Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 6) (2021) 903-906
DOI: 10.22060/mej.2021.18676.6875

# Modeling of vibro-acoustic modulation induced by non-linear contact in the Euler-Bernoulli beam using the Fourier spectral element

N. Sepehry[1] , M. Ehsani[2], M. Shamshirsaz[3] , M. Sadighi[3]

[1]Faculty of Mechanical and Mechatronic Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
[2]New Technologies Research Center (NTRC), Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran
[3]Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

**ABSTRACT:** Exploiting the nonlinear nature of structural damage through piezoelectric patches is one of the latest concepts of early detection of damage. Support loosening as one of the prevalent defects in engineering systems is a source of contact acoustic nonlinearity. Vibro-acoustic modulation has proven to be a promising method for revealing structural nonlinearity characteristics. Requiring a large number of cycles to be solved in the time domain to reach the steady-state before evaluating the results in the frequency domain, makes using existing computational methods such as finite element method to model this phenomenon very expensive. This paper is concerned with a novel numerical method called Fourier spectral element to investigate the vibro-acoustic modulation in the Euler-Bernoulli beam caused by contact nonlinearity. Three piezoelectrics were attached to the beam as the probe, pump and sensor. The numerical outcomes are compared against the experimental results to check the validity of the developed method. The results show that the Fourier spectral element not only provides a high convergence rate but is also capable of simulating the phenomenon of modulation with sufficient accuracy.

**Review History:**

Received: Jul. 04, 2020
Revised: Mar. 12, 2020
Accepted: Mar. 31, 2020
Available Online: Apr. 10, 2021

**Keywords:**

Structural health monitoring
Vibro-acoustics modulation
Contact acoustics nonlinearity
Piezoelectric patches
Fourier spectral element

## 1- Introduction

The use of piezoelectric patches is widespread in monitoring the health of various industrial structures and optimizing their maintenance process. Online monitoring methods use linear or nonlinear principles to identify defects [1-4]. Early detection of structural defects is one of the advantages of nonlinear methods over linear ones. Vibro-acoustic modulation method is one of the non-linear health monitoring methods of structures [1].

In a general classification, the types of nonlinear behavior of structures are divided into classical and non-classical categories. Nonlinear contact includes any interaction of solid surfaces with each other due to cracking, separation and loosening of the screw or support and can be classified as non-classical nonlinearity. So far, various experimental methods have been proposed to identify defects with non-classical nonlinear effects, many of which fall into the pump-carrier category.

In [5], a finite element model was used to determine the appropriate frequency for pump excitation. The open and closed state of the crack due to the excitation of the pump with adjusted frequency caused the pump wave to combine with the carrier wave. In [6], the acoustic and vibrations modulation caused by contact at the boundary has been investigated using the finite element method. Simulation of the modulation phenomenon in a composite laminate by Singh et al. is one of the few other efforts in this field [7].

The purpose of this paper is to investigate the nonlinear vibrations of the host structure due to loosening and contact at its support for early and optimally monitor of its health. For this purpose, experimental tests were designed on beams equipped with piezoelectric patches in healthy and defected states. The effect of pump frequency on increasing the ability to detect damage is one of the points of interest in this article. In order to understand the physical mechanism governing the modulation phenomenon, numerical modeling is presented using the Fourier spectral element method. The electromechanical behavior of piezoelectric patches is considered in the developed model. Then, contact mechanics was introduced to the developed formulation as a nonlinear factor governing the problem. The idea of an elastic and loose substrate between the host structure and the rigid boundary was used to model the nonlinear factor. Due to the transient nature of the problem under study, the governing equations are analyzed in the time domain and with the help of the explicit central difference algorithm. The process of signal processing and extraction of damage-sensitive indices in the frequency domain are among the other perspectives of the present paper.

## 2- Methodology

The schematic of the under study Euler-Bernoulli beam is

*Corresponding author's email:naser.sepehry@shahroodut.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

**Fig. 1 Beam geometry with elastic foundation**

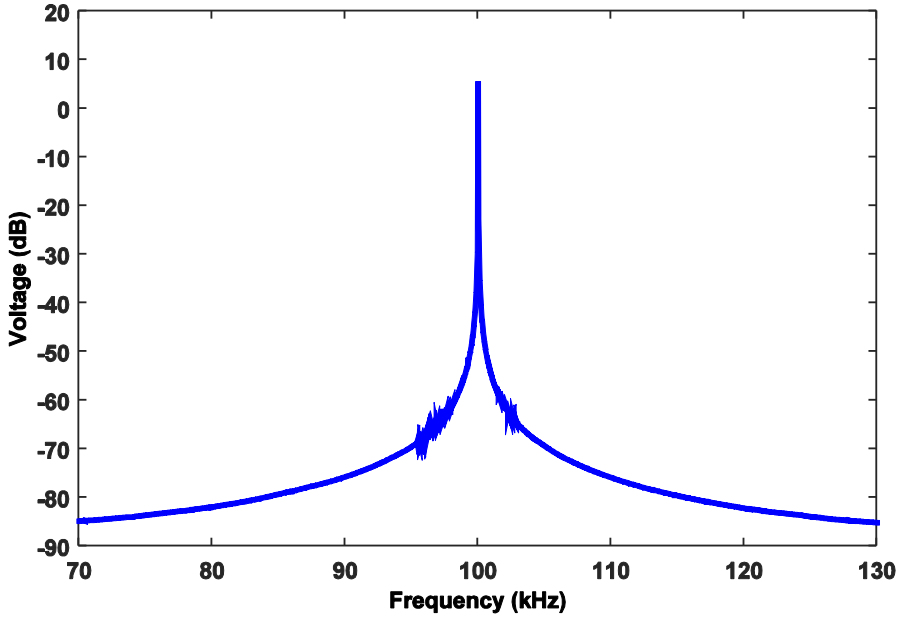



**Fig. 2 Spectrum of structural response to pump (22 kHz) and probe (100 kHz) excitations in the healthy state**

shown in Fig. 1. To investigate the contact at the boundary, the effect of the loosing support is modeled as an elastic substrate using transverse springs, and both transverse and longitudinal vibrations are considered in the modeling.

The Fourier sine series of a continuous arbitrary function f (x) in the interval $[0,L]$ is:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \qquad 0<x<L \qquad (1)$$

To calculate the stiffness and mass matrices, first, the potential and kinetic energy of the beam with the elastic substrate are calculated. The kinetic energy and potential of the i$^{th}$ beam element with elastic substrate are as follows:

$$T=\frac{1}{2}\int_{L_{i-1}}^{L_i}\left[\rho A\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\right)^2+\rho A\left(\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t}\right)^2\right]dx$$
$$U=\frac{1}{2}\int_{L_{i-1}}^{L_i}\left[EA\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x}\right)^2+EI\left(\frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial x^2}\right)^2+k\bar{w}_i^2\right]dx \qquad (2)$$

Due to the non-linear nature of the contact, to investigate this effect, the beam area with the elastic substrate should be studied. The terms of contact known as Hertz-Signorini-Moreau are:

$$\begin{cases} g_N^i \geq 0 \\ \lambda_N^i \geq 0 \\ g_N^i \lambda_N^i = 0 \end{cases} \qquad i=1,2,..,s \qquad (3)$$

## 3- Results and Discussion

The vector of external electric load was calculated and applied to the degrees of freedom corresponding to the pump and carrier actuators. The carrier frequency was 100 kHz and the pump frequency was 22 and 27 kHz.

Fig. 2 shows the simulation results for a carrier frequency of 100 kHz and a 22 kHz pump in a healthy structure. According to figure, due to the linear nature of the structure in the desired frequency range, only the frequency of 100 kHz has occurred in the response spectrum. Fig. 3 shows the simulation results for the carrier frequency of 100 kHz and the 22 kHz pump in the defected structure.

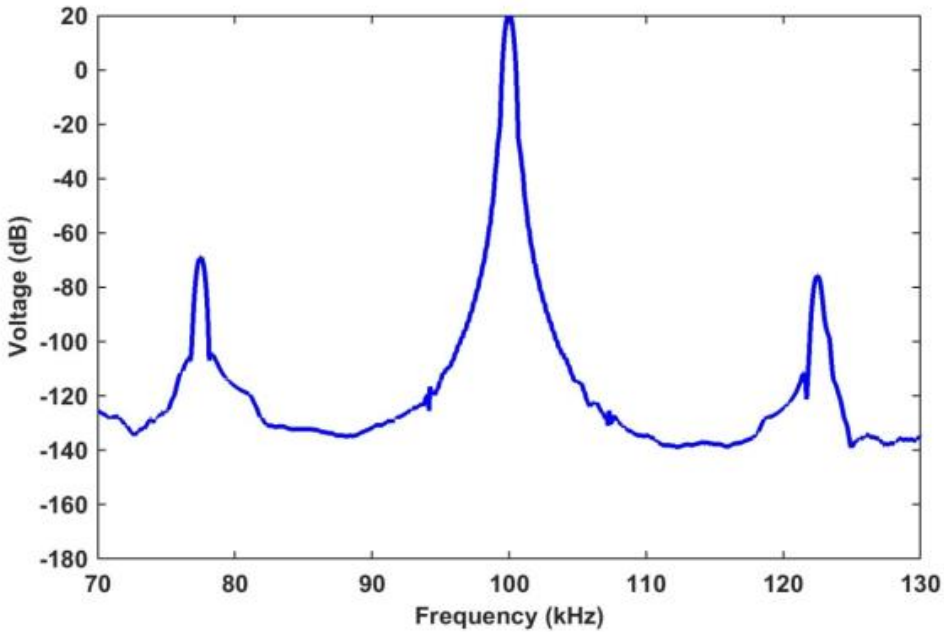



**Fig. 3 Spectrum of the structural response to pump (22 kHz) and probe (100 kHz) excitations in the damage state**

According to the results, in addition to the frequency of 100 kHz, frequencies of 100 ± 22 kHz are also observed in the frequency response of the sensor voltage, which are caused by nonlinear contact at the support location.

## 4- Conclusions

In this study, the effect of contact at the structure support on the nonlinear vibration behavior of the monitored structure was investigated by a combination of vibration and acoustics. In order to reduce the computational costs, which is an integral element of simulating high-frequency phenomena, the Fourier spectral element method was used, which has a great convergence rate compared to other similar numerical methods. Contact mechanics as a nonlinear factor governing the problem was introduced to the spectral element formulation using the penalty method. According to the results, in experimental and numerical tests, contact at the location of the defected support leads to the occurrence of modulated frequencies around the central band of the carrier frequency. The absence of modulated frequency bands in a pristine structure (baseline) allows the extraction of suitable damage-sensitive properties and early monitoring of the host structure.

