



## قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه چندلایه کامپوزیتی

مسعود جوادی\*، وحید خلفی

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران.

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۱۸  
بازنگری: ۱۳۹۹/۱۲/۲۴  
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۱/۱۱  
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۱/۲۷

### کلمات کلیدی:

صفحه کامپوزیتی  
قابلیت اطمینان  
مونت کارلو  
فلاتر  
روش دیفرانسیل مربعی

**خلاصه:** در کار حاضر قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه چندلایه کامپوزیتی با توجه به عدم قطعیت در متغیرهایی شامل مدل الاستیک، ضریب پواسون، چگالی، ضخامت صفحه و طول صفحه بررسی شده است. صفحه موردنظر از چندلایه کامپوزیتی متقارن تحت شرایط مرزی مختلف است که در رژیم پروازی مافوق صوت مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور شبیه سازی رفتار حاکم بر صفحه چندلایه کامپوزیتی از نظریه کلاسیک ورق استفاده می شود؛ و اثر نیروهای آیرودینامیکی توسط تئوری پیستون مرتبه اول مدل سازی شده است. به منظور گسسته سازی و تحلیل معادلات آیروالاستیک حاکم بر صفحه از روش عددی دیفرانسیل مربعی تعمیم یافته استفاده شده است. معادلات حاکم بعد از گسسته سازی، با استفاده از محاسبه و تحلیل مقادیر ویژه حل شده و آستانه وقوع پدیده فلاتر برای صفحه چندلایه کامپوزیتی به دست آمده است؛ به منظور بررسی قابلیت اطمینان، توزیع متغیرهای تصادفی به صورت توزیع نرمال استفاده شده است. در نهایت برای به دست آوردن قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه از روش شبیه سازی مونت کارلو برای پنج شرط مرزی مختلف استفاده شده است. با توجه به نتایج ارائه شده، مقدار قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه کامپوزیتی برای شرط مرزی تمام لولا بیشتر از سایر شرایط مرزی و شرط مرزی تمام گیردار کمتر از سایر شرایط مرزی خواهد بود. همچنین با توجه به بررسی های صورت گرفته در مورد وضعیت زاویه الیاف صفحه کامپوزیتی، می توان نتیجه گرفت با افزایش زاویه الیاف صفحه کامپوزیتی قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر افزایش می یابد.

### ۱- مقدمه

تداخل سه نوع نیرو ناشی از آیرودینامیک، الاستیسیته و اینرسی سبب بروز مسائل آیروالاستیسیته در اجسام پرنده می شود. پدیده فلاتر نوعی ناپایداری دینامیکی در اجسام پرنده در حال پرواز است که الاستیسیته سازه نقش بسیار مهمی در ایجاد آن ایفا می کند. این پدیده به طور معمول مهم ترین تأثیر را بر روی طراحی سازه اجسام پرنده اعمال می کند. در نوع کلاسیک فلاتر به طور معمول و نه همیشه، دو درجه آزادی جسم با یکدیگر کوپل شده و سبب ایجاد ناپایداری می شوند [۱]. از آنجاکه آیروالاستیک یک موضوع میان رشته ای است و از حاصل تداخل نیروهای آیرودینامیکی، نیروی الاستیک و نیروی اینرسی است، تجزیه و تحلیل آیروالاستیک در طراحی هواپیما بسیار مهم است. فلاتر، یک مسئله رایج در مسائل آیروالاستیسیته است که می تواند به فاجعه حمل و نقل هوایی به دلیل اختلاف ارتعاش سازه در یک زمان کوتاه منجر شود. مطالعات متعارف در مورد مسئله فلاتر و

رفتارهای آیروالاستیک صفحه کامپوزیتی بر فرض معین و کامل بودن پارامترهای ساختاری است که معمولاً به عنوان تجزیه و تحلیل قطعی نامیده می شود، کارهای متعددی در این زمینه انجام شده است. سویر<sup>۱</sup> و همکاران [۲] فلاتر و کماتش صفحه کامپوزیتی با شرایط مرزی لولای ساده بر اساس تئوری کلاسیک ورق و تغییر شکل های کوچک با استفاده از روش گلرکین مورد بررسی قرار داد. عباس و همکاران [۳] فلاتر صفحه کامپوزیتی ارتوتروپیک را با در نظر گرفتن حرارت آیرودینامیکی مطالعه کردند. همچنین چنگ و همکاران [۴] فلاتر صفحه کامپوزیتی در جریان مافوق صوت را با استفاده از روش اجزای محدود تحلیل کردند. از جمله کارهای مربوط به تحلیل آیروالاستیک صفحه کامپوزیتی می توان به کار کوچک زاده و همکاران [۵] اشاره کرد. آن ها تحلیل آیروالاستیک صفحه کامپوزیتی در جریان مافوق صوت با استفاده از روش گلرکین انجام دادند. فضیلتی و خلفی [۶] با استفاده از روش ایزوژئومتریکی به تحلیل ناپایداری فلاتر صفحه



کامپوزیتی پرداختند.

