریس و شبکه شکاف‌ها به صورت مستقل از یکدیگر ارائه شده‌است. الگوریتم‌های ارائه‌شده برای تولید شبکه‌های بی‌سازمان درشت مقیاس، قابلیت تطبیق بر اساس تغییرات محلی میدان نفوذپذیری را دارند. تطبیق شبکه‌های بی‌سازمان بر اساس میدان نفوذپذیری، تأثیر قابل توجهی بر بهبود نتایج حل چند مقیاسی در میدان‌های نفوذپذیری به شدت ناهمگن دارد. به‌کارگیری شبکه‌های بی‌سازمان تطبیقی در محیط متخلخل شکاف‌دار برای نخستین بار در این پژوهش صورت گرفته‌است. سلول‌های شبکه درشت مقیاس به گونه‌ای تولید می‌شوند که از تغییرات شدید مقادیر نفوذپذیری در امتداد مرزهای آن و همچنین از قرارگرفتن گره‌های شبکه درشت مقیاس در نواحی با نفوذپذیری پایین جلوگیری شود. برای کاهش هزینه‌های محاسباتی، کوپل شکاف-ماتریس فقط برای محاسبه توابع پایه در دامنه ماتریس در نظر گرفته‌شده‌است. به منظور ارزیابی الگوریتم‌های ارائه‌شده، مسئله‌های مختلف در حالت دوبعدی طراحی و حل شده‌اند. در پایان نشان داده‌شده‌است که روش حجم محدود چندمقیاسی با الگوریتم‌های ارائه‌شده یک روش عددی کارآمد برای شبیه‌سازی جریان در محیط متخلخل شکاف‌دار ناهمگن است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۲۱
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۰۶
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۲۸
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۶/۰۳

کلمات کلیدی:
روش حجم محدود چند مقیاسی
محیط متخلخل شکاف‌دار
شبکه‌های بی‌سازمان
مدل شکاف‌های گسسته

۱- مقدمه

مدل‌سازی جریان در مخازن شکاف‌دار از مسائل مهم و چالش برانگیز در صنعت نفت و گاز است. بخش عمده‌ای از ذخایر نفت و گاز جهان درون این نوع از مخازن انباشته شده‌است. در مخازن شکافدار طبیعی، محیط متخلخل مخزن در اثر عوامل مختلف طبیعی مانند حرکت پوسته زمین یا چین‌خوردگی دچار شکست می‌شود. برای مدل‌سازی این مخازن فرض می‌شود که فضای سنگ مخزن متشکل از سیستمی به هم پیوسته از حفره‌ها و کانال‌ها است که در آن حفره‌ها نمایانگر سیستم ماتریس و کانال‌ها نمایانگر سیستم شکاف می‌باشند و سیال قادر است بین ماتریس و شکاف جابجا شود. طبیعت نامنظم شبکه شکاف‌ها با مقیاس‌های طولی مختلف باعث ایجاد چالش در شبیه‌سازی جریان در این نوع از مخازن می‌شود.

روش‌های عددی مختلفی برای بررسی رفتار مخازن شکاف‌دار ارائه شده‌است. یکی از روش‌های عددی که مورد توجه قرارگرفته‌است، روش مدل‌سازی شکاف‌های گسسته می‌باشد که در آن شکاف‌ها به عنوان المان‌هایی با یک بعد کمتر نسبت به ماتریس درنظر گرفته‌می‌شوند [۱]. برای تولید شبکه‌های محاسباتی مستقل در دامنه ماتریس و شکاف، روش مدل‌سازی شکاف‌های گسسته تعبیه شده ارائه شده‌است [۲-۵]. در روش مدل‌سازی شکاف‌های گسسته با استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان، شکاف‌ها در وجه مشترک بین سلول‌های ماتریس قرار می‌گیرند [۶-۹]. در این روش به دلیل استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان، مدل‌سازی هندسه پیچیده مخزن و شبکه شکاف‌ها امکان‌پذیر می‌باشد. از طرفی انعطاف‌پذیری و دقت

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: z.mehrdoost@iauahvaz.ac.ir

روش مدل‌سازی شکاف‌های گسسته در مخازن با مقیاس واقعی منجر به تولید دستگاه معادلات بسیار بزرگ می‌شود که حل آن با روش‌های کلاسیک موجود امکان پذیر نیست. برای حل این مشکل و کاهش هزینه‌های محاسباتی، روش‌های چند مقیاسی برای شبیه‌سازی جریان در محیط‌های متخلخل ارائه شده‌اند [۱۱ و ۱۰].

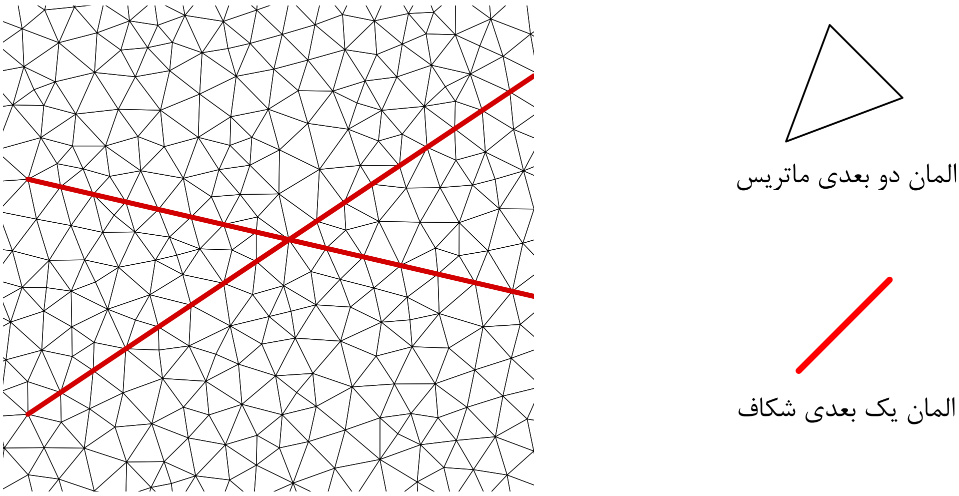
روش‌های چندمقیاسی به دلیل توانایی در حل مسائل با استفاده از جزئیات مخزن در مقیاس ریز و بدون حل مستقیم مسأله عمومی در این مقیاس بسیار مورد توجه قرارگرفته‌اند. این روش‌ها با درنظرگرفتن جزئیات ریز مقیاس پاسخ‌هایی ارائه می‌دهند که از نظر دقت با نتایج حل در مقیاس ریز برابری می‌کنند و در مقابل هزینه محاسباتی کمتری دارند. روش‌های چندمقیاسی به سه گروه روش المان محدود چندمقیاسی [۱۰]، روش المان محدود ترکیبی چندمقیاسی [۱۲] و روش حجم محدود چندمقیاسی [۱۱] دسته‌بندی می‌شوند. تفاوت اصلی میان روش‌های چندمقیاسی مختلف، روش تعریف مسائل محلی برای محاسبه توابع پایه است. از میان روش‌های چندمقیاسی ارائه‌شده، روش حجم محدود چندمقیاسی با توجه به اینکه بر اساس حل معادلات بقای جرم می‌باشد، میدان سرعت پایستار تولید می‌کند که برای شبیه‌سازی جریان‌های چندفازی ضروری است. همچنین، توسعه این روش برای شبیه‌سازی جریان‌هایی با مکانیزم‌های فیزیکی پیچیده‌تر، آسان‌تر است [۱۳].

تاکنون پیشرفت‌های بسیاری در جهت کاربردی‌شدن روش حجم محدود چندمقیاسی برای شبیه‌سازی مسائل واقعی صورت گرفته‌است. از جمله می‌توان به توسعه این روش برای حل جریان‌های تراکم‌پذیر چندفازی [۱۵و۱۴]، با درنظرگرفتن اثر گرانش و فشار موئینگی [۱۶-۱۹]، مدل‌سازی چاه‌ها [۲۱و۲۰]، روش‌های حجم محدود چندمقیاسی تکراری برای کنترل خطا و بهبود کیفیت حل [۲۳و۲۲] و فرمولاسیون جبری این روش [۲۵و۲۴] اشاره نمود.

با وجود تحقیقات گسترده‌ای که در جهت توسعه روش حجم محدود چندمقیاسی صورت گرفته‌است، بیشتر این مطالعات بر شبکه‌های باسازمان بوده و تعداد بسیار محدودی از آن‌ها به کارگیری این روش را در شبکه‌های بی‌سازمان مورد بررسی قرار داده‌اند [۲۶-۲۸].

روش حجم محدود چندمقیاسی در محیط متخلخل شکاف‌دار، نخستین بار بر شبکه‌های باسازمان دوبعدی به‌کارگرفته‌شد [۳]. روش ارائه‌شده برای شبکه شکاف‌هایی با نفوذپذیری بالا و مقیاس‌های طولی نسبتاً کوچک نتایج قابل قبولی گزارش داده‌است. در حالی‌که برای مسائلی با تغییرات قابل توجه در توزیع فشار در شبکه شکاف‌ها همگرایی حل حاصل نشده‌است. سپس یک روش دو بعدی دیگر ارائه شد که در آن شبکه شکاف‌ها به عنوان شبکه درشت دوگانه در روش حجم محدود چند مقیاسی درنظر گرفته شدند [۲۹]. گرچه این روش برای شبکه شکاف‌ها با تراکم و نفوذپذیری بالا کارآمد بود، تولید شبکه‌های درشت مقیاس برای دامنه ماتریس و شکاف به طور مستقل امکان‌پذیر نبود. پس از آن، روش مدل‌سازی شکاف‌های گسسته تعبیه‌شده بر شبکه‌های با سازمان [۳۰] و بی‌سازمان [۳۱] توسعه داده شد. در این روش شبکه‌های درشت دوگانه در روش حجم محدود چندمقیاسی تولید نمی‌شود و توابع پایه با استفاده از روش‌های تکرار محاسبه می‌شوند. آخرین پژوهش صورت‌گرفته در این زمینه، توسعه روش حجم محدود چندمقیاسی با روش مدل‌سازی شکاف‌های گسسته در شبکه‌های بی‌سازمان می‌باشد [۲۸]. در این پژوهش برای کاهش خطای محاسباتی و بهبود نتایج حل، از یک الگوریتم تکراری استفاده شده‌است که در آن روش حجم محدود چند مقیاسی به همراه یک هموارساز ریز مقیاس برای حذف خطاها با فرکانس‌های بالا و پایین به کار گرفته‌شده‌است.

اگرچه پیشرفت‌هایی در این زمینه حاصل شده‌است، چالش تولید شبکه‌های بی‌سازمان چندمقیاسی انعطاف‌پذیر در میدان‌های نفوذپذیری به شدت ناهمگن به همراه مدل‌سازی شکاف‌های گسسته هنوز برطرف نشده‌است. در این پژوهش، روش حجم محدود چندمقیاسی برای مدل‌سازی شکاف‌های گسسته در شبکه‌های بی‌سازمان توسعه داده‌شده‌است. بدین منظور، الگوریتم‌هایی برای تولید شبکه‌های درشت مقیاس بی‌سازمان تطبیقی ارائه شده‌است. تولید شبکه‌های درشت مقیاس بی‌سازمان بر اساس تغییرات محلی میدان نفوذپذیری صورت می‌گیرد. سلول‌های شبکه درشت دوگانه به گونه‌ای تولید می‌شوند که از تغییرات شدید مقادیر نفوذپذیری در امتداد مرزهای آن و همچنین از قرارگرفتن گره‌های شبکه درشت مقیاس در نواحی با نفوذپذیری پایین جلوگیری شود. الگوریتم ارائه‌شده تأثیر قابل توجهی در بهبود نتایج روش حجم محدود چندمقیاسی در میدان‌های نفوذپذیری بسیار ناهمگن دارد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد روش حجم محدود چندمقیاسی با استفاده



شکل ۱. سلول‌های ماتریس و شکاف در مدل شکاف‌های گسسته

Fig. 1. Matrix and fracture cells in discrete fracture model

از شبکه‌های بی‌سازمان تولید شده و بدون استفاده از روش‌های تکرار برای کاهش خطا، حل ریز مقیاس را با دقت بالایی پیش بینی می‌کند. پژوهش صورت‌گرفته گامی مهم در جهت کاربردی‌شدن روش‌های چندمقیاسی برای شبیه‌سازی جریان در مخازن با مقیاس واقعی و همچنین به‌کارگیری آن‌ها در شبیه‌سازهای تجاری است.