## References

[1] J. Jang, P. Liu, B. Kim, S.-w. Kim, H. Sohn, Silicon wafer crack detection using nonlinear ultrasonic modulation induced by high repetition rate pulse laser, Optics and Lasers in Engineering, 129 (2020) 106074-106082.

[2] N. Sepehry, S. Asadi, M. Shamshirsaz, F. Bakhtiari Nejad, A new model order reduction method based on global kernel k-means clustering: Application in health monitoring of plate using Lamb wave propagation and impedance method, Structural Control and Health Monitoring, 25(9) (2018) e2211.

[3] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, M. Shamshirsaz, W. Zhu, Nonlinear modeling of cracked beams for impedance based structural health monitoring, in: ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, American Society of Mechanical Engineers, Florida, USA, 2017, V04BT05A034.

[4] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, M. Shamshirsaz, Discrete singular convolution and spectral finite element method for predicting electromechanical impedance applied on rectangular plates, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 28(18) (2017) 2473-2488.

[5] A. Martowicz, P. Packo, W.J. Staszewski, T. Uhl, Modelling of nonlinear vibro-acoustic wave interaction in cracked aluminium plates using local interaction simulation approach, in: 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Vienna, Austria, 2012.

[6] N. Sepehry, M. Ehsani, M. Shamshirsaz, M. Sadighi, Contact acoustic nonlinearity identification via online vibro-acoustic modulation technique, Modares Mechanical Engineering, 20(7) (2020) 1719-1730.

[7] A.K. Singh, B.-Y. Chen, V.B. Tan, T.-E. Tay, H.-P. Lee, Finite element modeling of nonlinear acoustics/ ultrasonics for the detection of closed delaminations in composites, Ultrasonics, 74 (2017) 89-98.

**HOW TO CITE THIS ARTICLE**

*N. Sepehry , M. Ehsani, M. Shamshirsaz , M. Sadighi, Modeling of vibro-acoustic modulation induced by non-linear contact in the Euler-Bernoulli beam using the Fourier spectral element, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 6) (2021) 903-906.*

**DOI:** 10.22060/mej.2021.18676.6875

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳، شماره ویژه ۶، سال ۱۴۰۰، صفحات ۳۸۰۹ تا ۳۸۲۴
DOI: 10.22060/mej.2021.18676.6875

# مدل‌سازی پدیده تلفیق ارتعاشات و آکوستیک ناشی از تماس در تکیه‌گاه تیر اویلر-برنولی با استفاده از المان طیفی فوریه

ناصرالدین سپهری[1*]، محمد احسانی[2]، مهناز شمشیرساز[2]، مجتبی صدیقی[3]

۱- مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
۲- پژوهشکده فناوری نو، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران
۳- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

**خلاصه:** ازجمله ایده‌های نوین برای شناسایی زودهنگام آسیب استفاده از ماهیت غیرخطی آسیب‌های سازه‌ای با استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک است. شلشدن تکیه‌گاه گیردار ازجمله عیوبی است که سبب ایجاد اختلال در عملکرد سازه می‌شود. در این مقاله روش المان طیفی فوریه برای بررسی رفتار غیرخطی تماسی ناشی از شلشدن تکیه‌گاه گیردار با استفاده از روش تلفیق ارتعاشات و آکوستیک ارائه‌شده‌است. سه وصله پیزوالکتریک روی تیر اویلر-برنولی جاسازی‌شده است. دو عدد از پیزوالکتریک‌ها به‌عنوان عملگر پمپ و حامل و وصله پیزوالکتریک سوم به‌عنوان حس‌گر برای برداشت سیگنال تلفیق‌شده مورداستفاده قرار می‌گیرند. در مدل عددی از ایده بستر الاستیک به‌منظور مدل‌سازی تکیه‌گاه استفاده شد. رفتار غیرخطی تماسی به‌صورت اعمال یک لقی بین سازه میزبان و سطح صلب مدل‌سازی شد. آزمون‌های تجربی و شبیه‌سازی‌های عددی در دو حالت سالم و معیوب (تکیه‌گاه شلشده) و در فرکانس‌های مختلف انجام پذیرفت. پردازش سیگنال‌های ثبت‌شده به‌صورت سری زمانی در حوزه فرکانس امکان احراز پدیده تلفیق و استخراج شاخص آسیب مناسب با شدت آسیب را فراهم می‌سازد. طبق نتایج، المان طیفی فوریه امکان شبیه‌سازی پدیده تلفیق را با دقت مناسب (صحه‌گذاری با نتایج تجربی) و همچنین نرخ همگرایی بالا فراهم می‌آورد.

**تاریخچه داوری:**
دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۱۴
بازنگری: ۱۳۹۹/۱۲/۲۲
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۱/۱۱
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۱/۲۱

**کلمات کلیدی:**
پایش سلامت سازه
تلفیق ارتعاشات و آکوستیک
تماس آکوستیک غیرخطی
وصله پیزوالکتریک
المان طیفی فوریه

## ۱- مقدمه

استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک از جایگاه ویژه‌ای در پایش سلامت سازه‌های صنعتی مختلف و بهینه‌سازی فرایند تعمیر و نگهداری آن‌ها برخوردار است. روش‌های پایش برخط از اصول خطی یا غیرخطی برای شناسایی عیب استفاده می‌کنند [۵-۱]. تشخیص زودهنگام عیوب سازه‌ای از مزایای روش‌های غیرخطی نسبت به روش‌های خطی محسوب می‌شود. [۶]. روش تلفیق آکوستیک و ارتعاشات ازجمله روش‌های پایش سلامت غیرخطی سازه‌ها است [۱].

در یک تقسیم‌بندی کلی، انواع رفتار غیرخطی سازه به دودسته کلاسیک و غیرکلاسیک مجزا می‌شوند [۷]. غیرخطی تماسی شامل هر نوع تعامل سطوح جامد با یکدیگر ناشی از ترک، جدایش و شل‌شدن پیچ یا تکیه‌گاه گیردار است [۸] و در زمره غیرخطی‌های غیرکلاسیک قابل‌طبقه‌بندی است. تاکنون روش‌های تجربی مختلف برای شناسایی عیوب با آثار غیرخطی غیرکلاسیک ارائه‌شده‌اند که تعداد زیادی از آن‌ها در دسته‌بندی «پمپ-حامل» قرار می‌گیرند [۱۰-۸]. ایده اصلی روش مبتنی بر تحریک همزمان دو سیگنال شامل یک تحریک پرانرژی (اغلب با نام تحریک پمپی از آن در متون یاد می‌شود) و یک موج فرکانس بالا (موسوم به تحریک حامل) به سازه میزبان است. فرکانس تحریک پمپی از موج حامل کمتر و دامنه آن اغلب (نه لزوماً) از موج حامل بزرگ‌تر است. در سازه سالم که رفتار آن به‌صورت ایده‌آل خطی فرض می‌شود، پاسخ سازه تنها دارای اجزاء اصلی فرکانس حامل و پمپ خواهد بود. این در حالی است که در سازه معیوب با امضای دینامیکی غیرخطی ناشی از آسیب، طیف پاسخ علاوه بر اجزاء اصلی فرکانس‌های تحریک، شامل فرکانس‌های بالاتر (سوپر هارمونیک) و باندهای تلفیق‌شده اطراف فرکانس حامل خواهد بود [۲, ۱۱]. نسبت دامنه باندهای جانبی به دامنه فرکانس مرکزی ازجمله شاخص‌های آسیب مورد استفاده جهت تعیین شدت آسیب در این تکنیک به شمار می‌رود. تاکنون تکنیک تلفیق ارتعاشات و آکوستیک برای شناسایی آسیب در گستره وسیعی از سازه‌ها شامل ورق‌های تقویت‌شده مورداستفاده در بال هواپیما، اتصالات جوشی در لوله‌ها [۱۲]، تیرهای بتنی [۱۳] و اتصالات پیچی مورداستفاده

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: naser.sepehry@shahroodut.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

قرارگرفته است. بهره‌گیری از ادوات مختلف به‌منظور ثبت سیگنال تلفیق‌شده و اعمال تحریک حامل و به‌خصوص تحریک پمپ، منجر به معرفی سامانه‌های آزمایشگاهی مختلف برای پیاده‌سازی این تکنیک شده‌است. لرزاننده [۱۴]، چکش‌های آنالیز مودال [۱۲]، بلندگو [۱۵]، لیزر، استک [۶] و وصله‌های پیزوالکتریک [۱۶] ازجمله ادوات مورداستفاده به‌منظور پمپاژ انرژی در سیستم در تحقیقات مختلف به شمار می‌روند.

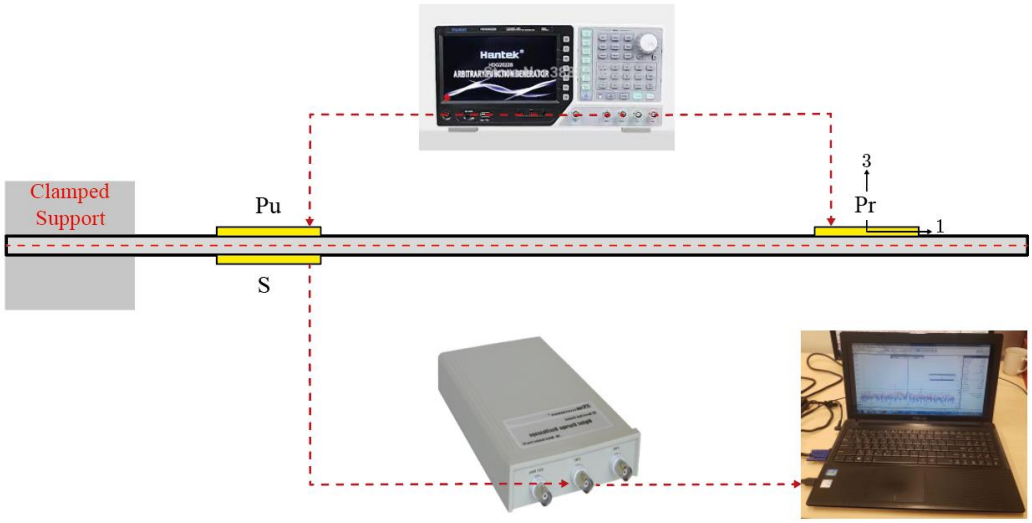
در بسیاری از موارد مکانیزم فیزیکی اساسی که منجر به تلفیق سیگنال می‌شود به‌روشنی قابل‌درک نیست [۶]. بااین‌وجود در ادبیات فن جنبه‌های غیرخطی درگیر در روش تلفیق آکوستیک و ارتعاشات از نظر تئوری و عددی موردبررسی قرارگرفته است [۱۷, ۱۸] وجود دو تحریک با دوره‌های تناوب کاملاً متفاوت در تکنیک تلفیق ارتعاشات و آکوستیک، شبیه‌سازی عددی آن را با چالش‌های جدی در انتخاب اندازه بهینه مش، نمو زمانی و بازه زمانی حل مواجه کرده و اغلب این شبیه‌سازی‌ها با هزینه محاسباتی قابل‌توجهی همراه هستند [۱۲, ۱۹, ۲۰]. یک بررسی جامع از روش‌های مدل‌سازی تعامل غیرخطی ترک–موج در [۲۱] ارائه‌شده است. مدل‌های مختلف غیرخطی کلاسیک و غیرکلاسیک ناشی از ترک، ترموالاستیسیته، سفتی با پروفایل تغییرات دوخطی، ترک‌های باز و بسته‌شونده و هیسترزیس در این مقاله موردبررسی قرارگرفته است. فرمولاسیون مسائل مکانیک محیط پیوسته محلی و غیرمحلی برای مدل‌سازی تعامل ترک–موج نیز در [۱۷, ۲۴–۲۲]. موردمطالعه قرارگرفته‌است.

