



# Analytical model for the non-premixed combustion of the titanium dust cloud in counter-flow geometry

M. Farmahini Farahani, N. Hasanvand\*, M. Bidabadi

School of Engineering, Mechanical Engineering Department, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

**ABSTRACT:** Today, the issue of achieving high-efficiency energy is important in various industries. The study of metal particle combustion is very important due to its increasing applications. Among these applications, it is possible to produce particle oxides with various applications, high energy density as a result of the increase in temperature due to combustion, medical applications, etc. In this paper, the analytical model of titanium dust particle combustion in the counter-flow configuration with a multi-zone approach was investigated. The governing equations, consist of mass and energy conservation was expressed and became dimensionless using dimensionless parameters and solved by using appropriate boundary and jump conditions in Matlab and Mathematica software. After solving the equations, the distribution of temperature and mass fraction of the components was presented and the effect of some important parameters such as Lewis number and mass particle concentration was investigated. It was observed that with increasing Lewis number from 0.6 to 1.4 at 300 g/m<sup>3</sup>, the flame temperature decreased from 3600 K to 3050 K, also the reduction of mass diffusion caused the flame position to be transferred to the oxidizer nozzle. Also with an increasing particle diameter of fuel from 2μm to 200μm, the temperature and position of the flame were shifted from 3600 K and -1.8 mm to 3400 K and -1 mm, respectively.

## Review History:

Received: Apr. 08, 2020  
Revised: Nov. 02, 2020  
Accepted: Dec. 24, 2020  
Available Online: Feb. 21, 2121

## Keywords:

Combustion of particles  
Non-premixed  
Counter-flow  
Lewis number  
Analytical model.

## 1- Introduction

Combustion of titanium particles is used in various fields. In this area, various works have been done that can be classified from different aspects. Molodetsky and Vicenzi [1] investigated combustion phases, particle burning time and temperature of combustion of titanium particles in the air. Karasev et al. [2] investigated the formation of metal oxide nanoparticles in the combustion of titanium and aluminum droplets. Cairns et al. [3] investigated the effect of oxygen concentration on the combustion of titanium particles.

According to a review of resources in this area, it was observed that the combustion of the titanium particles has been studied experimentally and numerically. In this paper, an analytical study of non-premixed combustion of the titanium dust particle in the counter-flow configuration with a multi-zone approach has been carried out. After presenting the governing equations, including the equations of energy conservation and mass conservation of components and non-dimensionalization, mass fraction distribution of components and temperature in the solution domain presented and then the effect of some important parameters such as Lewis number, particle diameter size and mass particle concentration investigated.

## 2- Methodology

According to Fig. 1, three-zone are considered. The first zone is  $X = -\infty$  to  $X = X_f$ , the second zone is  $X = X_f$  to  $X = X_{melt}$

and the third zone is  $X = X_{melt}$  to  $X = +\infty$ . The velocity field is considered to be  $u = -aX$  in the x-direction and  $a$  expresses the strain rate.

The governing equations include energy and mass conservation. The energy conservation equation is [4]:

$$-aX \frac{dT}{dX} = D_T \frac{d^2T}{dX^2} + \omega_s \frac{Q}{\rho C} - \omega_{melt} \frac{Q_{melt}}{C} \quad (1)$$

where  $D_T$ ,  $Q$  and  $Q_{melt}$  are thermal diffusion coefficient, the heat released per unit mass of fuel consumed and the latent heat of melting of fuel particles, respectively.

The mass conservation equation of solid fuel particles is also expressed in the form of Eq. (2) [4]:

$$-aX \frac{dY_s}{dX} = -\frac{\omega_s}{\rho} \quad (2)$$

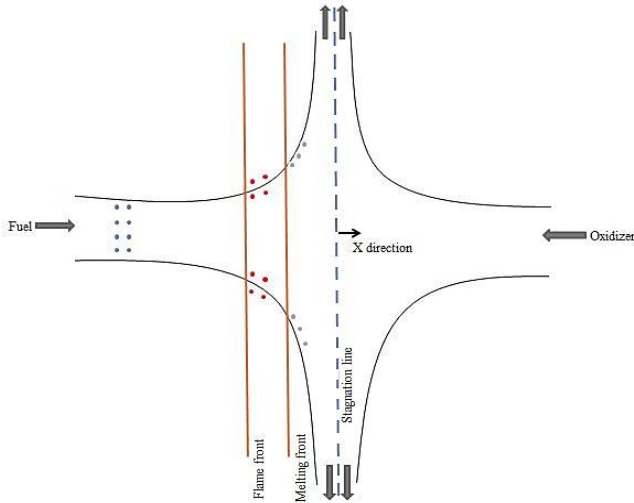
The mass conservation equation of products in the liquid phase is [4]:

$$-aX \left( \frac{dY_m}{dX} \right) = D_m \left( \frac{d^2Y_m}{dX^2} \right) + \omega_{melt} \quad (3)$$

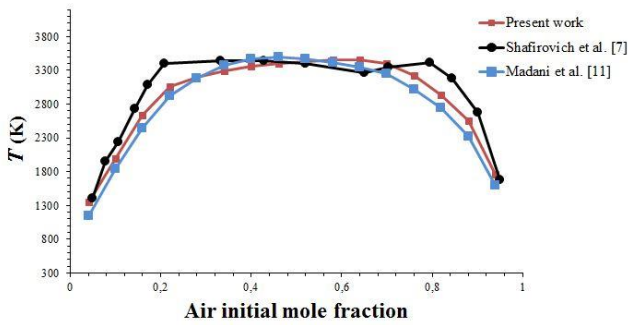
where  $Y_m$  and  $D_m$  express the mass fraction of liquid products and the mass diffusion coefficient of liquid products respectively.

\*Corresponding author's email: nima\_hasanvand@mecheng.iut.ac.ir





**Fig. 1. General schematic of non-premixed combustion of titanium dust particles in the counter-flow configuration**



**Fig. 2. The flame temperature in terms of air initial mole fraction and comparison with previous works**

Eq. (4) expresses the conservation of the oxidizer mass fraction [4]:

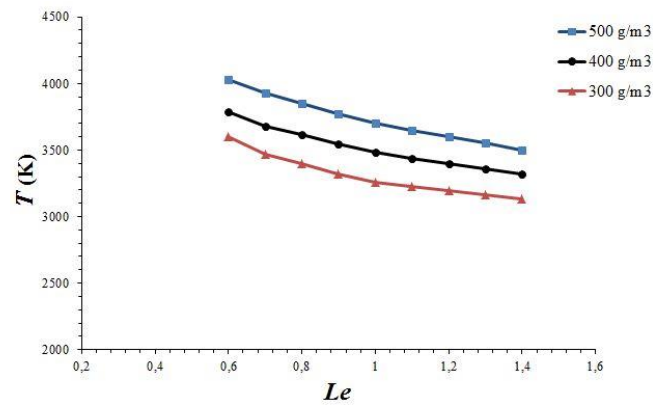
$$-aX \frac{dY_o}{dX} = D_o \frac{d^2 Y_o}{dX^2} - \vartheta \frac{\omega_s}{\rho} \quad (4)$$

In the above equation,  $D_o$  and  $\vartheta$  are oxidizer mass diffusion coefficient and oxidizer stoichiometric mass ratio to fuel, respectively.