با این حال، عدم قطعیت در متغیرهای طراحی وجود دارد که در مسائل آیرودالاستیسیته مواد کامپوزیتی کمتر به آن‌ها توجه شده است. این عدم قطعیت شامل خواص هندسی مانند خواص مقطعی و ابعاد، خواص مکانیکی مواد مانند مدول و استحکام، توزیع بارها، محیط کار و غیره هست؛ بنابراین تجزیه و تحلیل قطعی اطلاعات کاملی را در خصوص پاسخ فلاتر ارائه نمی‌دهد. به این منظور بررسی فلاتر تحت عدم قطعیت تصادفی، باید یک ابزار مناسب برای تجزیه و تحلیل سیستم سازه با عدم قطعیت تصادفی [۷، ۸] ارائه شود. به کمک تجزیه و تحلیل احتمالاتی و نظریه قابلیت اطمینان سیستم‌های سازه‌ای می‌توان عدم قطعیت‌های ناشی از طبیعت آماری پارامترهای مختلف را به صورت روابط ریاضی درآورده و ملاحظات ایمنی و عملکرد را به طور کمی وارد روند طراحی نمود. طبق این نظریه علاوه بر بررسی عدم قطعیت تصادفی پارامترهای مختلف بر پاسخ فلاتر می‌توان قابلیت اطمینان کل سیستم سازه‌ای را نیز مورد مطالعه قرارداد. تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر یک موضوع نسبتاً جدید است به همین دلیل منابع کمی در تجزیه و تحلیل فلاتر احتمالاتی وجود دارد. لیو<sup>۱</sup> و همکاران [۹] از روش سطح پاسخ توالی برای تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان فلاتر بال با فرکانس طبیعی تصادفی استفاده کردند. لیو و همکاران [۱۰] قابلیت اطمینان عدم قطعیت‌های مختلف برای کمانش و فلاتر غیرخطی پوسته چندلایه در جریان مافوق صوت را برای عدم قطعیت‌های مختلف سازه‌ای به دست آوردند. آن‌ها همچنین [۱۱] قابلیت اطمینان و فلاتر غیرخطی پوسته و صفحه چندلایه در جریان مافوق صوت را برای عدم قطعیت‌های مختلف سازه‌ای به دست آوردند؛ که در آن از تئوری کلاسیک ورق برای مدل کردن رفتار سازه و از تئوری پستون مرتبه اول برای مدل کردن نیروهای آیرودینامیکی استفاده شده است. در سال‌های اخیر تحقیقاتی متفاوتی در زمینه فلاتر با استفاده از تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان از پاسخ فلاتر با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های گوناگون با روش‌های مختلف [۱۷-۱۲] انجام شده است. فارسی و خلفی [۱۸] قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه ایزوتروپیک با طول محدود و عرض بی‌نهایت را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با آنالیز حساسیت، اثر پارامترهای مختلف بر میزان قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه ایزوتروپیک دوبعدی را بررسی کردند. کومار<sup>۲</sup> و همکاران [۱۹] با استفاده از تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان به بررسی حوزه پایداری بال پرداختند.

به طور کلی، این روش‌ها را می‌توان به چهار دسته تقسیم کرد [۲۰]: (۱)

- 1 Liu
- 2 Kumar

روش قابلیت اطمینان مرتبه اول، (۲) روش المان محدود تصادفی، (۳) روش سطح پاسخ و (۴) شبیه‌سازی مونت کارلو<sup>۳</sup>.

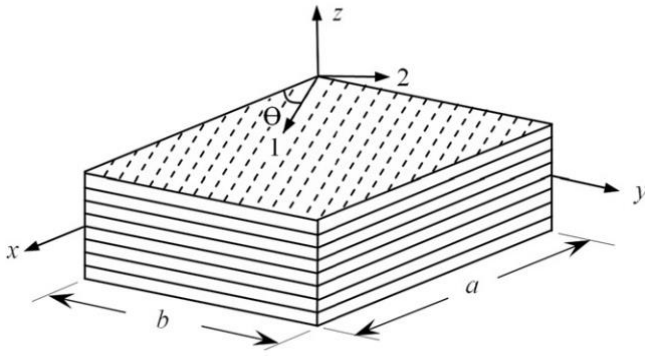
روش دیفرانسیل کوادرچر به سرعت از اواخر دهه هشتاد میلادی با تولید روش‌های نوین برای تعیین ثابت‌های وزنی به لطف تلاش‌های دیگر محققین توسعه چشمگیری پیدا کرد. این اقدامات روش دیفرانسیل کوادرچر را به یک قدرتمند گسسته‌سازی عددی تبدیل نمود. در مقایسه با روش‌های مرسوم مرتبه پایین تفاضلات محدود و المان محدود، روش دیفرانسیل کوادرچر دارای قابلیت پاسخگویی دقیق‌تری با تعداد کمتر نقاط دامنه است که این امر باعث کاهش محاسبات می‌شود. از دیگر مزیت‌های این روش نسبت به روش‌های دیگر عددی می‌توان به این مسئله اشاره نمود که با افزایش تعداد نقاط شبکه در اکثر مسائل نه تنها خطایی وارد محاسبات نمی‌گردد بلکه پاسخ مورد نظر به یک مقدار ثابت همگرا شده و افزایش تعداد نقاط تأثیری در پاسخ نمی‌گذارد. این مزیت برتری این روش را در مقایسه با سایر روش‌ها به طور مثال المان محدود ثابت می‌نماید که با افزایش المان‌ها خطای محاسباتی به وجود خواهد آمد. بدین ترتیب با توجه به مزایای فراوان روش دیفرانسیل کوادرچر، این روش در مسائل مهندسی و علمی بسیار به کار گرفته می‌شود.

در کار حاضر با توجه به اینکه، بررسی قابلیت اطمینان و عدم قطعیت در متغیرهای طراحی در مسائل آیرودالاستیسیته مواد کامپوزیتی کمتر مورد توجه قرار گرفته است، قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه چندلایه کامپوزیتی متقارن برای عدم قطعیت‌های مختلف سازه‌ای شامل مدل الاستیک، ضریب پواسون، چگالی، ضخامت صفحه و ابعاد صفحه در رژیم پروازی مافوق صوت بررسی شده است. معادله آیرودالاستیسیته حاکم بر این مدل با استفاده از روش دیفرانسیل مربعی‌ای حل شده و برای به دست آوردن قابلیت اطمینان نیز از روش شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده شده است.