در مرجع [۲۳]، از یک مدل اجزاء محدود برای تعیین فرکانس مناسب برای تحریک پمپی استفاده‌شد. حالت باز و بسته ترک ناشی از تحریک پمپی با فرکانس تنظیم‌شده، سبب تلفیق موج پمپ با موج حامل شد. در مقاله [۲۵] به بررسی تلفیق آکوستیک و ارتعاشات ناشی از تماس در مرز با استفاده از روش اجزاء محدود پرداخته شده‌است. لی و همکاران پس از مدل‌سازی دقیق هندسه میکروترک مبتنی بر الگوریتم پردازش تصویر میکروسکوپ نوری، نحوه تعامل تحریک پمپی و حامل و شکل‌گیری پدیده تلفیق را به شیوه عددی مطالعه کردند [۲۶]. شبیه‌سازی پدیده تلفیق در یک لمینیت کامپوزیتی متورق توسط سینگ و همکاران ازجمله تلاش‌های معدود دیگر در این حوزه محسوب می‌شود [۲۷].

هدف از این مقاله بررسی ارتعاشات غیرخطی سازه میزبان ناشی از شل‌شدن و تماس در محل تکیه‌گاه آن به‌منظور پایش سلامت زودهنگام و بهینه آن است. برای این منظور آزمون‌های تجربی بر روی تیر مجهز به وصله‌های پیزوالکتریک در حالت‌های سالم و معیوب طراحی شدند. اثر فرکانس پمپ بر روی افزایش قابلیت شناسایی آسیب ازجمله نکات موردتوجه مقاله حاضر است. به‌منظور درک مکانیزم فیزیکی حاکم بر پدیده تلفیق، مدل‌سازی عددی به کمک روش المان طیفی فوریه [۲۸, ۲۹] ارائه می‌شود. رفتار الکترومکانیکی وصله‌های پیزوالکتریک در مدل توسعه داده‌شده مدنظر قرارگرفته‌است. در ادامه، مکانیک تماس به‌عنوان عامل غیرخطی حاکم بر مسئله به فرمولاسیون توسعه‌داده‌شده، اضافه شد. از ایده بستر الاستیک و لقی بین سازه میزبان و مرز صلب به‌منظور مدل‌سازی عامل غیرخطی بهره برده‌شد. با توجه به ماهیت پایای مسئله موردبررسی، تحلیل معادلات حاکم در حوزه زمان و به کمک الگوریتم صریح تفاضل مرکزی موردبحث قرار خواهد گرفت. فرایند پردازش سیگنال و استخراج ویژگی‌های حساس به آسیب در حوزه فرکانس ازجمله چشم‌اندازهای دیگر مقاله حاضر به شمار می‌رود .

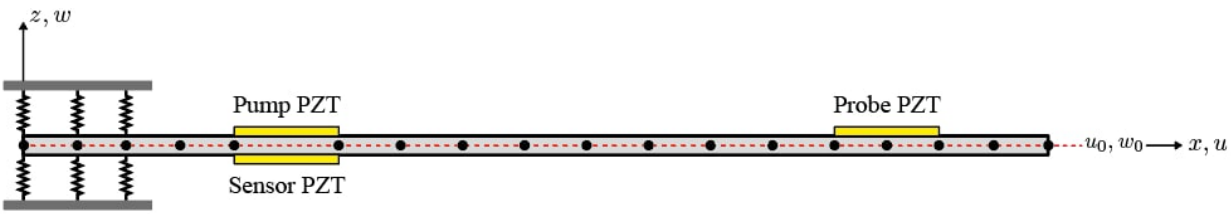
## ۲- سامانه آزمایشگاهی

سامانه آزمایشگاهی مورداستفاده در این پژوهش شامل یک تیر آلومینیومی مجهز به سه وصله پیزوالکتریک و مقیدشده توسط تکیه‌گاه گیردار است (شکل ۱). محل قرارگیری حس‌گر نیز برای اندازه‌گیری پدیده تلفیق هر چه به منبع عیب نزدیک‌تر باشد اثر بهتری دارد. محل قرارگیری عملگر حامل و حسگر لزومی ندارد دقیقاً در یک مکان باشد. برای تحریک وصله‌های عملگری پمپ و حامل از مولد تابع دو کاناله (HDG2002B) استفاده شد. فرکانس حامل در همه آزمون‌ها ۱۰۰ کیلوهرتز است. به‌منظور ایجاد پدیده تلفیق، دو فرکانس ۲۲ کیلوهرتز و ۲۷ کیلوهرتز برای پمپاژ انرژی به سیستم و همچنین بررسی نحوه وابستگی شدت تلفیق به فرکانس پمپ لحاظ شد. دامنه قله به قله هر دو ولتاژ حامل و پمپ ۲۰ ولت است. برای اندازه‌گیری موج تلفیق‌شده، یک اسیلوسکوپ با نرخ نمونه‌برداری ۲۵ میلیون نمونه بر ثانیه (DSLR800C)، ولتاژ وصله پیزوالکتریک حسگر را اندازه‌گیری می‌کند. به‌منظور اطمینان از پایاشدن سیگنال‌های خروجی حسگر، داده‌ها پس از گذشت مدت‌زمان کافی پس از اعمال تحریک‌های سینوسی پمپ و حامل، ذخیره شدند. همچنین، به‌منظور افزایش نسبت سیگنال به نوفه، نتایج در ۱۰ پنجره زمانی مختلف اندازه‌گیری و میانگین آن‌ها به‌عنوان نتایج نهایی در نظر گرفته شد. به‌منظور حذف فرکانس‌های طبیعی ناخواسته تحریک‌شده از سینوسی غیر ایدئال یک فیلتر در حوزه فرکانسی طراحی‌شده است [۲۵]. در ابتدا تیر در حالت سالم که متناظر با تکیه‌گاه گیردار و کاملاً سفت است در دو فرکانس پمپ مختلف مورد پایش




**شکل ۱. شماتیک نحوه اتصال وسایل اندازهگیری به سازه تحت پایش**

**Fig. 1. Schematic of connect measuring instruments to the structure under monitoring**




**شکل ۲. هندسه تیر با مرز الاستیک**

**Fig. 2. Beam geometry with elastic foundation**

قرار گرفت. سپس با شل‌کردن تکیه‌گاه متناظر باحالت معیوب تیر، روند پایش به کمک روش تلفیق تکرار شد. به‌این‌ترتیب، شرایط تکیه‌گاهی برای هر دو فرکانس پمپ مشابه بوده و نتایج قابل‌مقایسه خواهند بود.

## ۳- مدل‌سازی تیر با پیزوالکتریک

شماتیک مدل تیر اویلر-برنولی تحت بررسی به منظور مطالعه پدیده تلفیق ارتعاشات و آکوستیک به کمک المان طیفی فوریه در شکل ۲ نشان داده شده است. همچنین برای بررسی تماس در مرز، اثر تکیه‌گاه گیردار به‌صورت بستر الاستیک بصورت فنرهای عرضی مدل شده‌است و هر دو ارتعاشات عرضی و طولی در مدل‌سازی لحاظ شده‌است [۳۰]. با توجه به فرکانس بالای امواج مورد استفاده در روش تلفیق آکوستیک و ارتعاشات، برای گسسته‌سازی تیر از روش المان طیفی فوریه [۲۸, ۲۹] استفاده‌شده است. مدل‌سازی ارائه‌شده توسط روش المان طیفی فوریه در مقالات قبلی برای سیستم‌های خطی ارائه‌شده‌بود که در این مقاله این مدل‌سازی برای بررسی اثر تماس که عامل غیرخطی است بسط داده‌شده‌است. همچنین این روش برای سازه‌های شامل وصله پیزوالکتریک در کارهای قبلی وجود ندارد که در این مقاله فرمولاسیون آن بسط داده‌شده‌است.

همچنین علاوه بر ارتعاشات عرضی، ارتعاشات طولی تیر نیز در این مدل‌سازی لحاظ گردیده است. سری سینوسی فوریه یک تابع دلخواه پیوسته f(x) در بازه $[0,L]$ عبارت است از:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \quad 0<x<L \qquad (۱)$$

با توجه به ماهیت سری فوریه، تنها می‌توان شرط مرزی خاصی را مدل‌سازی نمود [۲۹]. برای برطرف‌نمودن این مشکل تابع اصلاح‌شده فوریه به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲۹]:

$$f(x)=f(0)\left(1-\frac{x}{L}\right)+f(L)\frac{X}{L}+\sum_{m=1}^{\infty}A_m sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \qquad 0\le x\le L \tag{۲}$$

رابطه میدان جابه‌جایی برای المان i ام تیر اویلر-برنولی به‌صورت زیر است[۳۱]:

$$\begin{aligned} u_i(x,y,z,t)&=\bar{u}_i(x,t)-z\theta(x,t)\\ w_i(x,y,z,t)&=\bar{w}_i(x,t)\\ \theta&=\frac{dw}{dx}\end{aligned} \tag{۳}$$

با توجه به این‌که سطح مقطع مدل یک‌بعدی شامل قسمت‌های مختلفی از قبیل تیر به‌علاوه بستر الاستیک، تیر به‌علاوه وصله پیزوالکتریک عملگر پمپی و حسگر و تیر به‌علاوه وصله پیزوالکتریک عملگر حامل است، محاسبه ماتریس‌های سازه‌ای به روش المان طیفی هر قسمت به‌صورت مجزا ارائه می‌شود.