۲- مدل‌سازی شکاف‌های گسسته

برای جریان سیال تراکم‌ناپذیر در محیط متخلخل با شکاف‌های گسسته، معادله فشار با استفاده از قانون دارسی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$-\nabla\cdot(\lambda\cdot\nabla p)=q \qquad (۱)$$

که در آن، λ ضریب تحرک سیال، p فشار و q بیانگر جمله‌های چشمه یا چاه است. معادله (۱) برای بدست‌آوردن میدان فشار در محیط متخلخل شکاف‌دار با استفاده از مدل شکاف‌های گسسته حل می‌شود که در این مدل، شکاف‌ها یک بعد کمتر از ابعاد هندسه مخزن در نظر گرفته می‌شوند (یک خط در مخازن دو بعدی و یک سطح در مخازن سه بعدی) [۶].

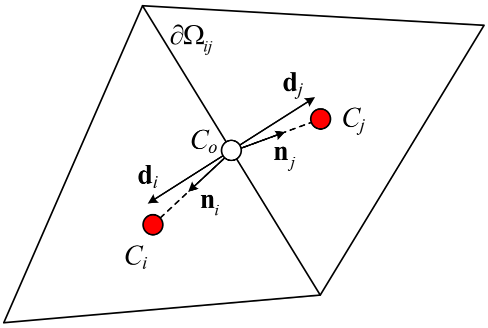
در شکل ۱ نمونه‌ای از شبکه تولیدشده در مدل شکاف‌های گسسته برای یک ناحیه دوبعدی نشان داده‌شده‌است که در آن دامنه ماتریس سنگ مخزن با سلول‌های مثلثی و دامنه شکاف‌ها با سلول‌های خطی گسسته‌سازی شده‌اند. در مدل شکاف‌های گسسته از ضخامت شکاف‌ها برای ایجاد حجم کنترل در دامنه شکاف‌ها استفاده می‌شود.

به منظور گسسته‌سازی معادله فشار بر اساس روش حجم محدود، از معادله فشار بر روی هر یک از سلول‌های محاسباتی (ماتریس و شکاف) انتگرال‌گیری می‌شود. اگر هر سلول محاسباتی Ω_i به عنوان یک حجم کنترل با حجم V و مساحت سطح A درنظر گرفته‌شود، می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega_i}-\nabla\cdot(\lambda\cdot\nabla p)dV=\int_{\partial\Omega_i}-\lambda\cdot\nabla p\cdot\mathbf{n}dA=\int_{\Omega_i}qdV \qquad (۲)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{n}$ بردار یکه عمود بر وجوه سلول $\partial\Omega_i$ است که به سمت خارج از سلول درنظر گرفته‌می‌شود. به منظور تخمین شار $\int_{\partial\Omega_i}-\lambda\cdot\nabla p\cdot\mathbf{n}dA$ بر روی وجه سلول $\partial\Omega_{ij}$ مشترک بین دو سلول همسایه i و j، از روش تخمین شار دو نقطه‌ای (TPFA) استفاده می‌شود.

در شکل ۲ دو حجم کنترل همسایه از یک شبکه بی‌سازمان نمایش داده‌شده‌است. مراکز سلول‌های i و j به ترتیب با C_i و C_j و



شکل ۲. نمایش هندسی دو حجم کنترل همسایه در شبکه بی‌سازمان به همراه بردارهای یکه مورد استفاده در محاسبه ضریب انتقال‌پذیری
Fig. 2. Geometrical representation of two adjacent control volumes in unstructured grid along with unit vectors used in transmissibility calculation

مرکز وجه مشترک بین آن‌ها با C_o مشخص شده‌است. تخمین شار دو نقطه‌ای در وجه $\partial\Omega_{ij}$ به صورت زیر بیان می‌شود [۶]:

$$Q_{ij} = T_{ij}\lambda_{ij}(p_i - p_j) \quad (۳)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{p_i}$ و $\mathbf{p_j}$ به ترتیب مقدار فشار در سلول‌های i و j می‌باشد. $\mathbf{T_{ij}}$ انتقال‌پذیری هندسی و λ_{ij} ضریب تحرک در وجه مشترک بین دو سلول را نشان می‌دهد. ضریب تحرک بر حسب اطلاعات بالادست جریان محاسبه می‌شود. بخش هندسی انتقال‌پذیری به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T_{ij} = \frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha_i+\alpha_j} \quad , \quad \alpha_i = \frac{A_iK_i}{D_i}\mathbf{n_i}\cdot\mathbf{d_i} \quad (۴)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{A_i}$ مساحت وجه مشترک بین دو سلول، K_i مقدار نفوذپذیری مطلق در سلول i، $\mathbf{D_i}$ فاصله بین مرکز سلول و مرکز وجه (C_iC_o)، $\mathbf{n_i}$ بردار یکه عمود بر وجه مشترک و $\mathbf{d_i}$ بردار یکه در امتداد خطی است که مرکز حجم کنترل را به مرکز وجه متصل می‌کند.

به منظور جلوگیری از ایجاد حجم کنترل‌های کوچک در محل تقاطع شکاف‌ها، روش ستاره-دلتا [۶] اعمال می‌شود. در این روش، انتقال‌پذیری در تقاطع n شکاف از معادله (۴) محاسبه می‌شود:

$$T_{ij} \simeq \frac{\alpha_i\alpha_j}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k} \quad , \quad \alpha_i = \frac{A_iK_i}{D_i} \quad (۵)$$

که در آن، $\mathbf{A_i}$ ضخامت شکاف و سایر پارامترها مانند معادله (۳) تعریف می‌شوند. توجه شود که در معادله فوق $\mathbf{n_i}.\mathbf{d_i} = 1$.

دستگاه معادلات خطی برای ماتریس و شکاف در نهایت به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} A_{mm} & A_{mf} \\ A_{fm} & A_{ff} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_m \\ p_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_m \\ q_f \end{bmatrix} \quad (۶)$$

که در آن زیرنویس m و f به ترتیب برای ماتریس و شکاف درنظر گرفته‌شده‌است. ماتریس‌های $\mathbf{A_{mm}}$ و $\mathbf{A_{ff}}$ به ترتیب بیانگر ضرایب انتقال ماتریس-ماتریس و شکاف-شکاف می‌باشند و ماتریس‌های $\mathbf{A_{mf}}$ و $\mathbf{A_{fm}}$ برای انتقال‌پذیری بین سلول‌های ماتریس و شکاف درنظر گرفته‌می‌شوند.

حل دستگاه معادلات (۶) برای میدان‌های واقعی با ابعاد بزرگ هزینه محاسباتی زیادی خواهد داشت. برای حل این مشکل، روش‌های چندمقیاسی معرفی شده‌اند. در این مقاله از روش حجم محدود چندمقیاسی برای حل دستگاه معادلات فوق با ارائه الگوریتم‌های کارآمد استفاده می‌شود.

۳- روش حجم محدود چندمقیاسی در شبکه‌های بی‌سازمان با مدل شکاف‌های گسسته

روش حجم محدود چندمقیاسی برای حل دستگاه معادلات

(۶) از یک عملگر گسترش‌دهنده $\mathcal{P}$ [1] استفاده می‌کند. این عملگر فضای درشت مقیاس (فضای حل جریان) را به فضای ریزمقیاس (توصیف‌کننده محیط متخلخل شکاف‌دار) نگاشت می‌کند. به عبارت دیگر، اگر p^c و $\mathbf{p^{ms}}$ به ترتیب میدان فشار در مقیاس درشت و مقیاس ریز باشند [۲۵]:

$$p^{ms} = \mathcal{P} p^c \quad (۷)$$

در معادله فوق $\mathbf{p^{ms}}\mathbf{p^{ms}}$ میدان فشار چند مقیاسی برای ماتریس و شکاف در شبکه ریز مقیاس است، $p^{ms} = \begin{bmatrix} p_m^{ms} & p_f^{ms} \end{bmatrix}^T$ و $\mathbf{p^c}\mathbf{p^c}$ میدان فشار درشت مقیاس برای ماتریس و شکاف است، $p^c = \begin{bmatrix} p_m^c & p_f^c \end{bmatrix}^T$. این بردارها شامل $N_f = N_f^m + N_f^f$ و $N_c = N_c^m + N_c^f$ آرایه هستند که $\mathbf{N_f}\mathbf{N_f}$ و $\mathbf{N_c}\mathbf{N_c}$ به ترتیب تعداد سلول‌ها در مقیاس ریز و درشت شامل ماتریس و شکاف‌ها می‌باشند. برای حل دستگاه درشت مقیاس و محاسبه $\mathbf{p^c}\mathbf{p^c}$، عملگر محدودکننده $\mathcal{R}$ [2] تعریف می‌شود که فضای ریزمقیاس را به فضای درشت‌مقیاس نگاشت می‌کند [۲۸]:

$$\underbrace{(\mathcal{R} A \mathcal{P})}_{A^c} p^c = \underbrace{\mathcal{R} q}_{q^c} \quad (۸)$$

از ترکیب معادلات (۷) و (۸) میدان فشار چندمقیاسی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p_f \approx p^{ms} = \underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{R} A \mathcal{P})^{-1} \mathcal{R}}_{M_{ms}^{-1}} q \quad (۹)$$

عملگر $\mathcal{R}$ با ابعاد $\mathbf{N_c}\mathbf{N_c}$ یک عملگر انتگرال‌گیری روی سلول‌ها در مقیاس درشت است و به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵]:

$$\mathcal{R}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if fine-cell } j \text{ belongs to coarse cell } i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۱۰)$$

عملگر $\mathbf{P}\mathbf{P}$ با ابعاد $\mathbf{N_f \times N_c}\mathbf{N_f \times N_c}$ از توابع پایه، Φ، تشکیل شده‌است که در ستون‌های آن قرار می‌گیرند:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}^m \\ \mathcal{P}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}^{mm} & \mathcal{P}^{mf} \\ \mathcal{P}^{fm} & \mathcal{P}^{ff} \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

که در آن

$$\mathcal{P}^m = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Phi_1^{mm} & \cdots & \Phi_{N_{cm}}^{mm} & \Phi_1^{mf} & \cdots & \Phi_{N_{cf}}^{mf} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right] \quad (۱۲)$$

و

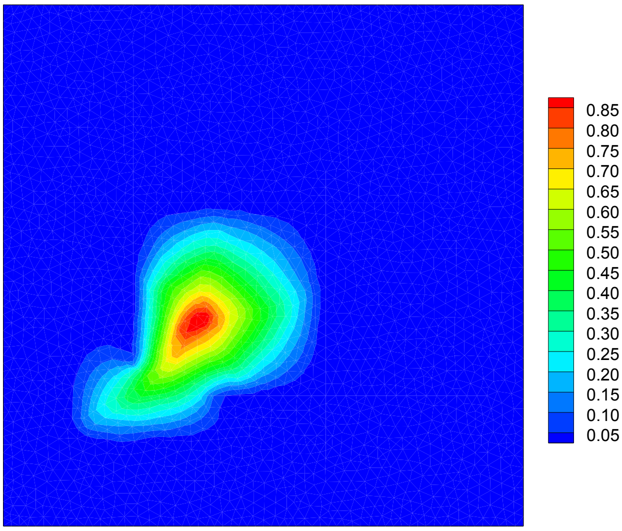
$$\mathcal{P}^f = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Phi_1^{fm} & \cdots & \Phi_{N_{cm}}^{fm} & \Phi_1^{ff} & \cdots & \Phi_{N_{cf}}^{ff} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right] \quad (۱۳)$$

در معادله (۱۱) اثر شکاف‌ها بر توابع پایه ماتریس $\mathbf{P^{mf}}\mathbf{P^{mf}}$ و اثر ماتریس بر توابع پایه شکاف‌ها $\mathbf{P^{fm}}\mathbf{P^{fm}}$ درنظر گرفته‌شده‌است که باعث چگالترشدن عملگر $\mathcal{P}$ می‌شود. برای رفع این مشکل، توابع پایه در دامنه شکاف‌ها مستقل از دامنه ماتریس و با درنظرگرفتن شرط مرزی بدون جریان در محل ارتباط با ماتریس حل می‌شوند $\mathbf{P^{fm}}\mathbf{P^{fm}}$.