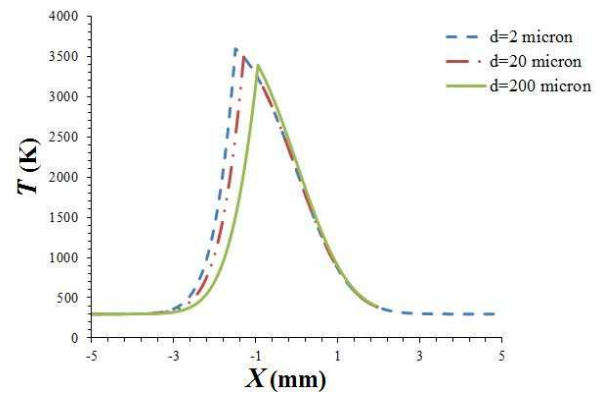
### 3- Results and Discussion

Fig. 2 represents the results of the flame temperature value in terms of the initial mole fraction of air and a comparison with previous works for validation.

In Fig. 3 the temperature distribution diagram versus position with different diameters is plotted. The maximum temperature is obtained in the flame region, which is approximately at  $X = -1.8$  mm and is equal to 3600 K for 2  $\mu$ m diameter.



**Fig. 3. Temperature versus position**



**Fig. 4. Flame temperature versus Lewis number with considering mass particle concentration effect**

In Fig. 4 the effect of Lewis number on the flame temperature is investigated by considering the effect of mass particle concentration. By increasing the Lewis number, which means a decrease in the mass diffusion, the flame temperature has decreased. Also, with increasing the concentration of fuel particles, the flame temperature has increased.

### 4- Conclusions

Due to the many applications of metal particle combustion, this paper investigates the non-premixed combustion of titanium dust particles in the counter-flow configuration. In this multi-zone modeling by using boundary and jump conditions are presented, governing equations in the combustion process in a dimensionless form including energy and species conservation were solved and the temperature distribution and mass fraction of the components were presented.

## References

- [1] I. Molodetsky, E. Vicenzi, E. Dreizin, C. Law, Phases of titanium combustion in air, *Combustion and Flame*, 112(4) (1998) 522-532.
- [2] V. Karasev, A. Onishchuk, S. Khromova, O. Glotov, V. Zarko, E. Pilyugina, C. Tsai, Formation of metal oxide nanoparticles in combustion of titanium and aluminum droplets, *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 42(6) (2006) 649-662.
- [3] M. Cairns, D.L. Frost, S. Goroshin, Effect of Oxygen Concentration on the Combustion of Titanium Particles, in: *International Colloquium on the Dynamics of Explosions and Reactive Systems*, 2009, pp. 25-28.
- [4] S.A.H. Madani, M. Bidabadi, N.M. Aftah, A. Afzalabadi, Semi-analytical modeling of non-premixed counterflow combustion of metal dust, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 137(2) (2019) 501-511.

### HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Farmahini Farahani, N. Hasanvand, M. Bidabadi, . Analytical model for the non-premixed combustion of the titanium dust cloud in counter-flow geometry ,*Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(Special Issue 5) (2021) 779-782

DOI: [10.22060/mej.2021.18209.6773](https://doi.org/10.22060/mej.2021.18209.6773)







## ارائه مدل تحلیلی احتراق غیرپیش‌آمیخته ابر ذرات تیتانیوم در هندسه جریان متقابل

معین فرمهمینی فراهانی، نیما حسنوند<sup>\*</sup>، مهدی بیدآبادی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۲۰  
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۸/۲۲  
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۰۴  
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۱۲/۰۳

### کلمات کلیدی:

احتراق ذرات  
غیر پیش‌آمیخته  
جریان متقابل  
عدد لوئیس  
مدل تحلیلی

**خلاصه:** امروزه مطالعه‌ی احتراق ذرات فلزی به واسطه کاربردهای روزافزون آن بسیار مورد توجه است. از جمله این کاربردها می‌توان به تولید اکسید ذرات با کاربردهای گوناگون، چگالی انرژی بالا و در نتیجه افزایش دمای حاصل از احتراق، کاربردهای پزشکی و... اشاره نمود. در این پژوهش، به بررسی مدل تحلیلی احتراق غیرپیش‌آمیخته ابر ذرات تیتانیوم در هندسه جریان متقابل، با رویکرد چندناحیه‌ای پرداخته شده است. معادلات حاکم بر مسئله شامل بقای جرم اجزا و بقای انرژی بیان شد و با استفاده از شرایط مرزی و انطباقی مناسب، حل معادلات در هر ناحیه به کمک نرم افزارهای متلب و متمتیکا ارائه شد. سپس توزیع دما و کسر جرمی سوخت، اکسیدکننده و محصولات سوختی در فاز مایع برحسب مکان رسم شد و تأثیر برخی متغیرها مانند عدد لوئیس، اندازه قطر ذرات و غلظت جرمی ذرات بر شعله مورد بررسی قرار گرفت. مشاهده گردید که در غلظت ۳۰ گرم بر مترمکعب با افزایش عدد لوئیس سوخت از ۰/۶ تا ۱/۴ میزان دمای شعله از ۳۶۰۰ کلوین تا ۳۰۵۰ کلوین کاهش یافت و همچنین مکان شعله به سمت نازل اکسیدکننده منتقل شد و علت این موضوع کاهش نفوذ جرم توجه شد. همچنین با افزایش قطر ذرات سوخت از ۲ تا ۲۰۰ میکرون، دما و مکان شعله به ترتیب از ۳۶۰۰ کلوین و ۱/۸- میلی متر به ۳۴۰۰ کلوین و ۱- میلی متر تغییر یافت.