### ۳- ۱- المان طیفی فوریه برای تیر به‌علاوه بستر الاستیک

برای محاسبه ماتریس‌های سفتی و جرمی ابتدا انرژی پتانسیل و جنبشی تیر با بستر الاستیک محاسبه می‌شوند. انرژی جنبشی و پتانسیل المان i ام تیر با بستر الاستیک به‌صورت زیر است [۳۱, ۳۲]:

$$\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}\int_{L_{i-1}}^{L_i}\left[\rho A\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}\right)^2+\rho A\left(\frac{\partial\bar{w}_i}{\partial t}\right)^2\right]dx\\ U&=\frac{1}{2}\int_{L_{i-1}}^{L_i}\left[EA\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x}\right)^2+EI\left(\frac{\partial^2\bar{w}_i}{\partial x^2}\right)^2+k\bar{w}_i^2\right]dx\end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن E مدول یانگ، A سطح مقطع، I ممان دوم سطح تیر و $\rho$ چگالی المان است. همچنین $L_i$ و $L_{i-1}$ نشان‌دهنده مختصات ابتدایی و انتهایی المان تیر می‌باشند. در المان‌های فاقد فنر کافی است در معادله (۴) ترم $k\bar{w}_i^2$ صفر منظور شود.

با جای‌گذاری رابطه (۲) در (۳) داریم:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(x,t)&=\left\{\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\left(\frac{m\pi}{\left(L^{(e)}\right)}x\right)+u_{i-1}\left(1-\frac{x}{\left(L^{(e)}\right)}\right)+u_i\left(\frac{x}{\left(L^{(e)}\right)}\right)\right\}e^{i\omega t}\\ \bar{w}_i(x,t)&=\left\{\begin{array}{l}\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\left(\frac{m\pi}{L^{(e)}}x\right)+w_{i-1}\left(1-\frac{3x^2}{\left(L^{(e)}\right)^2}+\frac{2x^3}{\left(L^{(e)}\right)^3}\right)\\ +\theta_{i-1}\left(x-\frac{2x^2}{\left(L^{(e)}\right)}+\frac{x^3}{\left(L^{(e)}\right)^2}\right)+\\ w_i\left(\frac{3x^2}{\left(L^{(e)}\right)^2}-\frac{2x^3}{\left(L^{(e)}\right)^3}\right)+\theta_i\left(-\frac{x^2}{\left(L^{(e)}\right)}+\frac{x^3}{\left(L^{(e)}\right)^2}\right)\end{array}\right\}e^{i\omega t}\end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن $\omega$ فرکانس زاویه‌ای است، $A_m$ و $B_m$ ضرایب سری فوریه است. $(u_{i-1},u_i)$ و $(w_{i-1},w_i)$ جابجاییهای طولی و عرضی تیر در مختصات $x=L_{i-1}$ و $L_i$ است.

با جای‌گذاری معادله (۵) در (۴) و حداقل‌کردن انرژی نسبت به ضرایب نامعلوم، ماتریس جرم و سفتی می‌توانند محاسبه شوند. با توجه به این‌که این المان‌ها دارای نیروی خارجی نمی‌باشند، معادله دینامیکی فرکانسی به‌صورت زیر است:

$$\left\{K_i-\omega^2M_i\right\}X_i=0 \tag{۶}$$

که $K_i$ و $M_i$ به ترتیب ماتریس‌های سفتی و جرمی تیر متصل به فنر در بخش تکیه‌گاه هستند و به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} K_i&=\begin{bmatrix}K_{11}^i & K_{12}^i & K_{13}^i\\ K_{12}^i & K_{22}^i & K_{23}^i\\ K_{13}^i & K_{23}^i & K_{33}^i\end{bmatrix}\\ M_i&=\begin{bmatrix}M_{11}^i & M_{12}^i & M_{13}^i\\ M_{12}^i & M_{22}^i & M_{23}^i\\ M_{13}^i & M_{23}^i & M_{33}^i\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{۷}$$

و بردار ضرایب نامعلوم به‌صورت زیر است:

$$X_i = \{u_{i-1}, w_{i-1}, \theta_{i-1}, A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_M, u_i, w_i, \theta_i\}^T \quad (۸)$$

### ۳- ۲- المان طیفی فوریه برای تیر به‌علاوه وصله پیزوالکتریک

میدان جابه‌جایی المان مرکب از تیر و وصله پیزوالکتریک نیز از معادله (۳) تبعیت می‌کند. رابطه انرژی جنبشی و پتانسیل این المان به‌صورت زیر است:

$$T = \frac{1}{2}\int_{L_{i-1}}^{L_i} \left\{ \rho A \left[ \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t}\right)^2 \right] + \rho_P A_P \left[ \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t}\right)^2 \right] \right\} dx \quad (۹)$$

که در آن $A_P$ سطح مقطع پیزوالکتریک و $\rho_P$ چگالی پیزوالکتریک هستند.

$$U = \frac{1}{2}\int_{L_{i-1}}^{L_i} \left\{ EA\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x}\right)^2 + EI\left(\frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial x^2}\right)^2 + I_1\left(\frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial x^2}\right)^2 - I_2 E_3\left(\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x}\right) - I_3 E_3^2 \right\} \quad (۱۰)$$

که در آن $E_3$ میدان الکتریکی، $I_1$ و $I_2$ و $I_3$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۳۳]:

$$I_1 = E_p b_p \frac{z^3}{3}\Bigg|_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} ; \quad I_2 = e_{31} b_p z^2 \Bigg|_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} ; \quad I_3 = e_{31} b_p z \Bigg|_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \quad (۱۱)$$

که در آن $E_p$ مدول یانگ وصله پیزوالکتریک است.

بعد از حداقل‌کردن معادلات انرژی با استفاده از روش ریلی ریتز، ماتریس‌های سفتی و جرمی محاسبه‌شده و معادله حاکم در حوزه فرکانس را نتیجه می‌دهد:

$$\left(K_i - \omega^2 M_i\right) = F \quad (۱۲)$$

که بردار نیروی خارجی در غیاب نیروی مکانیکی تنها در المان‌های شامل عملگر مقدار داشته و برای المان شامل پیزوالکتریک حسگر $F = 0$ است.

### ۳- ۳- عمومی‌سازی ماتریس‌ها

مشابه عمومی‌سازی ماتریس‌های در روش المان محدود، ماتریس‌های سفتی و جرم با توجه به معادله (۸) به‌صورت زیر عمومی‌سازی می‌شوند [۲۹].

$$M_g = \begin{bmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & M_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{12}^1 & M_{22}^1 & M_{23}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{13}^1 & M_{23}^1 & M_{33}^1 + M_{11}^2 & M_{12}^2 & M_{13}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{12}^2 & M_{22}^2 & M_{23}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{13}^2 & M_{23}^2 & M_{33}^2 + M_{11}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{11}^{N-1} + M_{11}^N & M_{12}^N & M_{13}^N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{12}^N & M_{22}^N & M_{23}^N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{13}^N & M_{23}^N & M_{33}^N \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

$$K_g = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{13}^1 & K_{23}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{12}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{13}^2 & K_{23}^2 & K_{33}^2 + K_{11}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^{N-1} + K_{11}^N & K_{12}^N & K_{13}^N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{12}^N & K_{22}^N & K_{23}^N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{13}^N & K_{23}^N & K_{33}^N \end{bmatrix}, \quad (۱۴)$$

معادله دینامیکی در حوزه فرکانس به‌صورت زیر است:

$$\left(K_g - \omega^2 M_g\right) X_g = F_g \quad (۱۵)$$

که در آن $K_g$، $M_g$، $X_g$ و $F_g$ به ترتیب ماتریس سفتی، ماتریس جرم، بردار جابجایی‌های گره‌ای و بردار نیروی معادل پیزوالکتریک هستند.

برای بررسی ارتعاشات غیرخطی (نحوه اضافه‌کردن بخش غیرخطی در بخش۳-۵ اشاره خواهد شد) معادله (۱۵) از حوزه فرکانس به حوزه زمان انتقال داده می‌شود:

$$K_g X_g + M_g \ddot{X}_g = F_g \tag{۱۶}$$

با اضافه‌نمودن میرایی سازه‌ای به‌صورت میرایی ریلی $(C_g = \alpha M_g + \beta K_g)$ به معادله (۱۶) داریم:

$$M_g \ddot{X}_g + C_g \dot{X}_g + K_g X_g = F_g \tag{۱۷}$$

### ۳- ۴- محاسبه ولتاژ خروجی حسگر پیزوالکتریک

برای محاسبه ولتاژ خروجی حسگر پیزوالکتریک از معادله اساسی پیزوالکتریک استفاده می‌شود. برای این منظور از بخش الکتریکی معادله پیزوالکتریک داریم:

$$D_3 = e_{31}\varepsilon_1 + \epsilon_{33}E_3 \tag{۱۸}$$

و شار خروجی المان پیزوالکتریک به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Q(t) = \int_{A_p} D_3 dA_p' \tag{۱۹}$$

که در آن $A_p'$ سطح مقطع پیزوالکتریک می باشد. با عمومی‌سازی ماتریس المان خروجی درنهایت ولتاژ خروجی پیزوالکتریک به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C_P} \tag{۲۰}$$

که $C_P$ ظرفیت خازنی پیزوالکتریک است.

### ۳- ۵- مکانیک تماس

با توجه به ماهیت غیرخطی تماس، برای بررسی این اثر، ناحیه تیر با بستر الاستیک باید موردمطالعه قرار گیرد. شرایط تماس معروف به هرتز-سینیورینی-مورئو [۳۴, ۳۵] عبارت است از:

$$\begin{cases} g_N^i \geq 0 \\ \lambda_N^i \geq 0 \\ g_N^i \lambda_N^i = 0 \end{cases} \quad i=1,2,..,s \tag{۲۱}$$

که در آن $g_N^i$ تابع لقی و $\lambda_N^i$ فشار عمودی تماس است. i شماره گره در تماس و s تعداد گره‌های در حالت تماس هستند. شرایط معادله ۲۱ جهت اطمینان از عدم نفوذ دو سطح در تماس به مرزهای یکدیگر اعمال می‌شوند. تعبیر معادله ۲۱ به این ترتیب است: هنگامی‌که تابع لقی مثبت است (عدم تماس)، نیروی تماسی صفر و هنگامی‌که تابع لقی منفی است (نفوذ دو سطح به داخل مرزهای یکدیگر)، نیروی تماسی باید صفر باشد. به‌این‌ترتیب، سه شرط فوق دربرگیرنده تمام حالات ممکن تعامل دو سطح در تماس را شامل می‌شوند.

