



تحلیل دینامیکی پوسته ساندویچی با تقویت کننده‌های متعامد با استفاده از تئوری مرتبه بالا

رضا آذر افزا^۱، کرامت ملک‌زاده فرد^۲، میثم گل‌آقاپور کامی^۳، علیرضا پورموید^۴

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۲- دانشکده هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۳- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، بابل، ایران

۴- دانشکده مکانیک، دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء (ص)، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۰

بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۰۹

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۲۸

ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۶/۱۷

کلمات کلیدی:

ارتعاشات آزاد

ارتعاشات اجباری

پوسته ساندویچی

تقویت کننده‌های متعامد

تئوری مرتبه بالا

خلاصه: در این مقاله ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای ساندویچی مرکب با تقویت کننده‌های متعامد با استفاده از تئوری مرتبه بالا مورد تحلیل قرار گرفته است. سازه ساندویچی مذکور از دو رویه کامپوزیتی ارتوتروپیک و یک هسته انعطاف پذیر از جنس فوم و تقویت کننده‌های طولی و محیطی تشکیل شده است. رویه‌ها و هسته کاملاً به یکدیگر چسبیده می‌باشند و جابجایی نسبی بین آن‌ها در محل اتصال وجود ندارد. جهت تحلیل این پوسته تحت شرایط مرزی دو سر ساده، جابجایی رویه‌ها بر مبنای تئوری مرتبه سوم کانت و در هسته از مدل دوم فروستینگ استفاده شده است. از روش ریلی ریتز جهت حل ارتعاشات آزاد و روش مودهای فرض شده جهت تحلیل ارتعاشات اجباری استفاده شده است. در بخش ارتعاشات اجباری بارگذاری سینوسی به صورت یکنواخت و شعاعی بر پوسته اعمال می‌گردد. شبیه‌سازی ارتعاشات پوسته ساندویچی تقویت شده با نرم‌افزار آباکوس انجام شده است. در نهایت اثر پارامترهای مختلف از جمله نسبت طول به شعاع، نسبت ضخامت به شعاع، ضخامت هسته به ضخامت کل، ساختار و جنس رویه‌ها و هسته بر پاسخ ارتعاشی سازه مورد بررسی قرار گرفته است. صحت‌گذاری نتایج ارتعاشات آزاد و اجباری به دست آمده از تحلیل حاضر با نتایج دیگر مراجع و نرم‌افزار آباکوس مقایسه گردید.

۱- مقدمه

استفاده از سازه‌های ساندویچی به طور روزافزون در صنایع مختلف از جمله: هوافضا، حمل و نقل جاده‌ای، دریایی و سازه‌های ساختمانی در سه دهه اخیر گسترش یافته است. دلیل اصلی این موضوع ویژگی‌های برجسته پانل‌های ساندویچی از قبیل نسبت مقاومت به وزن زیاد، مقاومت عالی در برابر خوردگی، خستگی، امکان استفاده از رویه‌های کامپوزیتی و هسته با خواص جهت‌دار و عملکرد مناسب در دمای بالا می‌باشد. با این وجود یکی از راه‌های افزایش بیشتر نسبت استحکام به وزن این سازه‌ها استفاده از تقویت کننده‌های طولی و محیطی می‌باشد. در این بین یکی از پرکاربردترین سازه‌های

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: pourmoayed@mut.ac.ir

ساندویچی، پانل‌هایی استوانه‌ای با رویه‌هایی نازک و ضخیم کامپوزیتی بوده که در بدنه بسیاری از سازه‌های صنعتی مانند هواپیماها، موشک‌ها، شاتل‌ها، زیردریایی‌ها و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک سازه ساندویچی اعم از تیر، ورق یا پوسته، متشکل از دو رویه و یک هسته نرم انعطاف پذیر می‌باشد. رویه‌ها را معمولاً از ورق‌های مستحکم فلزی و یا ورق‌های چندلایه کامپوزیتی می‌سازند. هسته‌ها نیز غالباً از پلیمرهای سبک، فوم‌ها و یا سازه‌های لانه‌زنبوری ساخته می‌شوند. به منظور بالابردن نسبت استحکام به وزن پوسته، راه‌های متعددی وجود دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

استفاده از مواد مرکب (کامپوزیت)، استفاده از تقویت کننده‌های طولی و محیطی، انتخاب جنس پوسته از موادی که این شرایط را



دارا می‌باشند مانند آلیاژهای با نسبت استحکام به وزن بالا، استفاده ترکیبی از سه روش فوق.

روشی که در این پژوهش مورد توجه قرار گرفته استفاده هم‌زمان از مواد مرکب (کامپوزیت) و تقویت‌کننده‌های متعامد (طولی و محیطی) می‌باشد. در میان نیازهای مطرح‌شده برای طراحی یک سازه بهینه، مواردی چون وزن کم، استحکام و سفتی بالا و توانایی بهره‌وری خوب و کارکرد مطمئن را می‌توان نام برد. همه این موارد به طور قابل‌ملاحظه‌ای با انتخاب مواد و فناوری‌های ساخت سازه ارتباط دارند. دانش خصوصیات ارتعاشی پوسته‌های کامپوزیتی، هم برای درک عمومی مبانی رفتار این پوسته‌ها و هم به منظور فهم کاربردهای صنعتی آن‌ها بسیار مهم است. در ارتباط با مفهوم کاربرد صنعتی، بایستی فرکانس‌های طبیعی پوسته به منظور جلوگیری از اثر تشدید شناخته شوند. اهمیت پیشگویی دقیق پاسخ ارتعاشی به طور فزاینده‌ای در طراحی سازه‌های هوافضایی کامپوزیتی رو به رشد است. به‌طور کلی، تئوری‌های ورق و پوسته کامپوزیتی شامل تئوری‌های تک لایه معادل [۱] (تئوری کلاسیک ورق‌های چندلایه و تئوری تغییر شکل برشی چندلایه) و تئوری الاستیسیته سه‌بعدی (تئوری عمومی الاستیسیته سه‌بعدی و تئوری لایه‌گون) می‌باشد. تئوری‌های تک‌لایه معادل، مجموعه لایه‌های کامپوزیتی را به صوت یک تک لایه معادل فرض نموده و روابط سینماتیکی جابجایی را برای آن در نظر می‌گیرند. این نوع تئوری‌ها مسئله سه‌بعدی را به یک مسئله دوبعدی تبدیل می‌نمایند. در مقابل تئوری‌های سه‌بعدی هستند که هر لایه را به صورت یک جسم سه‌بعدی جداگانه فرض می‌نمایند. مدل لایه‌گون به علت وابسته‌بودن تعداد توابع مجهول به تعداد لایه‌های لمینیت دارای دقت خوبی در محاسبه فرکانس‌های طبیعی می‌باشد. استفاده از تئوری‌های تک لایه معادل اغلب نتایج غیردقیقی در تحلیل پانل‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر در جهت عمودی می‌دهند [۲]. ملک‌زاده و همکاران [۳] نشان دادند استفاده از تئوری مرتبه اول برشی در تحلیل پانل‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر هنگامی که رویه‌ها نازک می‌باشند، نتایج نسبتاً خوبی را ارائه می‌دهد. فروستینگ تحلیل کمانش ورق ساندویچی را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی بررسی نمود [۴]. بیگلری و جعفری [۵] به منظور تحلیل استاتیکی و ارتعاشی پوسته ساندویچی دو انحنایی یک تئوری سه لایه ترکیبی ارائه نمودند. در این مدل از تئوری دائل در رویه‌ها استفاده شده

و تغییرات تنش‌ها در هسته سازه به شکل خطی فرض شده است. کرها^۱ با استفاده از تئوری زیگزگ الگویی برای مدل‌سازی ورق‌ها و پوسته‌ها ارائه داد [۶]. گارگ^۲ با استفاده از تئوری ساندرز به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته ساندویچی دو انحنایی پرداخت [۷]. زارعی و همکاران به بررسی ارتعاشات آزاد استوانه کامپوزیتی مشبک دوار با تکیه‌گاه‌های مختلف با استفاده از بسط سری فوریه پرداختند آن‌ها معادلات مربوط به آنالیز ارتعاشی را بر مبنای تئوری ساندرز استخراج و با استفاده از بسط سری فوریه تبدیل استوکس فرکانس ارتعاشات پوسته استوانه‌ای را تعیین نمودند [۸]. با توجه به نقایص تئوری‌های فوق، هنگامی که تمام مؤلفه‌های تنش بخواهند در نظر گرفته شود، محققین از تئوری‌های بهبودیافته مرتبه بالا استفاده می‌نمایند. در این زمینه می‌توان به تحقیقات محققانی همانند فروستینگ و تامسون^۳ [۹] و ملک‌زاده و همکاران [۱۰] اشاره نمود. رحمانی و همکارانش [۱۱] ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر را بر مبنای تئوری مرتبه بالای ورق‌ها بررسی کردند. آن‌ها میدان جابجایی در هسته را با فرض یکنواختی تنش‌های برشی در جهت ضخامت و با استفاده از روابط الاستیسیته به دست آوردند و برای رویه‌ها از تئوری کلاسیک پوسته‌ها استفاده کردند. کاگوا^۴ [۱۲] ارتعاشات غیرمحوری متقارن پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی را با استفاده از تئوری برشی تک لایه معادل مرتبه اول و روش حل ناویر را مورد بررسی قرار داد. رحیمی و همکارانش [۱۳]، یک روش تحلیلی جهت بررسی رفتار ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده تحت شرایط مرزی مختلف ارائه نمودند. سلیمی و همکارانش [۱۴]، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده با ریب محیطی تحت شرایط مرزی یک سرگیردار و دوسرگیردار را با روش تحلیلی و المان محدود بررسی نمودند و نتایج دو روش را با هم مقایسه نمودند. زارعی و همکاران [۱۵]، ارتعاشات آزاد پوسته‌های کامپوزیتی استوانه‌ای و مخروطی تقویت‌شده تحت شرایط مرزی مختلف را بررسی نمودند و معادلات مربوطه را بر اساس تئوری دائل استخراج نموده و اثرات تغییرات پارامترهای هندسی و تغییر در زاویه بین تقویت‌کننده‌ها را بر فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار دادند. شاهقلیان و همکارانش [۱۶ و ۱۷]، به بررسی عددی و تجربی ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیتی

1 Carrera

2 Garg

3 Frostig, Thomsen

4 Kagawa

نمی‌باشند، ارائه یک مدل تحلیلی مرتبه بالا که قادر به لحاظ کردن اثرات انعطاف‌پذیری هسته باشد، ضروری است. به همین منظور در این مقاله مدل مرتبه بالای پانل ساندویچی مورد استفاده قرار گرفته است. جابجایی‌های w, v, u رویه‌ها در جهت محورهای x, θ و z مطابق با تئوری مرتبه سوم کانت، به صورت رابطه (۱) می‌باشند.

$$\begin{aligned} u_i(x, \theta, z, t) &= u_0^i(x, \theta, t) + z_i u_1^i(x, \theta, t) + \\ v_i(x, \theta, z, t) &= v_0^i(x, \theta, t) + z_i v_1^i(x, \theta, t) + \\ w_i(x, \theta, z, t) &= w_0^i(x, \theta, t) + z_i w_1^i(x, \theta, t) - \\ &+ z_i^2 u_2^i(x, \theta, t) + z_i^3 u_3^i(x, \theta, t) \\ &+ z_i^2 v_2^i(x, \theta, t) + z_i^3 v_3^i(x, \theta, t) \\ &+ z_i^2 w_2^i(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $i=t, b$ می‌باشد.