## ۲- معادلات حاکم بر صفحه چندلایه کامپوزیتی

یکی از پارامترهای تأثیرگذار در انتخاب تئوری‌های ورق و پوسته، ضخامت است. زمانی که ضخامت سازه در مرتبه دیگر ابعاد نباشد، استفاده از تئوری کلاسیک ورق منجر به نتایج با دقت قابل قبول می‌شود. چنانچه ضخامت ورق نسبت به ابعاد دیگر آن فراوان باشد، فرضیات یادشده در مورد ورق‌های نازک با تغییر شکل‌های کوچک بی‌اعتبار شده و به کارگیری معادلات دیفرانسیل بالا تقریب زیاد و قابل توجه ای را به همراه خواهد داشت.

3 Monte Carlo



شکل ۱. جهات اصلی و مرجع در یک لایه کامپوزیتی

Fig. 1. Coordinate systems of fiber reinforced materials

به دست آورد. نیروی میان صفحه‌ای و گشتاور خارج از صفحه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(N, M) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z) \sigma dz \quad (5)$$

با قراردادن رابطه (۴) در (۵)، رابطه (۶) به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

که در آن  $\{\varepsilon^0\}$  مبین بردار کرنش‌های غشایی و  $\{k\}$  بیانگر بردار کرنش‌های خمشی است. همچنین  $N$  نیروی میان صفحه،  $M$  گشتاور خارج از صفحه و ماتریس‌های  $A$ ،  $B$  و  $D$  به ترتیب ماتریس سختی کششی، ماتریس سختی کششی-خمشی و ماتریس سختی خمشی است که مؤلفه‌های ماتریس‌های ذکر شده به شکل زیر حاصل می‌شوند.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} (1, z, z^2) dz \quad (7)$$

از آنجاکه در کار حاضر لایه چینی را به صورت متقارن در نظر گرفتیم در نتیجه ماتریس  $B$  برابر صفر می‌شود و این امر سبب می‌شود که نیروی میان صفحه و گشتاور خارج از صفحه به شکل زیر باشند:

از این رو با فرض نازک بودن صفحه و به منظور شبیه‌سازی رفتار حاکم بر سازه (ورق) از نظریه کلاسیک ورق استفاده می‌شود. ورق مستطیلی در دستگاه مختصات کارتزین  $(X, Y, Z)$  با ضخامت  $h$  در حالتی که  $Z$  عمود بر صفحه میانی و صفحه  $XY$  منطبق بر صفحه میانی باشد فرض می‌شود. چنانچه جابجایی‌های نقاط واقع در صفحه میانی با  $(u_0, v_0, w_0)$  نشان داده شود، میدان جابجایی به شکل ذیل در خواهد آمد [۲۱].

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $(u_0, v_0, w_0)$  به ترتیب جابجایی لایه میانی در راستای  $(X, Y, Z)$  است. رابطه تنش-کرنش برای یک لایه ارتوتروپ به شکل زیر است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

که در آن  $Q_{ij}$  معرف ضرایب سختی است که به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{21} &= \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu(z)^2}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu(z)^2}, & Q_{66} &= G_{21} \end{aligned} \quad (3)$$

رابطه فوق روابط تنش و کرنش را برای یک تک لایه در مختصات اصلی (۱-۲) نوشته شده است. حال اگر بخواهیم این روابط را در دستگاه مرجع  $(X, Y)$  که همانند شکل ۱ با دستگاه اصلی اختلاف زاویه‌ای برابر  $\theta$  دارد، بنویسیم فرم رابطه به صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

که در آن مؤلفه‌های ماتریس سختی را می‌توان با توجه به مرجع [۲۲]

که در آن  $\Delta p_\infty$  معادل نیروی آیرودینامیکی وارد بر صفحه است. از جایگذاری روابط گشتاور خارج از صفحه در معادلات حرکت و با در نظر گرفتن روابط رفتار مکانیکی مواد کامپوزیتی شکل کلی این معادلات به صورت زیر خواهد بود:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta p_\infty = 0 \quad (12)$$

با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۱۲)، معادله آیرولاستیک حاکم بر صفحه دوبعدی به صورت زیر خواهد شد:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2q_\infty}{U_\infty \sqrt{M^2 - 1}} \left( U_\infty \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial t} \right) = 0 \quad (13)$$

حال پارامترهای بی بعد مطابق با رابطه (۱۴) تعریف می گردند.

$$W = \frac{w}{h}, \quad \zeta = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \\ \tau = t \left( \frac{D_0}{\rho h a^4} \right)^{1/2}, \quad \mu = \frac{\rho_\infty a}{\rho h}, \\ \lambda = \frac{2q_\infty a^3}{\beta D}, \quad D_0 = \frac{E_{11} h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \quad (14)$$

در رژیم های پروازی مافوق صوت که  $M < 1$  است، عبارت های استهلاک آیرودینامیکی در رابطه (۱۱) به صورت رابطه (۱۵) تخمین زده می شود [۲۳].

$$\left( \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \right)^2 \left( \frac{\mu}{\sqrt{M^2 - 1}} \right) \approx \frac{\mu}{M} \quad (15)$$

با اعمال پارامترهای بی بعد تعریف شده در رابطه (۱۷) رابطه زیر حاصل می شود.