بر خلاف توابع پایه شکاف‌ها که مستقل از دامنه ماتریس حل می‌شوند، در محاسبه توابع پایه دامنه ماتریس، اثر شکاف‌ها درنظر گرفته‌می‌شود. بنابراین، توابع پایه دامنه ماتریس شامل توابع پایه ناشی از اثر ماتریس، Φ^{mm}، و توابع پایه ناشی از اثر شکاف‌ها، Φ^{mf} است. به عبارت دیگر، کوپل شکاف-ماتریس فقط از شکاف به ماتریس صورت می‌گیرد [۳۰]. برای محاسبه توابع پایه شکاف در دامنه ماتریس، توابع پایه در دامنه شکاف $\Phi^{f}\Phi^{f}$ به عنوان شرط مرزی دریکله برای توابع پایه $\Phi^{mf}\Phi^{mf}$ درنظر گرفته‌می‌شوند.

روش حجم محدود چند مقیاسی برای محاسبه عملگرهای $\mathcal{P}$

---
1 Prolongation operator
2 Restriction operator



شکل ۳. توزیع تابع پایه یک گره در شبکه درشت دامنه ماتریس
Fig. 3. Basis function distribution of a vertex in the matrix coarse grid

و $\mathcal{R}$، از دو نوع شبکه درشت اولیه[1] و دوگانه[2] استفاده می‌کند. شبکه درشت اولیه از تقسیم‌بندی شبکه ریزمقیاس به سلول‌های درشت بدست می‌آید و شبکه درشت دوگانه از اتصال مراکز هندسی سلول‌های شبکه درشت اولیه تولید می‌شوند. در بخش بعد، تولید شبکه‌های درشت اولیه و دوگانه تشریح شده‌است.

توابع پایه از حل محلی قسمت همگن معادله حاکم (۱) درون هریک از سلول‌های درشت دوگانه بدست می‌آیند. بدین منظور، ابتدا شرط مرزی کاهش‌یافته بر مرزهای سلول‌های درشت دوگانه اعمال می‌شود. بدین ترتیب که فرض می‌شود هیچ جریانی در راستای عمود بر مرزهای سلول‌های دوگانه وجود ندارد و با اختصاص‌دادن مقادیر یک و صفر به گره‌های شبکه درشت، حل معادله جریان در این مرزها بدست آمده و به عنوان شرط مرزی دریکله برای سلول‌های ریز مقیاس درون سلول‌های دوگانه درنظر گرفته‌می‌شوند. شکل ۳ توزیع تابع پایه در اطراف یکی از گره‌های شبکه درشت در دامنه ماتریس را نشان می‌دهد.

۳-۱- تولید شبکه درشت اولیه در محیط متخلخل شکاف‌دار

شبکه درشت اولیه از تقسیم‌بندی سلول‌های ریزمقیاس ایجاد می‌شود. در شبکه‌های بی‌سازمان، تقسیم‌بندی شبکه به صورت یک مسئله تقسیم‌بندی گراف درنظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب که سلول‌های شبکه متناظر با گره‌های گراف و اتصال بین سلول‌ها متناظر با اضلاع گراف می‌باشند. مسئله تقسیم‌بندی گراف یک نوع مسئله بهینه‌سازی می‌باشد. هدف تقسیم‌کردن گره‌های گراف به زیرمجموعه‌هایی مستقل از گره‌ها می‌باشد. در این تقسیم‌بندی دو شرط درنظر گرفته‌می‌شود: ۱- تعداد گره‌ها در زیرمجموعه‌ها متوازن باشند، ۲- تعداد اضلاع مشترک بین زیر مجموعه‌ها حداقل مقدار ممکن را داشته باشد.

الگوریتم‌های ابتکاری مختلفی برای تقسیم‌بندی گراف ارائه شده‌است [۳۲-۳۴]. در این مقاله از الگوریتم جستجوی ممنوع چند سطحی برای تولید شبکه درشت اولیه استفاده شده‌است [۳۵]. شبکه درشت اولیه در دامنه ماتریس و شکاف به صورت مستقل از یکدیگر تولید می‌شوند. از طرفی با توجه با اینکه در گراف معادل شبکه فقط اطلاعات مربوط به اتصالات شبکه درنظرگرفته‌می‌شود، نوع المان‌های شبکه و ابعاد آن در تقسیم‌بندی فاقد اهمیت می‌باشد. بنابراین برای تولید شبکه درشت اولیه در ماتریس و شکاف از الگوریتم یکسان اما به صورت مستقل از هم استفاده می‌شود.

الگوریتم جستجوی ممنوع یک الگوریتم بهینه‌سازی فراابتکاری بر اساس جستجوی حافظه‌ای می‌باشد [۳۵]. این الگوریتم مانند الگوریتم‌های جستجوی محلی کار می‌کند، با این تفاوت که برای

1 Primal
2 Dual

جلوگیری از دور و افتادن در دام جواب‌های بهینه محلی، از مفهومی به نام لیست ممنوع استفاده می‌کند. حرکت از جواب جاری به جواب همسایه زمانی امکان‌پذیر است که در لیست ممنوع قرارنداشته‌باشد.

الگوریتم جستجوی ممنوع ابتدا از یک جواب اولیه شروع به حرکت می‌کند. سپس بهترین جواب همسایه را از میان همسایه‌های جواب فعلی انتخاب می‌کند. در صورتی که این جواب در لیست ممنوع قرارنداشته‌باشد، به جواب همسایه حرکت می‌کند. پس از حرکت به جواب همسایه، لیست ممنوع به‌روزرسانی می‌شود و آخرین حرکت در لیست ممنوع قراردادەمی‌شود تا از بازگشت مجدد به آن جواب و ایجاد سیکل جلوگیری شود. طرح کلی الگوریتم جستجوی ممنوع ارائه‌شده برای تولید شبکه درشت اولیه در الگوریتم زیر نشان داده‌شده‌است. هدف بهینه‌سازی مسئله تقیسم‌بندی گراف، به‌حداقل‌رساندن مجموع وزن اضلاع برش می‌باشد.

در هر تکرار از الگوریتم، زیرمجموعه‌ای که بیشترین وزن را دارد، $S_{max}= \max_{i\in\{۱...k\}}\{W(S_i)\}$، انتخاب می‌شود. سپس، گره مرزی $v_m \in S_{max}$ که بیشترین بهره را در آن زیرمجموعه دارد، برای انتقال به زیرمجموعه ارجح $Pref(v_m)$ انتخاب می‌شود. از میان زیرمجموعه‌های همسایه گره v_m، زیرمجموعه‌ای که بهره v_m ناشی از انتقال به آن بیشترین مقدار را دارد، به عنوان $Pref(v_m)$ تعریف می‌شود. اگر بیش از یک زیرمجموعه با بیشترین بهره وجود داشته‌باشد، به منظور بهبود توازن زیرمجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ای انتخاب می‌شود که کمترین وزن را داشته باشد.

بهره $g(v,n)$ گره v برای انتقال به زیرمجموعه همسایه S_n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(v,n) = ED[v]_n - ID[v] \quad (۱۴)$$

در رابطه فوق $ED[v]_n$ مجموع وزن اضلاع مشترک بین گره v و گره‌های همسایه‌اش که در زیرمجموعه S_n قرارگرفته‌اند، می‌باشد:

$$ED[v]_n = \sum_{(v,u)\in E \wedge P[v]\neq P[u]} w(v,u) \quad (۱۵)$$

همچنین، $ID[v]$ مجموع وزن اضلاع مشترک بین گره v و گره‌های همسایه‌اش در همان زیرمجموعه می‌باشد:

$$ID[v] = \sum_{(v,u)\in E \wedge P[v]=P[u]} w(v,u) \quad (۱۶)$$

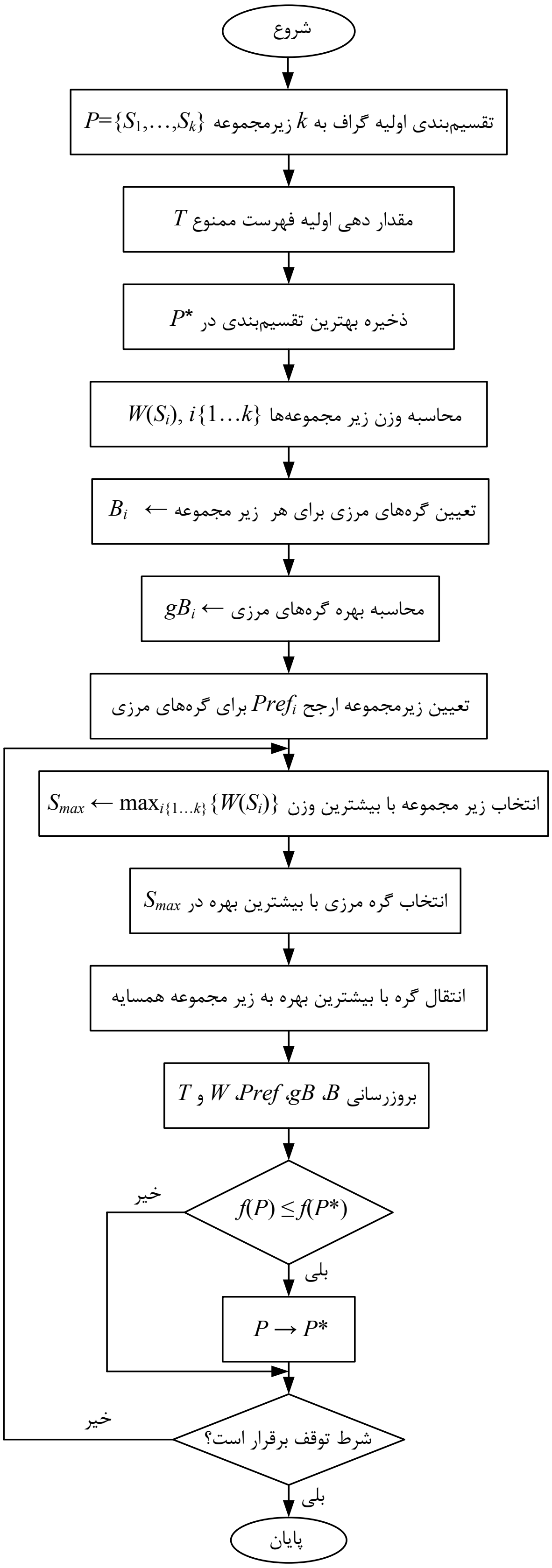
$ED[v]_n ED[v]_n$ درجه خارجی گره v نسبت به زیرمجموعه S_n و $ID[v] ID[v]$ درجه داخلی گره v نامیده می‌شود. اگر مقدار بهره g مثبت باشد، با انتقال گره v به زیرمجموعه مجاور، مجموع وزن اضلاع برش کاهش می‌یابد. درحالی‌که اگر مقدار بهره g منفی باشد، مجموع وزن اضلاع برش افزایش می‌یابد.