میدان جابجایی هسته مطابق با مدل دوم فروستینگ با رابطه (۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u_c(x, \theta, z, t) &= u_0^c(x, \theta, t) + z_c u_1^c(x, \theta, t) + z_c^2 u_2^c(x, \theta, t) + z_c^3 u_3^c(x, \theta, t) \\ v_c(x, \theta, z, t) &= (1 + \frac{z_c}{R}) v_0^c(x, \theta, t) + z_c v_1^c(x, \theta, t) + z_c^2 v_2^c(x, \theta, t) + z_c^3 v_3^c(x, \theta, t) \\ w_c(x, \theta, z, t) &= w_0^c(x, \theta, t) + z_c w_1^c(x, \theta, t) + z_c^2 w_2^c(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (2)$$

۲-۳- میدان جابجایی تقویت‌کننده‌ها

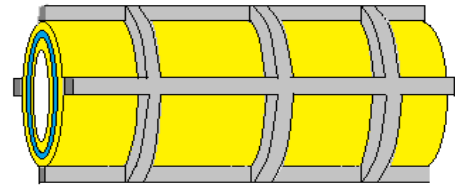
میدان جابجایی تقویت‌کننده‌های بیرونی با فرض تبعیت از رویه بیرونی با روابط (۳) محاسبه می‌گردد.

$$\begin{aligned} u_s &= u_t(x, \theta, 0, t) - z_s \frac{\partial w_t(x, \theta, 0, t)}{\partial x} \\ w_s &= w_t(x, \theta, \frac{h_t}{2}, t) \quad , \quad z_s = \frac{d_s + h_t}{2} \\ v_s &= v_t(x, \theta, 0, t) (1 - \frac{z_s}{R_t}) - \frac{z_s}{R_t} \frac{\partial w_t(x, \theta, 0, t)}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن d_s ارتفاع تقویت‌کننده‌ها، و z_s فاصله سطح میانی رویه بیرونی تا سطح میانی تقویت‌کننده‌ها می‌باشد.

۲-۴- روابط کرنش-جابجایی رویه‌ها و هسته

روابط سینماتیک برای رویه‌ها طبق رابطه (۴) می‌باشد:



شکل ۱. پوسته استوانه‌ای ساندویچی با تقویت‌کننده‌های متعامد

Fig. 1. Sandwich cylindrical shell with orthogonal stiffeners

مشبک پرداختند و اثرات تقویت‌کننده‌های طولی و عرضی را بر استحکام پوسته‌های کامپوزیتی مورد بررسی قرار داده و نوع سطح مقطع بهینه را برای تقویت‌کننده‌ها مشخص نمودند.

با توجه به تحقیقات انجام گرفته، ملاحظه می‌شود تاکنون تحقیقی که مسئله ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته ساندویچی استوانه‌ای با هسته انعطاف‌پذیر و تقویت‌کننده‌های متعامد که دارای رویه‌های ضخیم و تمام مؤلفه‌های تنش در نظر گرفته شده باشد، پرداخته نشده است. در این مقاله برای رویه‌ها از تئوری مرتبه بالای ارتقاء یافته و برای هسته از مدل دوم فروستینگ استفاده شده است. رویه‌های بالا و پایین ضخیم، میدان جابجایی به صورت چندجمله‌ای درجه سه و تمام مؤلفه‌های تنش در نظر گرفته شده‌اند. علاوه بر این در روابط مربوط به نتیجه‌های تنش هسته ترم $(z/R+1)$ که ترم خیلی مهمی در تحلیل پانل ساندویچی استوانه‌ای شکل می‌باشد در نظر گرفته شده است.

۲- معادلات حاکم

۲-۱- مدل هندسی مورد مطالعه

شکل ۱، مدل هندسی مورد مطالعه در این تحقیق را که از یک پانل ساندویچی استوانه‌ای ضخیم که از دو رویه مواد مرکب لایه‌ای و تقویت‌کننده‌های متعامد طولی و محیطی تشکیل شده است، نشان می‌دهد. ضخامت رویه‌های بالایی و پایینی و هسته به ترتیب برابر با مقادیر ثابت h_t ، h_b و h_c می‌باشد. شعاع‌های میانی رویه‌های بالا، پایین و هسته به ترتیب برابر R_t ، R_b و R_c می‌باشد. طول پوسته استوانه‌ای L و ضخامت کل h می‌باشد.

۲-۲- میدان جابجایی رویه‌ها و هسته

با توجه به این که تئوری‌های متداول قادر به پیش‌بینی اثرات تغییر شکل‌های برشی دقیق در راستای ضخامت رویه‌ها و هسته

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}^c &= w_1^c + 2z w_2^c, \quad \gamma_{x\theta}^c = \left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) v_{0,x}^c + z_c v_{1,x}^c + z_c^2 v_{2,x}^c \\ \gamma_{xz}^c &= (w_{0,x}^c + z_c w_{1,x}^c + z_c^2 w_{2,x}^c) + (u_1^c + 2z u_2^c + 3z^2 u_3^c) \\ \gamma_{\theta z}^c &= \frac{1}{\left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right)} \left[\frac{1}{R_c} \begin{pmatrix} w_{0,\theta}^c + z_c w_{1,\theta}^c + z_c^2 w_{2,\theta}^c - \left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) v_0^c \\ -z_c v_1^c - z_c^2 v_2^c - z_c^3 v_3^c \end{pmatrix} \right] + \left(\frac{v_0^c}{R_c} + v_1^c + 2z_c v_2^c + 3z_c^2 v_3^c \right) \end{aligned} \quad (7)$$

۲-۵- روابط تنش- کرنش رویه‌ها و هسته

روابط تنش- کرنش برای لایه Kam کامپوزیت ارتوتروپیک طبق رابطه (۸) تعریف می‌شود [۱۸]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{\theta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{34} & 0 & 0 \\ Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{56} & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{pmatrix} \quad (8)$$

روابط تنش- کرنش برای هسته ایزوتروپ طبق رابطه (۹) تعریف می‌شود [۱۸]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^c \\ \sigma_{\theta\theta}^c \\ \sigma_{zz}^c \\ \tau_{x\theta}^c \\ \tau_{xz}^c \\ \tau_{\theta z}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^c \\ \varepsilon_{\theta\theta}^c \\ \varepsilon_{zz}^c \\ \gamma_{x\theta}^c \\ \gamma_{xz}^c \\ \gamma_{\theta z}^c \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} c^4 + 2(C_{12} + C_{44}) s^2 c^2 + C_{22} s^4, \quad Q_{12} = C_{12} (s^4 + c^4) \\ Q_{13} &= (C_{13} c^2 + C_{23} s^2), \quad Q_{14} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) s c^3 + (C_{13} c^2 + C_{23} s^2) s \\ Q_{22} &= C_{11} s^4 + 2(C_{12} + 2C_{44}) s^2 c^2 + C_{22} c^4, \quad Q_{23} = (C_{13} s^2 + C_{23} c^2) s \\ Q_{24} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) s c^3 + (C_{12} - C_{22} + 2C_{44}) c s^3, \quad Q_{33} = C_{33} \\ Q_{34} &= (C_{13} - C_{32}) s c, \quad Q_{55} = C_{55} c^2 + C_{66} s^2 \\ Q_{44} &= (C_{11} - 2C_{12} + C_{22} - 2C_{44}) s^2 c^2 + C_{44} (s^4 + c^4), \quad Q_{56} = C_{56} \end{aligned} \quad (10)$$

که درایه‌های ماتریس سفتی به صورت روابط (۱۱) محاسبه می‌گردند:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}, \quad C_{12} = \frac{E_1(\nu_{21}-\nu_{31}\nu_{23})}{\Delta}, \quad C_{13} = \frac{E_1(\nu_{31}-\nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} \\ C_{22} &= \frac{E_1(1-\nu_{31}\nu_{13})}{\Delta}, \quad C_{23} = \frac{E_1(\nu_{32}-\nu_{12}\nu_{31})}{\Delta}, \quad C_{33} = \frac{E_1(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\Delta} \\ C_{44} &= G_{12}, \quad C_{55} = G_{13}, \quad \Delta = (1-\nu_{21}\nu_{12}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{13}\nu_{31}-2\nu_{21}\nu_{13}\nu_{32}), \quad C_{66} = G_{23} \end{aligned} \quad (11)$$

که در روابط (۱۱)، E_{ij} ها مدول یانگ و ν_{ij} ها ضرایب پواسون

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^i &= \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad \varepsilon_{x\theta}^i = \frac{1}{R_i} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^i &= \frac{1}{R_i} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} + \frac{w_i}{R_i}, \quad \varepsilon_{z\theta}^i = \frac{\partial w_i}{\partial z} \\ \varepsilon_{zz}^i &= \frac{\partial w_i}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz}^i = \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{1}{R_i} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} + \frac{\partial v_i}{\partial z} - \frac{v_i}{R_i} \end{aligned} \quad (4)$$

با قراردادن میدان جابجایی رویه‌ها (روابط (۱)) در روابط کرنش رویه‌ها (روابط (۴))، کرنش‌ها بر حسب میدان جابجایی مطابق روابط (۵) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^i &= u_{0,x}^i + z_i u_{1,x}^i + z_i^2 u_{2,x}^i + z_i^3 u_{3,x}^i, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^i &= \left[\frac{1}{R_i} \left(v_{0,\theta}^i + z_i v_{1,\theta}^i + z_i^2 v_{2,\theta}^i + z_i^3 v_{3,\theta}^i + w_0^i + z_i w_1^i + z_i^2 w_2^i \right) \right] \\ \varepsilon_{zz}^i &= w_1^i + 2z w_2^i, \quad \gamma_{x\theta}^i = v_{0,x}^i + z_i v_{1,x}^i + z_i^2 v_{2,x}^i + \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & z_i^3 v_{3,x}^i + \left[\frac{1}{R_i} (u_{0,\theta}^i + z_i u_{1,\theta}^i + z_i^2 u_{2,\theta}^i + z_i^3 u_{3,\theta}^i) \right] \\ \gamma_{xz}^i &= (w_{0,x}^i + z_i w_{1,x}^i + z_i^2 w_{2,x}^i) + (u_1^i + 2z_i u_2^i + 3z_i^2 u_3^i) \\ \gamma_{\theta z}^i &= \left[\frac{1}{R_i} \left(w_{0,\theta}^i + z_c w_{1,\theta}^i + z_i^2 w_{2,\theta}^i \right) \right] + (v_1^i + 2z_i v_2^i + 3z_i^2 v_3^i) \end{aligned}$$

و روابط سینماتیک برای هسته طبق رابطه (۶) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^c &= \frac{\partial u_c}{\partial x}, \quad \varepsilon_{x\theta}^c = \frac{1}{1 + \frac{z_c}{R_c}} \frac{1}{R_c} \frac{\partial u_c}{\partial \theta} + \frac{\partial v_c}{\partial x}, \\ \varepsilon_{zz}^c &= \frac{\partial w_c}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz}^c = \frac{\partial u_c}{\partial z} + \frac{\partial w_c}{\partial x} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^c &= \frac{1}{1 + \frac{z_c}{R_c}} \left(\frac{1}{R_c} \frac{\partial v_c}{\partial \theta} + \frac{w_c}{R_c} \right), \quad \varepsilon_{z\theta}^c = \frac{1}{1 + \frac{z_c}{R_c}} \left(\frac{1}{R_c} \frac{\partial w_c}{\partial \theta} - \frac{v_c}{R_c} \right) + \frac{\partial v_c}{\partial z} \end{aligned} \quad (6)$$

با قراردادن میدان جابجایی هسته (روابط (۲)) در روابط کرنش‌های هسته (روابط (۶))، کرنش‌ها بر حسب میدان جابجایی مطابق روابط (۷) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^c &= u_{0,x}^c + z_c u_{1,x}^c + z_c^2 u_{2,x}^c + z_c^3 u_{3,x}^c, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^c &= \frac{1}{\left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right)} \left[\frac{1}{R_c} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) v_{0,\theta}^c + z_c v_{1,\theta}^c + z_c^2 v_{2,\theta}^c \\ + z_c^3 v_{3,\theta}^c + w_0^c + z_c w_1^c + z_c^2 w_2^c \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

با توجه به رابطه (۱۴) به دست آمده ۱۱ مجهول هسته به ۵ مجهول $u_0^c, u_1^c, v_0^c, v_1^c, w_0^c$ تقلیل می‌یابند. بنابراین در تحلیل پوسته ساندویچی استوانه‌ای تقویت‌شده یک انحنایی فوق می‌بایست ۲۷ مجهول به شرح زیر را به دست آورد:

$$\{d\} = \left\{ u_0^b, v_0^b, w_0^b, u_1^b, v_1^b, w_1^b, u_2^b, v_2^b, w_2^b, u_3^b, v_3^b, w_3^b, u_0^c, v_0^c, w_0^c, u_1^c, v_1^c, w_1^c, u_2^c, v_2^c, w_2^c, u_3^c, v_3^c, w_3^c \right\}^T \quad (15)$$

۲-۷- انرژی جنبشی پوسته ساندویچی

انرژی جنبشی رویه‌ها و هسته پوسته ساندویچی با رابطه (۱۶) بیان می‌شود:

$$K_i = \sum_{i=t,b,c} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \int_0^{L} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho_i R_i (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{w}_i^2) d\theta dx dz \quad (16)$$

که در آن چگالی لایه نام می‌باشد.