$$N_{xx} = A_{11} \epsilon_{xx} + A_{12} \epsilon_{yy} \\ N_{yy} = A_{12} \epsilon_{xx} + A_{22} \epsilon_{yy} \\ N_{xy} = A_{66} \epsilon_{xy} \quad (8)$$

$$M_{xx} = D_{11} k_{xx} + D_{12} k_{yy} \\ M_{yy} = D_{12} k_{xx} + D_{22} k_{yy} \\ M_{xy} = D_{66} k_{xy}$$

## ۲-۱ مدل آیرودینامیکی

برای الگوی شبیه سازی رفتار آیرودینامیک، یک تئوری آیرودینامیکی محاسباتی کارآمد برای الگوسازی مطلوب آن ضروری است، بنابراین تئوری پیستون که یک ارتباط ساده بین فشار و تغییر شکل سطح فراهم می کند، انتخاب می شود. نظریه پیستون یک روش برای محاسبه فشار آیرودینامیکی ناپایدار بر روی یک سطح است که در آن فشار محلی تولید شده توسط حرکت سطح به مؤلفه عمودی محلی سرعت سیال وابسته می شود. با استفاده از تئوری پیستون مرتبه اول، نیروهای آیرودینامیکی به صورت رابطه زیر شبیه سازی می شود [۵].

$$\Delta p = \frac{2q_\infty}{U_\infty \sqrt{M^2 - 1}} \left( U_\infty \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (9)$$

که در آن  $U_\infty$  سرعت جریان آزاد،  $M$  عدد ماخ،  $\rho_\infty$  چگالی جرمی سیال و  $q_\infty$  فشار آیرودینامیکی است که به صورت زیر بیان می شود:

$$q_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{2} \quad (10)$$

## ۲-۲ معادلات حرکت

معادلات حرکت از اصل همپلتون به دست می آیند، بدون در نظر گرفتن نیروهای برشی سطحی و گشتاورهای حجمی معادلات حرکت صفحه چندلایه کامپوزیتی متقارن با استفاده از تئوری کلاسیک ورق به شکل زیر بیان می شود:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta p_\infty = 0 \quad (11)$$

$$\Pi(x_i) = \prod_{v=1, v \neq i}^N (x_i - x_v), \quad \Pi(x_k) = \prod_{v=1, v \neq k}^N (x_k - x_v) \quad (19)$$

عبارت‌های غیرواقع بر قطر اصلی مربوط به ثابت‌های وزنی برای مشتقات مرتبه دوم و بالاتر از رابطه (۲۰) به دست می‌آیند.

$$A_{ik}^{(r)} = r \left[ A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k} \right], \quad (20)$$

for  $i, k = 1, 2, \dots, N$  and  $k \neq i$  and  $2 \leq r \leq (N-1)$

عبارت‌های واقع بر قطر اصلی مربوط به ثابت‌های وزنی برای مشتقات مرتبه اول و بالاتر از رابطه (۲۱) به دست می‌آیند.

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{v=1, v \neq i}^M A_{iv}^{(r)} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

از روش دیفرانسیل کوادرچر برای ترکیب‌های خطی مشتق نیز استفاده می‌شود.

$$\frac{\partial^{(r+s)} W}{\partial x^r \partial y^s} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M A_{ik}^{(r)x} A_{jl}^{(s)y} W_{kl} \quad (22)$$

با توجه به مشخص شدن ثابت‌های وزنی حال باید مختصات نقاط شبکه معین گردند. برای افزایش دقت، بهتر است از توزیع نقاط با فواصل نامساوی استفاده شود. بدین منظور می‌توان با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ به یک توزیع کسینوسی بسیار خوب دست‌یافت که نحوه محاسبه مختصات نقاط شبکه در این حالت به صورت رابطه (۲۶) هست.

$$x_i = \frac{1 - \cos[(i-1)\pi / (N-1)]}{2} L, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (23)$$

شرایط مرزی لولای ساده و گیردار با استفاده از این روش به ترتیب به صورت روابط (۲۴) و (۲۵) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} & \frac{D_{11}}{D_0} \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta^4} + 4 \frac{D_{16}}{D_0} \left( \frac{a}{b} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta^3 \partial \eta} \\ & + 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_0} \left( \frac{a}{b} \right)^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta^2 \partial \eta^2} \\ & + 4 \frac{D_{26}}{D_0} \left( \frac{a}{b} \right)^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta \partial \eta^3} + \frac{D_{22}}{D_0} \left( \frac{a}{b} \right)^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} \\ & + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \lambda \frac{\partial W}{\partial \zeta} + \sqrt{\lambda} \frac{\mu}{M} \frac{\partial W}{\partial \tau} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

### ۳- حل معادلات حاکم با استفاده از روش دیفرانسیل مربعی تعمیم یافته

روش دیفرانسیل کوادرچر یک روش عددی دقیق و درعین حال سریع برای حل معادلات دیفرانسیل است. روش دیفرانسیل کوادرچر برای مشتق یک تابع در هر نقطه توسط یک سری خطی، تخمینی ارائه می‌دهد. با توجه به مطالب ذکر شده در مرجع [۲۴] مشتق مرتبه  $\Gamma$  ام یک تابع مانند  $W$  را در نقطه‌ای مانند  $X_1$  بر اساس روش دیفرانسیل کوادرچر می‌توان به صورت رابطه (۱۷) نوشت.

$$\frac{\partial^r W}{\partial x^r} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)x} W_j \quad (17)$$

که در آن  $A^{(r)x}$  معرف ثابت‌های وزنی و  $N$  معرف تعداد نقاط شبکه در جهت  $X$  هستند. به منظور به دست آوردن ثابت‌های وزنی می‌توان از روش حل تئوری همینگ استفاده نمود. ثابت‌های وزنی را برای مشتقات به صورت مستقیم و دقیق، صرف نظر از تعداد نقاط شبکه و محل قرارگیری آن‌ها، می‌توان با استفاده از رابطه ارائه شده محاسبه نمود. لازم به ذکر است که رابطه‌های ارائه شده برای محاسبه این ثابت‌ها در این بخش برای مختصات  $X$  نوشته شده‌اند و برای دیگر مختصات نیز به صورت مشابه به دست می‌آیند. عبارت‌های غیرواقع بر قطر اصلی برای مشتق مرتبه اول از رابطه (۱۷) به دست می‌آیند.