پس از جابجایی هر گره، بهره آن و گره‌های همسایه‌اش به روز می‌شود. همچنین، گره‌های همسایه‌ای که با انتقال گره مورد نظر در مرز زیرمجموعه مبدأ قرار می‌گیرند، به لیست گره‌های کاندید برای انتقال اضافه می‌شوند. از طرفی، گره‌های همسایه‌ای که پیش از این در مرز زیرمجموعه مقصد قرار داشته و با انتقال گره مورد نظر به گره داخلی تبدیل می‌شوند، از لیست گره‌های کاندید برای انتقال حذف می‌شوند. فلوچارت الگوریتم تولید شبکه درشت اولیه در شکل ۴ نمایش داده‌شده‌است.

شکل ۵ شبکه‌های درشت اولیه تولیدشده با استفاده از این الگوریتم را در دامنه ماتریس و شکاف نشان می‌دهد. دامنه ماتریس از ۵۱۷۴ سلول ریزمقیاس تشکیل‌شده و به ۱۰ سلول درشت اولیه تقسیم شده‌است. دامنه شکاف از ۱۲۴ سلول ریزمقیاس تشکیل شده و به ۳ سلول درشت اولیه تقسیم شده‌است.

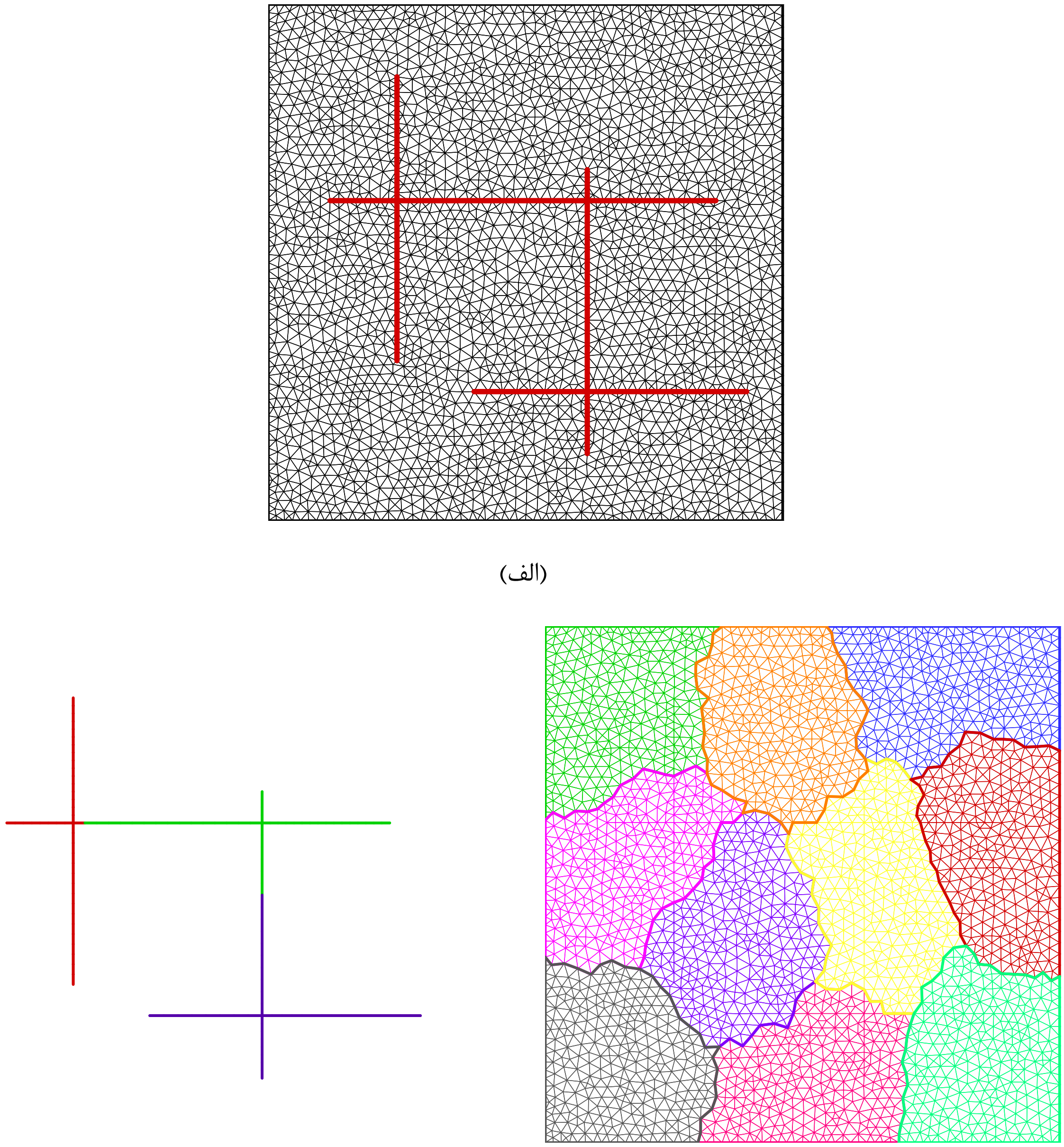
۳-۲- تولید شبکه درشت دوگانه در محیط متخلخل شکاف‌دار

توابع پایه در عملگر $\mathcal{P}$ از حل معادله جریان در سلول‌های شبکه درشت دوگانه به صورت محلی محاسبه می‌شوند. شبکه درشت دوگانه از اتصال گره‌های درشت مقیاس ساخته می‌شود. گره‌های درشت مقیاس متناظر با هر یک از سلول‌های شبکه درشت اولیه تعریف می‌شوند. بدین ترتیب که برای هر سلول درشت اولیه، سلول گره یکی از سلول‌های ریزمقیاس درون آن می‌باشد که مرکز هندسی آن به میانگین مرکز هندسی سلول‌های ریز مقیاس درون سلول درشت



شکل ۴. فلوچارت الگوریتم تولید شبکه درشت اولیه

Fig. 4. Flowchart of primal coarse grid generation



(الف)

(ج) (ب)

شکل ۵. (الف) شبکه ریزمقیاس، (ب) شبکه درشت اولیه در دامنه ماتریس، (ج) شبکه درشت اولیه در شبکه شکاف‌ها

Fig. 5. (a) Fine-scale grid, (b) primal coarse grid in the matrix domain, (c) primal coarse grid in the fracture networks

اولیه نزدیک‌تر است. از اتصال سلول‌های گره متعلق به سلول‌های درشت اولیه مجاور به هم، سلول‌های درشت دوگانه تولید می‌شوند. به این نوع سلول‌ها که مرزهای سلول‌های درشت دوگانه را تشکیل می‌دهند، سلول نوع ضلع گفته می‌شود. سلول‌های ریزمقیاسی که درون سلول‌های درشت دوگانه قرار می‌گیرند، به عنوان سلول داخلی درنظر گرفته می‌شوند. بدین ترتیب سلول‌های ریزمقیاس در سه گروه سلول‌های گره، سلول‌های ضلع و سلول‌های داخلی طبقه‌بندی می‌شوند.

با توجه به اینکه در روش مدل‌سازی شکاف‌های گسسته، شکاف‌ها یک بعد کمتر از ماتریس درنظر گرفته‌می‌شوند، سلول‌های درشت دوگانه در دامنه شکاف دارای سلول‌های داخلی نبوده و سلول‌های ریزمقیاس در دو گروه سلول‌های گره و سلول‌های ضلع دسته‌بندی می‌شوند.

الگوریتم‌های ارائه‌شده برای تولید شبکه درشت دوگانه، بر اساس

ماتریس اتصالات شبکه ریز مقیاس و اطلاعات هندسی بوده و قابلیت تغییر شبکه و کاهش خطا و بهبود حل روش حجم محدود چندمقیاسی در آن‌ها وجود ندارد. در این مقاله برای تولید شبکه درشت دوگانه در دامنه ماتریس و شکاف‌ها، الگوریتمی ارائه می‌شود که قابلیت کنترل خطا و افزایش دقت روش حجم محدود چندمقیاسی را خواهد داشت. در ادامه این الگوریتم تشریح شده‌است.

الگوریتم ارائه‌شده برای تولید شبکه درشت دوگانه مشابه الگوریتم تولید شبکه درشت اولیه، از گراف معادل شبکه بی‌سازمان استفاده می‌کند. بنابراین، این الگوریتم برای سایر المان‌ها (غیر مثلثی) و همچنین شبکه‌های سه بعدی قابل اجرا است. اولین مرحله در تولید شبکه درشت دوگانه تعیین سلول‌های نوع گره در هریک از سلول‌های شبکه درشت اولیه است. در روش استاندارد، نزدیک‌ترین سلول ریزمقیاس به مرکز هندسی سلول درشت اولیه به عنوان سلول گره انتخاب می‌شود. بر اساس تحقیقات صورت‌گرفته، قرارگرفتن سلول گره در ناحیه‌ای با نفوذپذیری پایین باعث تولید نوسان‌های غیر فیزیکی می‌شود. بنابراین باید از قرار گیری سلول گره در نواحی با نفوذپذیری پایین تا حد امکان جلوگیری شود. در الگوریتم ارائه‌شده ابتدا میانگین مرکز هندسی تمام سلول‌های درون سلول درشت اولیه محاسبه می‌شود. سپس، سلول ریز مقیاسی که به این نقطه نزدیک‌تر است انتخاب و مقدار نفوذپذیری آن بررسی می‌شود. اگر این سلول در ناحیه‌ای با نفوذپذیری پایین قرار گرفته باشد، از لیست سلول‌های کاندید حذف و سلول ریزمقیاسی که پس از آن به مرکز هندسی نزدیک‌تر است بررسی می‌شود. این فرآیند ادامه می‌یابد تا نزدیک‌ترین سلول به مرکز هندسی که دارای نفوذپذیری قابل قبول است، انتخاب شود.