### ۱- مقدمه

امروزه احتراق ذرات تیتانیوم در حوزه‌های مختلفی کاربرد دارد. یکی از مهم‌ترین این موارد، تولید اکسید تیتانیوم به منظور کاربردهای پزشکی آن است [۱]. در حوزه‌ی احتراق ذرات تیتانیوم کارهای مختلفی صورت گرفته که از جنبه‌های مختلفی قابل دسته‌بندی می‌باشند. مولدتسکی و ویکنزی [۲] فازهای احتراقی، زمان سوزش ذرات و دمای حاصل از احتراق ذرات تیتانیوم در هوا را بررسی کردند. همچنین زمان سوزش ذراتی با قطر ۲۴۰ تا ۲۸۰ میکرون در بازه‌ی ۲۴۰ تا ۳۰۰ میلی‌ثانیه مشاهده شد. دمای ذرات نیز به سرعت به ۲۱۰۰ کلوین رسید و سپس کاهش یافت و در ۲۱۰۰ کلوین ثابت گردید. میاتا و کوباتا [۳] احتراق ذرات تیتانیوم و زیرکونیوم با پتاسیم نیترات (به عنوان اکسیدکننده) را به صورت تجربی مورد بررسی قرار داد. مشاهده شد که ذرات تیتانیوم با گازهای حاصل از تجزیه‌ی پتاسیم نیترات واکنش می‌دهند و نرخ سوزش به شدت به فشار محیط وابسته است. به دلیل وقوع واکنش در فاز گازی، زمان وقوع واکنش بسیار کم بود. برانچ و همکاران [۴] اشتعال و احتراق توده تیتانیوم و

<sup>\*</sup> نویسنده عهده‌دار مکاتبات: Nima\_hasanvand@mecheng.iust.ac.ir

منیزیم را در اکسیژن خالص و در فشار محیط با در نظرگیری اثرات جاذبه بررسی کرده است. وی با استفاده از طیف‌سنجی و مشاهدات کیفی، نرخ انتشار و طیف نشر واکنش‌های فاز گاز را بدست آورده است. همچنین مشاهده شد که تلفات هدایت حرارتی تأثیر بسیاری بر دمای بحرانی و اشتعال داشته است. موکاسیان و همکاران [۵] رژیم‌های احتراقی ماکروسکوپی و دینامیک تشکیل فاز را به صورت تجربی در سیستم تیتانیوم نیتروژن در فشار کم نیتروژن مورد بررسی قرار داد و مشاهده نمود که پیش از تشکیل محصولات اولیه، تیتانیوم نیتريد تشکیل شد و همچنین توالی پیچیده‌ای را در تشکیل فاز احتراق موضعی مشاهده کرد. کاراسف و همکاران [۶] به بررسی تشکیل اکسید فلزی نانوذرات در احتراق قطرات تیتانیوم و آلومینیوم پرداخت. در احتراق تیتانیوم ناحیه‌ی تشکیل نانوذرات تقریباً نزدیک سطح ذره واقع شد و در طول احتراق این ذرات در رژیم ناهمگن انجام شد و نانوذرات اکسید توسط هسته‌ی بخار اکسید در فاصله‌ای حدود ۱۵ میکرون از سطح سوزش قطره تیتانیوم با قطر ۳۰۰ میکرون تشکیل شد. همچنین شفیروویچ و همکاران [۷] احتراق تک ذرات

بررسی شده است.

## ۲- رویکرد تحلیلی

در این قسمت فیزیک مسئله بیان و به شکل ریاضی مدل سازی گردیده است. جریان سوخت از  $X = -\infty$  و جریان اکسیدکننده از  $X = +\infty$  به سمت ناحیه واکنش جریان می یابند. مطابق شکل (۱)، ۳ ناحیه در نظر گرفته شده است. ناحیه اول که از  $X = -\infty$  آغاز و تا  $X = X_f$  ادامه دارد. ناحیه دوم از  $X = X_f$  تا  $X_{melt}$  ادامه دارد و سرانجام ناحیه سوم که از  $X_{melt}$  آغاز و تا  $X = +\infty$  امتداد می یابد. میدان سرعت در نظر گرفته شده به این صورت است که سرعت در راستای  $x$  برابر  $u = -aX$  است و  $a$  بیان گر نرخ کرنش می باشد. سینتیک شیمیایی به شکل یک واکنش کلی تک مرحله ای در نظر گرفته شده است [۱۱]:



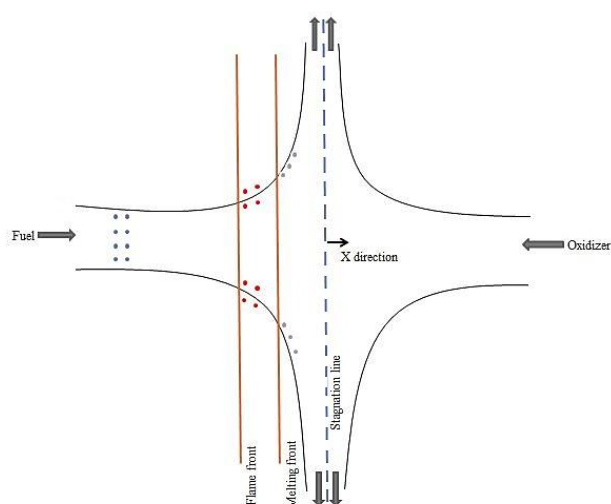
که در رابطه ی فوق نمادهای  $[F]$ ،  $[O]$  و  $[P]$  به ترتیب بیان گر سوخت، اکساینده و محصولات هستند. همچنین کمیت های  $v_F$ ،  $v_O$  و  $v_P$  اشاره به ضرایب استوکیومتری سوخت، اکساینده و محصولات دارند. از آن جا که پس از وقوع واکنش، اکسید تیتانیوم به سرعت ذوب می گردد، به منظور مدل سازی این فرآیند از تابع هوی ساید استفاده

اشباع تیتانیوم با قطر ۲۰ تا ۱۲۵ میکرون را بررسی کرد و مشاهده نمود که به محض آغاز اشتعال، ذره ذوب شد و یک قطره ی کرویی شکل گرفت. همچنین به کمک نشر نور ذرات، زمان سوزش محاسبه گشت. کرنز و همکاران [۸] اثر غلظت اکسیژن را در احتراق ذرات تیتانیوم مورد بررسی قرار داد. در پایان نتیجه ی حاصل شده به این شکل بود که با افزایش قطر ذره، زمان سوزش نیز افزایش می یافت و همچنین برای یک ذره مشخص، زمان سوزش استوکیومتری بیش تر از زمان سوزش با هوای اضافی بود و برای ذرات کوچک تر این دو زمان تقریباً برابر بودند.

بادیولا و درزین [۹] به شکل تجربی احتراق ذرات میکرونی تیتانیوم و زیرکونیوم را در هوا مورد بررسی قرار داد. این ذرات با قطر ۲ تا ۲۵ میکرون با عبور از پرتو لیزر  $CO_2$  مشتعل شدند و زمان های سوزش و دماهای احتراق اندازه گیری شد و با مطالعات پیشین مربوط به ذرات بزرگ تر این دو فلز مقایسه شد. دمای متوسط احتراق برای هر دو فلز نسبتاً به دمای آدیاباتیک شعله نزدیک بود. در محدوده ابعاد ذرات مورد آزمایش، دماهای احتراق ذرات به قطر ذره وابسته نبود و تنها زمان سوزش تابع ضعیفی از قطر ذرات گزارش شد.