جهت انجام محاسبات انتگرال برای رویه‌ها، میدان جابجایی رویه‌ها در رابطه (۱۶) قرار داده می‌شود.

$$K_i = - \sum_{i=t,b,c} \iint_{A_i} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \frac{1}{2} \rho_i \left[(\dot{u}_0^i + z_i \dot{u}_1^i + z_i^2 \dot{u}_2^i + z_i^3 \dot{u}_3^i)^2 + (\dot{v}_0^i + z_i \dot{v}_1^i + z_i^2 \dot{v}_2^i + z_i^3 \dot{v}_3^i)^2 + (\dot{w}_0^i + z_i \dot{w}_1^i + z_i^2 \dot{w}_2^i)^2 \right] dz_i dA_i$$

$$= \sum_{i=t,b} \left(\iint_A (I_0^i \dot{u}_0^{i2} + 2I_1^i \dot{u}_0^i \dot{u}_1^i + I_2^i \dot{u}_1^{i2} + 2I_2^i \dot{u}_0^i \dot{u}_2^i + 2I_3^i \dot{u}_1^i \dot{u}_2^i + I_4^i \dot{u}_2^{i2} + 2I_3^i \dot{u}_0^i \dot{u}_3^i + 2I_4^i \dot{u}_1^i \dot{u}_3^i + 2I_5^i \dot{u}_2^i \dot{u}_3^i + I_6^i \dot{u}_3^{i2}) dA_i \right) +$$

$$\left(\iint_A (I_0^i \dot{v}_0^{i2} + 2I_1^i \dot{v}_0^i \dot{v}_1^i + I_2^i \dot{v}_1^{i2} + 2I_2^i \dot{v}_0^i \dot{v}_2^i + 2I_3^i \dot{v}_1^i \dot{v}_2^i + I_4^i \dot{v}_2^{i2} + 2I_3^i \dot{v}_0^i \dot{v}_3^i + 2I_4^i \dot{v}_1^i \dot{v}_3^i + 2I_5^i \dot{v}_2^i \dot{v}_3^i + I_6^i \dot{v}_3^{i2}) dA_i \right) +$$

$$\left(\iint_A (I_0^i \dot{w}_0^{i2} + 2I_1^i \dot{w}_0^i \dot{w}_1^i + I_2^i \dot{w}_1^{i2} + 2I_2^i \dot{w}_0^i \dot{w}_2^i + 2I_3^i \dot{w}_1^i \dot{w}_2^i + I_4^i \dot{w}_2^{i2}) dA_i \right)$$

که در آن:

$$(I_0^i, I_1^i, I_2^i, I_3^i, I_4^i, I_5^i, I_6^i) = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \rho_i (1, z_i, z_i^2, z_i^3, z_i^4, z_i^5, z_i^6) dz_i \quad (18)$$

هستند که مستقل از هم نیستند و با روابط زیر به هم مرتبطند:

$$\frac{U_{12}}{E_{11}} = \frac{U_{21}}{E_{22}} \quad \frac{U_{13}}{E_{11}} = \frac{U_{31}}{E_{33}} \quad \frac{U_{23}}{E_{22}} = \frac{U_{32}}{E_{33}} \quad (12)$$

در روابط (۱۰)، $c = \cos \theta$ ، $s = \sin \theta$ و زاویه چرخش الیاف^۱ در هر لایه هستند. جهت مثبت قراردادی زاویه θ ، چرخش به صورت ساعت‌گرد نسبت به راستای مرجع زاویه الیاف، یعنی جهت مثبت محور X است.

۲-۶- شرایط سازگاری جابجایی‌ها

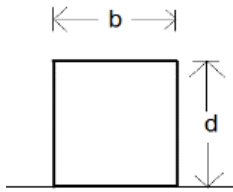
در این مقاله تقویت‌کننده‌ها به صورت ایده‌آل به رویه بیرونی و رویه‌ها به صورت ایده‌آل به هسته چسبیده‌اند. به عبارت دیگر شرایط پیوستگی جابجایی‌ها در فصل مشترک‌ها برقرار است. بنابراین هر سه مؤلفه جابجایی رویه بالایی با تقویت‌کننده‌ها و هسته در فصول مشترک، با هم برابرند. این شرایط برای فصل مشترک رویه پایینی با هسته نیز برقرار است. به این ترتیب، شرایط پیوستگی جابجایی در فصل مشترک هر یک از رویه‌ها با هسته مطابق روابط (۱۳) تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases} u_t |_{z_t = -\frac{ht}{2}} = u_c |_{z_c = \frac{hc}{2}} \\ u_b |_{z_b = \frac{hb}{2}} = u_c |_{z_c = -\frac{hc}{2}} \\ w_t |_{z_t = -\frac{ht}{2}} = w_c |_{z_c = \frac{hc}{2}} \\ w_b |_{z_b = \frac{hb}{2}} = w_c |_{z_c = -\frac{hc}{2}} \end{cases}, \begin{cases} v_t |_{z_t = -\frac{ht}{2}} = v_c |_{z_c = \frac{hc}{2}} \\ v_b |_{z_b = \frac{hb}{2}} = v_c |_{z_c = -\frac{hc}{2}} \end{cases} \quad (13)$$

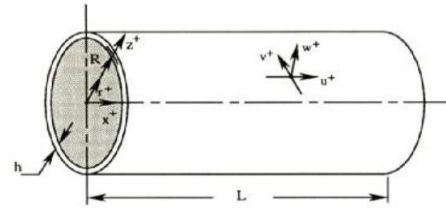
با استفاده از معادلات سازگاری (۱۳)، روابط میان پارامترهای وابسته جابجایی در هسته میانی مطابق روابط (۱۴) استخراج می‌شوند:

$$\begin{cases} u_2^c = \frac{8(u_0^b + u_0^t) + 4(h_b u_1^b - h_t u_1^t) + 2(h_b^2 u_2^b + h_t^2 u_2^t) + (h_b^3 u_3^b - h_t^3 u_3^t) - 16u_0^c}{4h_c^2} \\ u_3^c = \frac{8(u_0^t - u_0^b) - 4(h_t u_1^t + h_b u_1^b) + 2(h_t^2 u_2^t - h_b^2 u_2^b) - (h_t^3 u_3^t + h_b^3 u_3^b) - 8h_c u_1^c}{2h_c^3} \\ v_2^c = \frac{8(v_0^b + v_0^t) + 4(h_b v_1^b - h_t v_1^t) + 2(h_b^2 v_2^b + h_t^2 v_2^t) + (h_b^3 v_3^b - h_t^3 v_3^t) - 16v_0^c}{4h_c^2} \\ v_3^c = \frac{8(v_0^t - v_0^b) - 4(h_t v_1^t + h_b v_1^b) + 2(h_t^2 v_2^t - h_b^2 v_2^b) - (h_t^3 v_3^t + h_b^3 v_3^b) - 8\frac{h_c}{R_c} v_0^c - 8h_c v_1^c}{2h_c^3} \\ w_1^c = \frac{8(w_0^t - w_0^b) - 4(h_t w_1^t + h_b w_1^b) + 2(h_t^2 w_2^t - h_b^2 w_2^b)}{8h_c} \\ w_2^c = \frac{8(w_0^t + w_0^b) + 4(h_b w_1^b - h_t w_1^t) + 2(h_t^2 w_2^t + h_b^2 w_2^b) - 16w_0^c}{4h_c^2} \end{cases} \quad (14)$$

1 Fibres orientation



شکل ۳. مقطع تقویت کننده‌های رینگ و استرینگر
Fig. 3. Ring and stringer cross section



شکل ۲. دستگاه مختصات و جهات مثبت آن بر روی پوسته استوانه‌ای
Fig. 2. The coordinate system and its positive directions on the cylindrical shell

۸-۲- انرژی کرنشی پوسته‌ی ساندویچی

انرژی کرنشی رویه‌های بالایی، پایینی و هسته‌ی پوسته ساندویچی با رابطه (۱۹) بیان می‌شود:

$$U_i = \sum_{i=t,b,c} \int_{-h_i}^{h_i} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_i (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z}) d\theta dx dz \quad (19)$$

۹-۲- شرایط مرزی

شرط مرزی مورد مطالعه در این مقاله، شرط تکیه‌گاه دو سر ساده^۱ می‌باشد که مطابق رابطه (۲۱) تعریف می‌شوند. برای ارضای شرایط مورد نظر ضرایب بردار d به صورت سری‌های فوریه دوگانه طبق رابطه (۲۰) تعریف شوند [۱۸]:

$$\begin{bmatrix} u_i^j \\ u_0^c \\ u_1^c \\ v_i^j \\ v_0^c \\ v_1^c \\ w_l^j \\ w_0^c \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} u_i^{j,mn} \cos(\alpha x) \cos(n\theta) \\ u_0^{c,mn} \cos(\alpha x) \cos(n\theta) \\ u_1^{c,mn} \cos(\alpha x) \cos(n\theta) \\ v_i^{j,mn} \sin(\alpha x) \sin(n\theta) \\ v_0^{c,mn} \sin(\alpha x) \sin(n\theta) \\ v_1^{c,mn} \sin(\alpha x) \sin(n\theta) \\ w_l^{j,mn} \sin(\alpha x) \cos(n\theta) \\ w_0^{c,mn} \sin(\alpha x) \cos(n\theta) \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (20)$$

$$x=0 \ \& \ x=L \Rightarrow N_{xx} = M_{xx} = v_i = w_i = 0 \quad (21)$$

که در آن m تعداد نیم موج‌ها در جهت X و n تعداد نیم موج‌ها

1 Simply Support

در جهت θ می‌باشد.

زمانی هستند که باید تعیین شوند. $u_i^{j,mn}, u_0^{c,mn}, u_1^{c,mn}, v_i^{j,mn}, v_0^{c,mn}, v_1^{c,mn}, w_l^{j,mn}, w_0^{c,mn}$ ضرایب

۱۰-۲- محاسبه انرژی تقویت کننده‌ها

تقویت کننده‌هایی که در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته‌اند، همگی دارای مقطع مستطیلی، ارتفاع آن‌ها d و ضخامت آن‌ها b می‌باشد (شکل ۳). این مقادیر با اندیس ۲ متعلق به تقویت کننده‌های محیطی و با اندیس ۳ متعلق به تقویت کننده‌های طولی می‌باشند.

