نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ۴، سال ۱۴۰۰، صفحات ۲۳۳۱ تا ۲۳۴۶
DOI: 10.22060/mej.2020.17909.6687

تحلیل غیرخطی ورق هایپرالاستیک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش بدون شبکه

شهرام حسینی، غلامحسین رحیمی*، یاور عنانی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۲۳
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۶/۲۹
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۱۰
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۹/۰۲

کلمات کلیدی:
ورق هایپرالاستیک
تابع انرژی کرنشی نئوهوکین
تحلیل استاتیکی
روش بدون شبکه
توابع پایهٔ شعاعی

خلاصه: در این مقاله تحلیل استاتیکی ورق هایپرالاستیک تحت بارگذاری‌های گستردهٔ یکنواخت و سینوسی بررسی شده‌است. از تانسور تغییر شکل کوشی- گرین راست و کرنش‌های لاگرانژی برای استخراج روابط کرنش غیرخطی استفاده شده‌است. همچنین تئوری ورق برشی مرتبهٔ اول برای روابط جابجایی در سه راستای اصلی به‌کاررفته‌است. برای نخستین بار، معادلات حاکم بر رفتار ورق هایپرالاستیک با استفاده از تابع انرژی کرنشی نئوهوکین به فرم قوی استخراج شده‌است. برای این منظور از رابطهٔ لاگرانژ برای اعمال روش تغییرات بر تابع انرژی پتانسیل استفاده شده‌است. معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر مسئله به همراه شرایط مرزی حاکم بر آن، با استفاده از روش بدون شبکه به فرم قوی و توابع پایهٔ شعاعی بررسی شده‌است. تابع اسپیلاین ورق نازک به عنوان تابع پایهٔ شعاعی برای تشکیل توابع شکل روش بدون شبکه به‌کاررفته‌است. نتایج حاصل از روش بدون شبکه با نتایج حاصل از تحلیل المان محدود توسط نرم افزار آباکوس مقایسه شده‌است. نتایج بدست‌آمده نشان می‌دهند که مطابقت بسیار خوبی میان نتایج روش بدون شبکه و روش المان محدود در خیز ورق تحت بارگذاری‌های گستردهٔ یکنواخت و سینوسی وجود دارد؛ همچنین کانتور تنش برای هر دو روش یکسان بوده و مطابقت خوبی میان آن‌ها مشاهده شده‌است.

۱- مقدمه

ورق‌ها دارای کاربردهای وسیعی در صنعت و مهندسی هستند که از آن‌ها در ساخت هواپیماها، مخازن و بدنهٔ خودرو استفاده می‌شود. رفتار این مواد در بارگذاری‌های استاتیکی دارای اهمیت بسیار زیادی در طراحی سازه‌های مختلف است. در سال‌های اخیر، ورق‌های هایپرالاستیک به دلیل رفتار و خواص منحصربه‌فردی که دارند، مورد توجه مهندسان و طراحان صنعتی قرار گرفته است. مواد هایپرالاستیک به دسته‌ای از مواد اطلاق می‌شود که نمودار تنش- کرنش آن‌ها در ناحیه الاستیک به صورت غیرخطی باشد. به طور کلی غیرخطی‌بودن رفتار مواد به دو دستهٔ غیرخطی هندسی و غیرخطی مادی تقسیم‌بندی می‌شود. غیرخطی‌بودن هندسی، تنها به هندسهٔ ماده وابسته بوده و برای توصیف معادلات حاکم بر این مواد از روابط غیرخطی هندسی حاکم بر کرنش‌ها استفاده می‌شود؛ اما غیرخطی مادی به معنی غیرخطی‌بودن رفتار ماده در نمودار تنش- کرنش آن است. بنابراین مواد هایپرالاستیک در گروه مواد با رفتار غیرخطی مادی قرار می‌گیرند.

برای توصیف رفتار غیرخطی مواد هایپرالاستیک از توابع انرژی کرنشی مخصوص به آن‌ها استفاده می‌شود. انتخاب تابع انرژی کرنشی مناسب، یکی از پارامترهای مهم و تاثیرگذار در تحلیل سازه‌های تشکیل‌شده از مواد هایپرالاستیک است. توابع انرژی کرنشی متنوعی توسط محققین ارائه شده که از رایج‌ترین آن‌ها می‌توان به نئوهوکین[1]،

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: rahimi_gh@modares.ac.ir

1 Neo-Hookean

مونی ریولین[1]، آگدن[2] و یئوه[3] اشاره کرد [۱]. همچنین توابع انرژی کرنشی متعددی برای بیان رفتار غیرخطی مواد هایپرالاستیک با توجه به نوع کاربرد و شرایط مسئله معرفی شده‌اند. شیرر [۲] یک تابع انرژی کرنشی جدید برای مدلسازی رفتار رباط‌ها و تاندون‌ها ارائه کرد. این تابع بر اساس چیدمان هندسی رشته‌های این اجزا فرمولبندی شده است. آپادیای و همکاران [۳] یک مدل ساختاری جدید برای نرخ کرنش مواد نرم ویسکو- هایپرالاستیک ارائه کردند. در مدل ارائه‌شده توسط آن‌ها، تغییر شکل‌های خطی و غیرخطی بزرگ لحاظ شده است. از مواد هایپرالاستیک می‌توان به عنوان مادهٔ اولیه برای ساخت سازه‌ها با استفاده از روش ساخت افزایشی[4] استفاده نمود. در این راستا، لیو و لی [۴] یک مدل نرم‌شوندهٔ ویسکوهایپرالاستیک برای تخمین اثرات نرخ کرنش در لایه‌های ساخته‌شده با روش ساخت افزایشی ارائه کردند. آن‌ها برای پیاده‌سازی مدل ارائه‌شده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس[5] استفاده کرده‌اند. فهیمی و همکاران [۵] یک مدل جدید برای مواد ویسکوهایپرالاستیک در تغییر شکل‌های محدود ارائه کردند. آن‌ها از یک رابطهٔ نمایی برای بیان رفتار ماده استفاده کردند. همچنین برای بررسی میزان دقت مدل ارائه‌شده، رفتار الاستومری یک بوش در تغییر شکل‌های شعاعی، پیچشی و محوری با توابع انرژی کرنشی مختلف بررسی و مقایسه شده است.

در سال‌های اخیر مطالعات گسترده‌ای پیرامون رفتار ورق‌های ساخته‌شده از مواد هایپرالاستیک صورت گرفته است. چن [۶] در تحقیقی، انتشار موج در ورق‌های هایپرالاستیک تراکم‌پذیر را مورد بررسی قرار داده است. در این مطالعه از روش آشفتگی مجانبی[6] برای استخراج معادلات مستقل غیرخطی دوبعدی استفاده شده است. گونکالوز و همکاران [۷] ارتعاشات غیرخطی غشای هایپرالاستیک دایروی کشیده‌شده در راستای شعاعی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای بدست‌آوردن فرکانس‌های خطی و غیرخطی به ترتیب از روش تحلیلی و گلرکین استفاده کرده‌اند. دیانی و همکاران [۸] یک مدل معادل برای سازه‌های با هستهٔ کامپوزیتی موج‌دار و پوشش الاستومری ارائه کردند. آن‌ها از شکل ذوزنقه‌ای برای هسته استفاده کرده‌اند. فقیهی و همکاران [۹] هیدروژل نانوکامپوزیتی گرافن اکساید/ اکریلیک اسید/ ژلاتین را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای مدلسازی رفتار این ماده از توابع انرژی کرنشی یئوه، نئوهوکین و مونی- ریولین استفاده کرده‌اند. گوپتا و هارورسمپات [۱۰] الاستومرهای دی‌الکتریک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای غشاهای هایپرالاستیک دی‌الکتریک از میدان جابجایی سه بعدی استفاده کرده‌اند. بادریو و همکاران [۱۱] ورق‌های ساندویچی با هستهٔ نرم عرضی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در تحقیق خود، اثرات غیرخطی هندسی را مورد بررسی قرار دادند. بالاسوبرامانیان و همکاران [۱۲] ارتعاشات با دامنهٔ بزرگ ورق‌های لاستیکی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها اثرات ویسکوالاستیسیته را در نظر گرفته و شرط مرزی گیردار را برای لبه‌های ورق اعمال کردند. همچنین نتایج بدست‌آمده از تحلیل عددی را با نتایج حاصل از آزمایش عملی مقایسه کردند. یوسف و همکاران [۱۳] ضرایب دمپینگ ریلی را برای ورق‌های لاستیکی بدست آوردند. آن‌ها از تحلیل المان محدود برای این ضرایب استفاده کردند. برسلاوسکی و همکاران [۱۴-۱۶] در تحقیق‌های جداگانه به بررسی ارتعاشات ورق‌های هایپرالاستیک پرداختند. برای حل معادلات حاکم بر مسئله، از روش سری‌های سینوسی استفاده شده است. همچنین اثرات غیرخطی‌بودن هندسی نیز در نظر گرفته شده است. آمابیلی و همکاران [۱۴] ارتعاشات و خیز استاتیکی ورق هایپرالاستیک نازک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از تئوری ورق کلاسیک برای فرمولبندی رفتار ورق هایپرالاستیک استفاده کردند. همچنین تابع انرژی کرنشی مونی- ریولین برای درنظرگرفتن اثرات غیرخطی مادی در نظر گرفته شده است. بالاسوبرامانیان و همکاران [۱۷] پاسخ ویسکوالاستیک و دمپینگ غیرخطی ورق‌های لاستیکی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از مدل ورق کلاسیک برای معادلات کرنش استفاده کرده و برای حل معادلات حاکم بر ورق، روش ریتز را به کار گرفتند. علیجانی و آمابیلی [۱۸] مروری بر ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ها ارائه کردند. در این تحقیق پوسته‌های غیرخطی هایپرالاستیک نیز بررسی شده‌اند. درواکس و همکاران [۱۹] ورق‌های هایپرالاستیک نازک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها کاربرد ورق‌ها را در رشد بیولوژیکی مورد بررسی قرار دادند. همچنین برای مدلسازی رفتار غیرخطی مواد هایپرالاستیک از توابع انرژی نئوهوکین و مونی- ریولین استفاده کرده‌اند.