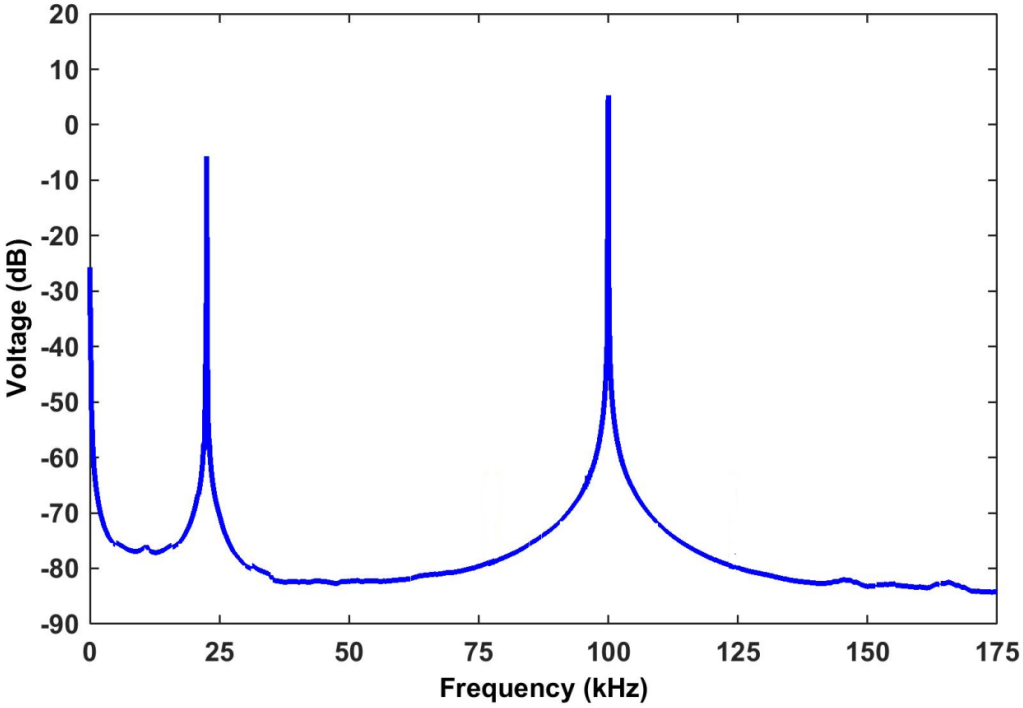
به‌منظور اضافه‌کردن شرط تماسی به معادلات حاکم، ابتدا معادله (۱۷) در یک‌لحظه خاص حل می‌شود. درصورتی‌که جابجایی گره‌های المان‌های قسمت تیر با بستر الاستیک در لبه بالایی و پایینی تیر از یک مقدار تلورانس مشخص بیشتر باشند، نیرویی در این گره‌ها به‌اندازه مقدار فنر در جابجایی به گره‌های موردنظر اعمال می‌شود. در غیر این صورت گره‌ها همان مقادیری را خواهند داشت که از حل معادله (۱۷) به دست می‌آید. این نیرو با استفاده از روش پنالتی به‌دست‌آمده‌است [۳۴].

## ۴- نتایج و بحث

در این بخش، پس از ارائه نتایج تجربی مربوط به روش تلفیق ارتعاشات و آکوستیک، نتایج شبیه‌سازی ارتعاشات غیرخطی تیر اویلر-برنولی ناشی از تماس در محل تکیه‌گاه به روش المان طیفی فوریه صحه‌گذاری شده و موردبحث و بررسی قرار خواهد گرفت.

### ۴- ۱- نتایج تجربی

در این قسمت به بررسی طیف پاسخ خروجی حس‌گر ناشی از اعمال دو تحریک هم‌زمان پمپ و حامل به تیر آلومینیومی در دو حالت سالم و معیوب پرداخته می‌شود. شکل ۳ طیف پاسخ پیزوالکتریک حسگر به‌ازای فرکانس پمپ ۲۲ کیلوهرتز و فرکانس حامل ۱۰۰ کیلوهرتز را برای حالت سالم نشان می‌دهد. برای رفع مشکل قله‌های تشدید حاصل از اعمال سینوسی غیر ایدئال از فیلتر ارائه‌شده در [۲۵] استفاده‌شده است. شکل ۴-الف نتایج حالت معیوب را به ازای فرکانس‌های تحریک اشاره‌شده نشان می‌دهد. به‌منظور بررسی دقیق‌تر نتایج، طیف پاسخ فرکانسی برای حالت معیوب در شکل




**شکل ۳. طیف پاسخ سازه به اعمال تحریک‌های پمپی (۲۲ کیلوهرتز) و حامل (۱۰۰ کیلوهرتز) در حالت سالم**

**Fig. 3. Spectrum of structural response to pump (22 kHz) and probe (100 kHz) excitations in the healthy state**

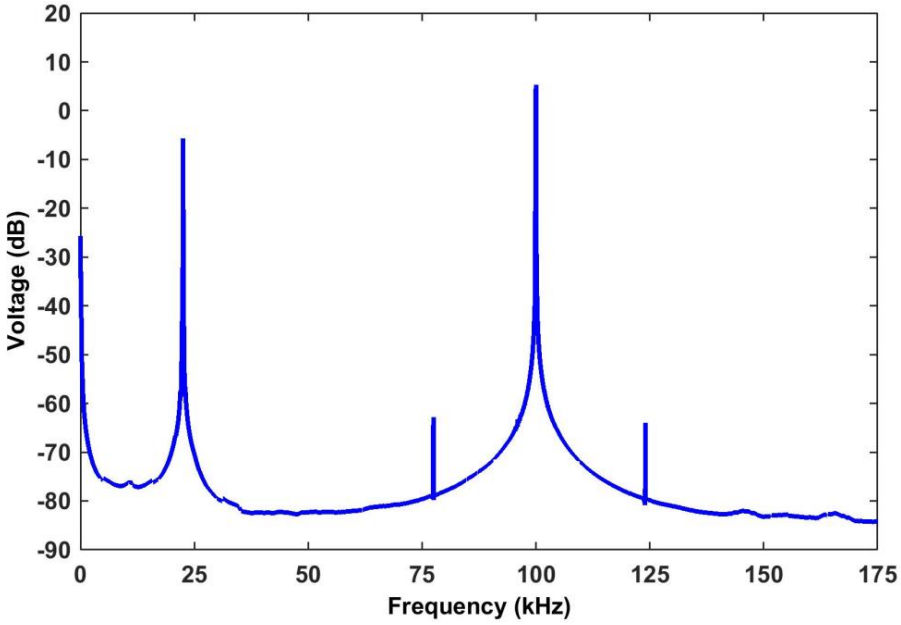
۴-ب بزرگ‌نمایی و بازترسیم شده است. مطابق شکل ۳، در حالت سالم تنها دو فرکانس حامل و پمپ در طیف ظاهر شده است، درصورتی‌که در حالت برقراری تماس در تکیه‌گاه، علاوه بر این دو، فرکانس‌های حاصل از تلفیق موج حامل و پمپ در مقادیر فرکانسی ۲۲±۱۰۰ کیلوهرتز نیز در طیف پاسخ فرکانسی بروز کرده‌اند. تطابق مودهای ارتعاشی پیش‌نیاز اصلی انتقال انرژی از فرکانس حامل به فرکانس تلفیق است. این انتقال انرژی منجر به کاهش دامنه قله موج حامل در حالت سالم نسبت به حالت معیوب شده‌است.

در شکل ۵ و شکل ۶، نتایج تکرار آزمون تجربی برای فرکانس پمپ ۲۷ کیلوهرتز و پس از اعمال فیلتر نشان داده‌شده‌است. در شکل ۶ ب، طیف پاسخ در اطراف فرکانس حامل بزرگ‌نمایی شده‌است. مشابه حالت قبل، در حالت سالم رفتار ارتعاشی سازه خطی بوده و تنها فرکانس‌های پمپ و حامل در طیف وجود دارند. درصورتی‌که در حالت معیوب باندهای جانبی حاصل از تلفیق در مقادیر فرکانسی ۲۷±۱۰۰ کیلوهرتز در شکل ظاهر گردیده‌است. در فرکانس پمپ ۲۲ و ۲۷ کیلوهرتز میانگین دامنه باند تلفیق سمت چپ و راست به ترتیب برابر ۰/۰۰۱۶ و ۰/۰۰۱۸ است.

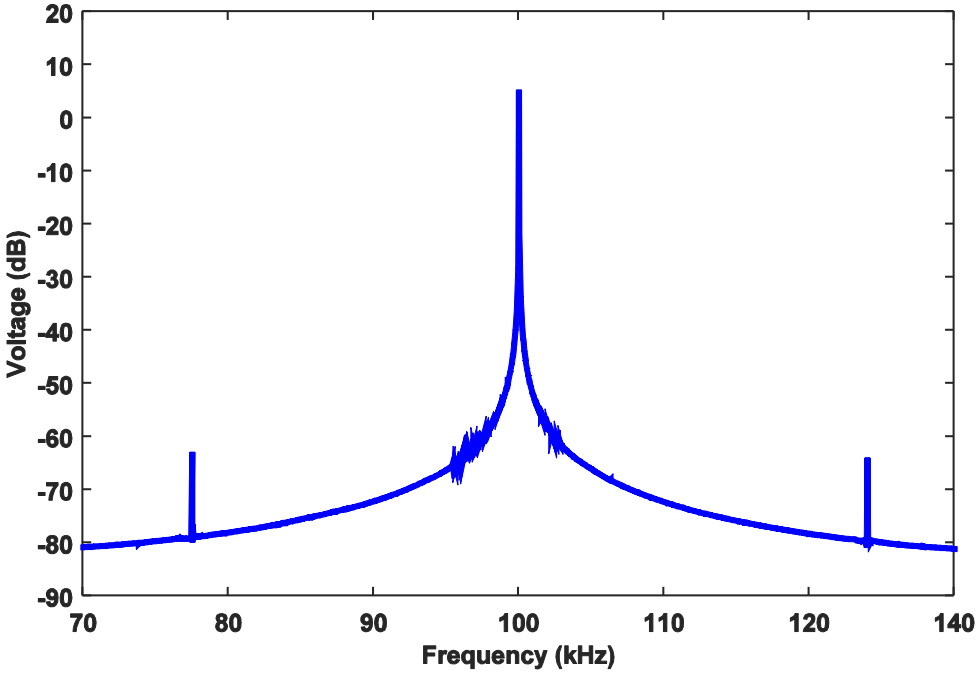
### ۴- ۲- نتایج شبیه‌سازی به روش المان طیفی فوریه

به‌منظور راستی آزمایی فرمولاسیون ارائه‌شده، پدیده تلفیق ارتعاشات و آکوستیک در تیر مجهز به وصله پیزوالکتریک و داری شرایطی مشابه با سامانه آزمایشگاهی به کمک المان طیفی فوریه مدل‌سازی و تحلیل شد. تیر دارای طول ۲۰۰ میلی‌متر و ضخامت ۲ میلی‌متر است. هر سه پیزوالکتریک‌ها دارای طول ۲۰ میلی‌متر و ضخامت ۰/۲ میلی‌متر هستند. فاصله پیزوالکتریک حامل و حس‌گر از تکیه‌گاه ۴ میلی‌متر و فاصله پیزوالکتریک پمپ از تکیه‌گاه ۱۵۵ میلی‌متر است. خواص مواد آلومینیوم و وصله‌های پیزوالکتریک در جدول ۱ ارائه‌شده‌است.