۱۱-۲- انرژی پتانسیل کرنشی تقویت کننده‌های محیطی (رینگ)

انرژی کرنشی رینگ را می‌توان به چند بخش تقسیم نمود که با روابط (۲۲) تا (۲۵) تعریف می‌شوند:

- انرژی کرنشی ناشی از خمش حول محوری موازی با محور Z [۱۹]:

$$U_{1ri} = \int_0^{2\pi} \frac{E_{ri} I_{zri}}{2} \frac{1}{(R + \bar{z}_{ri})} \left[\frac{1}{(R + \bar{z}_{ri})} \frac{\partial^2 u_{ri}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_{ri}}{\partial x} \right]^2 d\theta \quad (22)$$

- انرژی کرنشی ناشی از خمش حول محوری موازی با محور X [۱۹]:

$$U_{2ri} = \int_0^{2\pi} \frac{E_{ri} I_{xri}}{2} \frac{1}{(R + \bar{z}_{ri})^3} \left[\frac{\partial^2 v_{ri}}{\partial \theta^2} + w_{ri} \right]^2 d\theta \quad (23)$$

- انرژی کرنشی ناشی از کشش یا فشار محوری در رینگ [۱۹]:

$$U_{3ri} = \int_0^{2\pi} \frac{E_{ri} A_{ri}}{2} \frac{1}{(R + \bar{z}_{ri})} \left[\frac{\partial v_{ri}}{\partial \theta} - w_{ri} \right]^2 d\theta \quad (24)$$

$$U_{1sj} = \int_0^L \frac{E_{sj} I_{ysj}(x)}{2} \left[\frac{\partial^2 w_{sj}}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (29)$$

انرژی کرنشی ناشی از خمش حول محوری موازی با Z [۱۹]:

$$U_{2sj} = \int_0^L \frac{E_{sj} I_{zsj}(x)}{2} \left[\frac{\partial^2 v_{sj}}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (30)$$

انرژی کرنشی ناشی از کشش یا فشار محوری در استرینگر [۱۹]:

$$U_{3sj} = \int_0^L \frac{E_{sj} A_{sj}(x)}{2} \left[\frac{\partial u_{sj}}{\partial x} \right]^2 dx \quad (31)$$

انرژی کرنشی ناشی از پیچش در استرینگر [۱۹]:

$$U_{4sj} = \int_0^L \frac{G_{sj} J_{sj}(x)}{2R^2} \left[\frac{\partial w_{sj}}{\partial x \partial \theta} \right]^2 dx \quad (32)$$

در روابط (۲۹) تا (۳۲)، اندیس sj به معنای استرینگر j ام می‌باشد. $I_{ysj}(x)$ و $I_{zsj}(x)$ به ترتیب ممان دوم سطح مقطع حول دو محور عمود بر هم هستند. $A_{sj}(x)$ مساحت مقطع است که در طول استرینگر می‌تواند متغیر باشد و $J_{sj}(x)$ سفتی پیچشی استرینگر بوده و در طول آن متغیر است. در نهایت $\bar{z}_{sj}(x)$ نیز خروج از مرکز استرینگر بوده که برای استرینگر خارجی مقدار آن مثبت و برای استرینگر داخلی مقدار آن منفی می‌باشد و می‌تواند در طول استرینگر متغیر باشد که مقادیر آن‌ها با رابطه (۳۳) تعریف می‌شوند [۱۹].

$$I_{zsj}(x) = \frac{b_{sj}^3 d_{sj}(x)}{12}, \quad I_{ysj}(x) = \frac{b_{sj} d_{sj}^3(x)}{12} \quad (33)$$

$$A_{sj}(x) = b_{sj} d_{sj}(x)$$

$$\bar{z}_{sj}(x) = \pm \frac{h_t + d_{sj}(x)}{2}, \quad J_{sj}(x) = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{192 b_{sj}}{\pi^5 d_{sj}(x)} \times \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \left(\frac{n \pi d_{sj}(x)}{2 b_{sj}} \right) \right] b_{sj}^3 d_{sj}(x)$$

انرژی پتانسیل کل یک استرینگر، مجموع چهار انرژی ذکر شده بالا می‌باشد که با رابطه (۳۴) نشان داده شده است:

$$U_{sj} = U_{1sj} + U_{2sj} + U_{3sj} + U_{4sj} \quad (34)$$

انرژی کرنشی ناشی از پیچش در رینگ [۱۹]:

$$U_{4rj} = \int_0^{2\pi} \frac{G_{ri} J_{ri}}{2} \frac{1}{(R + \bar{z}_{ri})} \left[-\frac{\partial^2 v_{ri}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{(R + \bar{z}_{ri})} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]^2 d\theta \quad (25)$$

در روابط (۲۲) تا (۲۵)، اندیس ri به معنای تقویت‌کننده محیطی (رینگ) نام است. $I_{xri}(x)$ و $I_{zri}(x)$ به ترتیب ممان اینرسی دوم سطح مقطع رینگ حول محورهای هستند که از مرکز سطح مقطع رینگ عبور کرده و با محورهای X و Z موازی باشند. $A_{ri}(x)$ مساحت مقطع و $J_{ri}(x)$ سفتی پیچشی رینگ می‌باشد. در نهایت $\bar{z}_{ri}(x)$ نیز خروج از مرکز رینگ بوده که برای رینگ خارجی مقدار آن مثبت و برای رینگ داخلی مقدارش منفی است که مقادیر آن‌ها با رابطه (۲۶) تعریف می‌شوند [۱۹]:

$$I_{xri}(x) = \frac{b_{ri}^3 d_{ri}(x)}{12}, \quad I_{zri}(x) = \frac{b_{ri} d_{ri}^3(x)}{12}, \quad A_{ri}(x) = b_{ri} d_{ri}(x)$$

$$\bar{z}_{ri}(x) = \pm \frac{h_t + d_{ri}(x)}{2}, \quad (26)$$

$$J_{ri}(x) = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{192 b_{ri}}{\pi^5 d_{ri}(x)} \times \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \left(\frac{n \pi d_{ri}(x)}{2 b_{ri}} \right) \right] b_{ri}^3 d_{ri}(x)$$

انرژی پتانسیل کل یک رینگ، مجموع چهار انرژی ذکر شده بالا می‌باشد که با رابطه (۲۷) نشان داده شده است:

$$U_{rj} = U_{1rj} + U_{2rj} + U_{3rj} + U_{4rj} \quad (27)$$

۲-۱۲- انرژی جنبشی رینگ

انرژی جنبشی رینگ از رابطه (۲۸) به دست می‌آید [۱۹]:

$$T_{ri} = \frac{1}{2} \rho_{ri} \int_0^{2\pi} \left\{ A_{ri} \left[\left(\frac{\partial w_{ri}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{ri}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{ri}}{\partial t} \right)^2 \right] + (I_{xri} + I_{zri}) \left(\frac{\partial^2 w_{ri}}{\partial t \partial x} \right)^2 \right\} (R + z_{ri}) d\theta \quad (28)$$

۲-۱۳- انرژی کرنشی تقویت‌کننده طولی (استرینگرها)

انرژی کرنشی استرینگر را می‌توان به چند بخش تقسیم نمود که با روابط (۲۹) تا (۳۲) تعریف می‌شوند:

انرژی کرنشی ناشی از خمش حول محوری موازی با y [۱۹]:

۲-۱۴- انرژی جنبشی استرینگر

انرژی جنبشی استرینگر از رابطه (۳۵) به دست می‌آید [۱۹]:

$$Ts_j = \frac{1}{2} \rho s_j \int_0^L \left[As_j \left[\left(\frac{\partial us_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial vs_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial ws_j}{\partial t} \right)^2 \right] + (Iys_j + Izs_j) \left(\frac{\partial ws_j}{\partial t \partial x} \right)^2 \right] dx \quad (35)$$

۲-۱۵- تشکیل تابع پتانسیل انرژی

اکنون با داشتن انرژی‌های پتانسیل و جنبشی برای پوسته ساندویچی و تقویت‌کننده‌ها، می‌توان تابع پتانسیل انرژی را مطابق رابطه (۳۶) تشکیل داد که در آن Nr تعداد رینگ‌ها و Ns تعداد استرینگرها می‌باشد:

$$P = \sum (T_{shells} - U_{shells}) + \sum_{i=1}^{Nr} (T_{ri} - U_{ri}) + \sum_{j=1}^{Ns} (T_{sj} - U_{sj}) \quad (36)$$

۲-۱۶- حل مسئله

برای حل مسئله از روش ریلی-ریتز استفاده می‌شود. این روش بر اساس انرژی پتانسیل کمینه استوار است. طبق اصل انرژی پتانسیل کمینه، از میان کلیه میدان‌های جابجایی که شرایط مرزی مسئله را ارضا می‌کند، آن میدانی که در معادلات تعادل صدق می‌کند، انرژی پتانسیل کل سیستم را نیز کمینه می‌کند. بر اساس روش ریلی-ریتز برای اینکه انرژی پتانسیل که تابعی از ضرایب $\{d\}$ است، حداقل باشد بایستی مشتقات پتانسیل انرژی کل نسبت به ضرایب بکاررفته در میدان جابجایی صفر گردند. بنابراین از تابع پتانسیل انرژی کل سیستم نسبت به ضرایب مذکور مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم (رابطه (۳۷)):

$$\frac{\partial P}{\partial d[i]} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 27 \quad (37)$$

رابطه (۳۷)، ۲۷ معادله با ۲۷ مجهول (ضرایب $\{d\}$) دارد که پس از مرتب و ساده‌سازی می‌توان آن را به صورت رابطه ماتریسی (۳۸) نوشت:

$$[[K] - \omega^2[M]] d = 0 \quad (38)$$

که در آن K ماتریس سختی و M ماتریس جرم سازه هستند. درایه‌های ماتریس K شامل ابعاد هندسی و خصوصیات فیزیکی سازه

است. برای به دست فرکانس‌های طبیعی سازه. باید دترمینان ضرایب را برابر صفر قرار داد.

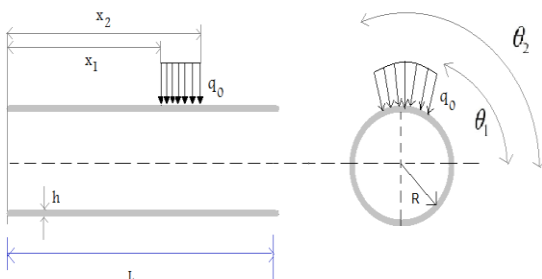
$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (39)$$

از رابطه (۳۹) فرکانس‌های طبیعی به ازای هر یک از مدهای (m, n) به دست خواهد آمد. با جایگذاری فرکانس‌های به دست آمده در رابطه (۳۷) شکل مدها به دست می‌آیند.

۳- ارتعاشات اجباری پوسته ساندویچی تقویت شده

تحقیقات نشان می‌دهد که در بسیاری از موارد در صنعت ممکن است سازه استوانه‌ای ساندویچی مرکب تحت تحریک‌های خارجی سینوسی گذرا قرار گیرد. به همین دلیل لازم است در طراحی سازه‌های ساندویچی مرکب مورد نظر، پاسخ دینامیکی سازه مورد بررسی قرار گیرد. در این بخش پاسخ دینامیکی گذرای پوسته استوانه‌ای ساندویچی مرکب تقویت شده با شرایط مرزی دوسر ساده تحت بار سینوسی که بر روی پوسته وارد می‌شود، مورد بررسی قرار گرفته است. برای بررسی پاسخ دینامیکی، از نتایج تحلیل ارتعاشات آزاد (یعنی فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها)، که در بخش قبل محاسبه شد، استفاده شده است. در نهایت تغییرات جابجایی پوسته در سه جهت x ، θ و Z برحسب زمان، با استفاده از نرم‌افزار ممتیکا و بر اساس روش مدهای فرضی محاسبه می‌گردند. در اینجا لازم است برای توضیح صورت مسئله، دو مشخصه بار سینوسی موردنظر تشریح شود:

• محل اعمال بار سینوسی و ابعاد سطح اعمال بار روی پوسته



شکل ۴. نحوه توزیع مکانی بارگذاری خارجی روی پوسته

Fig. 4. Spatial distribution of external loading on the shell

تغییرات مقدار بار برحسب زمان

بطوریکه Δ_i بردار ویژه شکل مود آم می‌باشد.