معادلات حاکم بر رفتار ورق‌های هایپرالاستیک دارای عبارت‌های

1 Mooney-Rivlin
2 Ogden
3 Yeoh
4 3D-Printing
5 Abaqus
6 Asymptotic Perturbation Technique

غیرخطی از مرتبه‌های مختلف است. بنابراین، استفاده از روش‌های تحلیلی بسیار سخت بوده و با ساده‌سازی‌های بسیاری همراه است. در این میان، استفاده از روش‌های عددی برای حل این معادلات امری اجتناب ناپذیر است. یکی از روش‌های عددی پرکاربرد برای حل مسائل غیرخطی، روش‌های بدون شبکه هستند. در این روش‌ها هیچ ارتباطی میان گره‌های دامنه وجود نداشته و درنتیجه، محدودیت تغییر شکل المان، در روش المان محدود را ندارند. بنابراین برای حل مسائل غیرخطی روش‌های کارآمدی هستند. ون و هون [۲۰] تحلیل غیرخطی هندسی ورق میندلین را با استفاده از روش بدون شبکه بررسی کردند. آن‌ها از توابع پایهٔ شعاعی و فرم قوی معادلات استفاده کردند. لیو و همکاران [۲۱] تحلیل غیرخطی ورق‌های موج‌دار را با استفاده از تئوری ورق برشی مرتبهٔ اول بررسی کردند. آن‌ها از روش بدون شبکهٔ گلرکین برای حل معادلات حاکم بر مسئله استفاده کردند. نافا و الگهتانی [۲۲] خیزهای بزرگ ورق‌های نازک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از توابع پایهٔ شعاعی و توابع تنش، معادلات حاکم بر مسئله را مورد بررسی قرار دادند. سینگ و شوکلا [۲۳] خمش غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های مختلف را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از توابع پایهٔ شعاعی چندربعی[1] برای یافتن پاسخ معادلات حاکم بر مسئله استفاده کردند. سینگ و شوکلا [۲۴] در تحقیقی دیگر، خمش غیرخطی ورق‌های کامپوزیتی را با استفاده از توابع پایهٔ شعاعی بررسی کردند. لیو و ژائو [۲۵] تحلیل حد بالا را با استفاده از روش بدون شبکهٔ درونیابی نقاط شعاعی مطالعه کردند. آن‌ها از برنامه‌ریزی غیرخطی در معادلات استفاده کردند. لی و همکاران [۲۶] رفتار غیرخطی ورق‌های لایه‌ای کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت‌شده را بررسی کردند. آن‌ها از تئوری ورق برشی مرتبهٔ اول برای فرمولبندی کرنش و از روش بدون شبکه برای تحلیل معادلات غیرخطی استفاده کردند. وان‌دو و لی [۲۷] تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ بالای شبه‌سه‌بعدی را در تحلیل کمانش گرمایی ورق‌های مدرج تابعی به کار بردند. آن‌ها از روش بدون شبکهٔ درونیابی نقاط شعاعی بهبودیافته برای تحلیل معادلات حاکم بر مسئله استفاده کردند. باربیری و همکاران [۲۸] تحلیل ورق ون- کارمن غیرخطی چین‌دار با شکل‌های پیچیده را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از تئوری ورق برشی مرتبهٔ اول برای فرمولبندی کرنش‌های غیرخطی و از روش بدون شبکه برای تحلیل معادلات غیرخطی حاکم بر مسئله استفاده کردند. نورمحمدی و بهجت [۲۹] تحلیل غیرخطی هندسی ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی را با استفاده از روش بدون شبکهٔ درونیابی نقاط شعاعی تحلیل کردند. آن‌ها از تابع پایهٔ شعاعی چندربعی به عنوان تابع درونیاب استفاده کردند.

1 Multiquadric RBF

در این تحقیق تحلیل استاتیکی ورق مربعی ساخته‌شده از مادهٔ هایپرالاستیک سیلیکون- لاستیک بررسی شده است. همچنین برای مدلسازی رفتار غیرخطی مادی سیلیکون- لاستیک از تابع انرژی کرنشی نئوهوکین استفاده شده و برای نخستین بار معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک به فرم قوی استخراج شده است. برای بیان جابجایی‌های میدانی، تئوری تغییر فرم برشی مرتبهٔ اول[2] به کار رفته و عبارت‌های مربوط به کرنش‌های غیرخطی (غیرخطی هندسی) در استخراج معادلات حاکم بر مسئله درنظرگرفته‌شده‌اند. روش بدون شبکه به فرم قوی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله به‌کاررفته است. به همین منظور، تابع اسپیلاین ورق نازک[3] به عنوان تابع پایهٔ شعاعی درنظرگرفته‌شده‌است. به منظور بررسی دقت روش حاضر، نتایج حاصل از روش بدون شبکه با نتایج حاصل از روش المان محدود آباکوس مقایسه شده است. همچنین تاثیر ضخامت ورق بر خیز ورق هایپرالاستیک بررسی شده است. شرایط مرزی برای لبه‌های ورق به صورت گیردار در نظر گرفته شده و به دلیل اینکه توابع پایهٔ شعاعی دارای خاصیت دلتای کرانکر[4] هستند، به صورت مستقیم در ماتریس سفتی اعمال شده‌اند.

۲- فرمولبندی مسئله

۲-۱- تابع انرژی کرنشی

برای استخراج روابط تانسور تغییر شکل کوشی- گرین راست، تانسور کرنش لاگرانژی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \qquad (۱)$$

بنابراین تانسور تغییر شکل کوشی- گرین راست عبارت است از:

$$\mathbf{C}=2\mathbf{E}+\mathbf{I}=\begin{bmatrix}2\varepsilon_{xx}+1 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{xy} & 2\varepsilon_{yy}+1 & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 2\varepsilon_{zz}+1\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

2 First order Shear Deformation plate Theory (FSDT)
3 Thin Plate Spline
4 Kronecker Delta

درنتیجه، ناورداهای اول و سوم تانسور تغیر شکل کوشی- گرین راست برحسب کرنش‌ها به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} I_1 &= trace(\mathbf{C}) = 2\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}\right)+3 \\ I_3 &= \det(\mathbf{C}) = \left(\left(8\varepsilon_{zz}+4\right)\varepsilon_{yy}-2\varepsilon_{yz}^2+4\varepsilon_{zz}+2\right)\varepsilon_{xx} \\ &+\left(2-2\varepsilon_{xy}^2\right)\varepsilon_{zz}+2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}-\varepsilon_{xy}^2-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2+1 \end{aligned} \tag{۳}$$

مادهٔ استفاده‌شده در این ورق از نوع تراکم‌ناپذیر[1] در نظر گرفته شده است. با اعمال شرط تراکم‌ناپذیری، کرنش در راستای ضخامت برحسب سایر کرنش‌ها حاصل می‌شود. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} I_3 = 1 \rightarrow \varepsilon_{zz} &= -\frac{1}{2}\frac{4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+2\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)-\varepsilon_{xz}^2}{4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}} \\ &\frac{-\varepsilon_{xy}^2-\varepsilon_{yz}^2-2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2-2\varepsilon_{yy}\varepsilon_{xz}^2+2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}}{+2\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)-\varepsilon_{xy}^2+1} \end{aligned} \tag{۴}$$

استفاده از رابطهٔ (۴) در تابع انرژی کرنشی، منجر به استخراج معادلات حاکم بسیار سنگینی شده که تحلیل آن‌ها به سادگی امکان‌پذیر نیست. بنابراین می توان برای رابطهٔ کرنش در راستای ضخامت، از بسط تیلور حول نقطهٔ صفر استفاده نمود. اگر بسط تیلور تا توان‌های مرتبهٔ ۲ انجام شود، تنها اثرات غیرخطی‌بودن هندسی لحاظ شده و از اثرات غیرخطی‌بودن مادی صرف‌نظر شده است. این در حالی است که اگر بسط تیلور تا توان‌های مرتبهٔ ۳ و بیشتر باشد، اثرات غیرخطی‌بودن هندسی و مادی به طور همزمان در نظر گرفته می‌شود [۱۵]. با اعمال بسط تیلور تا توان مرتبهٔ ۳، داریم:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= -4\left(\varepsilon_{xx}^3+\varepsilon_{yy}^3\right)+\frac{1}{2}\left(4-8\varepsilon_{yy}\right)\varepsilon_{xx}^2+\frac{1}{2}\left(-4\varepsilon_{xy}^2+4\varepsilon_{yy}\right. \\ &\left.-8\varepsilon_{yy}^2-2-2\varepsilon_{xz}^2\right)\varepsilon_{xx}+2\varepsilon_{yy}^2+\frac{1}{2}\left(-2\varepsilon_{yz}^2-4\varepsilon_{xy}^2-2\right)\varepsilon_{yy}+ \\ &\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2+\varepsilon_{xy}^2\right)-\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} \end{aligned} \tag{۵}$$

تابع چگالی انرژی کرنشی نئوهوکین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = C_{10}\left(I_1-3\right) = 2C_{10}\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}\right) \tag{۶}$$

با جایگذاری معادلهٔ (۵) در (۶)، تابع انرژی کرنشی نئوهوکین برای ورق برشی مرتبهٔ اول به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} U &= C_{10}\left(I_1-3\right) = 2C_{10}\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}\right) \\ &= 2C_{10}\left(-8\varepsilon_{xx}^3-8\varepsilon_{xx}^2\varepsilon_{yy}-4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy}^2-2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xz}^2-8\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}^2\right. \\ &-4\varepsilon_{xy}^2\varepsilon_{yy}-2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}-8\varepsilon_{yy}^3-2\varepsilon_{yy}\varepsilon_{yz}^2+4\varepsilon_{xx}^2+4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} \\ &\left.+\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2+4\varepsilon_{yy}^2\right) \end{aligned} \tag{۷}$$