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\prod(x_j)}{(x_i - x_k) \prod(x_j)} \quad \text{for } i, k = 1, 2, \dots, N \quad (18)$$

که در آن

حال رابطه (۲۶) را به صورت رابطه (۲۷) بیان می‌شود.

$$\left\{ \omega^2 I + \sqrt{\lambda \frac{\mu}{M}} \omega I + \begin{pmatrix} \frac{D_{11}}{D_0} \sum_{k=1}^{N-2} Ax_{ik1}^{(4)} + 4 \frac{D_{16}}{D_0} \left(\frac{a}{b}\right) \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{k=2=3}^{M-2} Ax_{ik1}^{(3)} Ay_{jk2}^{(1)} \\ + 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_0} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{k=2=3}^{M-2} Ax_{ik1}^{(2)} Ay_{jk2}^{(2)} \\ + 4 \frac{D_{26}}{D_0} \left(\frac{a}{b}\right)^3 \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{k=2=3}^{M-2} Ax_{ik1}^{(1)} Ay_{jk2}^{(3)} \\ + \frac{D_{22}}{D_0} \left(\frac{a}{b}\right)^4 \sum_{k=2=3}^{M-2} Ay_{jk2}^{(4)} + \lambda \sum_{k=1}^{N-2} Ax_{ik1}^{(1)} \end{pmatrix} \right\} \delta = 0 \quad (27)$$

for  $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$

در رابطه بالا  $\delta$  نمایانگر درجات آزادی نقاط دامنه هست. همچنین  $\delta$  یک بردار  $1 \times (M-4)(N-4)$  بوده که برابر است با:

$$\delta = [W_{2,2}, W_{2,3}, \dots, W_{2,M-3}, W_{3,2}, W_{3,3}, \dots, W_{3,M-3}, \dots, W_{N-3,3}, \dots, W_{N-3,M-3}]^T \quad (28)$$

حال با تعریف رابطه  $I\omega\delta - \omega I\delta = 0$  رابطه به دست آمده به یک رابطه مقدار ویژه مرتبه اول تبدیل می‌گردد. در نتیجه رابطه (۲۹) حاصل می‌شود.

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ K^* & C^* \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\frac{I_0}{\rho_m h} I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta \\ \omega \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

که در آن ضرایب  $C^*$  و  $K^*$  به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$K^* = \begin{pmatrix} \frac{D_{11}}{D_0} \sum_{k=1}^{N-2} Ax_{ik1}^{(4)} + 4 \frac{D_{16}}{D_0} \left(\frac{a}{b}\right) \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{k=2=3}^{M-2} Ax_{ik1}^{(3)} Ay_{jk2}^{(1)} \\ + 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_0} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{k=2=3}^{M-2} Ax_{ik1}^{(2)} Ay_{jk2}^{(2)} \\ + 4 \frac{D_{26}}{D_0} \left(\frac{a}{b}\right)^3 \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{k=2=3}^{M-2} Ax_{ik1}^{(1)} Ay_{jk2}^{(3)} \\ + \frac{D_{22}}{D_0} \left(\frac{a}{b}\right)^4 \sum_{k=2=3}^{M-2} Ay_{jk2}^{(4)} + \lambda \sum_{k=1}^{N-2} Ax_{ik1}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$C^* = \sqrt{\lambda \frac{\mu}{M}}$$

همچنین  $I$  و  $0$  هر یک به ترتیب معادل ماتریس صفر و ماتریس یک به ابعاد  $(N-4)(M-4) \times (N-4)(M-4)$  هستند. حال می‌توان با تحلیل مقادیر ویژه رابطه (۲۹) محدوده وقوع فلاتر را بررسی کرد.

$$\begin{aligned} x &= 0, a \\ W_{ij} &= 0 \\ -D_{11} \sum_{k=1}^N Ax_{ik1}^{(2)} W_{k1j} - D_{12} \sum_{k=2=1}^M Ay_{jk2}^{(2)} W_{ik2} \\ -D_{16} \sum_{k=1}^N \sum_{k=2=1}^M Ax_{ik1}^{(1)} Ay_{jk2}^{(1)} W_{k1k2} &= 0 \\ i &= 1, N \quad j = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} y &= 0, b \\ W_{ij} &= 0 \\ -D_{12} \sum_{k=1}^N Ax_{ik1}^{(2)} W_{k1j} - D_{22} \sum_{k=2=1}^M Ay_{jk2}^{(2)} W_{ik2} \\ -D_{16} \sum_{k=1}^N \sum_{k=2=1}^M Ax_{ik1}^{(2)} Ay_{jk2}^{(2)} W_{k1k2} &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, N \quad j = 1, M \end{aligned}$$

و همچنین شرایط مرزی گیردار به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} x &= 0, a \\ W_{ij} &= 0 \\ \sum_{k=1}^N Ax_{ik1}^{(1)} W_{k1j} &= 0 \\ i &= 1, N \quad j = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} y &= 0, b \\ W_{ij} &= 0 \\ \sum_{k=2=1}^M Ay_{jk2}^{(1)} W_{ik2} &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, N \quad j = 1, M \end{aligned}$$