پس از تعیین سلول‌های گره، گام بعد تعیین سلول‌های نوع ضلع بین هر دو سلول درشت اولیه همسایه می‌باشد. برای کاهش خطای محلی‌سازی باید از تغییرات شدید نفوذپذیری در امتداد مسیر سلول‌های ضلع جلوگیری شود. بنابراین در این مرحله هدف، پیداکردن کوتاه‌ترین مسیر بین دو سلول گره می‌باشد به‌طوری که تغییرات شدید نفوذپذیری در امتداد مسیر به حداقل برسد. در این الگوریتم یک آستانه بالا و یک آستانه پایین برای نفوذپذیری درنظر گرفته‌می‌شود. سپس سلول‌های ریزمقیاسی که مقدار نفوذپذیری درون آن‌ها در محدوده حد بالا و حد پایین قرار نمی‌گیرد از گراف معادل شبکه حذف می‌شوند. به عبارت دیگر، این سلول‌ها در لیست سلول‌های کاندید برای تعیین سلول‌های ضلع قرار نمی‌گیرند. سپس، کوتاه‌ترین مسیر بین دو سلول گره از میان سلول‌های باقیمانده در گراف تعیین می‌شود. برای تشریح بهتر الگوریتم، در شکل ۶ (الف) دو سلول درشت اولیه همسایه نشان داده‌شده‌است. شکل ۶ (ب) گراف معادل سلول‌های ریز مقیاس درون سلول‌های درشت را نمایش می‌دهد. برای هر یک از گره‌های گراف، مقدار نفوذپذیری متناظر با سلول ریزمقیاس آن گره تعریف می‌شود. گره‌هایی که مقدار نفوذپذیری آن‌ها در محدوده آستانه بالا و پایین قرار ندارد، از گراف حذف می‌شوند (شکل ۶ (پ)).

برای تعیین کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو سلول درشت اولیه، یکی از سلول‌های گره به عنوان مبدأ و دیگری به عنوان مقصد در نظر گرفته می‌شود. فرآیند اجرای الگوریتم به صورت زیر ادامه می‌یابد:

۱- فاصله بین هر دو گره در گراف محاسبه می‌شود $t(i,j)$.

۲- فاصله هر یک از گره‌های گراف تا گره مبدأ در برچسب آن ذخیره می‌شود $D(i)$. در مقداردهی اولیه، همه مقادیر فاصله‌ها بی‌نهایت در نظر گرفته‌می‌شود.

۳- برای جلوگیری از بررسی مجدد گره‌ها، برچسب دیگری در نظر گرفته‌می‌شود که در ابتدا برای همه گره‌ها $\text{Processed}(i)=\text{false}$ اختصاص داده‌می‌شود.

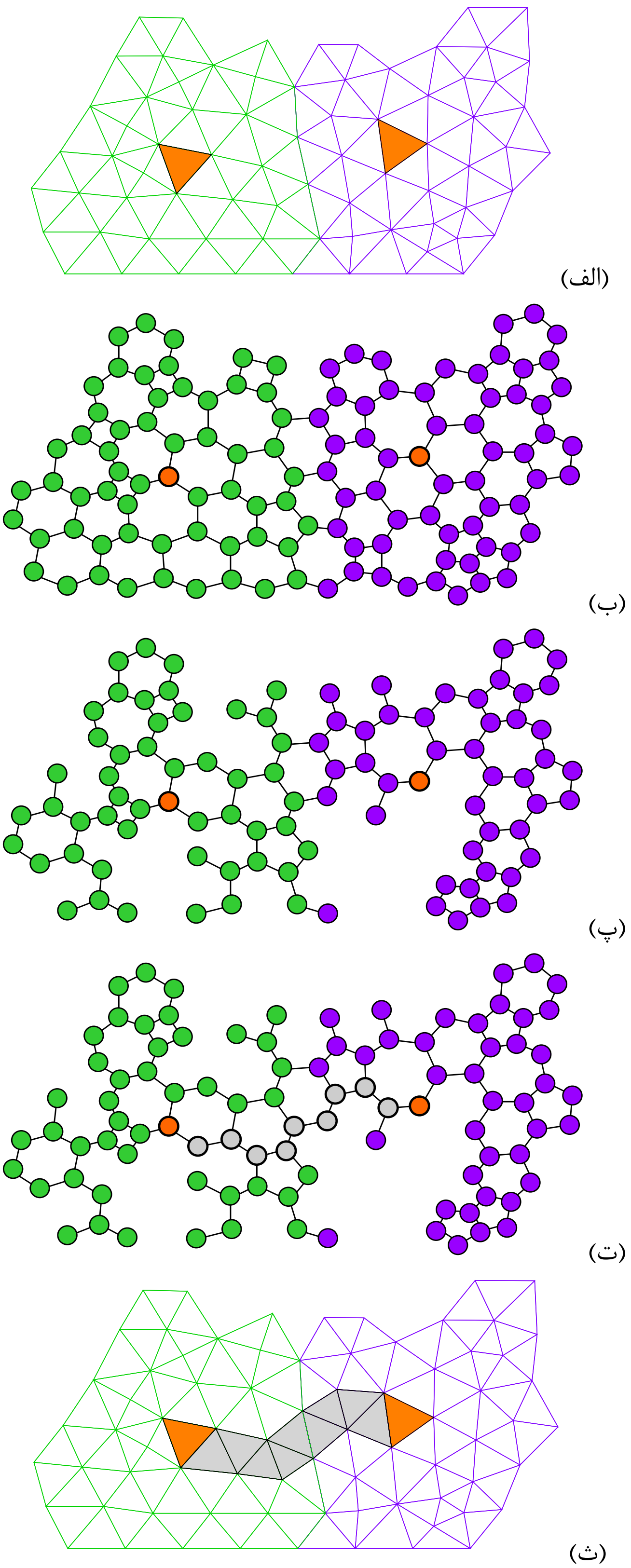
۴- به برچسب گره مبدأ مقدار صفر اختصاص داده‌می‌شود که به موجب آن این گره در ابتدا انتخاب شود.

۵- فاصله گره مبدأ تا گره‌های همسایه‌اش محاسبه شده و در $D(i)$ ذخیره می‌شود.

۶- گره مبدأ به عنوان گره پدر برای گره‌های همسایه آن ثبت می‌شود $Parent\ (i)$.

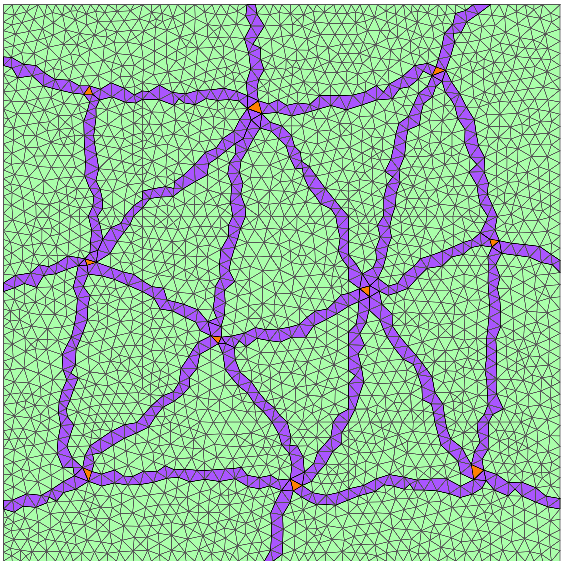
۷- از میان گره‌هایی که مورد بررسی قرارنگرفته‌اند، گره‌ای انتخاب می‌شود که D کمتری دارد. فرض می‌شود نزدیک‌ترین گره n باشد. برای جلوگیری از بررسی مجدد گره n، $\text{Processed (n)=true}$ ثبت می‌شود.

۸- برای هر همسایه j از گره n که پیش از این مورد بررسی قرارنگرفته‌است ($\text{Processed}(j)=\text{false}$)، درصورتی که کوتاهترین فاصله تا گره j ($D(j)$) از مجموع کوتاهترین فاصله تا گره n ($D(n)$) و فاصله گره n تا j ($t(n,j)$) بیشتر باشد، مقدار برچسب گره j با آن

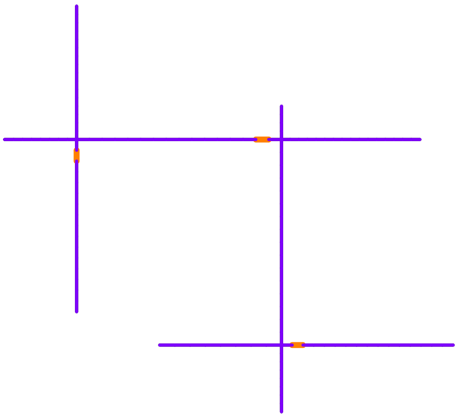


شکل ۶. مراحل تعیین کوتاهترین مسیر با کمترین تغییرات نفوذپذیری بین دو سلول درشت همسایه

Fig. 6. Determination of the shortest path with the least permeability changes between two neighboring coarse cells



(الف)



(ب)

شکل ۷. شبکه درشت دوگانه در (الف) دامنه ماتریس، (ب) دامنه شکاف‌ها
Fig.7. Dual coarse grid in (a) matrix domain, (b) fractures domain

مجموع جایگزین می‌شود D(j)=D(n)+t(n,j). همچنین گره n به عنوان پدر برای گره j ثبت می‌شود $Parent(j)$=n.

۹- بازگشت به مرحله ۷ و تکرار فرآیند تا زمانی که گره n برابر با گره مقصد باشد.

۱۰- در آخرین مرحله از الگوریتم برای مشخص‌کردن کوتاهترین مسیر، از گره مقصد شروع به حرکت کرده و گره قبل از آن ($Parent(i)$) در کوتاهترین مسیر بین مبدأ و مقصد ثبت می‌شود.

شکل ۶ (ت) کوتاهترین مسیر بین دو سلول گره را از بین گره‌های کاندید نشان می‌دهد. مسیر نهایی سلول‌های ضلع بین دو سلول درشت اولیه در شکل ۶ (ث) نشان داده‌شده‌است.

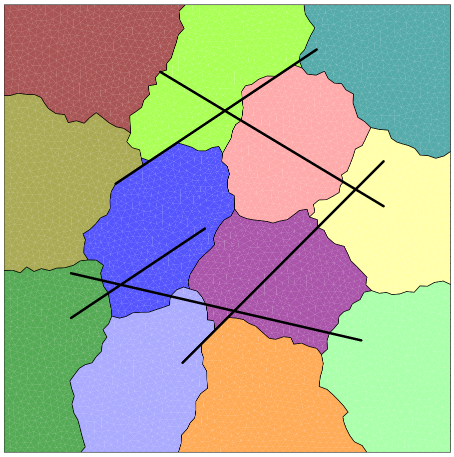
انطباق مسیرها و همچنین تداخل مسیرها با یکدیگر باعث ایجاد خطا در محاسبه توابع پایه می‌شود. در الگوریتم ارائه‌شده از تداخل مسیرها (به‌طور کامل) و از انطباق مسیرها (تا حد امکان) جلوگیری می‌شود. پس از تعیین مسیر سلول‌های ضلع بین هر دو سلول درشت همسایه، سلول‌های ریزمقیاس اطراف مسیر تعیین‌شده که حداقل یک گره مشترک با این مسیر دارند از لیست سلول‌های کاندید برای تعیین سایر مسیرها حذف می‌شوند. بدین ترتیب مسیرهای ایجادشده با یکدیگر تداخل نخواهند داشت. در شبکه‌های بی‌سازمان با توجه به اینکه تعداد سلول‌های درشت همسایه از تعداد وجوه سلول گره بیشتر است، انطباق مسیرها در اطراف سلول گره اجتناب‌ناپذیر است. بنابراین، سلول‌های اطراف سلول گره همواره در لیست سلول‌های کاندید برای تعیین مسیرها قرار می‌گیرند.

شکل ۷ شبکه درشت دوگانه تولیدشده در دامنه ماتریس و شکاف که بر اساس شبکه درشت اولیه در شکل ۵ تولید شده‌است، نشان می‌دهد.