چگالی کار نیروی خارجی عبارت است از:

$$W = q(x,y)w(x,y) \tag{۸}$$

بنابراین چگالی انرژی پتانسیل ورق بر حسب کرنش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \pi &= U-W \\ &= 2C_{10}\left(-8\varepsilon_{xx}^3-8\varepsilon_{xx}^2\varepsilon_{yy}-4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy}^2-2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xz}^2-8\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}^2\right. \\ &\quad -q.w \\ &-4\varepsilon_{xy}^2\varepsilon_{yy}-2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}-8\varepsilon_{yy}^3-2\varepsilon_{yy}\varepsilon_{yz}^2 \\ &\left.+4\varepsilon_{xx}^2+4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2+4\varepsilon_{yy}^2\right) \end{aligned} \tag{۹}$$

۲-۲- روابط کرنش غیرخطی

برای استخراج روابط کرنش غیرخطی، از تئوری ورق برشی مرتبهٔ اول استفاده شده است. برای این منظور، معادلات جابجایی در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y)+z\varphi_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y)+z\varphi_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w(x,y) \end{aligned} \tag{۱۰}$$

با صرف‌نظرکردن از جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای، کرنش‌های غیرخطی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= z\varphi_{x,x}+\frac{1}{2}w_{,x}^2 \\ \varepsilon_{yy} &= z\varphi_{y,y}+\frac{1}{2}w_{,y}^2 \\ \varepsilon_{xy} &= z(\varphi_{x,y}+\varphi_{y,x})+w_{,x}w_{,y} \\ \varepsilon_{xz} &= \varphi_x+w_{,x} \\ \varepsilon_{yz} &= \varphi_y+w_{,y} \end{aligned} \tag{۱۱}$$

که در روابط فوق، $F_{,g}$ نشان دهندهٔ مشتق تابع F نسبت به متغیر

1 Incompressible

g است.

با جایگذاری روابط (۱۱) در تابع انرژی پتانسیل (۹)، انرژی پتانسیل ورق هایپرالاستیک بر حسب متغیرهای مسئله (خیز و چرخش‌ها) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\Pi = D\Big(\big(&-4\varphi_{x,y}\varphi_{y,x}-8\varphi_{x,x}\varphi_{y,y}-4\varphi_{y,y}^2-2\varphi_{y,x}^2-2\varphi_{x,y}^2-\\
&-2\varphi_{x,y}^2-4\varphi_{x,x}^2-2\varphi_{y,x}^2)w_{,y}^2+4\varphi_{y,y}^2+\varphi_{y,x}^2+\varphi_{x,y}^2+\\
&+\varphi_x^2)w_{,x}^2+2\varphi_x(w_{,y}^2+\varphi_y w_{,y}-1)w_{,x}+w_{,y}^6+2w_{,y}^3\varphi_y\\
&-12\varphi_{x,x}^2\big)w_{,x}^2-8\left(\varphi_{y,x}+\varphi_{x,y}\right)\left(\varphi_{y,y}+\varphi_{x,x}\right)w_{,x}w_{,y}\\
&+4\varphi_{x,x}^2+2\varphi_{x,y}\varphi_{y,x}+4\varphi_{x,x}\varphi_{y,y})-A(w_{,x}^6+3w_{,x}^4w_{,y}^2\\
&\varphi_y+(-1+\varphi_y^2)w_{,y}^2-2\varphi_y w_{,y}-\varphi_y^2-\varphi_x^2\big)\\
&+(-4\varphi_{x,y}\varphi_{y,x}-8\varphi_{x,x}\varphi_{y,y}-12\varphi_{y,y}^2\\
&+2w_{,x}^3\varphi_x+(-1+2\varphi_y w_{,y}+3w_{,y}^4
\end{aligned}
$$
(۱۲)

۲-۳- معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک

در این بخش معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک مستطیلی در مختصات دکارتی بررسی شده است. برای این منظور، یک ورق مستطیلی با ابعاد a و b و ضخامت h در مختصات دکارتی در نظر گرفته شده است (شکل ۱).

برای استخراج معادلات حاکم بر ورق و همچنین شرایط مرزی لبه‌ها، از رابطهٔ لاگرانژ استفاده می‌شود [۳۰]. این رابطه علاوه بر فرم قوی معادلات حاکم بر مسئله، شرایط مرزی طبیعی لبه‌ها را نیز تولید می‌کند.

$$
\frac{\partial\Pi}{\partial S}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial S_{,x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial S_{,y}}\right)=0 \qquad , \qquad S=w,\varphi_x,\varphi_y
$$
(۱۳)

با جایگذاری روابط (۱۲) در (۱۳)، سه معادلهٔ حاکم بر ورق هایپرالاستیک حاصل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
\delta w:&(12Aw_{,x}\varphi_x+36Aw_{,x}^2w_{,y}^2+8D\varphi_{x,y}\varphi_{y,x}+16D\varphi_{x,x}\varphi_{y,y}\quad 4 \qquad 24\\
&+4D\varphi_{x,y}^2+4D\varphi_{y,x}^2+2A\varphi_x^2-2A)w_{,xx}+(8D\varphi_{x,y}\varphi_{y,x}+16 \qquad 4\\
&+24D\varphi_{y,y}^2+6Aw_{,x}^4+4D\varphi_{y,x}^2+2A\varphi_y^2+4D\varphi_{x,y}^2+8D\\
&w_{,x}+8Aw_{,y}\varphi_x+16D(\varphi_{y,x}+\varphi_{x,y})(\varphi_{x,x}+\varphi_{y,y})+4A\varphi_x\\
&+\varphi_{x,y})\varphi_{x,xx}+24D(((2/3)(\varphi_{x,y}+\varphi_{y,x})w_{,x}+(\varphi_{x,x}+\varphi\\
&\varphi_{x,yy}+8D((\varphi_{y,x}+\varphi_{x,y})w_{,x}+(\varphi_{x,x}+\varphi_{y,y})w_{,y})\varphi_{y,xx}+4\\
&+(1/2)\varphi_{x,y}\varphi_y+\varphi_{x,x}\varphi_x)w_{,x}+(1/2)(\varphi_{x,x}\varphi_y+\varphi_{y,x}\varphi_x)\\
&{}_{,x}\varphi_{y,y}+4Aw_{,y}\varphi_y+24D\varphi_{x,x}^2+6Aw_{,y}^4+8D\varphi_{y,y}^2+30Aw_{,x}^4\\
&\varphi_{y,x}+16D\varphi_{x,x}\varphi_{y,y}+4Aw_{,x}\varphi_x+12Aw_{,y}\varphi_y+36Aw_{,x}^2w_{,y}^2\\
&+8D\varphi_{x,x}^2+30Aw_{,y}^4-2A)w_{,yy}+(48Aw_{,xx}^3w_{,y}+8A(6w_{,y}^3\varphi_y)\\
&4A\varphi_x\varphi_y)w_{,xx}+48D((\varphi_{x,x}+(1/3)\varphi_{y,y})w_{,x}+(1/6)w_{,y}(\varphi_{y,x}\\
&{}_{,x}+\varphi_{y,y})w_{,y})\varphi_{x,yx}+8D((\varphi_{x,x}+\varphi_{y,y})w_{,x}+(\varphi_{x,y}+\varphi_{y,x})w_{,y})\\
&{}_{,xx}+4A(((1/2)\varphi_{y,y}+(3/2)\varphi_{x,x})w_{,x}^2+(w_{,y}(\varphi_{x,y}+\varphi_{y,x})\\
&{}_{,x}\varphi_x)w_{,y}-(1/2)\varphi_{x,x}-(1/2)\varphi_{y,y})=q\\
\delta\varphi_x:&\,48D((\varphi_{x,x}+(1/3)\varphi_{y,y})w_{,x}+(1/6)w_{,y}(\varphi_{y,x}\\
&w_{,xy}+8D((\varphi_{y,y}+\varphi_{x,x})w_{,x}+(\varphi_{y,x}+\varphi_{x,y})w_{,y})w\\
&+4Dw_{,x}^2)\varphi_{x,yy}+12D(w_{,x}^2-(1/2)+w_{,y}^2)\varphi_{y,xy}+\\
&(w_{,x}^3+w_{,x}^2\varphi_x+(-1+w_{,y}\varphi_y+w_{,y}^2)w_{,x}-\varphi_x)=0\\
&+\varphi_{x,y}))w_{,xx}+24D(((2/3)(\varphi_{y,x}+\varphi_{x,y})w_{,x}+(\varphi_{x,x}+\varphi_{y,y})w_{,y})\\
&{}_{,yy}+(-8D+24Dw_{,x}^2+8Dw_{,y}^2)\varphi_{x,xx}+(-2D+4Dw_{,y}^2\\
&16D\varphi_{x,xy}w_{,x}w_{,y}+8D\varphi_{y,xx}w_{,x}w_{,y}+8Dw_{,x}w_{,y}\varphi_{y,yy}-2A\\
\delta\varphi_y:&\,8D(w_{,y}(\varphi_{y,y}+\varphi_{x,x})+w_{,x}(\varphi_{y,x}+\varphi_{x,y}))w_{,xx}\\
&+16D((3\varphi_{y,y}+\varphi_{x,x})w_{,y}+(1/2)w_{,x}(\varphi_{y,x}+\varphi\\
&+4w_{,x}^2)\varphi_{y,xx}+8D(w_{,x}^2-1+3w_{,y}^2)\varphi_{y,yy}+8D\varphi\\
&+w_{,y}^2\varphi_y+(w_{,x}\varphi_x+w_{,x}^2-1)w_{,y}-\varphi_y)=0\\
&+24D(((2/3)\varphi_{y,x}+(2/3)\varphi_{x,y})w_{,y}+(\varphi_{y,y}+\varphi_{x,x})w_{,x})w_{,xy}\\
&{}_{x,y}))w_{,yy}+12D(w_{,xx}^2-(1/2)+w_{,yy}^2)\varphi_{x,xy}+D(-2+4w_{,y}^2\\
&{}_{x,xx}w_{,x}w_{,y}+8D\varphi_{x,yy}w_{,x}w_{,y}+16Dw_{,x}w_{,y}\varphi_{y,xy}-2A(w_{,y}^3
\end{aligned}
$$
(۱۴)