برای کل سازه درمجموع ده المان و برای هر المان تعداد کل جملات سری فوریه برابر ۱۰ در نظر گرفته شده‌است.این مقادیر به کمک حل مقدار ویژه و بر اساس همگرایی مقادیر ویژه تا فرکانس ۲۰۰ کیلوهرتز انتخاب‌شده‌اند. بردار نیروی الکتریکی خارجی توسط معادله (۱۷) محاسبه و به درجات آزادی متناظر با پیزوالکتریک‌های عملگر پمپ و حامل اعمال شد. فرکانس حامل ۱۰۰ کیلوهرتز و فرکانس پمپ دو فرکانس ۲۲ و ۲۷ کیلوهرتز



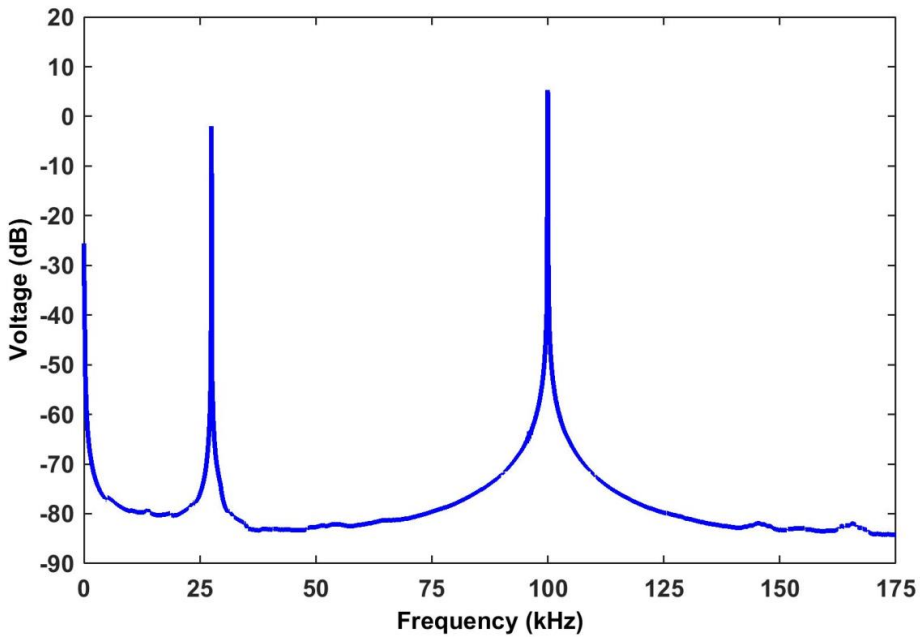

(الف)




(ب)

**شکل ۴. طیف پاسخ سازه به اعمال تحریک‌های پمپی (۲۲ کیلوهرتز) و حامل (۱۰۰ کیلوهرتز) در حالت معیوب الف) کل بازه فرکانسی ب) بزرگ‌نمایی در اطراف فرکانس مرکزی حامل**

**Fig. 4. Spectrum response of the structure to the application of pump (22 kHz) and probe (100 kHz) excitations in the damage state a) The whole frequency range b) Magnification around the probe central frequency**




**شکل ۵. طیف پاسخ سازه به اعمال تحریک‌های پمپی (۲۷ کیلوهرتز) و حامل (۱۰۰ کیلوهرتز) در حالت سالم**

**Fig. 5. Spectrum of structural response to pump (27 kHz) and probe (100 kHz) excitations in the healthy state**

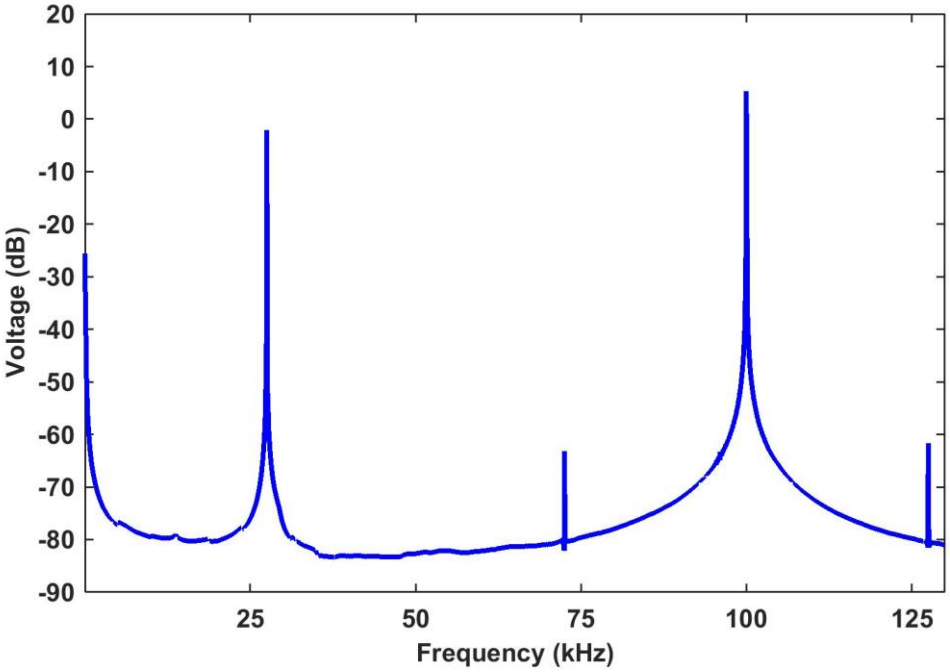
**جدول ۱. خواص مواد پیزوالکتریک و آلومینیوم**

**Table 1. Properties of piezoelectric materials and Aluminum**

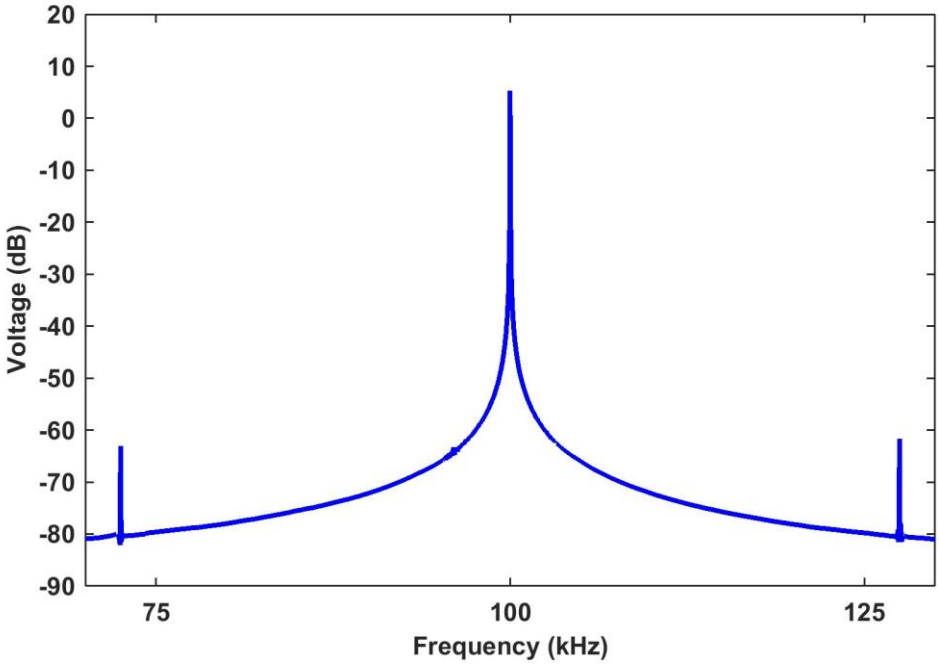
| ماده | چگالی $(kg/m^3)$ | گذردهی الکتریکی $(F/m)$ | ثابت پیزوالکتریک $(C/m^2)$ | مدول یانگ $(N/m^2)$ |
|---|---|---|---|---|
| | $\rho$ | $\epsilon_{33}$ | $e_{33}$ | $c_{11}$ |
| پیزوالکتریک | ۷۵۰۰ | $۱۳\times۱۰^{-۹}$ | -۶/۵ | $۶۲\times۱۰^{۹}$ |
| آلومینیوم | ۲۷۰۰ | -- | -- | $۷۰\times۱۰^{۹}$ |

انتخاب شد. با افزایش زمان حل، سیگنال‌های تحریک به سیگنال‌های سینوسی پایاشده نزدیک می‌شوند. برای حالت سالم سازه تنها معادله (۱۷) که یک معادله خطی است حل می‌گردد. در این حالت فرض بر این است که تکیه‌گاه کاملاً سفت بوده و هیچ‌گونه تماس بین سازه و مرز صلب وجود ندارد. در هر حالت معیوب، معادله (۱۷) و بخش تماس هم‌زمان حل به‌طور هم‌زمان حل می‌شوند. برای شبیه‌سازی، زمان نهایی متناظر با زمان ۵۰۰ سیکل برای فرکانس پمپ در نظر گرفته‌شده‌است. همچنین گام زمانی ۱/۰ میکروثانیه انتخاب‌شده‌است. پس از اتمام حل، ولتاژ حسگری پیزوالکتریک به کمک معادله (۲۰) در حوزه زمان محاسبه و پاسخ فرکانسی ولتاژ حس‌گر با اعمال تبدیل فوریه به سری زمانی جابجایی‌های گره‌ای محاسبه می‌شود.