اگر فرض شود پاسخ سیستم به صورت  $W(x, y, t) = \bar{W}(x, y) e^{i\omega t}$  باشد با اعمال روش دیفرانسیل کوادرچر معادله (۱۶) گسسته‌سازی شده و معادله آیروالاستیک حاکم بر ورق چندلایه کامپوزیتی بعد از اعمال شرایط مرزی به صورت رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{D_{11}}{D_0} \sum_{k=1}^{N-2} Ax_{ik1}^{(4)} \bar{W}_{k1j} \\ + 4 \frac{D_{16}}{D_0} \left(\frac{a}{b}\right) \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{k=2=3}^{M-2} Ax_{ik1}^{(3)} Ay_{jk2}^{(1)} \bar{W}_{k1k2} \\ + 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_0} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{k=2=3}^{M-2} Ax_{ik1}^{(2)} Ay_{jk2}^{(2)} \bar{W}_{k1k2} \\ + 4 \frac{D_{26}}{D_0} \left(\frac{a}{b}\right)^3 \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{k=2=3}^{M-2} Ax_{ik1}^{(1)} Ay_{jk2}^{(3)} \bar{W}_{k1k2} \\ + \frac{D_{22}}{D_0} \left(\frac{a}{b}\right)^4 \sum_{k=2=3}^{M-2} Ay_{jk2}^{(4)} \bar{W}_{k1k2} + \omega^2 \bar{W}_{ij} \\ + \lambda \sum_{k=1}^{N-2} Ax_{ik1}^{(1)} \bar{W}_{k1j} + \omega \sqrt{\lambda \frac{\mu}{M}} \bar{W}_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

for  $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$



که در نتیجه عدم قطعیت  $P_f$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_f = \frac{N_f}{N} \quad (36)$$

که در آن  $N_f$  تعداد کل سیکل‌های شبیه‌سازی شده‌ای است که در آن شکست اتفاق افتاده است ( $g(x) < 0$ ) و  $N$  تعداد کل سیکل‌های شبیه‌سازی شده است. تعداد تولیدکننده‌ای تصادفی معمولاً برای به دست آوردن یک مقدار متوسط و انحراف معیار استاندارد بر اساس مقدار ورودی تصادفی و توزیع نوشته شده از هر ورودی تصادفی قابل اجرا است. همچنین می‌توان میزان حساسیت احتمال پارامترهای متغیر ورودی را برای توزیع خروجی مشاهده کرد. با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو می‌توان شاخص قابلیت اطمینان را که با  $\beta$  نمایش داده می‌شود محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} \beta &= -\Phi^{-1}(P_f) \\ P_f &= \Phi(-\beta) \end{aligned} \quad (37)$$

که تابع  $\Phi$  توزیع جمع‌شونده از متغیرهای نرمال استاندارد را نشان می‌دهد.

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw \quad (38)$$

### ۳-۲- حل مسئله نمونه

معادلات آیرولاستیک حاکم بر صفحه چندلایه کامپوزیتی در جریان مافوق صوت که با استفاده از روش دیفرانسیل کوادرچر گسسته‌سازی شدند برای به دست آوردن سرعت وقوع فلاتر حل شده است. در این قسمت به صحت‌سنجی نتایج حاصل از تحلیل فلاتر توسط روش دیفرانسیل کوادرچر پرداخته می‌شود. به این منظور یک صفحه چهار لایه کامپوزیتی متقارن با لایه چینی  $[+\theta / -\theta]_S$  در جریان مافوق صوت با شرایط مرزی تمام لولای ساده و  $a/b = 1$ ،  $h/a = 1.0$ ،  $\mu/M = 0.1$  و همچنین خواص مکانیکی مواد به صورت  $(E_{11}/E_{22} = 0.33, \nu_{12} = 0.3)$  مطابق مرجع [۲] در نظر گرفته شده است. برای حل با استفاده از روش دیفرانسیل کوادرچر از تعداد ۱۵ نقاط شبکه ( $N = M = 15$ ) مطابق رابطه (۲۳) استفاده شده است. فشار آیرودینامیکی بحرانی فلاتر به دست آمده

### ۳-۱- به دست آوردن قابلیت اطمینان با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو

با توجه به فشار آیرودینامیکی بحرانی فلاتر  $\lambda_c$  تعیین شده توسط تجزیه و تحلیل مقدار ویژه، تابع حد حالت یا عملکرد برای سرعت فلاتر به شکل زیر تعریف می‌شود

$$g(x) = \lambda_c(x) - \lambda_c^* \quad (31)$$

که در آن  $\lambda_c^*$  فشار آیرودینامیکی بی‌بعد بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت برای متغیرهای طراحی است که مقدار آن برابر با  $\lambda_c(\mu)$  هست. شایان ذکر است که برای بالا بردن قابلیت اطمینان آستانه فلاتر می‌توان یک حاشیه اطمینان برای مقدار  $\lambda_c^*$  در نظر گرفت که در کار حاضر از آن صرف نظر شده است.