که در روابط فوق، داریم:

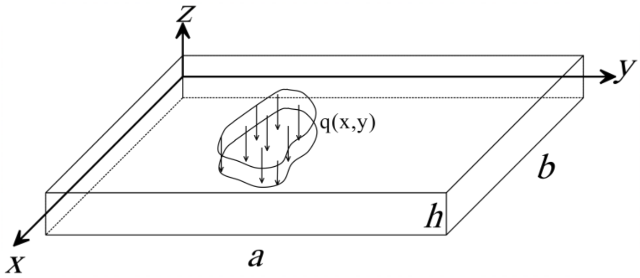
$$
\begin{aligned}
A&=k_s\int C_{10}\,dz\\
D&=\int C_{10}\,z^2\,dz
\end{aligned}
$$
(۱۵)

که k_s ضریب اصلاح برشی بوده و برابر با $\frac{5}{6}$ در نظر گرفته شده است. همچنین شرایط مرزی گیردار برای لبه‌های ورق مستطیلی به صورت رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
w=\varphi_x=0 &\qquad @\,x=0,a\\
w=\varphi_y=0 &\qquad @\,y=0,b
\end{aligned}
$$
(۱۶)

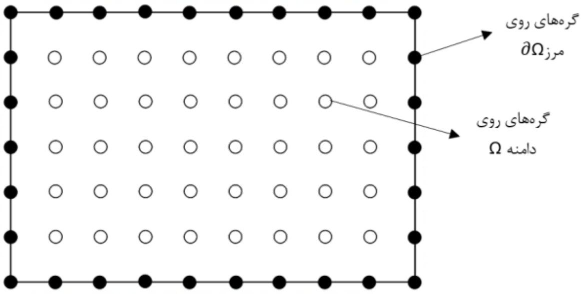
تانسور تنش پایولای دوم برای ورق هایپرالاستیک با استفاده از رابطهٔ زیر بیان می‌شود [۳۱]:

$$
\sigma_{ij}=2\left[\frac{\partial U}{\partial I_1}C_{ij}-\frac{\partial U}{\partial I_1}I_1\frac{\delta_{ij}}{3}\right]+p\delta_{ij}
$$
(۱۷)



شکل ۱. ورق مستطیلی تحت بارگذاری گسترده در دستگاه مختصات دکارتی

Fig. 1. The rectangular plate under distributed loading in the cartesian coordinate system



شکل ۲. توزیع نقاط یکنواخت روی مرزها و دامنۀ مسئله در روش بدون شبکه

Fig. 2. Uniformly distributed nodes on boundaries and domain of the problem in the meshless method

تحلیل روابط (۱۴) به صورت دقیق بسیار مشکل و تقریباً غیرممکن است. از این رو، استفاده از روش‌های عددی برای حل این معادلات امری اجتناب‌ناپذیر است. روش‌های عددی بسیاری برای تحلیل معادلات دیفرانسیل غیرخطی گسترش یافته‌اند که در این میان روش‌های بدون شبکه دارای مزایای بسیاری در مقایسه با روش‌های مشابه است. در ادامه به بررسی کاربرد روش بدون شبکه به فرم قوی در تحلیل مسائل غیرخطی پرداخته شده است.

۳- روش بدون شبکه به فرم قوی

روش‌های بدون شبکه برخلاف روش المان محدود، به دلیل عدم وجود شبکه و محدودیت تغییر شکل المان‌ها، دارای دقت بسیار بالایی در تحلیل مسائل مکانیکی و به طور ویژه، مسائل غیرخطی هستند. در این تحقیق از روش بدون شبکه به فرم قوی[1] برای تحلیل معادلات حاکم بر مسئله استفاده شده است. مزایای این روش در مقایسه با روش‌های دیگر عبارتند از[۳۲]:

- به دلیل استفاده از فرم قوی معادلات، هیچ شبکۀ زمینه‌ای برای انتگرال‌گیری وجود ندارد. درنتیجه، این روش حقیقتاً بدون شبکه است.
- فرمولبندی و اجرای این روش در مقایسه با روش‌های فرم ضعیف به طور چشم‌گیری ساده‌تر بوده و درنتیجه زمان اجرای آن نیز کمتر است.
- به دلیل عدم وجود انتگرال‌گیری عددی، دقت محاسبات در مقایسه با روش‌های فرم ضعیف افزایش می‌یابد.
- در این روش شرایط مرزی به صورت مستقیم اعمال شده و نیازی به تکنیک‌های خاص و پیچیده، همانند روش‌های فرم ضعیف نیست.

در شکل ۲ نمای کلی از دامنه مسئله نشان داده شده است.

فرض می‌کنیم معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک و مرزهای آن به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} &Lu = f \ \text{ in } \ \Omega, \\ &L_B u = g \ \text{ on } \ \partial\Omega \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که u نشان‌دهندۀ متغیرهای میدان حل است. برای تقریب متغیرهای میدان حل و مشتق مرتبۀ kام از توابع پایۀ شعاعی استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \begin{Bmatrix} a_i^w \\ a_i^{\varphi_x} \\ a_i^{\varphi_y} \end{Bmatrix}, \\ &\frac{\partial^k}{\partial X^k} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^k \phi_i}{\partial X^k} \begin{Bmatrix} a_i^w \\ a_i^{\varphi_x} \\ a_i^{\varphi_y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

که توابع شکل به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi = [R^T(x) S_a + p^T(x) S_b] \qquad (۲۰)$$

که در رابطۀ فوق، داریم:

1 Meshless Collocation Method

$$
\begin{aligned}
&R^T(x,y)=\left[R_1(x,y),R_2(x,y),\ldots,R_n(x,y)\right]\\
&p^T(x,y)=\left[p_1(x,y),p_2(x,y),\ldots,p_m(x,y)\right]\\
&S_b=\left[P_m^T R_Q^{-1} P_m\right]^{-1} P_m^T R_Q^{-1}\\
&S_a=R_Q^{-1}\left[1-P_m S_b\right]\\
&\mathrm{R}_Q=\begin{bmatrix} R_1(x_1,y_1) & R_2(x_1,y_1) & \cdots & R_n(x_1,y_1)\\ R_1(x_2,y_2) & R_2(x_2,y_2) & \cdots & R_n(x_2,y_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ R_1(x_n,y_n) & R_2(x_n,y_n) & \cdots & R_n(x_n,y_n)\end{bmatrix}\\
&\mathrm{P}_m=\begin{bmatrix} P_1(x_1,y_1) & P_2(x_1,y_1) & \cdots & P_m(x_1,y_1)\\ P_1(x_2,y_2) & P_2(x_2,y_2) & \cdots & P_m(x_2,y_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_1(x_n,y_n) & P_2(x_n,y_n) & \cdots & P_m(x_n,y_n)\end{bmatrix}\\
&p^T=[1,x,y,x^2,xy,y^2,\ldots]
\end{aligned}
\tag{۲۱}
$$

در روابط فوق، از تابع پایهٔ شعاعی اسپیلاین ورق نازک[1] استفاده شده است.

$$
R_i(x,y)=\left(\left(x-x_i\right)^2+\left(y-y_i\right)^2\right)^{\frac{\eta}{2}}
\tag{۲۲}
$$

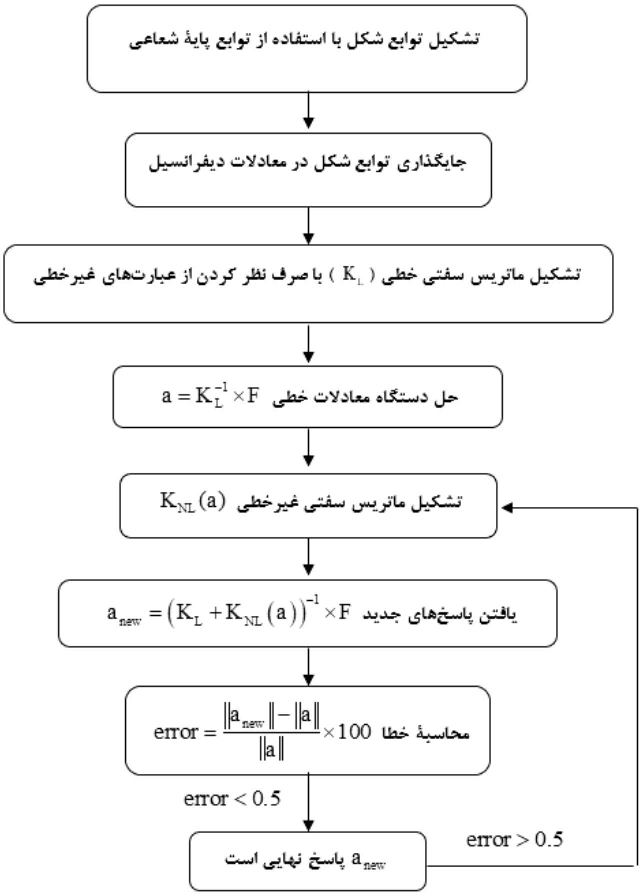
که η پارامتر شکل بوده و توسط کاربر تعریف می‌شود. همچنین مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم از توابع شکل عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\phi_k}{\partial x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial R_i}{\partial x}S_{ik}^a+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial p_j}{\partial x}S_{jk}^b\\
&\frac{\partial\phi_k}{\partial y}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial R_i}{\partial y}S_{ik}^a+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial p_j}{\partial y}S_{jk}^b\\
&\frac{\partial^2\phi_k}{\partial x^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2}S_{ik}^a+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2}S_{jk}^b\\
&\frac{\partial^2\phi_k}{\partial y^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2}S_{ik}^a+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 p_j}{\partial y^2}S_{jk}^b
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