شکل ۷ نتایج شبیه‌سازی برای فرکانس حامل ۱۰۰ کیلوهرتز و پمپ ۲۲ کیلوهرتز را در سازه سالم نشان می‌دهد. مطابق شکل، به دلیل ماهیت خطی سازه در بازه فرکانسی موردنظر، تنها فرکانس ۱۰۰ کیلوهرتز در طیف پاسخ بروز کرده‌است. شکل ۸ نتایج شبیه‌سازی برای فرکانس حامل ۱۰۰ کیلوهرتز



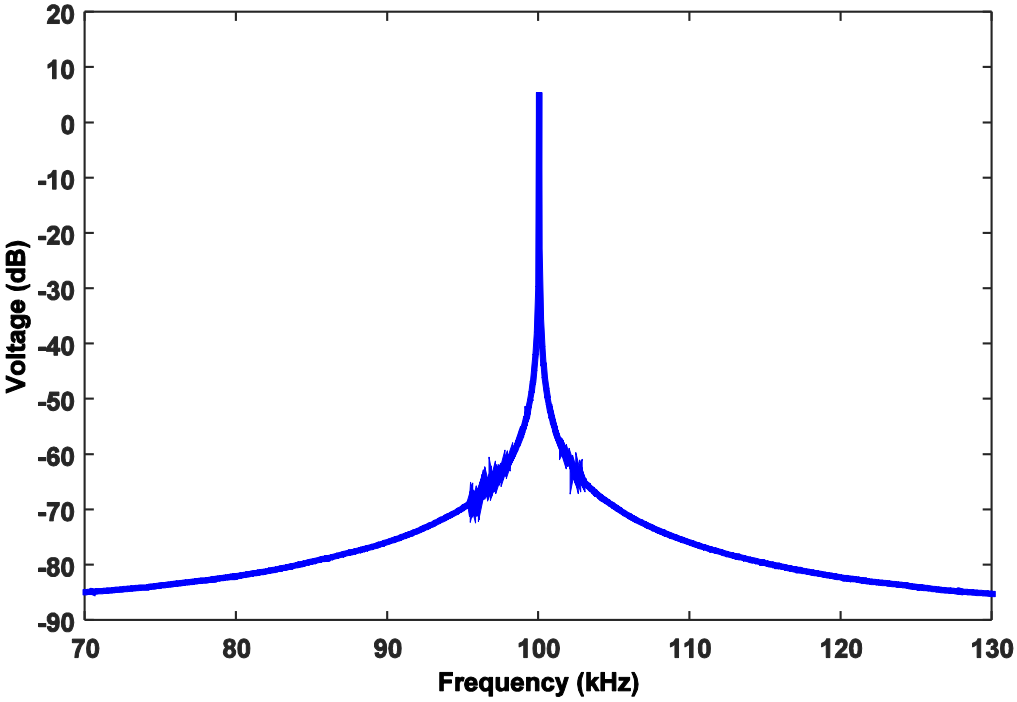

(الف)




(ب)

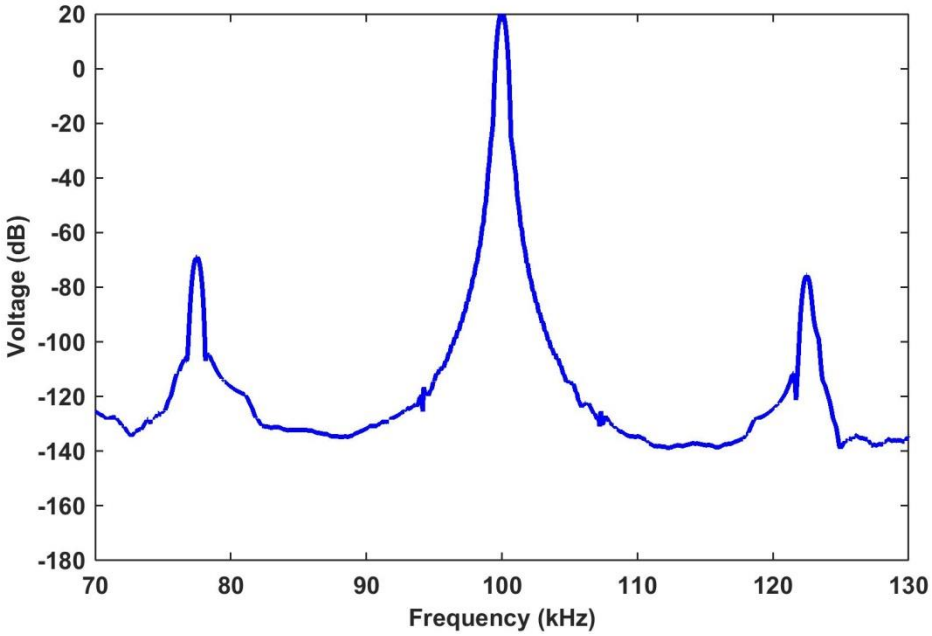
**شکل ۶. طیف پاسخ سازه به اعمال تحریک‌های پمپی (۲۷ کیلوهرتز) و حامل (۱۰۰ کیلوهرتز) در حالت معیوب الف) کل بازه فرکانسی ب) بزرگ‌نمایی در اطراف فرکانس مرکزی حامل**

**Fig. 6. Spectrum response of the structure to the application of pump (27 kHz) and probe (100 kHz) excitations in the damage state a) The whole frequency range b) Magnification around the probe central frequency**



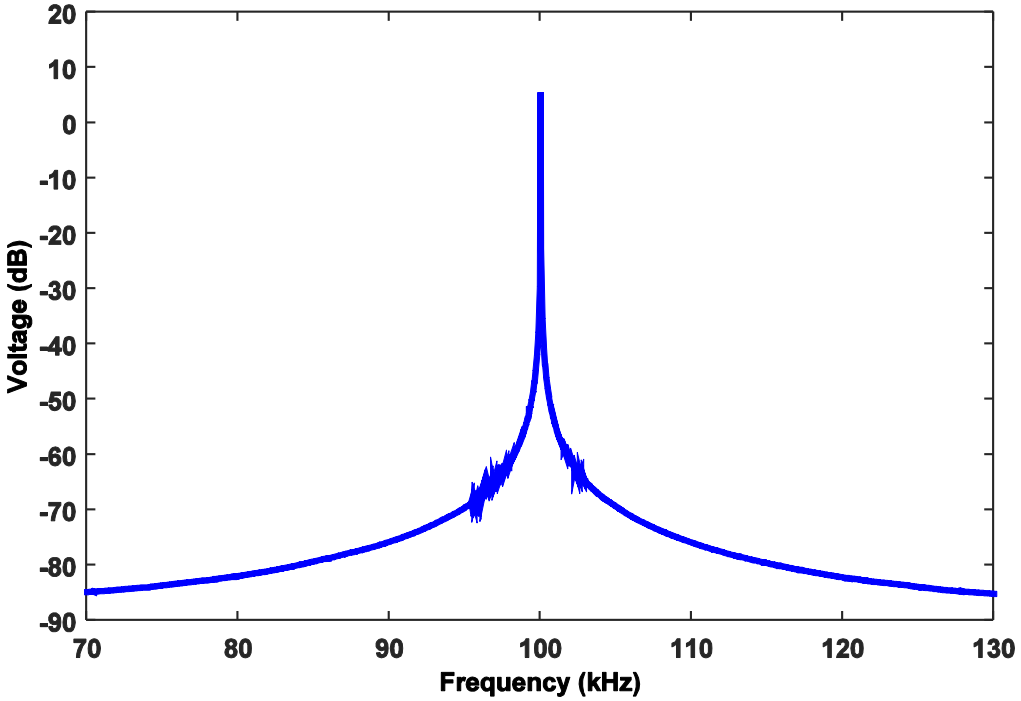

شکل ۷. طیف پاسخ سازه به اعمال تحریک‌های پمپی (۲۲ کیلوهرتز) و حامل (۱۰۰ کیلوهرتز) در حالت سالم

**Fig. 7. Spectrum of structural response to pump (22 kHz) and probe (100 kHz) excitations in the healthy state**




شکل ۸. طیف پاسخ سازه به اعمال تحریک‌های پمپی (۲۲ کیلوهرتز) و حامل (۱۰۰ کیلوهرتز) در حالت معیوب

**Fig. 8. Spectrum of structural response to pump (22 kHz) and probe (100 kHz) excitations in the damage state**




**شکل ۹. طیف پاسخ سازه به اعمال تحریک‌های پمپی (۲۷ کیلوهرتز) و حامل (۱۰۰ کیلوهرتز) در حالت سالم**

**Fig. 9. Spectrum of structural response to pump (27 kHz) and probe (100 kHz) excitations in the healthy state**

و پمپ ۲۲ کیلوهرتز در سازه معیوب را نشان می‌دهد.

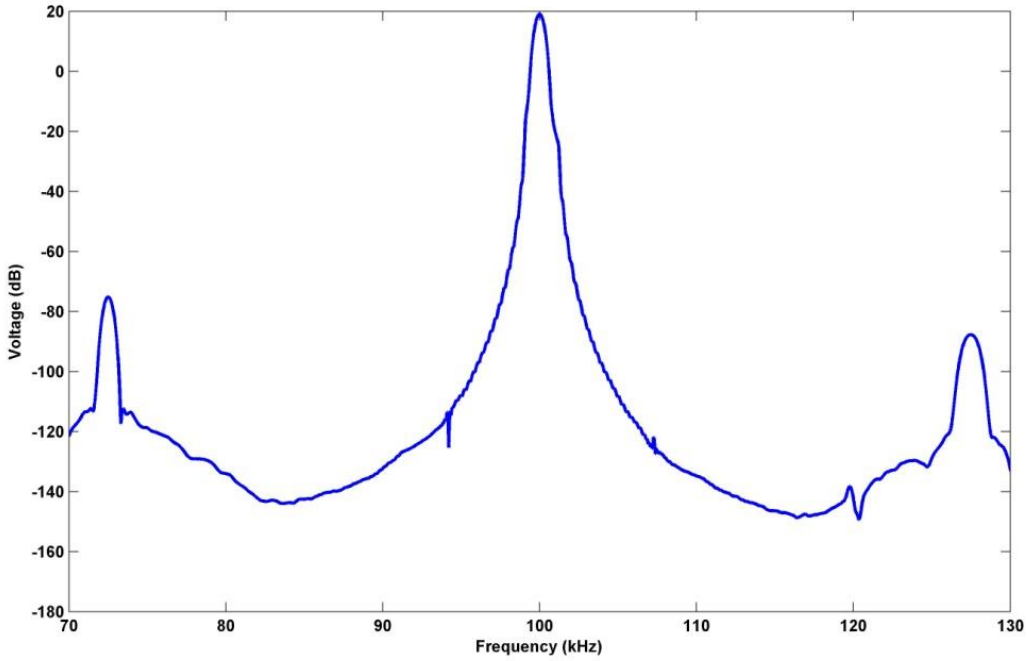
طبق نتایج، علاوه بر فرکانس ۱۰۰ کیلوهرتز فرکانس‌های ۲۲±۱۰۰ کیلوهرتز نیز در پاسخ فرکانسی ولتاژ حس‌گر مشاهده می‌شود که ناشی از تماس غیرخطی در محل تکیه‌گاه هستند.

با تکرار شبیه‌سازی برای فرکانس حامل ۱۰۰ کیلوهرتز و پمپ ۲۷ کیلوهرتز نتایج مطابق شکل‌های ۹ و ۱۰ حاصل گردید. در حالت سالم (شکل ۹) امضای دینامیکی کاملاً خطی بوده و تنها فرکانس ۱۰۰ کیلوهرتز در طیف بروز کرده است. این در حالی است که در حالت معیوب (شکل ۱۰) علاوه بر فرکانس ۱۰۰ کیلوهرتز فرکانس‌های ۲۷±۱۰۰ کیلوهرتز نیز در پاسخ فرکانسی سازه ظاهر شده‌است. در هر دو حالت، نتایج شبیه‌سازی تطابق مناسبی با نتایج تجربی داشته و فرمولاسیون ارائه‌شده به‌خوبی قادر به شبیه‌سازی ماهیت غیرخطی تماس است.