بویلارد و همکاران [۱۰] احتمال و قابلیت انفجار میکرو و نانو پودر تیتانیوم را آزمایش کرد. پارامترهای انفجار برای هردو طیف از ذرات تیتانیوم شامل شدت و احتمال انفجار، حداقل انرژی و دمای اشتعال بود. نتایج نهایی نشان داد که نانوتیتانیوم بسیار حساس تر از میکروتیتانیوم است. این ماده بسیار واکنش پذیر توصیف شده و اگرچه انفجار آن شدید و به آسانی رخ می داد اما قابل کنترل و پیش گیری توصیف شد. افزودن دی اکسید نانوتیتانیوم به مخلوط گرد و ذرات<sup>۱</sup> می تواند خطرات انفجار را کاهش و یا به کلی از بین ببرد.

با توجه به مرور منابع صورت گرفته در این حوزه، مشاهده گردید که احتراق ذرات تیتانیوم اغلب به روش تجربی و عددی مطالعه شده است. در این مقاله، به بررسی تحلیلی احتراق غیر پیش آمیخته ابر ذرات تیتانیوم در هندسه جریان متقابل با رویکرد چندناحیه ای پرداخته شده است. پس از ارائه معادلات حاکم، شامل معادلات بقای انرژی و بقای جرم اجزا و انجام بی بعدسازی، توزیع کسر جرمی اجزا و دما در میدان حل ارائه شده است و سپس تأثیر برخی پارامترهای مهم مانند عدد لوئیس، اندازه قطر ذرات و میزان غلظت جرمی ذرات



شکل ۱. شماتیک کلی احتراق غیر پیش آمیخته ابر ذرات تیتانیوم در هندسه جریان متقابل

Fig 1. General schematic of non-premixed combustion of titanium dust particles in the counter-flow configuration

1 - dust mixture

شده است [۱۲]:

$$\omega_{melt} = \frac{Y_s}{\tau_{melt}} H(T - T_{melt}) \quad (2)$$

در رابطه‌ی فوق،  $Y_s$ ،  $\tau_{melt}$ ،  $H$  و  $T_{melt}$  به ترتیب کسر جرمی ذرات جامد، زمان ثابت مشخصه ذوب ذرات، تابع هوی‌ساید و دمای ذوب ذرات هستند. تابع هوی‌ساید  $H$  نیز عبارت است از:

$$H(T) = \begin{cases} 0 & T < 0 \\ 1 & T > 0 \end{cases} \quad (3)$$

نرخ واکنش شیمیایی از مدل آرنیوسی گرفته شده و به صورت رابطه (۴) تعریف می‌گردد:

$$\omega_s = BY_s Y_o \exp\left(-\frac{E}{RT_f}\right) \quad (4)$$

که  $B$ ،  $E$ ،  $R$  و  $T_f$  به ترتیب ضریب فرکانسی، انرژی فعال‌سازی سوخت، ثابت جهانی گازها و دما شعله هستند و  $Y_o$  نیز کسر جرمی اکسیدکننده است. همچنین مقدار ظرفیت حرارتی مخصوص و چگالی مخلوط ذرات سوخت و اکسیدکننده از روابط (۵) و (۶) حاصل می‌گردد [۱۲]:

$$C = C_a + \frac{4\rho_p}{3\rho} \pi r^3 C_p n_p \quad (5)$$

$$\rho = \rho_a + \frac{4}{3} \pi r^3 n_p \rho_p \quad (6)$$

که در روابط فوق،  $C_a$ ،  $C_p$  و  $n_p$  به ترتیب بیان‌گر ظرفیت حرارتی مخصوص گاز اکسیدکننده، ظرفیت حرارتی مخصوص ذره، تعداد ذرات کروی سوخت معلق در فاز گازی در واحد حجم (عدد چگالی) و شعاع ذره هستند. همچنین  $\rho_a$  و  $\rho_p$  نیز به ترتیب نشان‌دهنده‌ی چگالی گاز اکسیدکننده و چگالی ذره است.

### ۳- معادلات حاکم

معادلات حاکم شامل معادله بقای انرژی و بقای جرم اجزا می‌باشد. معادله بقای انرژی عبارت است از [۱۱]:

$$-aX \frac{dT}{dX} = D_T \frac{d^2T}{dX^2} + \omega_s \frac{Q}{\rho C} - \omega_{melt} \frac{Q_{melt}}{C} \quad (7)$$

در رابطه‌ی فوق  $Q$ ،  $D_T$  و  $Q_{melt}$  به ترتیب ضریب نفوذ حرارتی و برابر  $D_T = \frac{\lambda}{\rho C}$ ، گرمای آزادشده در واحد جرم سوخت مصرفی و گرمای نهان ذوب ذرات سوخت است. همچنین  $\lambda$  هدایت حرارتی ذرات است. معادله بقای جرم ذرات سوخت جامد نیز به شکل رابطه (۸) بیان می‌گردد [۱۱]:

$$-aX \frac{dY_s}{dX} = -\frac{\omega_s}{\rho} \quad (8)$$

همچنین معادله بقای جرم محصولات در فاز مایع مطابق رابطه (۹) است [۱۱]:

$$-aX \left( \frac{dY_m}{dX} \right) = D_m \left( \frac{d^2Y_m}{dX^2} \right) + \omega_{melt} \quad (9)$$

در رابطه‌ی فوق  $Y_m$  و  $D_m$  به ترتیب بیان‌گر کسر جرمی محصولات مایع و ضریب نفوذ جرمی محصولات مایع می‌باشد. معادله بقای جرم اکسیدکننده نیز به صورت معادله (۱۰) است [۱۱]:

$$-aX \frac{dY_o}{dX} = D_o \frac{d^2Y_o}{dX^2} - \vartheta \frac{\omega_s}{\rho} \quad (10)$$

در رابطه‌ی فوق  $D_o$  و  $\vartheta$  به ترتیب ضریب نفوذ جرمی اکسیدکننده و نسبت جرمی استوکیومتریک اکساینده به سوخت هستند.

### ۴- متغیرهای بی‌بعد

به منظور بی‌بعدسازی معادلات حاکم، از متغیرهای بی‌بعد استفاده گردیده است [۱۳]:

$$\theta = \frac{C(T - T_\infty)}{QY_{s-\infty}}, y_m = \frac{Y_m}{Y_{s-\infty}}, y_o = \frac{Y_o}{\vartheta Y_{s-\infty}}, y_s = \frac{Y_s}{Y_{s-\infty}}, \quad x = \frac{X}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho Ca}}}, q_{melt} = \frac{Q_{melt}}{Q}, \tilde{\omega}_{melt} = \frac{Y_s}{a\tau_{melt}} H(T - T_{melt}) \quad (11)$$

$$\tilde{\omega}_s = \frac{BY_s \vartheta J_o}{\rho a} y_s y_o \exp\left(-\frac{T_a}{T_f}\right)$$

که در روابط فوق،  $T_\infty$ ،  $\theta$ ،  $Y_m$ ،  $Y_o$ ،  $Y_s$ ،  $q_{melt}$  و  $\tilde{\omega}_{melt}$