با استفاده از روش تقریبی موده‌های فرضی به حل ارتعاشات اجباری پرداخته می‌شود. در حالت کلی معادله ارتعاشی بدون دمپر به صورت رابطه (۴۱) می‌باشد:

$$M \ddot{X} + K X = F, \quad F = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_{27}(t)\}^T \quad (41)$$

از آنجایی که بارگذاری به طور کاملاً شعاعی بر سطح رویه بیرونی اعمال می‌گردد، آنگاه بردار نیرو را می‌توان از کار انجام‌شده توسط نیرو طبق رابطه (۴۲) تشکیل داد:

$$Wf(t) = \int_{L1}^{L2} \int_{\theta1}^{\theta2} f(x, \theta, t) w_i(x, \theta, z) dx d\theta \quad (42)$$

$$f_i(t) = \frac{\partial Wf(t)}{\partial d[i]}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 27$$

لازم به ذکر است درایه‌های معادل با تصویر نیرو در راستاهای u و v در بردار نیرو برابر صفر می‌باشند، چون نیرو در آن راستاها مؤلفه و تصویری ندارد. با ادامه روند حل به روش موده‌های فرضی و پیش‌ضرب و پس‌ضرب نمودن بردارهای ویژه در ماتریس‌های جرم و سفتی رابطه (۴۳) به دست می‌آید:

$$\Delta_i^T M \Delta_i \ddot{T}[t] + \Delta_i^T K \Delta_i T[t] = \Delta_i^T F \quad (43)$$

و نهایتاً با ساده‌سازی معادله حرکت به صورت رابطه (۴۴) در می‌آید:

$$\ddot{T}_{mn}[t] + \omega_{mn}^2 T_{mn}[t] = \Delta_{mn}^T F \quad (44)$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه صفر برای مکان و سرعت رابطه (۴۵) به دست می‌آید:

$$T_{mn}[0] = T'_{mn}[0] = 0 \quad (45)$$

پس از اتمام دوره تحریک، زمانی که پوسته وارد ارتعاشات آزاد می‌شود شرایط مکانی و سرعت پوسته در آخرین لحظه اعمال بارگذاری همان شرایط اولیه برای ارتعاشات آزاد پوسته می‌گردد. بنابراین شرایط اولیه ارتعاشات آزاد به صورت رابطه (۴۶) می‌باشد:

$$T_{mn}[t_f] = T_{mn}[0_{free}] \quad (46)$$

$$T'_{mn}[t_f] = T'_{mn}[0_{free}]$$

۳-۱- محل اعمال بار سینوسی و ابعاد سطح اعمال بار روی پوسته
فرض می‌شود بار سینوسی $f(t)$ بر یک سطح مستطیلی، در نقطه دلخواه از سطح پوسته استوانه‌ای با شعاع R و طول L ، به صورت فشار یکنواخت اعمال می‌شود (شکل ۴).

۳-۲- تغییرات مقدار بار برحسب زمان

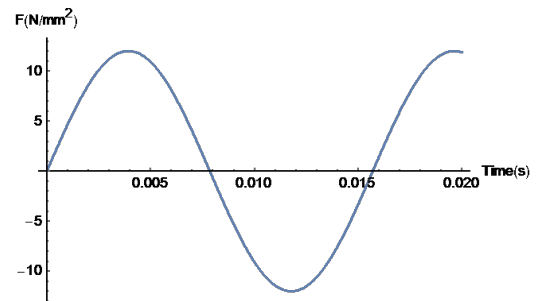
فرض می‌شود که بار وارده بر سطح، به صورت فشار سینوسی متغیر با زمان به صورت $f(t) = A \sin(\omega t)$ وارد می‌شود؛ که مقادیر ω و A به طور دلخواه تعیین می‌شوند. در مثال‌های حل‌شده در این پژوهش مقدار بارگذاری $12 \sin(40 \cdot t)$ در نظر گرفته شده است. نمودار تحریک سینوسی برحسب زمان در شکل ۵ نشان داده شده است.

۳-۳- معادلات حاکم بر ارتعاشات اجباری و پاسخ دینامیکی گذرای سازه ساندویچی

از تحلیل ارتعاشات آزاد سازه، ماتریس‌های جرم (M)، سفتی (K) و همچنین مقادیر ویژه (ω_i) و بردارهای ویژه (Δ_i)، به دست می‌آیند. جهت حل ارتعاشات اجباری در ابتدا می‌بایست بردارهای ویژه را نسبت به ماتریس جرم سازه مطابق رابطه (۴۰) نرمالایز نمود.

$$a_i^2 \Delta_i^T M \Delta_i = 1 \quad (40)$$

$$\Delta_i |_{Normalized} = a_i \Delta_i$$



شکل ۵. تغییرات نیرو تحریک خارجی برحسب زمان برای 0.02 ثانیه
Fig. 5. Changes in external excitation force over time for seconds 0.02

جدول ۱. مشخصات تقویت کننده‌ها
Table 1. Specifications of stiffeners

مشخصه	مقدار	واحد	مشخصه	مقدار	واحد	مشخصه	مقدار	واحد
مدول الاستیک	۲۰۰	GPa	/ تعداد رینگ استرینگر	۸/۶	-	چگالی	۷۸۲۳	kg/m ³
ضریب پواسون	۰/۲۹	-	پهنای	۰/۰۰۲	متر	نوع تقویت کننده	بیرونی	

جدول ۲. خواص مکانیکی رویه‌ها و هسته در پوسته ساندویچی
Table 2. Mechanical properties of face sheets and core in sandwich shell

پارامترها	مقادیر	پارامترها	مقادیر	پارامترها	مقادیر
(واحد)		(واحد)		(واحد)	
E_1 (GPa)	۰/۱۰۶۳	ρ (kg/m ³)	۱۳۰	خواص	
E_2 (GPa)	۰/۱۰۶۳	G_{12} (GPa)	۰/۰۵	هسته	
E_3 (GPa)	۰/۱۰۶۳	G_{13} (GPa)	۰/۰۵	فوم پی	
ν	۰/۳۲	G_{23} (GPa)	۰/۰۵	وی سی	
E_1 (GPa)	۲۴/۵۱	ρ (kg/m ³)	۱۸۰۰	خواص	
E_2 (GPa)	۷/۷۷	ν_{12}	۰/۰۷۸	رویه‌ها	
E_3 (GPa)	۷/۷۷	ν_{13}	۰/۰۷۸		
G_{23} (GPa)	۱/۳۴	ν_{23}	۰/۴۹		
G_{12} (GPa)	۳/۳۴	G_{13} (GPa)	۳/۳۴		

محور زمان ارتعاشات اجباری طبق رابطه (۴۸) بچسبید.

$$t_{free} = t - t_f \quad (48)$$

همان‌طور که پیش‌تر اشاره گردید مقادیر فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای نرمالایز شده از حل ارتعاشات آزاد در رابطه فوق قرار می‌گیرند. در حالتی که نیرو به صورت کاملاً یکنواخت در بازه دلخواه از t_1 تا t_2 و از θ_1 تا θ_2 به استوانه اعمال می‌گردد، می‌توان بخش زمانی و مکانی نیرو را به صورت رابطه (۴۹) در نظر گرفت:

در رابطه (۴۶)، t_f زمان برداشتن بارگذاری از سطح پوسته می‌باشد. معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات آزاد سازه با شرایط اولیه معین به صورت زیر می‌باشد که این معادله باید به ازای هر شکل مود یک بار حل شود.

$$\ddot{T}_{mn}[t] + \omega_{mn}^2 T_{mn}[t] = 0 \quad (49)$$

بدین ترتیب ترم زمانی پاسخ به ازای هر شکل مود با حل معادله دیفرانسیل معمولی فوق برای شرایط اولیه صفر به دست خواهد آمد. سپس باید با یک انتقال محور زمان پاسخ ارتعاشات آزاد به انتهای

جدول ۳. خواص هندسی رویه‌های بکار رفته در پوسته‌های ساندویچی [۹۰/هسته/۹۰]

Table 3. Geometric properties of the face sheets used in sandwich shells[90/core/90]

مقادیر	پارامترها	واحد
۰/۸	h_c/h	رویه‌های نازک
۰/۳	$R_c(m)$	
۰/۹	$L(m)$	
۰/۱۰۰۳	$h_t(m)$	
۰/۱۰۰۳	$h_b(m)$	
۰/۸	h_c/h	رویه‌های ضخیم
۰/۳	$R_c(m)$	
۰/۹	$L(m)$	
۱۲	$h_t(mm)$	
۱۲	$h_b(mm)$	

مقالات و همچنین از نرم‌افزار المان محدود آباکوس صحنه‌گذاری شده است. در شبیه‌سازی المان محدود (نرم‌افزار آباکوس) از المان C3D8R (که یک المان مکعبی ۸ گره‌ای است) برای هسته و تقویت‌کننده‌ها، از المان S8R (که این نوع المان معادل با تئوری مرتبه بالا می‌باشد) برای رویه‌های کامپوزیتی، برای تحلیل ارتعاشات آزاد از حلگر Lanczos و برای تحلیل ارتعاشات اجباری و یافتن پاسخ زمانی از دینامیک ضمنی^۱ استفاده شده است. همچنین برای اعمال شرایط پیوستگی بین رویه بالا با تقویت‌کننده‌ها و هسته و نیز بین رویه پایین و هسته از تکنیک تای استفاده شده است.

۴-۱- مقایسه نتایج ارتعاشات آزاد برای پوسته ساندویچی بدون تقویت‌کننده و با تقویت‌کننده‌های متعامد

با استفاده از حل تحلیلی، یک کد در نرم‌افزار ممتیکا نوشته شده و نتایج به دست آمده‌اند. جهت صحت‌سنجی، نتایج با مراجع و نرم‌افزار المان محدود (آباکوس) مقایسه شده‌اند. برای تحلیل ارتعاشات آزاد، مشخصات تقویت‌کننده‌های محیطی (رینگ) و طولی (استرینگر) در جدول ۱ و خواص مکانیکی و مشخصات هندسی پوسته استوانه‌ای به ترتیب در جدول ۲ و ۳ داده شده‌اند. رویه‌های کامپوزیت پلی‌استر/شیشه و هسته از جنس فوم پی وی سی^۲ با نام HEREX C70 می‌باشد.

در جدول ۴ نتایج تحقیق حاضر برای پوسته ساندویچی با رویه‌های ضخیم با خواص مکانیکی و مشخصات هندسی مطابق با جداول ۲ و ۳ و لایه چینی [۰/۹۰/۰/هسته/۰/۹۰/۰] با نتایج تحلیلی مرجع [۱۸] و تئوری مرتبه اول برشی مقایسه شده‌اند. همان طور که ملاحظه می‌شود، نتایج تحقیق حاضر با ماکزیمم خطای ۴ درصد با نتایج مرجع [۱۸] همخوانی دارد.

همچنین در جدول ۵ نتایج پوسته ساندویچی با تقویت‌کننده‌های متعامد (۶ رینگ و ۸ استرینگر) با نتایج آباکوس مقایسه شده‌اند. همان طور که مشاهده می‌شود نتایج از هم‌پوشانی خوبی برخوردار هستند که دلیل بر صحت نتایج می‌باشد.

به منظور دقت و درستی تئوری حاضر بخصوص هنگامی که ضخامت رویه‌ها زیاد می‌شود بر اساس خواص مکانیکی جدول ۱ و مشخصات هندسی جدول ۲، نتایج حاضر با نتایج نرم‌افزار آباکوس برای پوسته استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های ضخیم بدون تقویت‌کننده، در

$$f(x, \theta, t) = Q(x, \theta)g(t) = 1 \times A \sin(\omega t) \quad , \quad L_1 < x < L_2, \theta_1 < \theta < \theta_2 \quad (49)$$

نیرو به صورت شعاعی به سطح خارجی رویه بالایی پوسته اعمال می‌گردد. برای ساده‌تر شدن محاسبات، فرض می‌شود که مقدار بار یکنواخت و برابر با واحد باشد ($Q(x, \theta) = 1$)، با مشخص شدن ترم‌های زمانی هر شکل مود، پاسخ زمانی سازه بر طبق رابطه (۵۰) به دست می‌آید:

$$u_i(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{mn}[t](u_0(x, \theta) + z_i u_1(x, \theta) + z_i^2 u_2(x, \theta))$$

$$, \quad v_i(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{mn}[t](v_0(x, \theta) + z_i v_1(x, \theta) + z_i^2 v_2(x, \theta)) \quad (50)$$

$$w_i(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{mn}[t](w_0 + z_i w_1(x, \theta) + z_i^2 w_2(x, \theta))$$

۴-۲ اعتبارسنجی تئوری حاضر

نتایج به دست آمده از تحلیل حاضر با نتایج به دست آمده از دیگر

1 Implicit Dynamic

2 PVC

جدول ۴. مقایسه نتایج پوسته ساندویچی با رویه‌های ضخیم بدون تقویت‌کننده با لایه چینی [۰/۹۰/۰/هسته/۰/۹۰/۰] با مرجع [۱۸]

Table 4. Comparison of sandwich shell results with thick face sheets without stiffeners with layers [0/90/0/Core/0/90/0]