همان‌طور نتایج تجربی و تئوری نشان می‌دهد در حالت معیوب متناظر با تماس بین تیر با تکیه‌گاه، باندهای کناری که در پاسخ فرکانسی سیگنال خروجی حس‌گر نسبت به حالت سالم اضافه‌شده است. به‌علاوه، تماس تأثیر چندانی بر دامنه فرکانس‌های تحریک پمپ و حامل در حالت سالم و معیوب نداشته که نشان از کوچک‌بودن عیب است. همین امر نشان‌دهنده آن است که روش تلفیق آکوستیک و ارتعاشات قادر به تشخیص عیوب ریزی در سازه است که روش‌های خطی قادر به تشخیص آن عیوب نیستند.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق تأثیر تماس در محل تکیه‌گاه در رفتار ارتعاشی غیرخطی سازه تحت پایش به روش تلفیق ارتعاشات و آکوستیک موردبررسی قرار گرفت. به‌منظور کاهش هزینه‌های محاسباتی که عنصر جدایی‌ناپذیر شبیه‌سازی پدیده‌های فرکانس بالا است، از روش المان طیفی فوریه که دارای نرخ همگرایی بسیار مناسب نسبت به سایر روش‌های عددی مشابه است، استفاده گردید. مکانیک تماس به‌عنوان عامل غیرخطی حاکم بر مسئله، به کمک روش پنالتی به فرمولاسیون المان طیفی ضمیمه شد. کارکرد روش تلفیق و وابستگی آن به تحریک فرکانس پایین با تغییر مقدار فرکانس پمپ در آزمون‌های تجربی و شبیه‌سازی بررسی شد. طبق نتایج، در آزمون‌های تجربی و عددی، تماس در محل تکیه‌گاه معیوب منجر به بروز فرکانس‌های تلفیق در اطراف باند مرکزی حامل می‌شود. غیاب باندهای فرکانسی تلفیق در سازه سالم (مبنا) امکان استخراج ویژگی‌های حساس به آسیب مناسب و پایش زودهنگام سازه میزبان را فراهم می‌آورد.




**شکل ۱۰. طیف پاسخ سازه به اعمال تحریک‌های پمپی (۲۷ کیلوهرتز) و حامل (۱۰۰ کیلوهرتز) در حالت معیوب**

**Fig. 10. Spectrum of structural response to pump (27 kHz) and probe (100 kHz) excitations in the damage state**

## منابع

[1] J. Jang, P. Liu, B. Kim, S.-w. Kim, H. Sohn, Silicon wafer crack detection using nonlinear ultrasonic modulation induced by high repetition rate pulse laser, Optics and Lasers in Engineering, 129 (2020) 106074-106082.

[2] S. Kim, D.E. Adams, H. Sohn, G. Rodriguez-Rivera, N. Myrent, R. Bond, J. Vitek, S. Carr, A. Grama, J.J. Meyer, Crack detection technique for operating wind turbine blades using Vibro-Acoustic Modulation, Structural Health Monitoring, 13(6) (2014) 660-670.

[3] N. Sepehry, S. Asadi, M. Shamshirsaz, F. Bakhtiari Nejad, A new model order reduction method based on global kernel k-means clustering: Application in health monitoring of plate using Lamb wave propagation and impedance method, Structural Control and Health Monitoring, 25(9) (2018) e2211.

[4] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, M. Shamshirsaz, W. Zhu, Nonlinear modeling of cracked beams for impedance based structural health monitoring, in: ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, American Society of Mechanical Engineers, Florida, USA, 2017, V04BT05A034.

[5] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, M. Shamshirsaz, Discrete singular convolution and spectral finite element method for predicting electromechanical impedance applied on rectangular plates, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 28(18) (2017) 2473-2488.

[6] L. Pieczonka, A. Klepka, A. Martowicz, W.J. Staszewski, Nonlinear vibroacoustic wave modulations for structural damage detection: an overview, Optical Engineering, 55(1) (2015) 011005.

[7] T. Stepinski, T. Uhl, W. Staszewski, Advanced structural damage detection: from theory to engineering applications, John Wiley & Sons, 2013.

[8] I.Y. Solodov, N. Krohn, G. Busse, CAN: an example of nonclassical acoustic nonlinearity in solids, Ultrasonics, 40(1-8) (2002) 621-625.

[9] P.J. Westervelt, Scattering of sound by sound, The Journal of the Acoustical Society of America, 29(2) (1957) 199-203.

[10] U. Ingard, D.C. Pridmore-Brown, Scattering of sound by sound, The Journal of the Acoustical Society of America, 28(3) (1956) 367-369.

[11] H. Sohn, H.J. Lim, M.P. DeSimio, K. Brown, M. Derriso, Nonlinear ultrasonic wave modulation for online fatigue crack detection, Journal of Sound and Vibration, 333(5) (2014) 1473-1484.

[12] D.M. Donskoy, A.M. Sutin, Vibro-acoustic modulation nondestructive evaluation technique, Journal of intelligent material systems and structures, 9(9) (1998) 765-771.

[13] I.N. Didenkulov, Interaction of sound and vibrations in concrete with cracks, in: AIP Conference Proceedings, AIP, 524 , (2000) 279-282 .

[14] A. Klepka, W.J. Staszewski, R. Jenal, M. Szwedo, J. Iwaniec, T. Uhl, Nonlinear acoustics for fatigue crack detection–experimental investigations of vibro-acoustic wave modulations, Structural Health Monitoring, 11(2) (2012) 197-211.

[15] E. Ballad, S.Y. Vezirov, K. Pfleiderer, I.Y. Solodov, G. Busse, Nonlinear modulation technique for NDE with air-coupled ultrasound, Ultrasonics, 42(1-9) (2004) 1031-1036.

[16] H.J. Lim, Y. Kim, G. Koo, S. Yang, H. Sohn, I.-h. Bae, J.-H. Jang, Development and field application of a nonlinear ultrasonic modulation technique for fatigue crack detection without reference data from an intact condition, Smart Materials and Structures, 25(9) (2016) 095055.

[17] P.P. Delsanto, Universality of nonclassical nonlinearity, Springer, 2006.

[18] R.A. Guyer, P.A. Johnson, Nonlinear mesoscopic elasticity: the complex behaviour of rocks, soil, concrete, John Wiley & Sons, 2009.

[19] D. Donskoy, A. Sutin, A. Ekimov, Nonlinear acoustic interaction on contact interfaces and its use for nondestructive testing, Ndt & E International, 34(4) (2001) 231-238.

[20] M. Ryles, F. Ngau, I. McDonald, W. Staszewski, Comparative study of nonlinear acoustic and Lamb wave techniques for fatigue crack detection in metallic structures, Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 31(8) (2008) 674-683.

[21] D. Broda, W. Staszewski, A. Martowicz, T. Uhl, V. Silberschmidt, Modelling of nonlinear crack–wave interactions for damage detection based on ultrasound—A review, Journal of Sound and Vibration, 333(4) (2014) 1097-1118.

[22] A. Martowicz, W.J. Staszewski, M. Ruzzene, T. Uhl, Vibro-acoustic wave interaction in cracked plate modeled with peridynamics, A Proceedings of the WCCM XI, ECCM V, ECFD VI, Onate E., Oliver X., Huerta (eds.), International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, Spain, (2014) 4021-4027.

[23] A. Martowicz, P. Packo, W.J. Staszewski, T. Uhl, Modelling of nonlinear vibro-acoustic wave interaction in cracked aluminium plates using local interaction simulation approach, in: 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Vienna, Austria, 2012.

[24] A. Martowicz, M. Ruzzene, W.J. Staszewski, T. Uhl, Non-local modeling and simulation of wave propagation and crack growth, in: AIP Conference Proceedings, American Institute of Physics, 2014, 513-520.

[25] N. Sepehry, M. Ehsani, M. Shamshirsaz, M.

Sadighi, Contact acoustic nonlinearity identification via online vibro-acoustic modulation technique, Modares Mechanical Engineering, 20(7) (2020) 1719-1730.

[26] S.E. Lee, S. Jin, J.-W. Hong, Microcrack modeling and simulation for nonlinear wave modulation, in: Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems 2016, International Society for Optics and Photonics, 2016, 98033J.

[27] A.K. Singh, B.-Y. Chen, V.B. Tan, T.-E. Tay, H.-P. Lee, Finite element modeling of nonlinear acoustics/ultrasonics for the detection of closed delaminations in composites, Ultrasonics, 74 (2017) 89-98.

[28] X. Zhang, The fourier spectral element method for vibration analysis of general dynamic structures, Wayne State University Dissertations (2011).

[29] Z. Su, G. Jin, Vibration analysis of coupled conical-cylindrical-spherical shells using a Fourier spectral element method, The Journal of the Acoustical Society of America, 140(5) (2016) 3925-3940.

[30] S. Stoykov, G. Litak, E. Manoach, Vibration energy harvesting by a Timoshenko beam model and piezoelectric transducer, The European Physical Journal Special Topics, 224(14) (2015) 2755-2770.

[31] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, M. Shamshirsaz, Thermo-Electro Mechanical Impedance based Structural Health Monitoring: Euler-Bernoulli Beam Modeling, AUT Journal of Modeling and Simulation, 49(2) (2017) 143-152.

[32] S.S. Rao, Vibration of continuous systems, Wiley Online Library, 2007.

[33] N. Sepehry, M. Shamshirsaz, A. Bastani, Experimental and theoretical analysis in impedance-based structural health monitoring with varying temperature, Structural Health Monitoring, 10(6) (2011) 573-585.

[34] A. Konyukhov, R. Izi, Introduction to computational contact mechanics: a geometrical approach, John Wiley & Sons, 2015.

[35] N. Sepehry, M. Ehsani, W. Zhu, F. Bakhtiari-Nejad, Application of scaled boundary finite element method for vibration-based structural health monitoring of breathing cracks, Journal of Vibration and Control, (2020) 1077546320968646.

**چگونه به این مقاله ارجاع دهیم**

*N. Sepehry, M. Ehsani, M. Shamshirsaz, M. Sadighi, Modeling of vibro-acoustic modulation induced by non-linear contact in the Euler-Bernoulli beam using the Fourier spectral element, Amirkabir J. Mech Eng., 53(Special Issue 6)(2021) 3809-3824.*

**DOI:** 10.22060/mej.2021.18676.6875

این صفحه عمداً خالی است