### جدول ۱. شرایط مرزی مورد نیاز

Table 1. Required boundary conditions

| منفیر                         | مرز             | $X = X_{melt}$  | $X = X_{melt}$ | $X = X_f$      | $X = -\infty$   |
|-------------------------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|
| دمای بی‌بعد                   | $\theta_{melt}$ | $\theta_{melt}$ | $\theta_f$     | $\theta_f$     | $\theta_{melt}$ |
| کسر جرمی ذره بی‌بعد           | $Y_{melt}$      | $Y_{melt}$      | $Y_{melt}$     | $Y_{melt}$     | $Y_{melt}$      |
| کسر جرمی محصولات سوختی بی‌بعد | $Y_{O_{melt}}$  | $Y_{O_{melt}}$  | $Y_{O_{melt}}$ | $Y_{O_{melt}}$ | $Y_{O_{melt}}$  |
| کسر جرمی اکسیدکننده بی‌بعد    | $Y_{O_{melt}}$  | $Y_{O_{melt}}$  | $Y_{O_{melt}}$ | $Y_{O_{melt}}$ | $Y_{O_{melt}}$  |

و  $\tilde{\omega}_s$  به ترتیب مبین دمای محیط، دمای بی‌بعد، کسر جرمی محصولات مایع بی‌بعد، کسر جرمی اکسیدکننده بی‌بعد، کسر جرمی ذرات جامد بی‌بعد، موقعیت مکانی بی‌بعد، گرمای نهان ذوب بی‌بعد، نرخ ذوب بی‌بعد و نرخ واکنش بی‌بعد هستند. همچنین  $T_a$  مبین دمای فعال‌سازی است و برابر است با:

$$T_a = \frac{E}{R} \quad (12)$$

در رابطه‌ی فوق  $Le$  عدد لوئیس است و به این صورت تعریف شده است:

$$Le = \frac{\lambda}{\rho C D} \quad (17)$$

در عبارت فوق،  $D$  و  $\lambda$  و به ترتیب ضریب هدایت حرارتی و ضریب نفوذ جرمی هستند. همچنین معادله‌ی بقای جرم اکسیدکننده برای ناحیه‌ی اکسیدکننده عبارت است از:

$$\frac{1}{Le} \frac{d^2 y_o}{dx^2} + x \frac{dy_o}{dx} = D_c y_s y_o \exp\left(-\frac{T_a}{T}\right) \quad (18)$$

### ۶- شرایط مرزی و انطباقی

به منظور حل معادلات دیفرانسیل حاکم در هر ناحیه، به شرایط مرزی نیاز است. در جدول (۱) شرایط مرزی مناسب برای هر مرز بیان شده است.

همچنین به منظور تعیین مکان دقیق شعله و مکان تبخیر از شرایط انطباقی (۱۹) و (۲۰) استفاده گردیده است [۱۴]:

$$x = x_f \begin{cases} \left( \frac{1}{Le} \right) \frac{dy_o}{dx} \Big|_{x_f^-} = - \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_f^-} \\ \left( \frac{1}{Le} \right) \frac{dy_m}{dx} \Big|_{x_f^-} = - \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_f^-} \end{cases} \quad (19)$$

### ۵- معادلات بی‌بعد

پس از اعمال پارامترهای بی‌بعد بر معادلات حاکم، معادلات در فرم بی‌بعد حاصل می‌گردند. معادله‌ی بقای انرژی بی‌بعد عبارت است از:

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + x \frac{d\theta}{dx} = -D_c y_s y_o \exp\left(-\frac{T_a}{T}\right) + \frac{q_{melt} y_s}{a \tau_{melt}} H(T - T_{melt}) \quad (13)$$

در رابطه‌ی فوق  $D_c$  عدد دام‌کوهلر است و به شکل رابطه (۱۴) تعریف می‌شوند:

$$D_c = \frac{\rho B \vartheta_o Y_{F-\infty}}{m_f a} \quad (14)$$

معادله‌ی بقای جرم ذرات جامد در فرم بی‌بعد عبارت است از:

$$x \frac{dy_s}{dx} = D_c y_s y_o \exp\left(-\frac{T_a}{T}\right) \quad (15)$$

معادله‌ی بقای جرم محصولات واکنش در فاز مایع در حالت بی‌بعد برابر است با:

$$\frac{1}{Le} \frac{d^2 y_m}{dx^2} + x \frac{dy_m}{dx} = \frac{y_s}{a \tau_{melt}} H(T - T_{melt}) \quad (16)$$

$$y_o = \frac{y_{melt} \left( -\operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{Le_o} x}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{Le_o} x_f}{\sqrt{2}} \right) \right)}{\operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{Le_o} x_f}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{Le_o} x_{melt}}{\sqrt{2}} \right)} \quad (24)$$

۱-۱-۳ ناحیه سوم  $x_{melt} < x < +\infty$

$$\theta = \frac{\theta_{melt} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{L}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right)}{\operatorname{erf} \left( \frac{L}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x_{melt}}{\sqrt{2}} \right)} \quad (25)$$

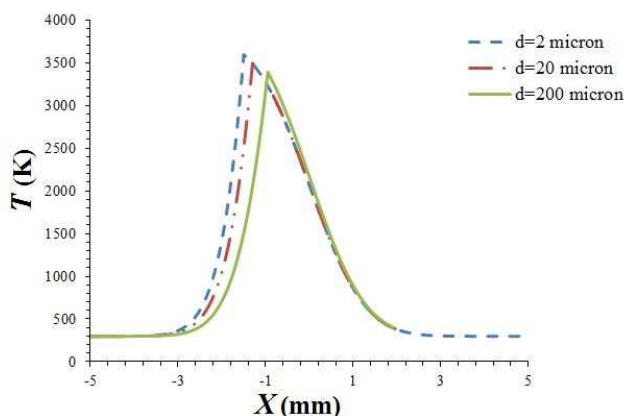
توزیع درجه حرارت عبارت است از:

$$y_o = \frac{y_{melt} \operatorname{erf} \left( \frac{L \sqrt{Le_o}}{\sqrt{2}} \right) + (-y_{melt} + y_{O_{oxid}}) \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{Le_o} x}{\sqrt{2}} \right) - y_{O_{oxid}} \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{Le_o} x_{melt}}{\sqrt{2}} \right)}{\operatorname{erf} \left( \frac{L \sqrt{Le_o}}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{Le_o} x_{melt}}{\sqrt{2}} \right)} \quad (26)$$

همچنین توزیع کسر جرمی اکسیدکننده نیز عبارت است از:

## ۲-۱-۲ تفسیر نتایج

به منظور اعتبارسنجی مدل فعلی، در شکل ۲ نتایج مقدار دمای شعله برحسب کسر مولی اولیه هوا ارائه شده است و با نتایج شفیروویچ [۷] در شرایط آدیاباتیک و مدل مدنی [۱۱] مقایسه شده است. قابل