درصد خطا	تحقیق حاضر	درصد خطا	تئوری مرتبه اول برشی [۱۸]	درصد خطا	آباکوس [۱۸]	مرجع [۱۸]	<i>n</i>	<i>m</i>
۴/۰۶	۴۸۳/۹۰	۱۲/۱۱	۵۱۵/۲۶	۲/۶۲	۴۵۲/۸۲	۴۶۵/۰۲	۱	۱
۲/۰۴	۳۸۲/۷۱	۱۵/۵۸	۴۱۷/۱۷	۲/۷۷	۳۶۴/۶۸	۳۷۵/۰۶	۲	۱
۳/۸۴	۵۱۶/۰۲	۱۱/۴۷	۵۴۸/۴۸	۲/۳	۴۸۵/۵۶	۴۹۶/۹۵	۳	۱
۱/۳۷	۶۷۱/۲۷	۱۱/۳۸	۷۵۲/۸۴	۱/۹۷	۶۶۷/۱۷	۶۸۰/۶	۳	۲

جدول ۵. مقایسه نتایج تحقیق حاضر با نتایج نرم‌افزار آباکوس برای حالت رویه‌های نازک با تقویت‌کننده‌های متعامد

Table 5. Comparison of the results of the present study with the results of Abaqus software for thin face sheets with orthogonal stiffeners

درصد خطا	تحقیق حاضر	آباکوس	<i>n</i>	<i>m</i>
۰/۷۸	۴۱۲/۷۱۴	۴۱۶	۱	۱
۲/۲۷	۲۸۴/۴	۲۹۱	۲	۱
۱/۷۱	۴۰۱/۷۶۴	۳۹۵	۳	۱
۰/۰۸	۵۸۱/۰۳۴	۵۸۱/۵۱	۴	۱
۲/۴۸	۷۹۱	۷۷۱/۸	۵	۱
۰/۱۹	۸۸۱/۵۹۸	۸۷۹/۹۲	۱	۲
۳/۱۹	۵۹۹/۷۶۳	۵۸۱/۲۲	۲	۲
۲/۸۱	۵۶۴/۰۴۸	۵۴۸/۶۴	۳	۲
۱/۷۲	۷۶۳/۸۱۷	۶۶۲/۴۱	۴	۲
۲/۹۳	۸۴۸/۱۹۴	۸۲۳/۹۹	۵	۲

صورت سینوسی $\sin 1/2(\pi x)$ نیوتن بر میلی‌متر مربع بر سطح خارجی پوسته ساندویچی بر سطح مستطیلی از زاویه صفر تا $\pi/4$ در راستای محیطی و نیز از $L/9$ تا L در طول استوانه اعمال می‌گردد. در مطالعات پارامتری صورت‌گرفته ابعاد سطح بارگذاری شده و شدت بار تغییر ثابت بوده و صرفاً محل سطح بارگذاری شده در راستای طول استوانه جابجا شده است. به جهت بهتر دیده شدن نتایج، بخصوص در ارتعاشات آزاد نمودارهای حاصل از نرم‌افزار آباکوس و کد تحلیلی متمتیکا به صوت مجزا ترسیم گشته‌اند. جهت همگرایی پاسخ دینامیکی، تعداد مش‌ها و المان‌ها باید در نرم‌افزار آباکوس مشخص شوند. شکل ۶ همگرایی پاسخ دینامیکی را برحسب المان‌ها نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است در تعداد ۲۳۲۷۱ المان پاسخ دینامیکی همگرا شده است.

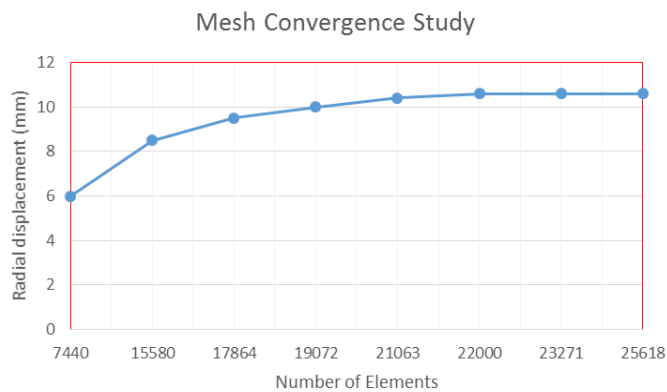
جدول ۶ مقایسه شده‌اند. همان‌طور که نشان داده شده نتایج با هم تطابق خوبی دارند.

۲-۴- مقایسه نتایج ارتعاشات اجباری تحت تحریک سینوسی گذرا تعداد موده‌های در نظر گرفته شده $(m \times n)$ برای به دست آوردن جواب، برای پوسته ساندویچی با تکیه‌گاه دوسر ساده (21×31) در نظر گرفته شده است. تعداد m و n در نظر گرفته شده باید به حدی باشد که به جواب همگرا شویم. مدت زمان تحریک 0.02 ثانیه در نظر گرفته شده است و پس از آن سازه وارد ارتعاشات آزاد با شرایط اولیه معین (همان شرایط نهایی پوسته در ارتعاشات اجباری) می‌گردد. پوسته مورد تحلیل دارای ۶ رینگ و ۸ استرینگر می‌باشد که به صورت یکنواخت در کل پوسته توزیع گردیده‌اند. بارگذاری در این مقاله به

جدول ۶. مقایسه نتایج تئوری حاضر با نتایج نرم افزار آباکوس برای پوسته استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های ضخیم بدون تقویت کننده

Table 6. Comparison of the results of the present theory with the results of Abaqus software for sandwich cylindrical shells with thick face sheets without stiffeners

درصد خطا	تحقیق حاضر	آباکوس	n	m
۳/۱۴	۴۱۶/۵۶۲	۴۳۰/۰۸	۱	۱
۵/۵۵	۳۲۷/۷۷	۳۴۷/۰۵	۲	۱
۰/۲۶	۵۰۰/۹۱۷	۵۲۰/۲۰	۳	۱
۱/۱۶	۷۲۴/۶۴۹	۷۱۶/۳۱	۴	۱
۱/۷۰	۹۵۷/۸۵	۹۴۱/۸۲	۵	۱
۰/۸۴	۸۹۷/۳۵۴	۹۰۵	۱	۲
۲/۱۳	۶۲۵/۰۲۴	۶۳۸/۶۵	۲	۲
۱/۲۷	۶۴۳/۶۶۶	۶۵۱/۹۷	۳	۲
۰/۴۴	۸۰۵/۳۷۹	۸۰۱/۸	۴	۲
۱/۶۴	۱۰۱۳/۳۶	۹۹۷	۵	۲



شکل ۶. نمودار مطالعه همگرایی و حساسیت از مش در نرم افزار آباکوس

Fig. 6. Convergence and sensitivity study of mesh in Abaqus software

مقدار فرکانس طبیعی در ابتدا کاهش می‌یابد و از یک مقدار مشخص به بعد با افزایش عدد موج مقدار فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد که این روند تغییر رفتار را می‌توان در شکل ۸ مشاهده کرد.

۵-۲- بررسی اثر نسبت طول به شعاع میانی هسته L/Rc بر فرکانس طبیعی

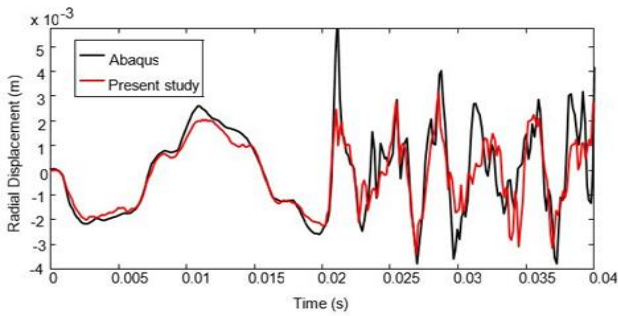
در این قسمت به بررسی تأثیر نسبت طول به شعاع میانی هسته بر فرکانس طبیعی برای چهار شکل مود اول سیستم پرداخته می‌شود. همان‌طور که در شکل ۹ مشاهده می‌شود. با افزایش نسبت طول به شعاع میانی هسته به دلیل کاهش سفتی پوسته ساندویچی تقویت شده، مقدار چهار فرکانس طبیعی اول پوسته برحسب هرترز کاهش می‌یابد و این موضوع برای دیگر شکل مودها نیز برقرار است.

شکل ۷ جابجایی شعاعی حاصل از بارگذاری هارمونیک وارد برای پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی دو سر ساده در دو نقطه واقع بر فصل مشترک رویه بیرونی و هسته استوانه برای دو حالت تحلیلی و نرم افزار آباکوس را نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج کد تحلیلی و نرم افزار آباکوس با هم تطابق خوبی دارند.

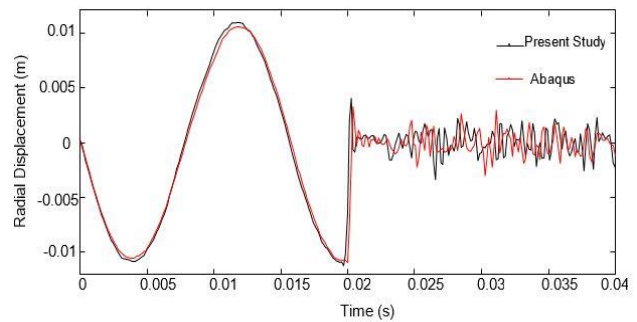
۵- مطالعه پارامتری

۵-۱- بررسی اثر شماره موج محیطی (n) و طولی (m) بر فرکانس‌های طبیعی

در پوسته‌هایی که شکل سازه به صورت استوانه‌ای شکل می‌باشد کمترین مقدار فرکانس طبیعی عموماً و اکثراً در شکل مودهای محیطی بالاتر اتفاق می‌افتد؛ یعنی با افزایش عدد موج محیطی n ،



الف

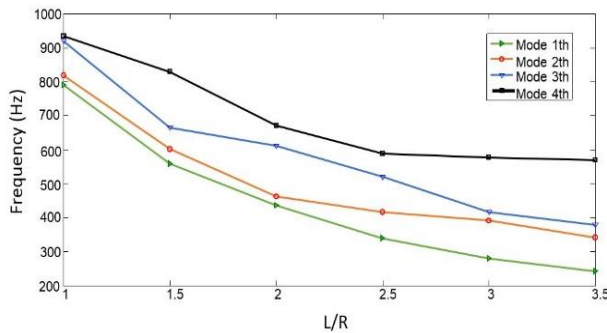


ب

شکل ۷. مقایسه پاسخ زمانی پوسته (جابجایی شعاعی) با شرایط مرزی دو سر ساده در دو نقطه واقع در محل الف- وسط استوانه

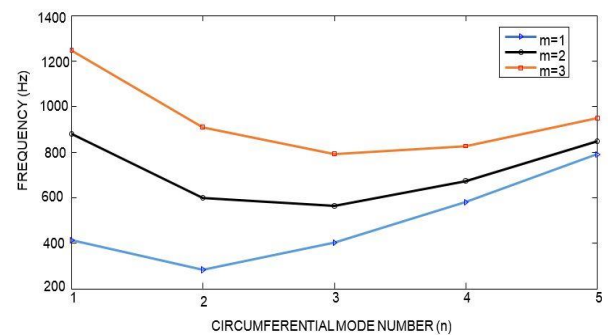
ب- مرکز بارگذاری ($h=0.03, m, L=0.9, m, R=0.3$ m)

Fig. 7. Comparison of shell dynamic response (radial displacement) with simply supported boundary conditions at two points located at the A-middle of the cylinder B- center of loading



شکل ۹. تأثیر نسبت طول به شعاع بر فرکانس‌های طبیعی

Fig. 9. The effect of length to radius ratio on natural frequencies



شکل ۸. فرکانس‌های طبیعی به ازای مقادیر مختلف m و n

Fig. 8. Natural frequencies for different values of m and n

و $n=4$ با افزایش زاویه الیاف فرکانس‌های طبیعی افزایش یافته و در زاویه الیاف ۹۰ درجه این مودها دارای بالاترین فرکانس می‌باشند.