همچنین تابع  $g(X)$  به عنوان تابع هدف تعریف می‌شود و بردار  $X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$  متغیرهای تصادفی می‌باشند؛ که محدوده  $g(x) > 0$  ناحیه امن، محدوده  $g(x) < 0$  ناحیه شکست و ناحیه  $g(x) = 0$  ناحیه مرزی هست. قابلیت اطمینان، احتمال اینکه متغیرهای تصادفی  $X$  در ناحیه امن قرار گیرند تعریف می‌شوند. اگر تابع چگالی احتمال  $f(X, X)$  باشد عدم قطعیت به صورت زیر می‌شود:

$$P_f = P\{g(X) < 0\} = \int_{g(x) < 0} f_x(x) dx \quad (32)$$

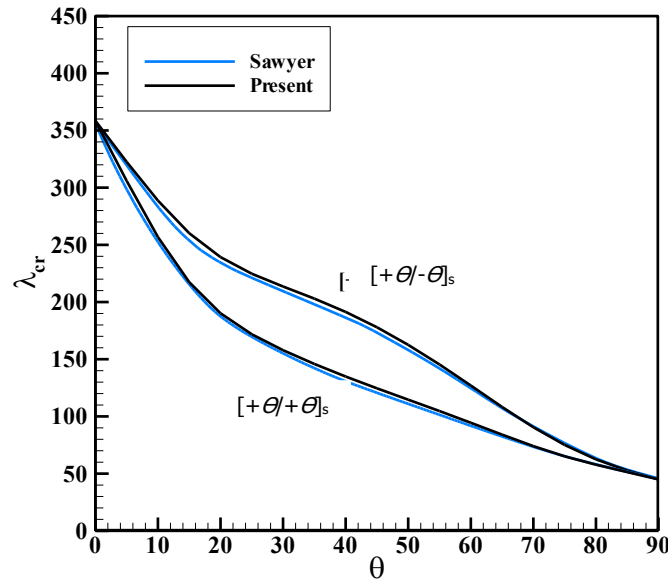
$$R = 1 - P_f = P\{g(X) > 0\} = \int_{g(x) > 0} f_x(x) dx \quad (33)$$

در روش شبیه‌سازی مونت کارلو  $N$  متغیر تصادفی مستقل آزمایش می‌شود در حالی که ارزش اولیه از متغیر در هر بار آزمایش بر پایه تصادفی انتخاب می‌شود و به وسیله سیکل‌های شبیه‌سازی، عدم قطعیت  $P_f$  به صورت زیر محاسبه می‌شود [۲۵].

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (34)$$

که در آن  $I(X_1, X_2, \dots, X_n)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(X_1, X_2, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } g(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0 \\ 0 & \text{if } g(X_1, X_2, \dots, X_n) > 0 \end{cases} \quad (35)$$



شکل ۲. مقایسه فشار آیرودینامیکی بحرانی برای صفحه کامپوزیتی با لایه چینی  $[+\theta/-\theta]_s$   
**Fig. 2. Comparison of critical aerodynamic pressure for a composite plate with a porcelain layer  $[+\theta/-\theta]_s$**

صفحه ۶ لایه متقارن کامپوزیتی با لایه  $[-\theta/+ \theta / -\theta]_s$  با شرایط مرزی مختلف آورده شده است. با توجه به جدول ۲ با افزایش زاویه الیاف، فشار آیرودینامیکی بی‌بعد شده بحرانی فلاتر کاهش می‌یابد و هر چه شرایط مرزی صفحه به سمت شرایط مرزی گیردار می‌رود فشار آیرودینامیکی بی‌بعد شده بحرانی فلاتر افزایش می‌یابد. در جدول ۲ صفحه کامپوزیتی با لایه چینی  $[-60/+60/-60]_s$  و شرایط مرزی تمام لولا دارای کمترین فشار آیرودینامیکی بی‌بعد شده بحرانی فلاتر و صفحه کامپوزیتی با لایه چینی  $[-15/+15/-15]_s$  و شرایط مرزی تمام گیردار دارای بیشترین فشار آیرودینامیکی بی‌بعد شده بحرانی فلاتر است.

برای بررسی قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه کامپوزیتی با شرایط مرزی مختلف و تعداد ۶ لایه متقارن با لایه چینی  $[-\theta/+ \theta / -\theta]_s$  و تعداد سیکل‌های شبیه‌سازی مونت کارلو را برابر  $N = 10000$  در نظر می‌گیریم. در جدول ۳ قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه کامپوزیتی با شرایط مرزی مختلف و زاویه‌های مختلف الیاف به دست آورده شده است. با توجه به جدول ۳ با افزایش زاویه الیاف قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر افزایش می‌یابد و هر چه شرایط مرزی صفحه به سمت شرایط مرزی گیردار می‌رود قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر کاهش می‌یابد. در جدول ۳ صفحه کامپوزیتی با لایه چینی  $[-60/+60/-60]_s$  و شرایط مرزی چهار

در شکل ۲ با مرجع [۲] که در آن فشار آیرودینامیکی بحرانی فلاتر صفحه را با استفاده از روش گلرکین به دست آورده مقایسه شده است. همان‌طور که از شکل مشخص است نتایج به دست آمده دارای مطابقت خوبی با مرجع [۲] هست.

به منظور بررسی قابلیت اطمینان صفحه چندلایه کامپوزیتی، توزیع متغیرهای تصادفی که به صورت توزیع نرمال است در جدول ۱ تعریف شده است. با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو و رابطه (۲۱) قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه چندلایه کامپوزیتی برای لایه چینی و شرایط مرزی مختلف در این مقاله ارائه می‌شود.