در روابط فوق، n و m به ترتیب تعداد نقاط موجود در دامنه یا تعداد جملات توابع پایهٔ شعاعی و تعداد چندجمله‌ای‌های به‌کاررفته در یافتن توابع شکل هستند. با جایگذاری روابط (۱۹) در معادلات حاکم (۱۴)، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌شود. با جداکردن عبارت‌های خطی و غیرخطی، دستگاه معادلات جبری به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$
\mathrm{K_L a}+\mathrm{R_{NL}(a)}=\mathrm{F}
\tag{۲۴}
$$

روش‌های متنوعی برای حل معادلهٔ (۲۴) وجود دارد. در این



شکل ۳. مراحل حل مسئله با استفاده از روش بدون شبکه و توابع پایهٔ شعاعی

Fig. 3. Steps of the problem solving using the meshless method and radial basis function

تحقیق از روش طول کمان[2] برای یافتن مجهولات مسئله استفاده شده است. برای این منظور می‌بایست بردار غیرخطی R_{NL} به فرم ماتریسی تبدیل شود. بنابراین دستگاه معادلات (۲۴) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود.

$$
\left(\mathrm{K_L}+\mathrm{K_{NL}(a)}\right)\mathrm{a}=\mathrm{F}
\tag{۲۵}
$$

که در رابطهٔ فوق داریم:

$$
\mathrm{K_{NL}(a)}=\frac{\partial\mathrm{R_{NL}(a)}}{\partial\mathrm{a}}
\tag{۲۶}
$$

الگوریتم نشان‌داده‌شده در شکل۳ مراحل حل مسئله را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، ابتدا عبارت‌های خطی در نظر

1 Thin Plate Spline (TPS)

2 Arc-Length Method

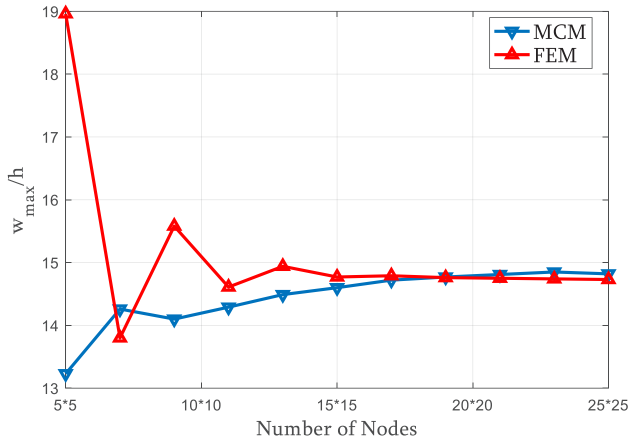
۴- نتایج و بحث

در این بخش، مثال عددی جهت بررسی روش بدون شبکه به فرم قوی با تابع پایهٔ شعاعی در تحلیل استاتیکی ورق هایپرالاستیک بررسی می‌شود. در همین راستا، یک ورق مربعی از جنس سیلیکون-لاستیک[1] (C_{10} برابر با ۲۰۷۸۴۳٫۳ پاسکال) [۱۶] به طول واحد و شرایط مرزی گیردار در نظر گرفته شده است. همچنین بار اعمال‌شده بر سطح ورق به صورت بار گستردهٔ یکنواخت و سینوسی فرض شده است. نتایج حاصل از روش بدون شبکه با نتایج حاصل از روش المان محدود آباکوس مقایسه شده است.

در گام نخست، مطالعهٔ همگرایی بر روی روش بدون شبکه صورت گرفته است. برای این منظور یک ورق مربعی به طول واحد با ضخامت ۰/۰۱ متر در نظر گرفته شده و بار گستردهٔ ۳۰۰ پاسکال بر روی سطح آن وارد شده است. همچنین توزیع نقاط به صورت یکنواخت روی سطح ورق درنظر گرفته شده است. نتایج بدست‌آمده با نتایج حاصل از روش المان محدود مقایسه شده است. در شکل ۴ نمودار همگرایی روش‌های بدون شبکه و المان محدود ترسیم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود از تعداد نقاط ۲۲۵ و بیشتر، پاسخ‌های هر دو روش همگرا شده‌اند. بنابراین در این تحقیق برای همهٔ تحلیل‌ها از تعداد ۲۲۵ نقطه با توزیع یکنواخت در روش بدون شبکه استفاده شده است.

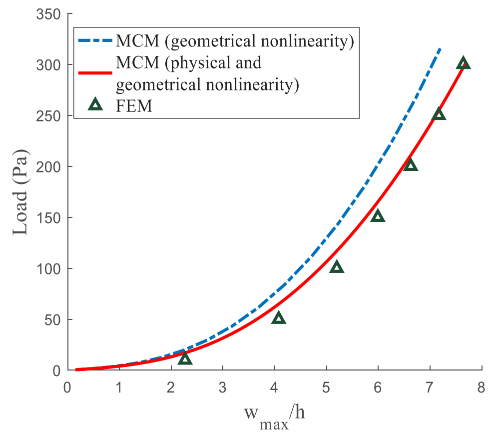
در شکل ۵ نمودار نیرو برحسب خیز ماکزیمم بدون بعد برای شرایط مرزی گیردار و ضخامت ۰/۰۱ نشان داده شده است. نتایج بدست‌آمده با استفاده از روش بدون شبکه به فرم قوی[2] برای دو حالت غیرخطی‌بودن هندسی (بسط کرنش‌ها تا توان ۲) و غیرخطی‌بودن هندسی و مادی همزمان (بسط کرنش‌ها تا توان ۳)، نشان داده شده است. همچنین نتایج بدست‌آمده با نتایج حاصل از روش المان محدود مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، خیزهای حاصل از درنظرگرفتن اثرات غیرخطی هندسی کمتر از خیزهای حاصل از درنظرگرفتن اثرات غیرخطی هندسی و مادی است. به عبارتی با توجه به شکل ۵، با افزایش اثرات غیرخطی، مقدار خیز افزایش پیدا می‌کند. دلیل این اتفاق این است که اثرات غیرخطی در معادلات حاکم بر ورق با علامتی مخالف با علامت عبارت‌های خطی ظاهر شده و میزان سفتی سازه مقداری کاهش می‌یابد؛ درنتیجه مقدار خیز افزایش پیدا می‌کند.

1 Silicon-Rubber
2 Meshless Collocation Method (MCM)



شکل ۴. نمودار همگرایی روش بدون شبکه با توابع پایهٔ شعاعی

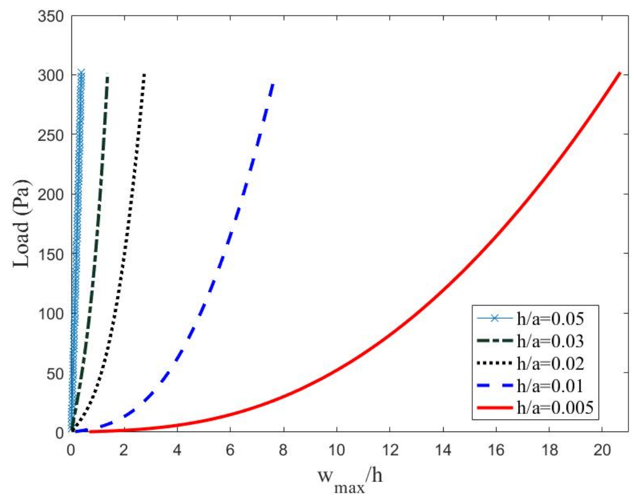
Fig. 4. Convergency diagram of the meshless method using radial basis function



شکل ۵. نمودار بارگذاری گسترده یکنواخت برحسب خیز بیشینه بی بعد شده با شرایط مرزی گیردار برای روش بدون شبکه با درنظرگرفتن عبارت‌های غیرخطی هندسی، غیرخطی هندسی و مادی و روش المان محدود

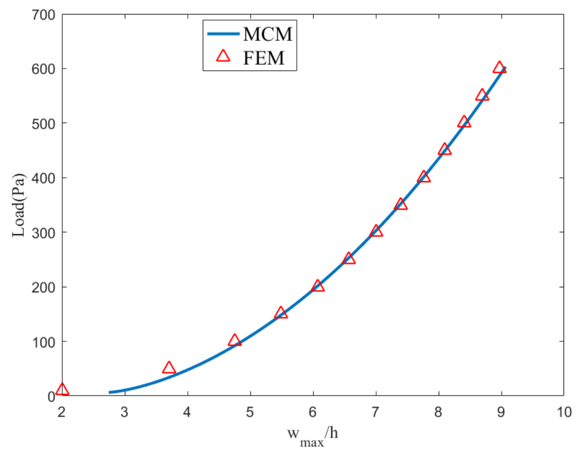
Fig. 5. Uniformly distributed loading on non-dimensional maximum deflection diagram with clamped boundary condition using the meshless method and finite element method considering geometrical nonlinearity and physical nonlinearity

گرفته شده و پاسخ‌های بدست‌آمده از حل خطی، به عنوان حدس اولیه برای پاسخ‌های غیرخطی درنظر گرفته شده‌اند. پاسخ‌های بدست‌آمده در هر مرحله به عنوان حدس اولیه برای مرحلهٔ بعد در نظر گرفته می‌شوند. این عملیات تا زمانی ادامه می‌یابد که میزان خطای مقدار جدید و مقدار قبلی به کمتر از ۰/۵ درصد برسد.