۴-۵ اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پوسته بر فرکانس‌های طبیعی

شکل ۱۱ اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پوسته بر فرکانس طبیعی برای چهار شکل مود اول را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود. با افزایش ضخامت هسته به دلیل افزایش سفتی پوسته مقدار فرکانس طبیعی برحسب هرگز افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، با افزایش ضخامت هسته میانی و مقید بودن آن میان دو رویه، باعث بالا رفتن ممان اینرسی مقطع و سفتی خمشی پوسته

۳-۵- تأثیر زاویه الیاف رویه‌های کامپوزیتی بر فرکانس طبیعی بر اساس تئوری حاضر

در این بخش به بررسی زاویه الیاف رویه‌های کامپوزیتی بر فرکانس طبیعی پوسته پرداخته می‌شود. ترتیب لایه چینی به صورت $[\theta/\text{هسته}/-\theta]$ می‌باشد. تأثیر زاویه الیاف بر فرکانس طبیعی برحسب هرگز در شکل ۱۰ برای چهار شکل مود اول آورده شده است. همان‌طور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود فرکانس طبیعی پایه پوسته برای مودهای محیطی $n=1$ و $n=2$ با افزایش زاویه الیاف، به دلیل افزایش سفتی پوسته در ابتدا افزایش می‌یابد و بعد از یک مقدار معین از زاویه الیاف، با بیشتر شدن زاویه الیاف به دلیل کاهش سفتی پوسته مقدار فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد؛ اما در شماره مودهای محیطی $n=3$

جدول ۸. نسبت‌های مختلف ارتفاع به عرض استرینگرها

Table 8. Different ratios of height to width stringers

$d(\text{mm})$	$b(\text{mm})$	شماره حالت
۱۲	۱۲	۱
۸	۱۸	۲
۶	۲۴	۳
۴	۳۶	۴

جدول ۷. مقادیر نسبت‌های مختلف ارتفاع به عرض سطح مقطع

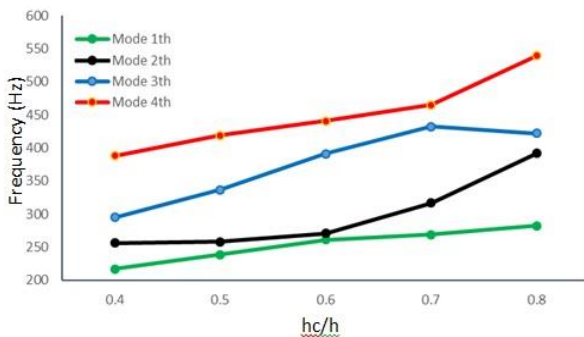
Table 7. Different values of height to width ratios of cross section

ارتفاع $d(\text{mm})$	عرض $b(\text{mm})$	شماره حالت
۱۲	۱۲	۱
۱۸	۸	۲
۲۴	۶	۳
۳۶	۴	۴

جدول ۹. تأثیر نسبت‌های مختلف ارتفاع به عرض استرینگرها بر فرکانس‌های طبیعی

Table 9. The effect of height-to-width different ratios of stringers on natural frequencies

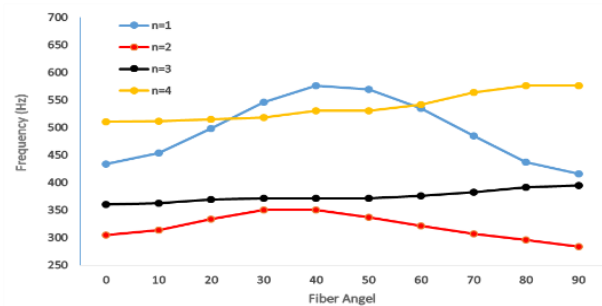
حالت ۴	حالت ۳	حالت ۲	حالت ۱	n
۳۹۳/۴۸۷	۳۹۳/۶۰۹	۳۹۴/۲۸۸	۳۹۶/۰۳۶	۱
۲۷۲/۶۲۷	۲۷۳/۸۲۲	۲۷۵/۳۱۳	۲۷۸/۳۲۹	۲
۳۵۲/۹	۳۵۴/۲۸	۳۵۵/۷۶۷	۳۵۸/۳۹	۳
۴۵۶/۵۲۸	۴۵۷/۲۲۹	۴۵۷/۹۴۶	۴۵۹/۵۲۲	۴
۶۷۱/۸۷۷	۶۷۳/۲۰۸	۶۷۴/۵۰۲	۶۷۶/۲۴۸	۵



شکل ۱۱. اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل بر فرکانس‌های طبیعی

Fig. 11. Effect of core thickness to total thickness ratio on natural frequencies

اما موضوع این قسمت تأثیر نسبت ارتفاع استرینگر به عرض آن بر فرکانس‌های طبیعی است. بدین منظور مقادیر مختلفی برای b و d در نظر گرفته شد با این قید که سطح مقطع و نتیجتاً جرم تقویت‌کننده مقداری ثابت بماند. مقادیر مختلف مطابق جدول ۷ برای عرض و ارتفاع استرینگر منظور شدند تا مقدار فرکانس طبیعی برای آن‌ها با هم مقایسه شود. مشخصات پوسته و جنس تقویت‌کننده‌ها مطابق با جدول ۱، ۲ و ۳ می‌باشند. شکل ۱۲ اثر نسبت ارتفاع به عرض مقطع



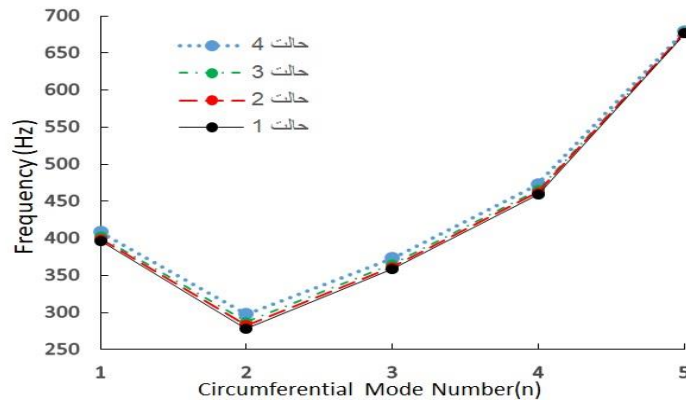
شکل ۱۰. تأثیر زاویه الیاف بر فرکانس طبیعی

Fig. 10. Effect of fiber angle on natural frequency

می‌گردد و اثر ضخامت زیاد هسته میانی به اثرات انعطاف‌پذیری آن غلبه می‌کند و در نتیجه فرکانس طبیعی اول برای پوسته ساندویچی افزایش می‌یابد.

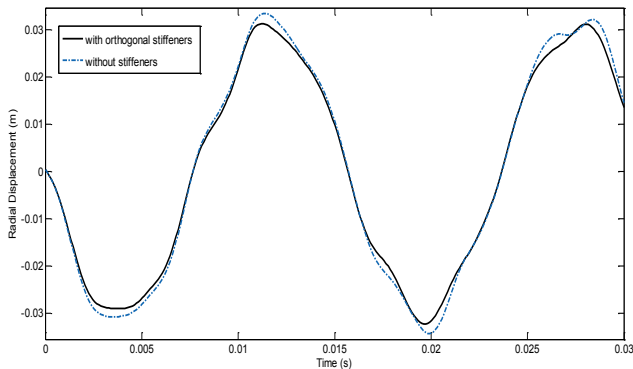
۵-۵- بررسی اثر نسبت ارتفاع به عرض مقطع استرینگرها بر فرکانس‌های طبیعی

در این مقاله تمام تقویت‌کننده‌ها دارای مقطع مستطیلی هستند؛



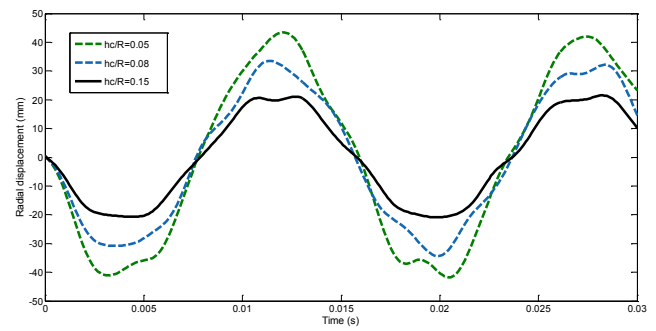
شکل ۱۲. تأثیر نسبت ارتفاع به عرض مقطع استرینگرها بر فرکانس‌های طبیعی

Fig. 12. The effect of height-to-width ratio of stringers on natural frequencies



شکل ۱۴. مقایسه جابجایی شعاعی پوسته ساندویچی در حالت‌های بدون تقویت‌کننده و با تقویت‌کننده‌های متعامد

Fig. 14. Comparison of radial displacement of sandwich shell in cases without stiffeners and with orthogonal stiffeners



شکل ۱۳. تأثیر نسبت ضخامت هسته به شعاع بر جابجایی شعاعی یک نقطه در وسط استوانه در فصل مشترک رویه بالایی و هسته

Fig. 13. The effect of core thickness to radius ratio on the radial displacement of a point in the middle of a cylinder at the interface of the upper face and the core

کمترین فرکانس پایه را دارا است. با توجه به شکل ۱۲ و جدول ۹ نتیجه می‌شود، هرچه ارتفاع استرینگر از عرض آن بیشتر باشد، فرکانس‌های طبیعی پوسته تقویت‌شده و بخصوص فرکانس پایه آن افزایش خواهد یافت. البته میزان این افزایش نسبت نباید تا حدی باشد که منجر به نازک‌شدن بیش از حد تقویت‌کننده و تبدیل شدن آن به یک ورق بسیار نازک شود زیرا که این ورق نازک خود دارای فرکانس پایینی بوده و قبل از ارتعاش پوسته خود تقویت‌کننده به ارتعاش خواهد افتاد.

۵-۶- اثر نسبت ضخامت هسته به شعاع بر پاسخ زمانی

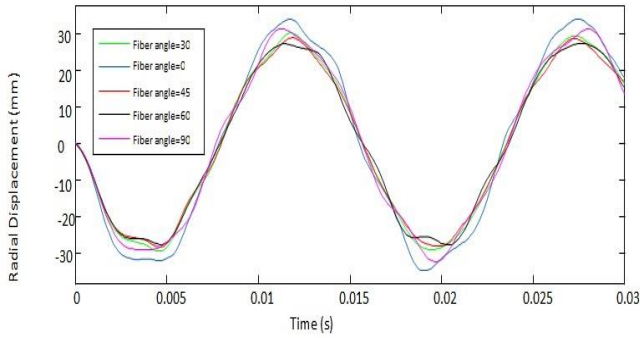
شکل ۱۳ اثر نسبت ضخامت هسته به شعاع پوسته بر پاسخ زمانی پوسته در اثر بارگذاری در وسط استوانه را نشان می‌دهد. مدت

استرینگرها بر فرکانس‌های طبیعی را برای $m = 1$ و n های مختلف نشان می‌دهد.

همان‌طور که از شکل ۱۲ مشاهده می‌شود، حالت ۱ دارای کمترین فرکانس‌های طبیعی و حالت ۴ بیشترین مقدار برای فرکانس‌های طبیعی را دارا است و این اختلاف در فرکانس طبیعی پایه که مهم‌ترین فرکانس است، بیشتر است. در شکل ۱۱ نسبت d/b بزرگ‌تر یا مساوی ۱ بود.

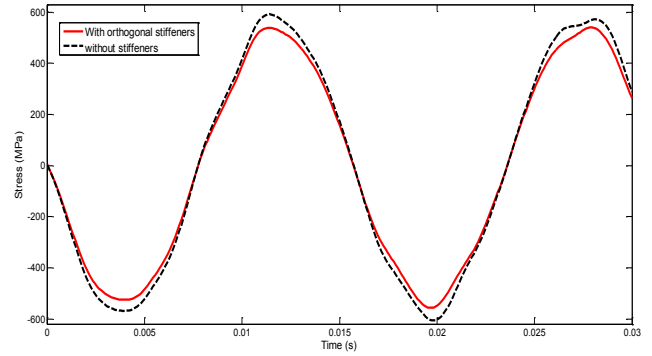
جدول ۸ مقادیر مختلف دیگری را برای ارتفاع و عرض نشان می‌دهد بطوریکه این بار نیز با فرض ثابت بودن سطح مقطع، نسبت d/b کوچک‌تر یا مساوی ۱ است. در این حالت‌ها به جهت نزدیک بودن فرکانس‌ها، مقایسه آن‌ها در جدول ۹ نشان داده شده است.