شکل ۲. دمای شعله برحسب کسر مولی اولیه هوا و مقایسه با کارهای پیشین

Fig 2. Flame temperature in terms of air initial mole fraction and comparison with previous works

$$@ x = x_{melt} \begin{cases} \frac{dy_o}{dx} \Big|_{x_{melt}}^{x_{melt}^+} = 0 \\ \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x_{melt}}^{x_{melt}^+} = -\frac{q_{melt}}{a\tau_{melt}} y_s H(T - T_{melt}) x_{melt} \\ \left( \frac{1}{Le} \right) \frac{dy_m}{dx} \Big|_{x_{melt}}^{x_{melt}^+} = \frac{y_s}{a\tau_{melt}} H(T - T_{melt}) x_{melt} \end{cases} \quad (20)$$

## ۷- نتایج و بحث

### ۱-۱-۱ حل تحلیلی معادلات حاکم

#### ۱-۱-۱-۱ ناحیه اول $-\infty < x < x_f$

در این ناحیه توزیع درجه حرارت به صورت رابطه (۲۱) حاصل شده است:

$$\theta = \frac{\theta_f \left( \operatorname{erf} \left( \frac{L}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right)}{\operatorname{erf} \left( \frac{L}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{x_f}{\sqrt{2}} \right)} \quad (21)$$

#### ۱-۱-۲ ناحیه دوم $x_f < x < x_{melt}$

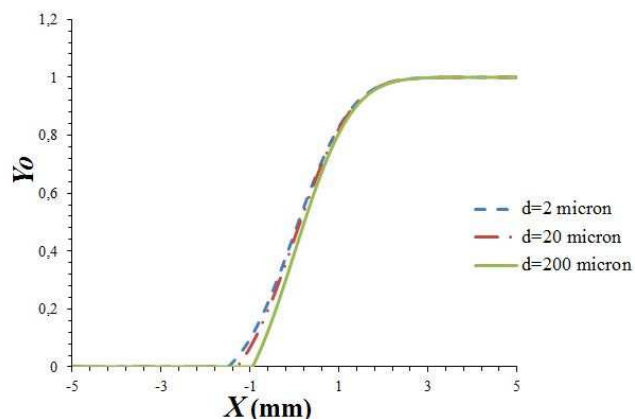
در این ناحیه، توزیع درجه حرارت به صورت رابطه (۲۲) حاصل گردیده است:

$$\theta = \frac{(\theta_f - \theta_{melt}) \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \theta_{melt} \operatorname{erf} \left( \frac{x_f}{\sqrt{2}} \right) - \theta_f \operatorname{erf} \left( \frac{x_{melt}}{\sqrt{2}} \right)}{\operatorname{erf} \left( \frac{x_f}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x_{melt}}{\sqrt{2}} \right)} \quad (22)$$

همچنین توزیع کسر جرمی محصولات در فاز مایع عبارت است از:

$$y_m = \frac{y_{m_{melt}} \left( -\operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{Le} x}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{Le} x_f}{\sqrt{2}} \right) \right)}{\operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{Le} x_f}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{Le} x_{melt}}{\sqrt{2}} \right)} \quad (23)$$

توزیع کسر جرمی اکسیدکننده نیز به صورت مقابل است:



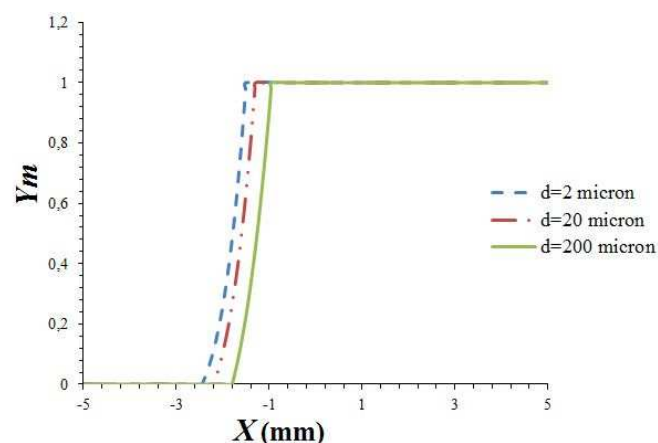
شکل ۵. توزیع کسر جرمی اکسیدکننده برحسب موقعیت مکانی با در نظرگیری اثر قطر ذرات سوخت مختلف

Fig. 5. Distribution of oxidizer mass fraction according to position with considering the effect of different fuel particle diameters

ذرات سوخت مصرف شده‌اند. در انتهای ناحیه واکنش، به دلیل وجود شرایط استوکیومتری، مقدار کسر جرمی ذرات سوخت به صفر رسیده است. هم‌چنین ذرات با قطر کوچک‌تر سریع‌تر به دمای اشتعال رسیده و واکنش دادند.

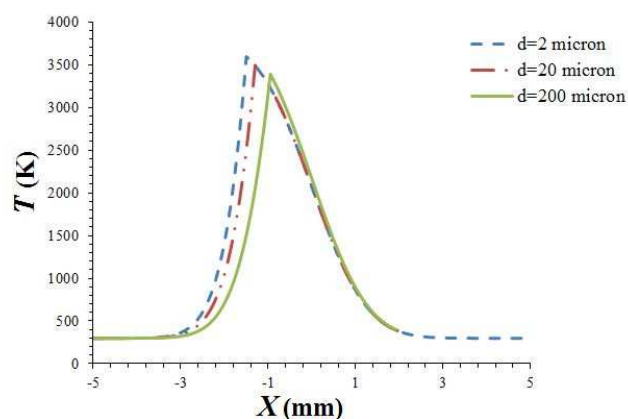
در شکل ۵ توزیع کسر جرمی اکسیدکننده برحسب موقعیت مکانی و با در نظرگیری اثر قطر ذرات سوخت مختلف رسم شده است. همان‌طور که قابل ملاحظه است، با افزایش قطر ذرات سوخت، توزیع کسر جرمی اکسیدکننده به سمت نازل اکسیدکننده منتقل شده است.

در شکل ۶ توزیع کسر جرمی محصولات سوختی در فاز مایع



شکل ۶. توزیع کسر جرمی محصولات سوختی در فاز مایع برحسب موقعیت مکانی با در نظرگیری اثر قطر ذرات

Fig. 6. Mass fraction distribution of products in the liquid phase in terms of position with considering the effect of particle diameters



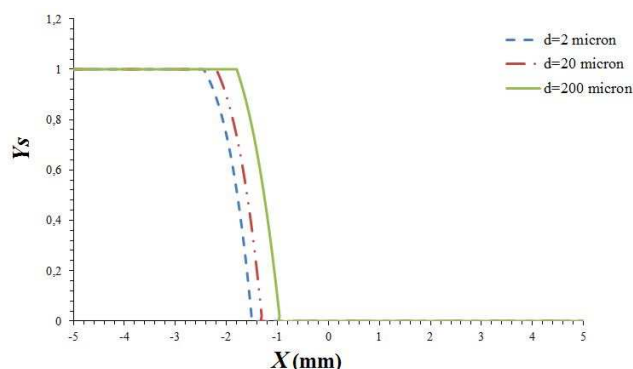
شکل ۳. دما برحسب موقعیت مکانی

Fig. 3. Temperature versus position

ملاحظه است که با افزایش کسر مولی اولیه هوا و تبدیل شرایط سوخت غنی به شرایط استوکیومتری، مقدار دمای شعله افزایش یافته است و در حالت استوکیومتری به ۳۴۵۰ کلوین رسیده است. هم‌چنین در شرایط سوخت رقیق، با افزایش کسر مولی اولیه هوا، دمای شعله کاهش یافته است و نتایج انطباق مطلوبی با کار تجربی دارد.