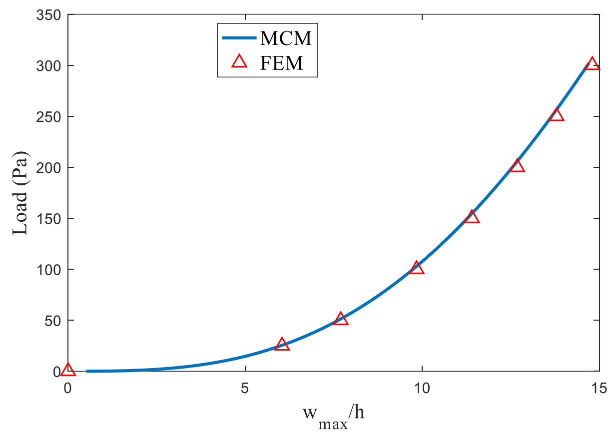
شکل ۶. نمودار بارگذاری بر حسب خیز بیشینۀ بدون بعد برای ضخامت‌های مختلف با شرایط مرزی گیردار

Fig. 6. Diagram of loading-non-dimensional maximum deflection with clamped boundary condition for various thickness



شکل ۷. نمودار بارگذاری گسترده سینوسی برحسب خیز بیشینه بی‌بعد شده با شرایط مرزی گیردار برای روش بدون شبکه با درنظرگرفتن عبارت‌های غیرخطی هندسی و مادی و روش المان محدود

Fig. 7. Diagram of sinusoidal distributed loading in non-dimensional maximum deflection with clamped boundary condition using the meshless method and finite element method considering geometrical and physical nonlinearities

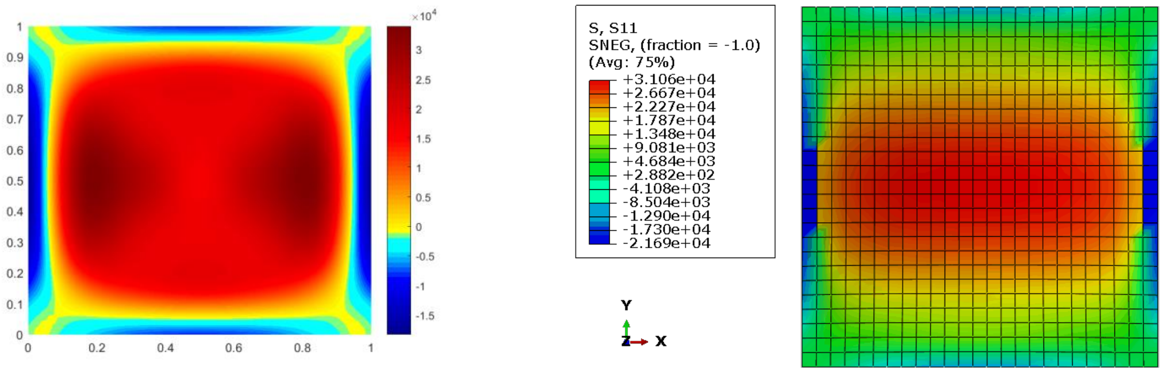


شکل ۸. نمودار بارگذاری گسترده برحسب خیز بیشینه بی بعد شده با شرایط مرزی ساده برای روش بدون شبکه با درنظرگرفتن عبارت‌های غیرخطی هندسی و مادی و روش المان محدود

Fig. 8. Diagram of distributed loading on a non-dimensional maximum deflection with simply supported boundary condition using the meshless method and finite element method considering geometrical and physical nonlinearities

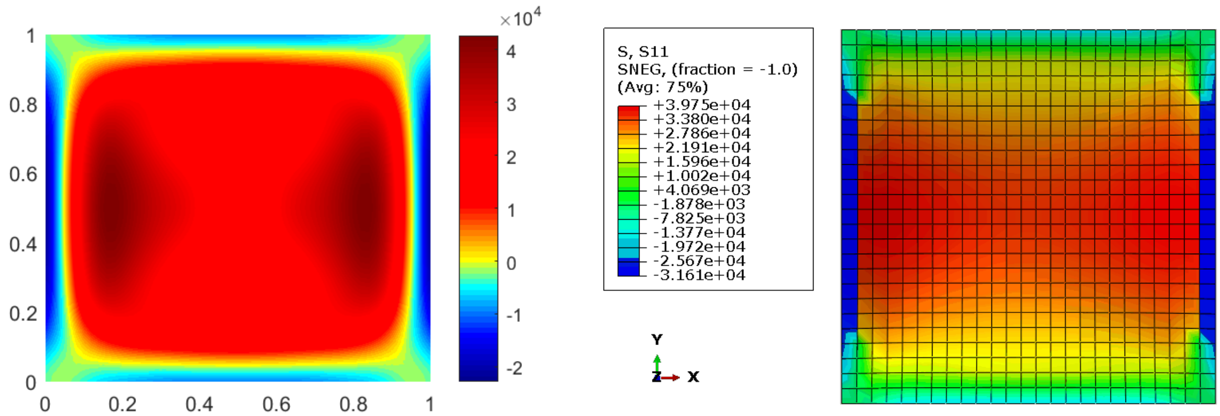
در شکل ۶ نمودار بارگذاری برحسب خیز ماکزیمم بدون بعد، برای ورق مربعی با شرایط مرزی گیردار تحت بارگذاری یکنواخت نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت ورق، مقدار خیز ماکزیمم کاهش یافته است. با افزایش ضخامت ورق، سفتی آن افزایش یافته و درنتیجه در بارگذاری‌های مشابه شاهد خیز کمتری هستیم. همچنین نمودار نیرو- خیز ماکزیمم برای ضخامت‌های کمتر دارای خاصیت غیرخطی بیشتری در مقایسه با ضخامت‌های بیشتر است.

در شکل ۷ نمودار بارگذاری برحسب خیز بیشینه برای ورق با نسبت ضخامت به طول ۰/۰۱ و بار گستردۀ سینوسی با شرایط مرزی گیردار نشان داده شده است. بارگذاری سینوسی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:



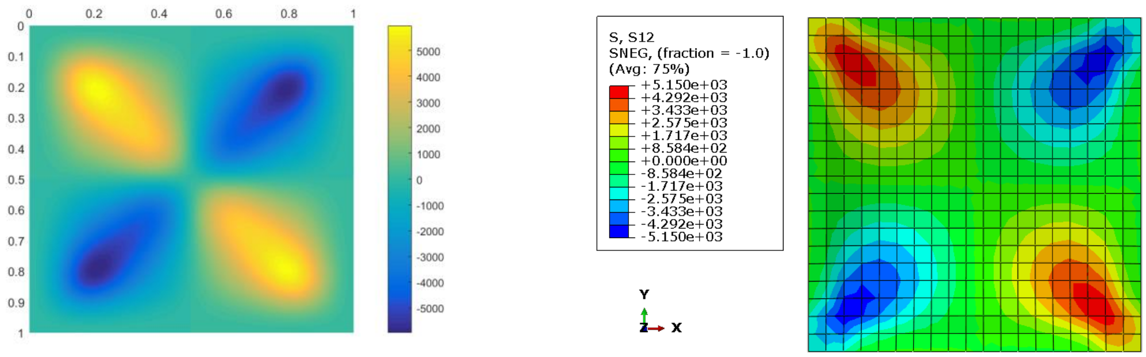
شکل ۹. کانتور تنش عمودی در راستای محور X برای ورق مربعی با طول ضلع واحد و بارگذاری گستردۀ سینوسی ۳۰۰ پاسکال با استفاده از روش بدون شبکه (چپ) و روش المان محدود (راست)

Fig. 9. The contour of principal stress along x-direction for a square plate with unit length and under sinusoidally distributed loading q=300Pa using the meshless method (left) and finite element method (right)



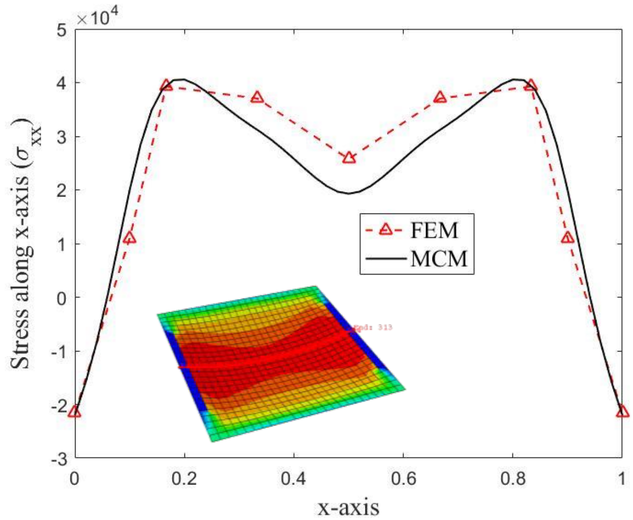
شکل ۱۰. کانتور تنش عمودی در راستای محور X برای ورق مربعی با طول ضلع واحد و بارگذاری گستردۀ سینوسی ۳۰۰ پاسکال با استفاده از روش بدون شبکه (چپ) و روش المان محدود (راست)

Fig. 10. The contour of principal stress along x-direction for a square plate with unit length and under uniformly distributed loading q=300Pa using the meshless method (left) and finite element method (right)



شکل ۱۱. کانتور تنش برشی صفحه‌ای (صفحۀ XY) برای ورق مربعی با طول ضلع واحد و شرایط مرزی گیردار با بارگذاری گستردۀ یکنواخت ۳۰۰ پاسکال با استفاده از روش بدون شبکه (چپ) و روش المان محدود (راست)

Fig. 11. The contour of shear in xy-plane for a square plate with unit length and under uniformly distributed loading *q*=300Pa using the meshless method (left) and finite element method (right)



شکل ۱۲. نمودار تنش عمودی در راستای محور X برای ورق مربعی با نسبت ضخامت به طول ۰/۰۱ و بارگذاری گستردهٔ یکنواخت ۳۰۰ پاسکال با استفاده از روش بدون شبکه و روش المان محدود

Fig. 12. Diagram of principal stress along x-direction for a square plate with h/a=0.01 and uniformly distributed loading q=300Pa using the meshless method and finite element method

جدول ۱. تنش بیشینه برای ورق مربعی هایپرالاستیک با طول واحد و بار گسترده ۳۰۰ پاسکال

Table 1. Maximum stress for a hyperelastic square plate with unit length under uniformly distributed loading q=300Pa

ضخامت	روش	σ_{xx}(kPa)	σ_{yy}(kPa)	w_{max} (mm)
۰/۰۲	المان محدود	۲۹/۵۴	۲۹/۵۴	۵۷/۸۴
	بدون شبکه	۲۶/۷۴	۲۶/۷۴	۵۶/۳
	درصد اختلاف	۹/۴۷	۹/۴۷	۲/۶۶
۰/۰۱	المان محدود	۳۹/۷۵	۳۹/۷۵	۷۶/۱۱
	بدون شبکه	۴۲/۶۹	۴۲/۶۹	۷۹/۰۰
	درصد اختلاف	۷/۳۹	۷/۳۹	۳/۷۹
۰/۰۰۵	المان محدود	۸۴/۹۱	۸۴/۹۱	۹۸/۵۹
	بدون شبکه	۷۴/۴۸	۷۴/۴۸	۱۰۵/۱
	درصد اختلاف	۱۲/۲۸	۱۲/۲۸	۷/۲۹

$$q(x,y)=q_0\sin(\pi x)\sin(\pi y) \quad (۲۷)$$

همانطور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از روش بدون شبکه دارای مطابقت خوبی در مقایسه با نتایج حاصل از روش المان محدود هستند.