مطابق با جدول ۹ حالت اول بیشترین فرکانس پایه و حالت چهارم



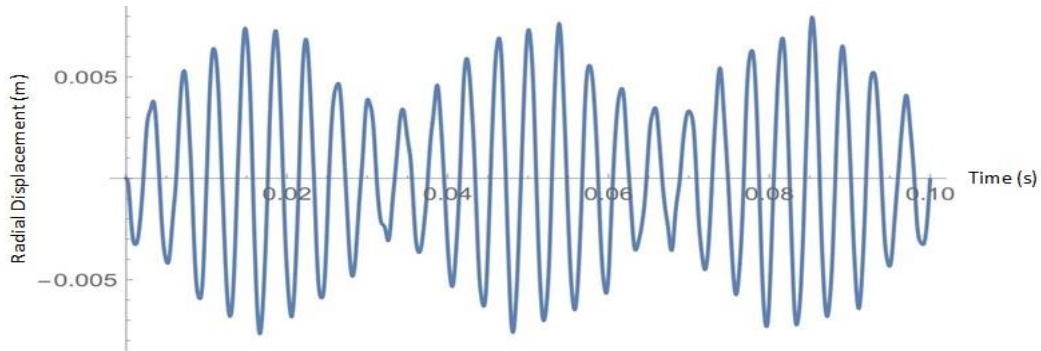
شکل ۱۶. تأثیر زاویه الیاف رویه‌ها بر جابجایی شعاعی پوسته ساندویچی تقویت‌شده برای لایه چینی $[-\theta / core / \theta]$

Fig. 16. Effect of face sheets fiber angle on radial displacement of stiffened sandwich shell



شکل ۱۵. تغییرات تنش $\sigma_{\theta\theta}$ پوسته ساندویچی در حالت‌های بدون تقویت‌کننده و با تقویت‌کننده‌های متعامد

Fig. 15. Sandwich shell stress changes in non-stiffened and orthogonal stiffeners



شکل ۱۷. مشاهده پدیده ضربان در ارتعاشات اجباری پوسته ساندویچی

Fig. 17. The beating phenomenon in the forced vibrations of the sandwich shell

سازه پوسته ساندویچی با مشخصات جدول‌های ۱، ۲ و ۳ با رویه‌های نازک را یک بار با تقویت‌کننده‌های متعامد و بار دیگر بدون آن‌ها با فرض ثابت بودن بقیه پارامترها، تحت بار سینوسی واقع در مرکز استوانه بررسی می‌شود. در شکل ۱۴ و ۱۵ به ترتیب پاسخ زمانی و تغییرات تنش برحسب زمان برای 0.03 ثانیه تحریک آورده شده است. ملاحظه می‌گردد که با افزودن تقویت‌کننده‌ها مقادیر ماکزیمم تنش و خیز پوسته به ترتیب $1/8$ و $2/6$ درصد کاهش می‌یابد.

۵-۸- اثر زاویه الیاف بر پاسخ زمانی

شکل ۱۶ تغییرات جابجایی شعاعی برحسب زمان برای پنج زاویه مختلف تحت بارگذاری در وسط استوانه را نشان می‌دهد. همان‌طور

زمان تحریک 0.03 ثانیه در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، با افزایش ضخامت هسته از میزان جابجایی شعاعی پوسته کاسته می‌شود. وقتی نسبت ضخامت هسته به شعاع برابر 0.05 است مقدار ماکزیمم جابجایی شعاعی هسته 42 میلی‌متر و وقتی این نسبت به 0.15 می‌رسد مقدار جابجایی ماکزیمم برابر با 21 میلی‌متر می‌گردد. مقدار کاهش جابجایی در اثر افزایش ضخامت هسته برابر با 50 درصد است. با توجه به افزایش قابل توجه اینرسی مقطع و سفتی خمشی پوسته این کاهش قابل پیش‌بینی می‌باشد و روند کاهشی منطقی به نظر می‌رسد.

۵-۷- اثر تقویت‌کننده‌های متعامد بر تنش محیطی و جابجایی شعاعی

به منظور بررسی اثر تقویت‌کننده‌های متعامد بر پاسخ دینامیکی

که ملاحظه می‌شود، در صورتیکه زاویه الیاف صفر یا ۹۰ درجه باشد، پوسته رفتار نرم‌تری از خود نشان می‌دهد و مقاومت پوسته در برابر تغییر شکل کمتر و جابجایی آن‌ها بیشتر می‌باشد. این را می‌توان از فرکانس طبیعی پایه پوسته نیز پی برد زیرا در حالت صفر و ۹۰ درجه پوسته دارای فرکانس طبیعی پایه کمتری می‌باشد.

۹-۵- پدیده ضربان

در اثر اعمال بار سینوسی به پوسته، پدیده ضربان اتفاق می‌افتد. پدیده ضربان، نوعی نوسان است که در آن دامنه نوسان ابتدا افزایش می‌یابد، سپس به‌طور منظم کاهش می‌یابد و این افزایش و کاهش به‌طور متناوب ادامه می‌یابد. اگر نمودار تغییرات دامنه ارتعاش در جهت شعاعی برای فرکانس تحریک ۱۶۰۰ رادیان بر ثانیه که نزدیک به فرکانس طبیعی پایه سیستم ۱۷۷۸ رادیان بر ثانیه است را تا زمان‌های خیلی بزرگ‌تر از پریود طبیعی پوسته رسم کنیم، قادر به مشاهده این پدیده خواهیم بود (شکل ۱۷).

۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای ساندویچی مرکب تحت بارگذاری سینوسی مورد بررسی قرار گرفت. برای استخراج روابط از تئوری مرتبه بالای پوسته‌های ساندویچی استفاده شد. جهت حل ارتعاشات آزاد روش ریلی ریتز و برای ارتعاشات اجباری روش مودهای فرضی به کار گرفته شده است. در تئوری حاضر تمامی مؤلفه‌های تنش مطابق با الاستیسیته سه‌بعدی وارد گردیده است و در نتیجه برخلاف تئوری‌های مرتبه پایین‌تر دیگر نیازی به استفاده از ضرایب تصحیح نمی‌باشد. جهت صحت‌سنجی نتایج علاوه بر مقایسه نتایج با مراجع، پوسته استوانه‌ای ساندویچی تقویت‌شده در نرم‌افزار المان محدود مدل‌سازی شده و نتایج مدل‌سازی در حالات مختلف با نتایج تحلیلی مقایسه شده‌اند. در زیر به تعدادی از نتایج مهم این تحقیق اشاره می‌شود:

- با افزایش نسبت L/R (نسبت طول به شعاع) فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند. تغییر L/R در مقادیر کوچک‌تر n ، تفاوت بیشتری در فرکانس‌های طبیعی ایجاد می‌کند.
- هر چه نسبت ارتفاع به عرض استرینگر (d/b) بیشتر باشد فرکانس‌های طبیعی پوسته بیشتر است. البته نباید این نسبت به

- حدى بزرگ شود که استرینگر به یک ورق نازک تبدیل شود.
- با افزایش ضخامت هسته با فرض ثابت بودن ضخامت رویه‌ها مقادیر فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. این روند به دلیل افزایش سفتی پوسته ساندویچی با افزایش ضخامت هسته منطقی می‌باشد.
- با افزایش زاویه الیاف در رویه‌ها از صفر تا ۹۰ درجه مقادیر فرکانس‌های طبیعی پایه در ابتدا تا یک مقدار زاویه مشخصی افزایش می‌یابد و سپس کاهش پیدا می‌کند. در واقع در زوایای صفر و ۹۰ درجه شاهد کمترین مقادیر فرکانس‌های طبیعی هستیم. همین امر موجب می‌شود در ارتعاشات اجباری تحت تحریک سینوسی دامنه‌های خیز در سازه هنگامی که زوایای الیاف در رویه‌ها صفر یا ۹۰ درجه است بیشتر باشند.
- با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های طولی و محیطی مقادیر جابجایی‌ها و به تبع مقادیر تنش‌ها به‌طور منظم کاهش می‌یابد.
- در پاسخ ارتعاشات اجباری پوسته ساندویچی تقویت‌شده تحت تحریک سینوسی پدیده ضربان مشاهده می‌گردد؛ یعنی دامنه پاسخ به‌طور متناوب ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

مراجع

- [1] R. Vinson, The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials, New York: Technomic, 1999.
- [2] Y. Frostig, O. T. Thomsen, Non-linear thermal response of sandwich panels with a flexible core and temperature dependent mechanical properties, Composites Part B: Engineering, 39 (1) (2008) 84-165.
- [3] K. MalekzadehFard, M. Gholami, F. Reshadi, M. Livani, Free vibration and buckling analyses of cylindrical sandwich panel with magneto rheological fluid layer, Journal of Sandwich Structures and Materials, 20 (6) (2015) 27-1.
- [4] Y. Frostig, Buckling of sandwich panels with a flexible core-highorder theory, International Journal of Solids and Structures, 35(3) (1998) 204-183.
- [5] H. Biglari, A. A. Jafari, Static and free vibration analyses of doubly curved composite sandwich panels with soft core based on a new three-layered mixed theory, Journal of Mechanical Engineering Science, 11(224) (2010) 2332-2349.

- of vibrational behavior of grid-stiffened cylindrical shells, *Journal of Advance in Acoustics and Vibration*, 73 (2014).
- [14] H. Salimi, M. Noorabadi, J. Eskandari Jam, Vibration analysis of composite cylindrical shell reinforced with circumferential rib, *Tabriz Journal of Mechanic*, 2(46) (2016) 172-167 (in Persian).
- [15] M. Zarei, G.H. Rahimi, Free vibration analysis of grid stiffened composite conical shells, *Journal of Science and Technology of Composites*, 1(4) (2017) 8-1.
- [16] D. Shahgholian, A. Ghanadi, G. Rahimi, Experimental and numerical investigation of the free vibration of composite sandwich plate with lattice core, *Modares Mechanical Engineering*, 10(17) (2017) 8-1 (in Persian).
- [17] D. Shahgholian, V. tahani, G. Rahimi, Experimental and numerical investigation of the effect of longitudinal and horizontal ribs on flexural behavior of grid stiffened composite plate, *Journal of Science and Technology of Composites*, 4(3) (2017) 342-333.
- [18] A. R. Pourmoayed, K. Malekzadeh Fard, M. Shahravi, Vibration analysis of a cylindrical sandwich panel with Fflexible core using an improved higher-order theory, *Modares Mechanical Engineering*, 3(17) (2016) 238-227 (in Persian).
- [19] M. Bagheri, A. A. Jafari, M. Sadeghifar, Multi-objective optimization of ring stiffened cylindrical shells using a genetic algorithm, *Journal of Sound and Vibration*, 330 (2011) 384-374.
- [6] E. Carrera, On the use of Murakami's Zig-Zag function in the modeling of layered plates and shells, *Computers and Structures*, 7(82) (2004) 554-541.
- [7] A. K. Garg, R. K. Khare, T. Kant, Higher-order closed-form solutions for free vibration of laminated composite and sandwich shells, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 3(8) (2006) 235-205.
- [8] M. Zarei, G. H. Rahimi, Free vibration analysis of rotating grid stiffened composite cylindrical shells, *Modares Mechanical Engineering*, 9(16) (2016) 185-175 (in Persian).
- [9] Y. Frostig, O. T. Thomsen, High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core, *International Journal of Solids and Structures*, 5(41) (2004) 1724-1697.
- [10] k. Malekzadeh Fard, M. Livani, A. veisi, M. Gholami, Improved high-order bending analysis of double curved sandwich panels subjected to multiple loading conditions, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12(11) (2014) 2307-2284.
- [11] O. Rahmani, S. M. R. Khalili, K. Malekzadeh, Free vibration response of composite sandwich cylindrical shell with flexible core, *Composite Structures*, 5(92) (2010) 1281-1269.
- [12] Y. Kagawa, Non-Axially Symmetric vibrations of sandwich cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, 1(7) (1968) 48-39.
- [13] G. H. Rahimi, M. Hemmatnezhad, R. Ansari, Prediction

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

R. Azar Afza, K. MalekzadehFard, M. Golaghapour Kami, A.R. Pourmoayed, *Dynamic analysis of cylindrical sandwich shell with orthogonal stiffeners using high-order theory*, *AmirKabir J. Mech. Eng.*, 53(Special Issue 4) (2021) 2473-2492.

DOI: [10.22060/mej.2020.18018.6712](https://doi.org/10.22060/mej.2020.18018.6712)