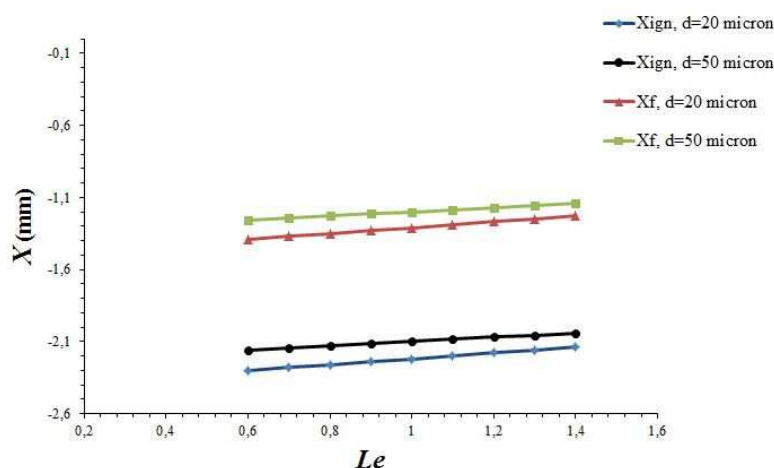
در شکل ۳ نمودار توزیع درجه حرارت برحسب مکان و برای ذرات سوخت با قطرهای مختلف ترسیم شده است. ملاحظه می‌گردد که بیش‌ترین مقدار دمای حاصل، در ناحیه شعله که تقریباً در مکان ۱/۸- میلی‌متر است، حاصل گردیده است. این میزان دما مربوط به ذرات سوخت با قطر ۲ μm است و معادل ۳۶۰۰ K است.

در شکل ۴ توزیع کسر جرمی ذرات سوخت برحسب مکان ترسیم شده است. ملاحظه می‌شود که در ناحیه شعله و با آغاز اشتعال تمام



شکل ۴. توزیع کسر جرمی ذرات سوخت جامد برحسب مکان با قطر ذرات مختلف

Fig. 4. Mass fraction distribution of solid fuel particles in terms of position for different particle diameters



شکل ۷. موقعیت مکانی آغاز اشتعال و شعله بر حسب عدد لوئیس با در نظرگیری اثر قطر ذرات

Fig. 7. Position of ignition and flame in terms of Lewis number with considering the effect of particle diameters

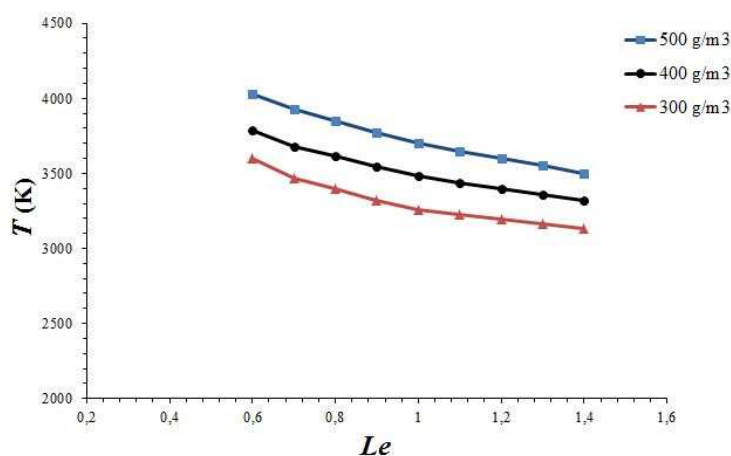
تأثیر عدد لوئیس بر دمای شعله با در نظرگیری اثر غلظت جرمی ذرات بررسی شده است. با افزایش عدد لوئیس که به منزله کاهش نفوذ جرم است، دمای شعله کاهش یافته است. هم‌چنین با افزایش غلظت ذرات سوخت، میزان دمای شعله افزایش یافته است

#### ۸- جمع‌بندی

با توجه به کاربردهای فراوان احتراق ذرات فلزی، در این مقاله به بررسی احتراق غیرپیش‌آمیخته ابر ذرات تیتانیوم در هندسه جریان متقابل پرداخته شد. در این مدل‌سازی چندناحیه‌ای به کمک شرایط مرزی و انطباقی ارائه شده، معادلات حاکم بر فرآیند احتراق در فرم بی‌بعد، شامل بقای انرژی، بقای جرم سوخت، بقای جرم اکسیدکننده

بر حسب موقعیت مکانی و با در نظرگیری اثر قطر ذرات سوخت، رسم شده است. قابل ملاحظه است که در ابتدای وقوع واکنش، میزان محصولات ناچیز بوده و با وقوع اشتعال، تمام ذرات سوخت، اکسید شده و به محصولات در فاز مایع تبدیل شده‌اند. با افزایش قطر ذرات سوخت تشکیل محصولات به تأخیر افتاده است.

در شکل ۷ تأثیر عدد لوئیس بر مکان آغاز اشتعال و شعله با در نظرگیری اثر قطر ذرات بررسی شده است و همان‌طور که قابل ملاحظه است، با افزایش عدد لوئیس، شعله به سمت نازل اکسیدکننده منتقل گردیده است. این تغییرات، در طیف اعداد لوئیس مورد بررسی تقریباً خطی است. هم‌چنین با افزایش قطر ذرات، مکان آغاز اشتعال و شعله به سمت نازل اکسیدکننده منتقل شده است. در شکل ۸