در شکل ۸ نمودار بارگذاری گستردهٔ یکنواخت بر حسب خیز بیشینهٔ بی‌بعد برای شرایط مرزی ساده با استفاده از روش‌های بدون شبکه و المان محدود نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود مطابقت خوبی میان روش بدون شبکه به فرم قوی و المان محدود وجود دارد به طوری که بیشترین اختلاف این دو روش برابر با ۰/۶۷ درصد می‌باشد.

شکل ۹ کانتور تنش برای ورق هایپرالاستیک با نسبت ضخامت به طول ۰/۰۱ و بارگذاری گستردهٔ سینوسی را برای روش بدون شبکه و المان محدود نشان می‌دهد.

در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ به ترتیب کانتور تنش عمودی در راستای

محور x و کانتور تنش برشی صفحه‌ای برای ضخامت ۰/۰۱ و تحت بارگذاری ۳۰۰ پاسکال نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود کانتور تنش حاصل از روش بدون شبکه با کانتور بدست‌آمده از روش المان محدود مطابقت دارد.

شکل ۱۲ نمودار تغییرات تنش در راستای محور x در مرکز ورق را نشان می‌دهد. در این شکل نسبت ضخامت به طول ورق ۰/۰۱ و بار گستردهٔ ۳۰۰ پاسکال اعمال شده است. در این شکل، نتایج حاصل از روش بدون شبکه به فرم قوی با نتایج حاصل از روش اجزای محدود مقایسه شده است.

در جدول ۱ خیز بیشینه و تنش‌های بیشینهٔ حاصل از روش بدون شبکه با نتایج حاصل از روش المان محدود مقایسه شده است. این نتایج برای سه ضخامت مختلف و طول واحد برای بارگذاری گستردهٔ یکنواخت ۳۰۰ پاسکال بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، کمترین اختلاف در خیزهای بیشینه است که ضخامت‌های بیشتر دارای اختلاف کمتری در مقایسه با ضخامت‌های کمتر است.

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق برای نخستین بار معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک با استفاده از روش بدون شبکه به فرم قوی بررسی شده است. برای استخراج معادلات حاکم بر مساله از معادلات تانسور تغییر شکل کوشی- گرین راست و کرنش‌های غیرخطی لاگرانژی استفاده شده است. همچنین برای جابجایی‌های ورق در سه راستا، تئوری ورق برشی مرتبه اول به کار رفته و تابع انرژی کرنشی نئوهوکین برای اعمال رفتار هایپرالاستیک در ورق استفاده شده است. با فرض تراکم‌ناپذیری ورق، کرنش در راستای ضخامت برحسب کرنش‌های دیگر بدست آمده و با اعمال بسط تیلور، رابطهٔ چندجمله‌ای برای کرنش در راستای ضخامت بر حسب کرنش‌های دیگر حاصل می‌شود. با اعمال اصل همیلتون بر رابطهٔ انرژی پتانسیل، معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک به فرم قوی استخراج می‌شوند. معادلات بدست آمده دارای جملات با درجهٔ غیرخطی بالا بوده که حل آن‌ها از نظر تحلیلی بسیار مشکل است. به همین خاطر از روش بدون شبکه با تابع پایهٔ شعاعی اسپیلاین ورق نازک برای تبدیل دستگاه معادلات دیفرانسیل به دستگاه معادلات غیرخطی استفاده شده است. همچنین برای حل دستگاه معادلات غیرخطی از روش طول کمان استفاده شده است. نتایج حاصل از روش بدون شبکه نشان می‌دهند که این روش دارای دقت قابل‌قبولی در مقایسه با روش المان محدود است. یکی از مزایای روش بدون شبکه، عدم محدودیت تغییر شکل نقاط شبکه است. به همین خاطر روشی قدرتمند در تحلیل مسائل غیرخطی هندسی و مادی است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی استاتیکی ورق مربعی تحت بارگذاری گستردهٔ یکنواخت نشان می‌دهد که روش بدون شبکه با تابع پایهٔ شعاعی اسپیلاین ورق نازک دارای دقت قابل قبولی برای تحلیل ورق هایپرالاستیک بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ اول است. نتایج حاصل نشان می‌دهند که خیزهای بدست‌آمده از روش بدون شبکه در مقایسه با نتایج حاصل از روش المان محدود دارای اختلاف کمتری نسبت به تنش‌هاست. یکی از دلایل اختلاف تنش‌ها، استفاده از دو تئوری متفاوت (کلاسیک و برشی مرتبهٔ اول) است. تئوری ورق برشی مرتبهٔ اول دارای دقت بیشتری در مقایسه با تئوری کلاسیک بوده که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

a	بردار مجهولات
a	طول ضلع مربع، m^2
$\mathbf{C}$	تانسور تغییر شکل کوشی- گرین راست
C_{10}	ضریب ماده در تابع انرژی کرنشی نئوهوکین، Pa
$\mathbf{E}$	تانسور کرنش لاگرانژی
h	ضخامت ورق، m
I_1	ناورداری اول کرنش
I_3	ناورداری سوم کرنش
K_L	ماتریس سفتی خطی
K_{NL}	ماتریس سفتی غیرخطی
p	چندجمله‌ای‌های توابع پایهٔ شعاعی
q	بار گسترده در راستای z در صفحه xy، N/m^2
q_0	بیشینهٔ بار در بارگذاری سینوسی، N/m^2
R	توابع پایهٔ شعاعی
R_{NL}	بردار معادلات غیرخطی
U	تابع چگالی انرژی کرنشی
u	جابجایی در راستای محور x، m
u_0	جابجایی صفحهٔ میانی در راستای محور x، m
v	جابجایی در راستای محور y، m

v_0 جابجایی صفحهٔ میانی در راستای محور y، m

w جابجایی در راستای محور z، m

W چگالی کار نیروی خارجی

علائم یونانی

π چگالی انرژی پتانسیل

Π انرژی پتانسیل

φ_x چرخش در راستای محور x

φ_y چرخش در راستای محور y

ϕ تابع شکل روش بدون شبکه

η پارامتر شکل

σ تنش، N/m^2

δ دلتای کرونکر

زیرنویس

B مرز مسئله

ضمیمه

ماتریس سفتی خطی رابطهٔ (۲۴)

$$\mathrm{K}_L^{ij}=\begin{bmatrix} -2A\sum_{i=1}^{N}\phi_{i,xx}(x_j)+\phi_{,yy}(x_j) & -2A\sum_{i=1}^{N}\phi_{i,x}(x_j) & -2A\sum_{i=1}^{N}\phi_{i,y}(x_j) \\ 2A\sum_{i=1}^{N}\phi_{i,x}(x_j) & 2A\sum_{i=1}^{N}\phi_{i}(x_j) & -6D\sum_{i=1}^{N}\phi_{i,xy}(x_j) \\ 2A\sum_{i=1}^{N}\phi_{i,y}(x_j) & -6D\sum_{i=1}^{N}\phi_{i,xy}(x_j) & 2A\sum_{i=1}^{N}\phi_{i}(x_j) \end{bmatrix}_{(3N\times 3N)}$$

بردار غیرخطی رابطهٔ (۲۴)

$$R_{NL}^1(a^w,a^{\varphi_x},a^{\varphi_y})\quad R_{NL}^2(a^w,a^{\varphi_x},a^{\varphi_y})\quad R_{NL}^3(a^w,a^{\varphi_x},a^{\varphi_y})\Big]^T$$

$$R_{NL}^1=[12A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_i)+36A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})^2(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})^2+8D($$

$$+4A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_i)+24D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})^2+6A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})^4+$$

$$+4D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x})^2+2A(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_i)^2](\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,xx})+[8D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y})$$

$$(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_i)+12A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_i)+36A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})^2(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,}$$

$$+2A(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_i)^2+4D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y})^2+8D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})^2+30A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w$$

$$^2(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})^2+8D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x})+16D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y})$$

$$+6A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})^4+8D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y})^2+30A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})^4+4D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y})^2$$

$$)+[8D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x})+16D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y})+4A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x}$$

$$\sum a_i^w\phi_{i,x})^2(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})^2+24D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y})^2+6A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})^4+4D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})^2$$

$$\phi_{i,x})^2+30A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})^4](\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,yy})^4+[48A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,xx})^3(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})$$

$$+48A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})^3(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y})(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})+8A(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_i)+16D($$

$$+4A(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_i)(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_i)](\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,xx})+48D[(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})+\frac{1}{3}(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y})]($$

$$(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,xx})+24D[\frac{2}{3}((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y}))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})+((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x}$$

$$+8D[((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y}))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})+((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y})$$

$$+8D[((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y}))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})+((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y})$$

$$+4A[\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y})+\frac{3}{2}(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})](\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})^2+(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x}$$