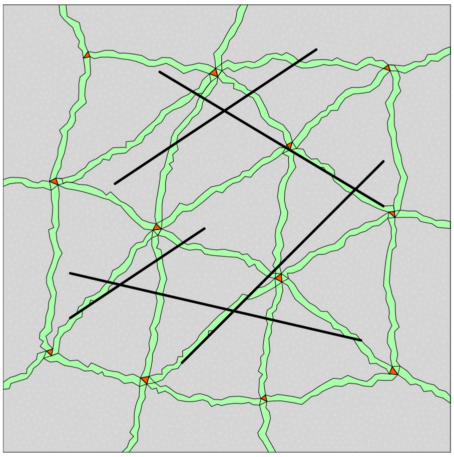
۴- نتایج شبیه سازی عددی

در این بخش نتایج شبیه‌سازی چندمقیاسی جریان در محیط‌های متخلخل شکاف‌دار با استفاده از الگوریتم‌های ارائه‌شده برای تولید شبکه‌های بی‌سازمان چندمقیاسی ارائه شده و با نتایج بدست‌آمده از حل در مقیاس ریز مقایسه می‌شوند. جریان سیال به صورت تراکم‌ناپذیر دو فازی درنظر گرفته‌شده‌است. فرض می شود که ناحیه حل در ابتدا کاملاً از نفت پر شده‌است و آب از چاه تزریق به درون آن تزریق می‌گردد. به منظور بررسی میزان خطا در نتایج بدست‌آمده از روش حجم محدود چندمقیاسی در مقایسه با روش ریزمقیاس، خطای نسبی میدان فشار e_p به صورت زیر تعریف می‌شود:

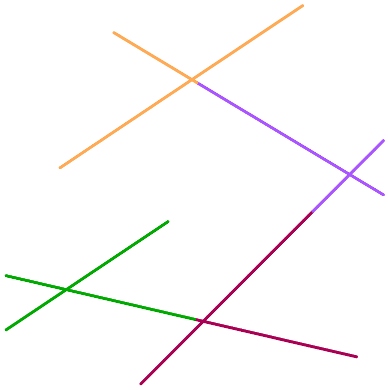
$$e_p = \frac{\left\| p_{ms} - p_f \right\|_2}{\left\| p_f \right\|_2} \qquad (۱۷)$$



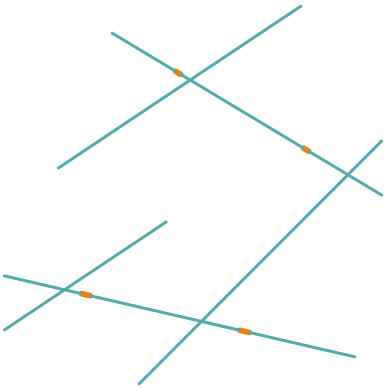
(الف) شبکه درشت اولیه در دامنه ماتریس



(ب) شبکه درشت دوگانه در دامنه ماتریس



(ج) شبکه درشت اولیه در شبکه شکاف‌ها

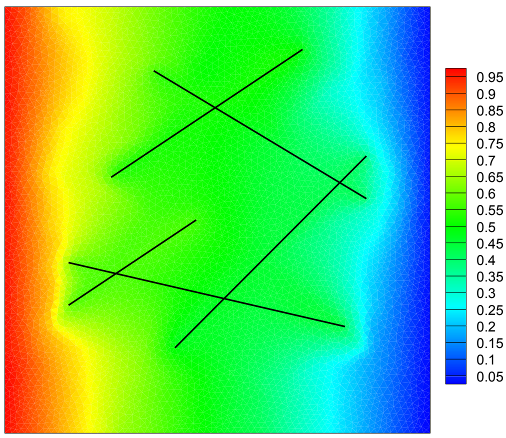


(د) شبکه درشت دوگانه در شبکه شکاف‌ها

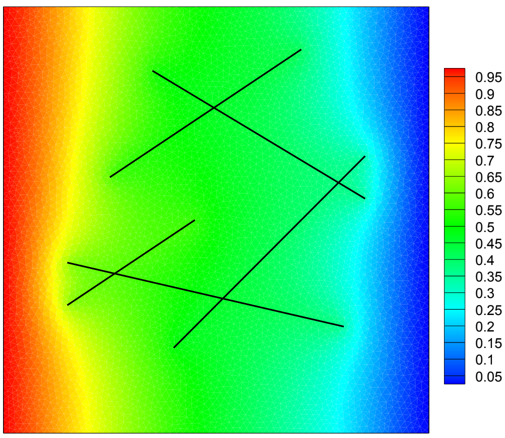
شکل ۸. نمایش شبکه‌های درشت مقیاس اولیه و دوگانه در دامنه ماتریس و شکاف‌ها

Fig. 8. Primal and dual coarse grids in the matrix and fracture domains

a) Primal coarse grid in the matrix domain, (b) dual coarse grid in the matrix domain, (c) primal coarse grid in the frac-) ture networks, (d) dual coarse grid in the fracture networks



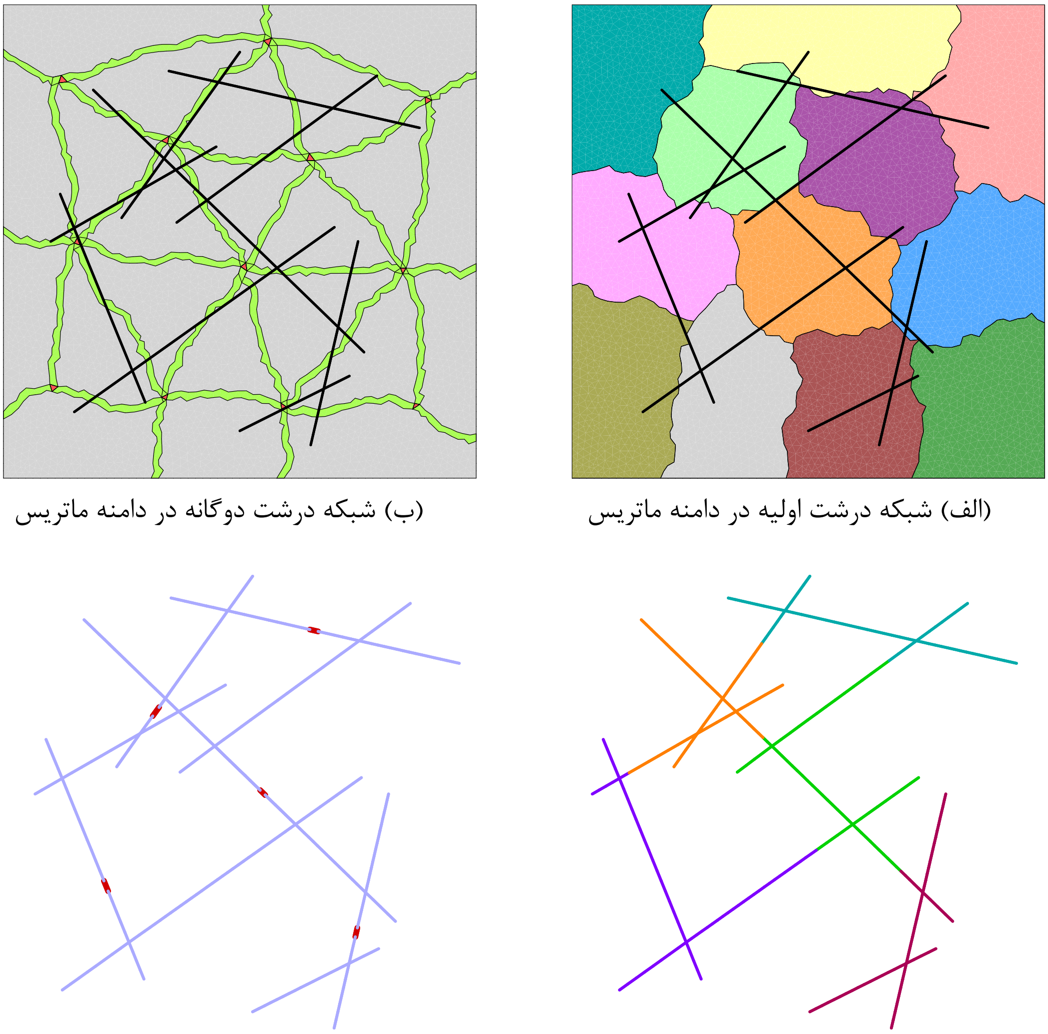
(الف)



(ب)

شکل ۹. میدان فشار بدست‌آمده از (الف) روش حجم محدود چندمقیاسی، (ب) روش ریزمقیاس

Fig. 9. Pressure contours obtained by the (a) MSFV method, (b) fine reference solution



(الف) شبکه درشت اولیه در دامنه ماتریس

(ب) شبکه درشت دوگانه در دامنه ماتریس

(ج) شبکه درشت اولیه در شبکه شکاف‌ها

(د) شبکه درشت دوگانه در شبکه شکاف‌ها

شکل ۱۰. نمایش شبکه‌های درشت مقیاس اولیه و دوگانه در دامنه ماتریس و شکاف‌ها

Fig. 10. Primal and dual coarse grids in the matrix and fracture domains

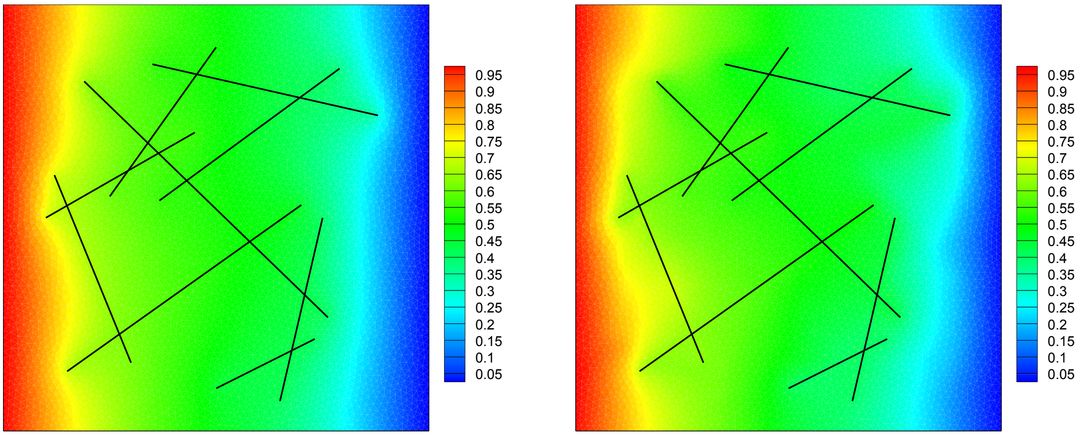
a) Primal coarse grid in the matrix domain, (b) dual coarse grid in the matrix domain, (c) primal coarse grid in the frac-) ture networks, (d) dual coarse grid in the fracture networks

در رابطه فوق، p فشار و زیر نویس‌های ms و f به ترتیب برای روش حجم محدود چندمقیاسی و روش ریزمقیاس درنظر گرفته‌شده‌اند. همچنین $\|x\|_2$ نرم اقلیدسی برای بردار x می‌باشد.