شکل ۸. دمای شعله بر حسب عدد لوئیس با در نظرگیری اثر غلظت جرمی ذرات

Fig. 8. Flame temperature in terms of Lewis number with considering the effect of mass particle concentration

|                         |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T_f$                   | دمای شعله، K                                               | و بقای جرم محصولات سوختی حل شد و توزیع دما و کسر جرمی اجزا ارائه گردید. همچنین تأثیر برخی پارامترها مانند عدد لوئیس، اندازه قطر ذرات و غلظت جرمی مورد بررسی قرار گرفت. مقدار دمای شعله در ناحیه شعله به بیشترین مقدار خود رسید که در عدد لوئیس ۱ و قطر ذره ۲ میکرون برابر ۳۶۰۰ کلوین بود. این میزان دما، با افزایش عدد لوئیس و در نتیجه کاهش نفوذ جرمی، کاهش یافت. موقعیت مکانی شعله نیز با افزایش عدد لوئیس، به سمت نازل اکسیدکننده متمایل شد و در عدد لوئیس ۱ موقعیت شعله برابر ۱/۸- میلی متر حاصل گردید. |
| $T_{melt}$              | دمای ذوب، K                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $X$                     | مکان، m                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $x$                     | مکان بی بعد                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $X_f$                   | مکان شعله، m                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $x_f$                   | مکان شعله بی بعد                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $X_m$                   | مکان ذوب ذرات سوخت، m                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $x_m$                   | مکان ذوب ذرات سوخت بی بعد                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $Y_m$                   | کسر جرمی محصولات مایع                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $y_m$                   | کسر جرمی محصولات مایع بی بعدشده                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $Y_o$                   | کسر جرمی اکسیدکننده بی بعدشده                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $Y_{o_{initial}}$       | کسر جرمی اکسیدکننده بی بعدشده اولیه                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $Y_s$                   | کسر جرمی سوخت جامد                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $y_s$                   | کسر جرمی ذرات جامد بی بعدشده                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $Y_{s_{initial}}$       | کسر جرمی ذرات جامد بی بعدشده اولیه                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $\rho_p$                | چگالی ذره، $kg/m^3$                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $\tau_{melt}$           | زمان مشخصه ذوب ذرات، 1/s                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $\omega_s$              | نرخ واکنش، $kg/(s \cdot m^3)$                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $\tilde{\omega}_s$      | نرخ واکنش بی بعد                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $\omega_{melt}$         | نرخ ذوب، 1/s                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $\tilde{\omega}_{melt}$ | نرخ ذوب بی بعد                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $a$                     | نرخ کرنش، 1/s                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $B$                     | ضریب فرکانسی نرخ واکنش، $kg/(s \cdot m^3)$                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $C$                     | ظرفیت حرارتی مخصوص، $kJ/kgK$                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $C_a$                   | ظرفیت حرارتی مخصوص گاز، $kJ/kgK$                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $C_p$                   | ظرفیت حرارتی مخصوص ذره، $kJ/kgK$                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $D_c$                   | عدد دام کوهرلر                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $D_m$                   | ضریب نفوذ جرمی محصولات مایع، $m^2/s$                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $E$                     | انرژی فعال سازی سوخت، $kJ$                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $Le$                    | عدد لوئیس                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $n_p$                   | تعداد ذرات کروی سوخت معلق در فاز گازی در واحد حجم، $1/m^3$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $Q_{melt}$              | گرمای نهان ذوب ذرات سوخت، $kJ/kg$                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $q_{melt}$              | گرمای نهان ذوب بی بعد                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $r$                     | شعاع ذره، m                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $R$                     | ثابت جهانی گاز، $Pa \cdot m^3/(mol \cdot K)$               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $T$                     | دما، K                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

## ۹- فهرست علائم

## ۱۰- مراجع

- [1] A. Akbarzadeh, M. Samiei, S. Davaran, Magnetic nanoparticles: preparation, physical properties, and applications in biomedicine, Nanoscale research letters, 7(1) (2012) 1-13.
- [2] I. Molodetsky, E. Vicenzi, E. Dreizin, C. Law, Phases of titanium combustion in air, Combustion and Flame, 112(4) (1998) 522-532.
- [3] K. Miyata, N. Kubota, Combustion of Ti and Zr particles with  $KNO_3$ , Propellants, explosives, pyrotechnics, 21(1) (1996) 29-35.
- [4] A. Abbud-Madrid, M.C. Branch, J.W. Daily, Ignition and combustion of bulk titanium and magnesium at normal

## علائم یونانی

|                |                                                 |
|----------------|-------------------------------------------------|
| $\theta$       | دمای بی بعد                                     |
| $\theta_f$     | دمای بی بعد شعله                                |
| $\theta_{mel}$ | دمای بی بعد ذوب                                 |
| $\vartheta$    | مقدار مول اکسیدکننده واکنش دهنده با یک مول سوخت |
| $\lambda$      | ضریب هدایت حرارتی، $kJ/(m \cdot s \cdot K)$     |
| $\rho$         | چگالی، $kg/m^3$                                 |
| $\rho_a$       | چگالی گاز، $kg/m^3$                             |

- R.K. Eckhoff, Explosibility of micron-and nano-size titanium powders, *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 26(6) (2013) 1646-1654.
- [11] S.A.H. Madani, M. Bidabadi, N.M. Aftah, A. Afzalabadi, Semi-analytical modeling of non-premixed counterflow combustion of metal dust, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 137(2) (2019) 501-511.
- [12] S. Sadeghi, M. Bidabadi, Preparation of particle oxide for biomedical applications employing a safe thermo-chemical technique: An analytical study, *Chemical Engineering and Processing - Process Intensification*, 145 (2019) 107680.
- [13] M. Bidabadi, P. Panahifar, S. Sadeghi, Analytical development of a model for counter-flow non-premixed flames with volatile biofuel particles considering drying and vaporization zones with finite thicknesses, *Fuel*, 231 (2018) 172-186.
- [14] H. Rasam, M. Nematollahi, S. Sadeghi, M. Bidabadi, An asymptotic assessment of non-premixed flames fed with porous biomass particles in counter-flow configuration considering the effects of thermal radiation and thermophoresis, *Fuel*, 239 (2019) 747-763.
- and reduced gravity, in: *Symposium (International) on Combustion*, Elsevier, 1996, pp. 1929-1936.
- [5] A.S. Mukasyan, S.G. Vadchenko, I.O. Khomenko, Combustion modes in the titanium-nitrogen system at low nitrogen pressures, *Combustion and flame*, 111(1-2) (1997) 65-72.
- [6] V. Karasev, A. Onishchuk, S. Khromova, O. Glotov, V. Zarko, E. Pilyugina, C. Tsai, Formation of metal oxide nanoparticles in combustion of titanium and aluminum droplets, *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 42(6) (2006) 649-662.
- [7] E. Shafirovich, S.K. Teoh, A. Varma, Combustion of levitated titanium particles in air, *Combustion and Flame*, 152(1-2) (2008) 262-271.
- [8] M. Cairns, D.L. Frost, S. Goroshin, Effect of Oxygen Concentration on the Combustion of Titanium Particles, in: *International Colloquium on the Dynamics of Explosions and Reactive Systems*, 2009, pp. 25-28.
- [9] C. Badiola, E.L. Dreizin, Combustion of micron-sized particles of titanium and zirconium, *Proceedings of the Combustion Institute*, 34(2) (2013) 2237-2243.
- [10] S.P. Boilard, P.R. Amyotte, F.I. Khan, A.G. Dastidar,

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

M. Farmahini Farahani, N. Hasanvand, M. Bidabadi . *Analytical model for the non-premixed combustion of the titanium dust cloud in counter-flow geometry* ,*Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(Special Issue 5)(2021) 3307-3316.

DOI: [10.22060/mej.2021.18209.6773](https://doi.org/10.22060/mej.2021.18209.6773)