$$+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_i))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})+\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})[(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_i)+$$

$$D[(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y})]][(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y})$$

$$](\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})+\frac{1}{6}(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})[(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y})]$$

$$_{,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y}))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})](\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,xy})$$

$$))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})](\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,yy})$$

$$))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})](\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,xx})$$

$$_{,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y}))+(\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_i)$$

$$)+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_i)]]$$

$$R_{NL}^2=48D((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})+(1/3)(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y}))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})+(1/6)($$

$$+24D(((2/3)((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y}))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})+((\sum_{i=1}^{N}a_i$$

$$+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x}))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})+((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y}))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w$$

$$(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,xx})+(4D(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})^2+4D(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})^2)(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,yy}$$

$$(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})+8D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,xx})(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y}$$

$$+(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})^2(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_i)+((\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_i)+(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y}$$

$$1/6)(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y}))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,xx})$$

$$((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x})+(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y}))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,xy})+8D((\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y})$$

$$(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y}))(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,yy})+(-8D+24D(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})^2+8D(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})^2)$$

$$^{\varphi_x}_i\phi_{i,yy})+12D((\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})^2+(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})^2)(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,xy})+16D(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_{i,xy})$$

$$a_i^w\phi_{i,y})+8D(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,y})(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_y}\phi_{i,yy})-2A((\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})^3$$

$$a_i^w\phi_{i,y})^2)(\sum_{i=1}^{N}a_i^w\phi_{i,x})-(\sum_{i=1}^{N}a_i^{\varphi_x}\phi_i))$$

$$
\begin{aligned}
R_{NL}^{3} = 8D\,(&\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,y}\right)(\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y}\right)+\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x}\right))+\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,x}\right)((\\
&\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_y}\phi_{i,xy}\right)+(2/3)\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y}\right))\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,y}\right)+(\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y}\right)+\\
&+\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x}\right))\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,y}\right)+(1/2)\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,x}\right)(\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x}\right)+(\\
&\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_x}\phi_{i,xy}\right)+D\,(4\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,y}\right)^{2}+4\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,x}\right)^{2})\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_y}\phi_{i,xx}\right)\\
&\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_x}\phi_{i,xx}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,x}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,y}\right)+8D\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_x}\phi_{i,yy}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi\right.\\
&-2A\,(\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,y}\right)^{3}+\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,y}\right)^{2}\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_y}\phi_{i}\right)+(\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,x}\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&)(\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_y}\phi_{i,x}\right)+\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y}\right)))\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,xx}\right)+24D\,(((2/3)\\
&)+\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_x}\phi_{i,x}\right))\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,x}\right))\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,xy}\right)+16D\,((3\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_y}\phi_{i,y}\right)\\
&+\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_x}\phi_{i,y}\right)))\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,yy}\right)+12D\,(\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,xx}\right)^{2}+\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,yy}\right)^{2})\\
&x)+8D\,(\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,x}\right)^{2}+3\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,y}\right)^{2})\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_y}\phi_{i,yy}\right)+8D\\
&{}_i^{w}\phi_{i,x})\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,y}\right)+16D\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,x}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,y}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_y}\phi_{i,xy}\right)\\
&\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_x}\phi_{i})+\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,x}\right)^{2})\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{w}\phi_{i,y}\right)-\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{\varphi_y}\phi_{i}\right))
\end{aligned}
$$

مراجع

[1] R.W.Ogden, Nonlinear Elastic Deformations, Dover Publications, New York, 1997.

[2] T. Shearer, A new strain energy function for the hyperelastic modelling of ligaments and tendons based on fascicle microstructure, Journal of Biomechanics, (2)48 297-290 (2015).

[3] K. Upadhyay, G. Subhash, D. Spearot, Visco-hyperelastic constitutive modeling of strain rate sensitive soft materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, ((2019 103777-103777.

[4] L. Liu, Y. Li, Mechanics of Materials A visco-hyperelastic softening model for predicting the strain rate e ff ects of 3D-printed soft wavy interfacial layer, Mechanics of Materials, 137(May) (103128-103128 (2019.

[5] S. Fahimi, M. Baghani, M.-r. Zakerzadeh, A. Eskandari, Developing a visco-hyperelastic material model for 3D finite deformation of elastomers, Finite Elements in Analysis & Design, 140(July) (10-1 (2017.

[6] R.M. Chen, Some nonlinear dispersive waves arising in compressible hyperelastic plates, International Journal of Engineering Science, 1204-1188 (2006) (19-18)44.

[7] P.B. Gonçalves, R.M. Soares, D. Pamplona, Nonlinear vibrations of a radially stretched circular hyperelastic membrane, Journal of Sound and Vibration, (2-1)327 248-231 (2009).

[8] I. Dayyani, M.I. Friswell, S. Ziaei-Rad, E.I. Saavedra Flores, Equivalent models of composite corrugated cores with elastomeric coatings for morphing structures, Composite Structures, 292-281 (2013) 104.

[9] S. Faghihi, A. Karimi, M. Jamadi, R. Imani, R. Salarian, Graphene oxide/poly(acrylic acid)/gelatin nanocomposite hydrogel: Experimental and numerical validation of hyperelastic model, Materials Science and Engineering: C, 305-299 (2014) 38.

[10] R. Gupta, D. Harursampath, Dielectric elastomers: Asymptotically-correct three-dimensional displacement field, International Journal of Engineering Science, 87 12-1 (2015).

[11] I.B. Badriev, G.Z. Garipova, M.V. Makarov, V.N. Paimushin, R.F. Khabibullin, Solving Physically Nonlinear Equilibrium Problems for Sandwich Plates with a Transversally Soft Core, 481-474 (2015) (4)36.

[12] P. Balasubramanian, G. Ferrari, M. Amabili, Z.J.G.N. del Prado, Experimental and theoretical study on large amplitude vibrations of clamped rubber plates, International Journal of Non-Linear Mechanics, (2017) 94 45-36.

[13] A.I. Yusuf, N.M. Amin, Determination of Rayleigh Damping Coefficient for Natural Damping Rubber Plate Using Finite Element Modal Analysis, (2015).

[14] M. Amabili, P. Balasubramanian, I.D.B.G. Ferrari, R. Garziera, K. Riabova, Experimental and numerical study on vibrations and static deflection of a thin hyperelastic plate, Journal of Sound and Vibration, (September) (2016).

[15] I. Breslavsky, M. Amabili, M. Legrand, Physically and Geometrically Nonlinear Vibrations of Thin Rectangular Plates, 2-1 (2012) (2)3.

[16] I.D. Breslavsky, M. Amabili, M. Legrand, Nonlinear

vibrations of thin hyperelastic plates, Journal of Sound and Vibration, 4681-4668 (2014) (19)333.

[17] P. Balasubramanian, G. Ferrari, M. Amabili, Identification of the viscoelastic response and nonlinear damping of a rubber plate in nonlinear vibration regime, Mechanical Systems and Signal Processing, 398-376 (2018) 111.

[18] F. Alijani, M. Amabili, Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013, International Journal of Non-Linear Mechanics, 58(i) (257-233 (2014.

[19] J. Dervaux, P. Ciarletta, M. Ben Amar, Morphogenesis of thin hyperelastic plates: A constitutive theory of biological growth in the Föppl–von Kármán limit, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 471-458 (2009) (3)57.

[20] P.H. Wen, Y.C. Hon, Geometrically nonlinear analysis of Reissner-Mindlin plate by meshless computation, CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences, (3)21 191-177 (2007).

[21] K.M. Liew, L.X. Peng, S. Kitipornchai, Nonlinear analysis of corrugated plates using a FSDT and a meshfree method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2376-2358 (2007) (24-21)196.

[22] M. Naffa, H.J. Al-Gahtani, RBF-based meshless method for large deflection of thin plates, Engineering Analysis with Boundary Elements, 317-311 (2007) (4)31.

[23] J. Singh, K.K. Shukla, Nonlinear flexural analysis of laminated composite plates using RBF based meshless method, Composite Structures, 1720-1714 (2012) (5)94.

[24] J. Singh, K.K. Shukla, Nonlinear flexural analysis of functionally graded plates under different loadings using RBF based meshless method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1827-1819 (2012) (12)36.

[25] F. Liu, J. Zhao, Upper bound limit analysis using radial point interpolation meshless method and nonlinear programming, International Journal of Mechanical Sciences, 38-26 (2013) 70.

[26] Z.X. Lei, L.W. Zhang, K.M. Liew, Meshless modeling of geometrically nonlinear behavior of CNT-reinforced functionally graded composite laminated plates, Applied Mathematics and Computation, 46-24 (2017) 295.

[27] V.N.V. Do, C.H. Lee, Quasi3-D higher-order shear deformation theory for thermal buckling analysis of FGM plates based on a meshless method, Aerospace Science and Technology, 83-82(September) (465-450 (2018.

[28] E. Barbieri, L. Ventura, D. Grignoli, E. Bilotti, A meshless method for the nonlinear von Kármán plate with multiple folds of complex shape: A bridge between cracks and folds, Computational Mechanics, 787-769 (2019) (3)64.

[29] H. Nourmohammadi, B. Behjat, Geometrically nonlinear analysis of functionally graded piezoelectric plate using mesh-free RPIM, Engineering Analysis with Boundary Elements, 99(June 141-131 (2019) (2018.

[30] K.W. Cassel, Variational Methods with Applications in Science and Engineering, 2004.

[31] J. Ghaboussi, D.A. Pecknold, X.S. Wu, Nonlinear Computational Solid Mechanics, CRC Press, 2017.

[32] G.R. Liu, Meshfree methods, CRC Press, 2006.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

SH. Hosseini, G.H. Rahimi, Y. Anani, Nonlinear analysis of hyperelastic plates using first-order shear deformation plate theory and a meshless method, AmirKabir J. Mech Eng., 53(4) (2021) 2331-2346.

DOI: 10.22060/mej.2020.17909.6687

این صفحه عمداً خالی است