۴-۱- مسئله اول: محیط متخلخل شکاف‌دار با میدان نفوذپذیری همگن در دامنه ماتریس

اولین مسئله یک ناحیه با ابعاد ۱$[m]$ ×۱$[m]$ شامل ۵ شکاف می‌باشد. مقدار نفوذپذیری شکاف‌ها ۱۰^{۳} مرتبه بزرگتر از مقدار دامنه ماتریس است ($k_f=۱۰۰۰*k_m$). شرایط دریکله بر مرزهای چپ ($P_l=۱$) و راست ($P_r=۰$) اعمال می‌شود و مرزهای بالا و پایین نفوذناپذیر هستند. شبکه ریز مقیاس شامل شامل ۱۰۱۸۰ سلول ماتریس و ۱۹۶ سلول شکاف می‌باشد، درحالی‌که شبکه درشت مقیاس از ۱۲ سلول ماتریس و ۴ سلول شکاف تشکیل شده‌است. شبکه‌های درشت اولیه در دامنه ماتریس و شکاف به ترتیب در شکل‌های ۸ (الف) و ۸ (ج) و شبکه‌های درشت دوگانه برای ماتریس و شکاف در شکل‌های ۸ (ب) و ۸ (د) نشان داده‌شده‌است.

میدان فشار بدست‌آمده از روش حجم محدود چندمقیاسی و حل ریزمقیاس به ترتیب در شکل‌های ۹ (الف) و ۹ (ب) نشان داده‌شده‌است.



(ب) (الف)

شکل ۱۱. میدان فشار بدست‌آمده از (الف) روش حجم محدود چندمقیاسی، (ب) روش ریزمقیاس

Fig. 11: Pressure contours obtained by the (a) MSFV method, (b) fine reference solution

روش حجم محدود چندمقیاسی میدان فشار را با خطای نسبی $e_p = ۵/۵۸ \times ۱۰^{-۲}$ پیش‌بینی می‌کند. همانطور که مشاهده می‌شود، روش حجم محدود چندمقیاسی با استفاده از شبکه‌های درشت اولیه و دوگانه تولیدشده در دامنه ماتریس و شکاف، حل ریزمقیاس را با دقت قابل قبولی بدست آورده‌است.

۴-۲- مسئله دوم: محیط متخلخل شکاف‌دار با میدان نفوذپذیری همگن در دامنه ماتریس

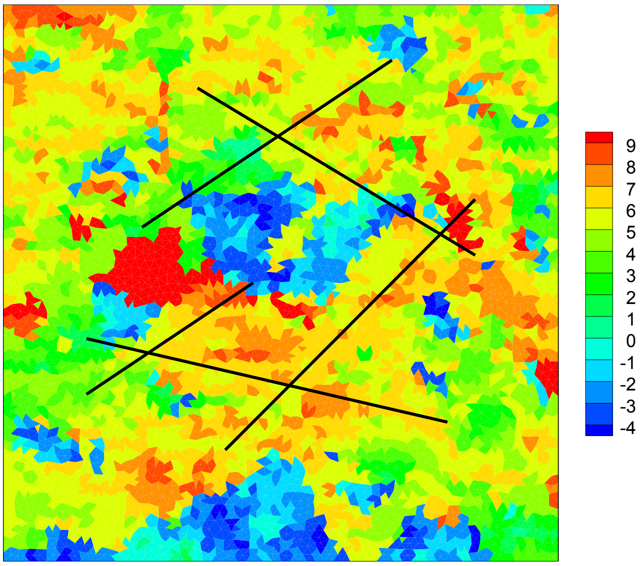
دومین مسئله مورد بررسی هندسه و شرایط مرزی مشابه مسئله اول دارد. دامنه شامل ۹ شکاف می‌باشد. هر دو دامنه ماتریس و شکاف همگن بوده و مقدار نفوذپذیری شکاف‌ها ۱۰۰۰ برابر مقدار دامنه ماتریس است. شبکه ریزمقیاس شامل شامل ۱۰۲۲۶ سلول ماتریس و ۳۰۶ سلول شکاف می‌باشد. شبکه درشت مقیاس از ۱۲ سلول ماتریس و ۵ سلول شکاف تشکیل شده‌است. شبکه‌های درشت اولیه و دوگانه در دامنه ماتریس در شکل‌های ۱۰ (الف) و ۱۰ (ب) و در دامنه شکاف‌ها در شکل‌های ۱۰ (ج) و ۱۰ (د) نشان داده‌شده‌است.

شکل‌های ۱۱ (الف) و ۱۱ (ب) به ترتیب میدان فشار بدست‌آمده از روش حجم محدود چندمقیاسی و حل ریزمقیاس را نشان می‌دهند. روش حجم محدود چندمقیاسی میدان فشار را با خطای نسبی $e_p = ۶/۴۸ \times ۱۰^{-۲}$ محاسبه می‌کند. مشاهده می‌شود که توزیع فشار بدست‌آمده از روش حجم محدود چندمقیاسی در مقایسه با میدان فشار ریزمقیاس قابل قبول می‌باشد.

۴-۳- مسئله سوم: محیط متخلخل شکاف‌دار با میدان نفوذپذیری بسیار ناهمگن در دامنه ماتریس

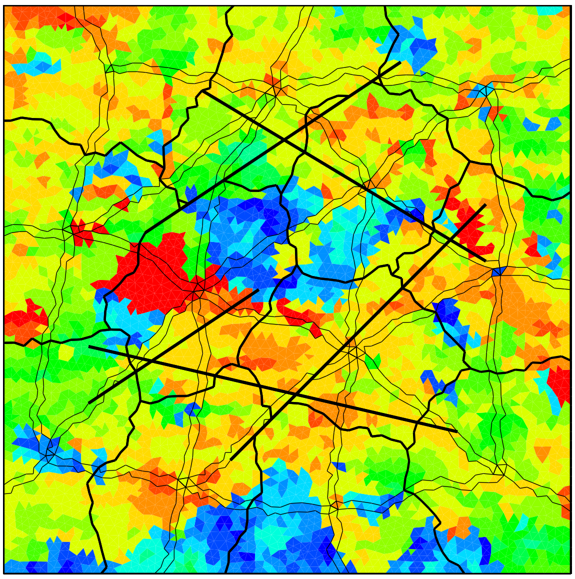
یکی از مسائل چالش برانگیز برای روش حجم محدود چندمقیاسی، میدان‌های نفوذپذیری بسیار ناهمگن با ساختار کانال‌گونه است. در مراجع مختلف نشان داده‌شده‌است که برای این‌گونه مسائل، میدان فشار محاسبه‌شده با استفاده از روش حجم محدود چندمقیاسی دارای قله‌های فشاری غیرفیزیکی است [۲۳]. یک مثال شناخته‌شده از مدل مخزن با میدان نفوذپذیری کانال‌گونه، ۳۵ لایه زیرین مسئله SPE۱۰ است [۳۶]. شکل ۱۲ لگاریتم طبیعی میدان نفوذپذیری در دامنه ماتریس را که از هشتاد و چهارمین لایه از مسئله SPE۱۰ استخراج شده‌است، نشان می‌دهد. این میدان نفوذپذیری بسیار ناهمگن است. ابعاد مسئله، شبکه ریز مقیاس، شرایط مرزی و شبکه شکاف‌ها مشابه مسئله اول است. مقدار نفوذپذیری شکاف‌ها $۱۰^۵$ در نظر گرفته‌شده‌است.

شبکه‌های درشت اولیه و دوگانه در دامنه ماتریس در شکل ۱۳ نشان داده‌شده‌است. در این شکل مشاهده می‌شود که در برخی از سلول‌های درشت اولیه، سلول‌های گره در نواحی با نفوذپذیری پایین قرارگرفته‌اند. همچنین در امتداد برخی از مرزهای شبکه درشت دوگانه، نفوذپذیری دارای تغییرات شدید است. شبکه‌های درشت



شکل ۱۲. لگاریتم طبیعی میدان نفوذپذیری دامنه ماتریس

Fig. 12. The natural logarithm of permeability field in the matrix domain



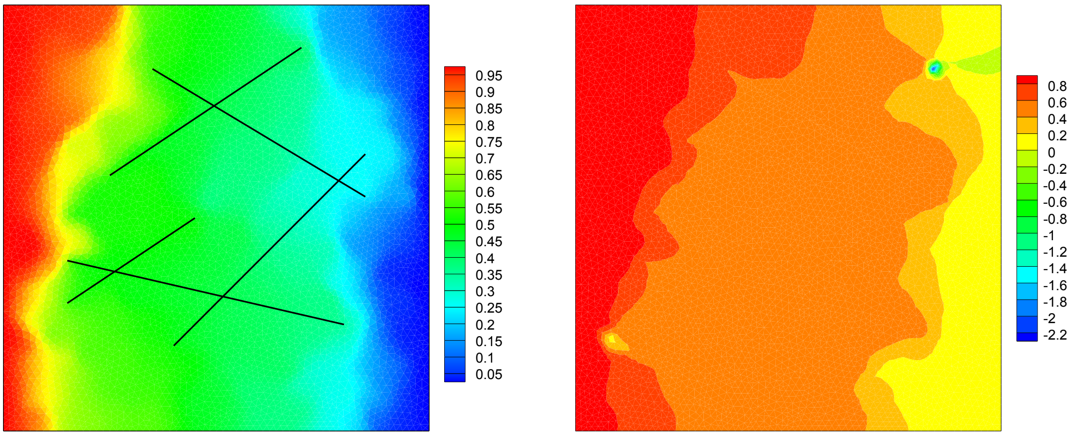
شکل ۱۳. شبکه‌های درشت اولیه و دوگانه استاندارد تولیدشده در دامنه ماتریس

Fig. 13. Standard primal and dual coarse grids in the matrix domain

اولیه و دوگانه در دامنه شکاف‌ها مشابه مسئله اول است.

میدان فشار بدست‌آمده از روش حجم محدود چندمقیاسی و حل ریزمقیاس به ترتیب در شکل‌های ۱۴ (الف) و ۱۴ (ب) نشان داده‌شده‌است. همانطور که در شکل ۱۴ (الف) مشاهده می‌شود، میدان فشار چندمقیاسی دارای قله‌های غیرفیزیکی است.

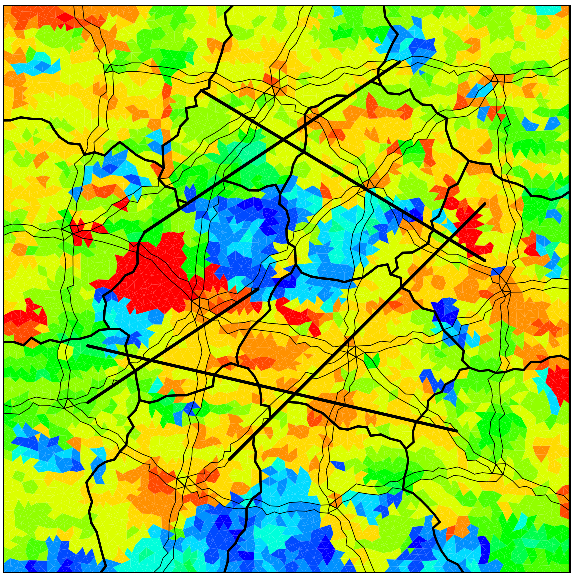
برای کاهش خطای فشار چندمقیاسی و رفع قله‌های غیرفیزیکی، شبکه درشت دوگانه تطبیقی بر اساس تغییرات محلی میدان نفوذپذیری تولید شده‌است. در شکل ۱۵ مرزهای شبکه درشت اولیه استاندارد و شبکه درشت دوگانه تطبیقی بر روی میدان نفوذپذیری دامنه ماتریس نشان داده‌شده‌است. همانطور که در شکل ۱۵ مشاهده می‌شود، در شبکه درشت دوگانه تطبیقی از قرارگیری سلول‌های گره در نواحی با نفوذپذیری پایین و همچنین از تغییرات شدید نفوذپذیری



(ب) (الف)

شکل ۱۴. میدان فشار بدست‌آمده از (الف) روش حجم محدود چندمقیاسی، (ب) حل ریزمقیاس

Fig. 14. Pressure contours obtained by the (a) MSFV method, (b) fine reference solution



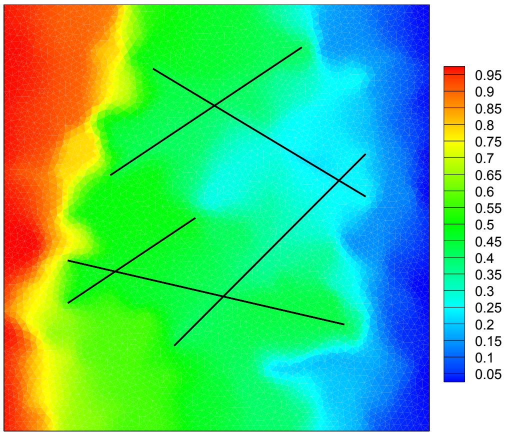
شکل ۱۵. شبکه‌های درشت اولیه استاندارد و دوگانه تطبیقی تولیدشده در دامنه ماتریس

Fig. 15. Standard primal and adapted dual coarse grids in the matrix domain

در امتداد مسیر سلول‌های ضلع تا حد امکان جلوگیری شده‌است. روش حجم محدود چندمقیاسی با استفاده از شبکه درشت دوگانه تطبیقی، میدان فشار را با خطای نسبی e_p = ۷/۹۱×۱۰$^{-۲}$ پیش‌بینی می‌کند. میدان فشار بدست‌آمده از روش حجم محدود چندمقیاسی با استفاده از شبکه درشت بی‌سازمان تطبیقی در شکل ۱۶ نشان داده‌شده‌است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، نوسان‌های غیرفیزیکی موجود در میدان فشار چندمقیاسی با استفاده از شبکه درشت دوگانه تطبیقی حذف شده‌اند.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش حجم محدود چندمقیاسی برای مدل‌سازی شکاف‌های گسسته در شبکه‌های بی‌سازمان توسعه داده‌شده‌است. نوآوری این پژوهش، به‌کارگیری شبکه‌های بی‌سازمان تطبیقی در محیط متخلخل شکاف‌دار است. الگوریتم‌هایی برای تولید شبکه‌های



شکل ۱۶. میدان فشار بدست‌آمده از روش حجم محدود چندمقیاسی با استفاده از شبکه درشت دوگانه تطبیقی

Fig. 16. Multiscale finite volume pressure solution using adaptive dual coarse grid

درشت مقیاس بی‌سازمان تطبیقی ارائه شده‌است. تطبیق شبکه‌های درشت مقیاس بی‌سازمان بر اساس تغییرات محلی میدان نفوذپذیری، باعث بهبود قابل توجه نتایج حل چندمقیاسی در میدان‌های نفوذپذیری بسیار ناهمگن می‌شود. سلول‌های شبکه درشت مقیاس به گونه‌ای تولید می‌شوند که از تغییرات شدید مقادیر نفوذپذیری در امتداد مرزهای آن و همچنین از قرارگرفتن گره‌های شبکه درشت مقیاس در نواحی با نفوذپذیری پایین جلوگیری شود. الگوریتم‌های ارائه‌شده برای تولید شبکه‌های درشت مقیاس، از گراف معادل شبکه بی‌سازمان استفاده می‌کنند. بنابراین، این الگوریتم‌ها برای سایر المان‌ها (غیر مثلثی) و همچنین شبکه‌های سه‌بعدی قابل اجرا هستند. روش حجم محدود چندمقیاسی با استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان تولیدشده، برای شبیه‌سازی مسئله‌های مختلف در محیط متخلخل شکاف‌دار با میدان‌های نفوذپذیری همگن و ناهمگن به‌کار گرفته‌شده‌است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد روش ارائه‌شده بدون استفاده از روش‌های تکرار برای کاهش خطا، حل ریزمقیاس را با دقت بالایی پیش‌بینی می‌کند. همچنین برای مسئله با میدان نفوذپذیری به شدت ناهمگن، نشان داده‌شده‌است که با استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان تطبیقی می‌توان نوسان‌های غیرفیزیکی مشاهده‌شده در میدان فشار چندمقیاسی را از بین برد. در پایان نتیجه می‌شود روش حجم محدود چندمقیاسی با استفاده از روش‌های تولید شبکه بی‌سازمان ارائه‌شده، قابلیت توسعه و به کارگیری برای شبیه‌سازی مخازن با مقیاس واقعی را دارد.

مراجع

[1] J. Noorishad, M. Mehran, An upstream finite element method for solution of transient transport equation in fractured porous media, Water Resources Research, (3)18 596-588 (1982).

[2] L. Li, S.H. Lee, Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media, SPE Reservoir Evaluation & Engineering, 758-750 (2008) (04)11.

[3] H. Hajibeygi, D. Karvounis, P. Jenny, A hierarchical fracture model for the iterative multiscale finite volume method, Journal of Computational Physics, (24)230 8743-8729 (2011).

[4] A. Moinfar, A. Varavei, K. Sepehrnoori, R. T. Johns, Development of an efficient embedded discrete fracture model for 3D compositional reservoir simulation in fractured reservoirs, SPE Journal, 303–289 (2014) 19.

[5] Y. Efendiev, S. Lee, G. Li, J. Yao, N. Zhang, Hierarchical multiscale modeling for flows in fractured media using generalized multiscale finite element method, GEM-International Journal on Geomathematics, (2015) (2)6 162-141.

[6] M. Karimi-Fard, L.J. Durlofsky, K. Aziz, An efficient discrete fracture model applicable for general purpose reservoir simulators, in: SPE Reservoir Simulation Symposium, SPE Journal, 236–227 (2004) 9.

2006, pp. 8-1.

[17] S. Lee, C. Wolfsteiner, H. Tchelepi, Multiscale finite-volume formulation for multiphase flow in porous media: black oil formulation of compressible, three-phase flow with gravity, Computational Geosciences, (2008) (3)12 366-351.

[18] I. Lunati, P. Jenny, Multiscale finite-volume method for density-driven flow in porous media, Computational Geosciences, 350-337 (2008) (3)12.

[19] M. Presho, M. Hill, A conservative generalized multiscale finite volume/element method for modeling two-phase flow with capillary pressure, Journal of Computational and Applied Mathematics, (113026 (2020.

[20] C. Wolfsteiner, S.H. Lee, H.A. Tchelepi, Well modeling in the multiscale finite volume method for subsurface flow simulation, Multiscale Modeling & Simulation, (3)5 917-900 (2006).

[21] P. Jenny, I. Lunati, Modeling complex wells with the multi-scale finite-volume method, Journal of Computational Physics, 702-687 (2009) (3)228.

[22] H. Hajibeygi, G. Bonfigli, M.A. Hesse, P. Jenny, Iterative multiscale finite-volume method, Journal of Computational Physics, 8621-8604 (2008) (19)227.

[23] I. Lunati, M. Tyagi, S.H. Lee, An iterative multiscale finite volume algorithm converging to the exact solution, Journal of Computational Physics, -1849 (2011) (5)230 1864.

[24] H. Zhou, H.A. Tchelepi, Operator-based multiscale method for compressible flow, SPE Journal, (2008) 13 273–267.

[25] Y. Wang, H. Hajibeygi, H.A. Tchelepi, Algebraic multiscale solver for flow in heterogeneous porous media, Journal of Computational Physics, 303-284 (2014) 259.

[26] O. Møyner, K.A. Lie, The multiscale finite volume method on unstructured grids, SPE Journal, (2014) 19 831–816.

[27] O. Møyner, K.A. Lie, A multiscale restriction-smoothed basis method for high contrast porous media represented on unstructured grids, Journal of Computational Physics, 71–46 (2016) 304.

[7] V. Reichenberger, H. Jakobs, P. Bastian, R. Helmig, A mixed-dimensional finite volume method for two-phase flow in fractured porous media, Advances in water resources, 1036-1020 (2006) (7)29.

[8] S. Geiger-Boschung, S.K. Matthäi, J. Niessner, R. Helmig, Black-oil simulations for three-component, three-phase flow in fractured porous media, SPE journal, (02)14 354-338 (2009).

[9] R. Ahmed, M.G. Edwards, S. Lamine, B.A. Huisman, M. Pal, Control-volume distributed multi-point flux approximation coupled with a lower-dimensional fracture model, Journal of Computational Physics, -462 (2015) 284 489.

[10] T.Y. Hou, X.-H. Wu, A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media, Journal of computational physics, (1997) (1)134 189-169.

[11] P. Jenny, S. Lee, H.A. Tchelepi, Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation, Journal of Computational Physics, (1)187 67-47 (2003).

[12] Z. Chen, T. Hou, A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients, Mathematics of Computation, 576-541 (2003) (242)72.

[13] I. Sokolova, M.G. Bastisya, H. Hajibeygi, Multiscale finite volume method for finite-volume-based simulation of poroelasticity, Journal of Computational Physics, 379 324-309 (2019).

[14] P. Jenny, S.H. Lee, H.A. Tchelepi, Adaptive fully implicit multi-scale finite-volume method for multi-phase flow and transport in heterogeneous porous media, Journal of Computational Physics, 641-627 (2006) (2)217.

[15] H. Hajibeygi, P. Jenny, Multiscale finite-volume method for parabolic problems arising from compressible multiphase flow in porous media, Journal of Computational Physics, 5147-5129 (2009) (14)228.

[16] I. Lunati, P. Jenny, A multiscale finite-volume method for three-phase flow influenced by gravity, in: Proceedings of XVI international conference on computational methods in water resources (CMWR XVI), Copenhagen, Denmark,

[28] S. Bosma, H. Hajibeygi, M. Tene, H.A. Tchelepi, Multiscale finite volume method for discrete fracture modeling on unstructured grids (MS-DFM), Journal of Computational Physics, 164-145 (2017) 351.

[29] T. Sandve, E. Keilegavlen, J. Nordbotten, Physics-based preconditioners for flow in fractured porous media, Water Resources Research, 1373–1357 (2014) (2)50.

[30] M. Ţene, M.S. Al Kobaisi, H. Hajibeygi, Algebraic multiscale method for flow in heterogeneous porous media with embedded discrete fractures (F-AMS), Journal of Computational Physics, 845-819 (2016) 321.

[31] S. Shah, O. Møyner, M. Tene, K.-A. Lie, H. Hajibeygi, The multiscale restriction smoothed basis method for fractured porous media (F-MsRSB), Journal of Computational Physics, 57-36 (2016) 318.

[32] A.P. Giotis, K.C. Giannakoglou, An unstructured grid partitioning method based on genetic algorithms, Advances in Engineering Software, 138-129 (1998) (2)29.

[33] P. Korošec, J. Šilc, B. Robič, Solving the mesh-partitioning problem with an ant-colony algorithm, Parallel computing, 801-785 (2004) (6-5)30.

[34] P. Liu , C. F. Wang, A bubble-inspired algorithm for finite element mesh partitioning, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 794–770 (2013) (7)93.

[35] F. Glover, M. Laguna, TabuSearchKluwer Academic Publishers, Boston, MA, (1997).

[36] M.A. Christie, M.J. Blunt, Tenth SPE comparative solution project: A comparison of upscaling techniques, SPE Reservoir Evaluation & Engineering, (2001) (4)4 317-308.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

Z. Mehrdoost, Multiscale simulation of flow in fractured porous media using unstructured grids, Amirkabir J. Mech Eng., 53(7) (2021) 4133-4152.

DOI: 10.22060/mej.2020.18399.6809