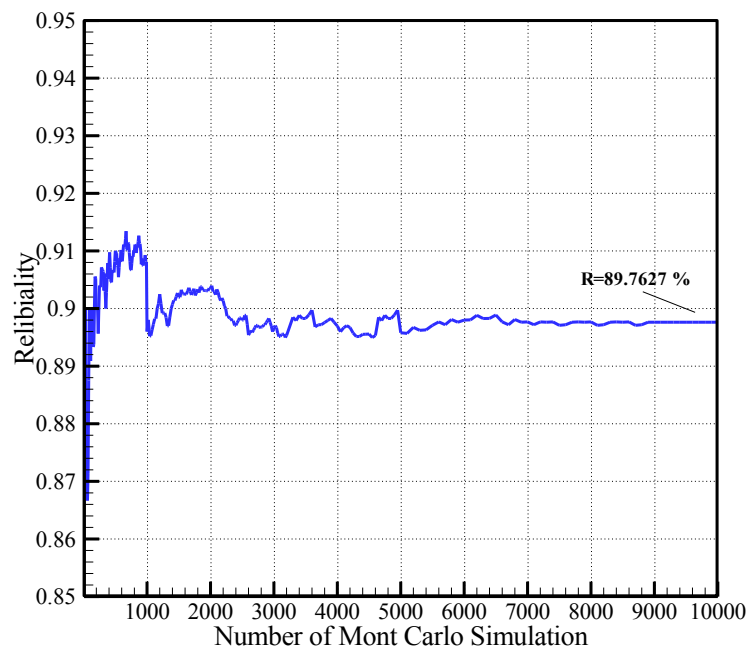
در شکل ۲ مقدار قابلیت اطمینان سرعت فلاتر صفحه کامپوزیتی متقارن با ۶ لایه  $[-30/+30/-30]_s$  و شرایط مرزی گ‌گیردار-لولا-گ‌گیردار-لولا برای تعداد سیکل‌های شبیه‌سازی مونت کارلو مختلف آورده شده است و همگرایی قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر برای تعداد سیکل‌های شبیه‌سازی مونت کارلو بررسی شده است. همان‌طور که از شکل ۲ مشخص است برای تعداد سیکل ۱۰۰۰۰ به بعد قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر به مقدار  $0.89/7627\%$  همگرا شده است. به همین منظور در این مقاله تعداد سیکل‌های شبیه‌سازی مونت کارلو را برابر  $N=10000$  در نظر گرفته شده است. در ابتدا در جدول ۲ فشار آیرودینامیکی بی‌بعد شده بحرانی فلاتر برای



جدول ۱. توزیع متغیرهای تصادفی [۱۰]

Table 1. Distribution of random variables

انحراف معیار	مقدار میانگین	فرم توزیع	خاصیت
٪۱۰	۱۵۰	نرمال	$E_{۱۱}$ (GPa)
٪۱۰	۹	نرمال	$E_{۲۲}$ (GPa)
٪۱۰	۷/۱	نرمال	$G_{۱۲}$ (GPa)
٪۵	۰/۳	نرمال	$\nu_{۱۲}$
٪۵	۰/۳	نرمال	$\nu_{۲۱}$
٪۵	۱۶۰۰	نرمال	$\rho$ (Kg/m <sup>۳</sup> )
٪۲	۰/۱	نرمال	$a$ (m)
٪۲	۰/۱	نرمال	$b$ (m)
٪۲	۰/۰۰۰۸	نرمال	$h$ (m)



شکل ۳. قابلیت اطمینان برای سیکل‌های مختلف شبیه‌سازی مونت کارلو

Fig. 3. Reliability for different Monte Carlo simulation cycles

جدول ۲. فشار آیرودینامیکی بی‌بعد شده بحرانی فلاتر برای صفحه ۶ لایه کامپوزیتی متقارن  $[-\theta/+ \theta/-\theta]_s$

Table 2. The critical aerodynamic pressure for different types of laminated plate  $[-\theta/+ \theta/-\theta]_s$

$\theta$				شرایط مرزی
۶۰	۴۵	۳۰	۱۵	
۱۴۱/۶۲۳۸	۲۰۶/۱۲۸۶	۲۴۸/۶۰۰۱	۲۷۴/۹۱۹۹	چهار سر لولا
۱۵۵/۶۹۸۲	۲۲۴/۳۲۲۳	۲۶۶/۸۱۹۷	۲۹۵/۱۷۵۹۱	سه سر لولا-یک سر گیردار
۱۶۵/۷۶۶۹	۲۳۶/۴۵۸۷	۲۸۰/۹۹۵۹	۳۱۱/۳۸۵۷	لولا-گیردار-لولا-گیردار
۱۷۳/۸۲۹۳۱	۲۶۲/۷۷۰۲	۳۲۳/۵۴۵۵	۳۶۶/۱۱۸۲	لولا-لولا-گیردار-گیردار
۲۰۶/۱۲۸۶	۳۱۹/۴۹۲۰	۴۰۰/۵۹۳۷	۴۶۱/۴۵۰۷	چهار سر گیردار

جدول ۳. مقدار قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر بر حسب درصد (%) برای صفحه ۶ لایه کامپوزیتی متقارن  $[-\theta/+ \theta/-\theta]_s$

Table 3. Reliability of flutter in percentage (%) for the laminate of symmetrical composite layer

اختلاف زاویه با دستگاه اصلی				شرایط مرزی
۶۰	۴۵	۳۰	۱۵	
۹۶/۳۲	۹۲/۲۳	۹۰/۸۷	۸۰/۹۸	چهار سر لولا
۹۵/۷۸	۸۴/۱۸	۹۰/۰۳	۷۹/۹۲	سه سر لولا-یک سر گیردار
۹۳/۱۲	۸۶/۲۳	۸۹/۷۶	۷۹/۶۳	لولا-گیردار-لولا-گیردار
۹۱/۲۴	۸۲/۷۹	۸۵/۳۱	۷۶/۴۲	لولا-لولا-گیردار-گیردار
۸۷/۶۳	۸۰/۱۸	۷۸/۴۲	۷۳/۳۹	چهار سر گیردار

بحرانی فلاتر دارای مقدار بالاتری است مقدار قابلیت اطمینان کمتری دارد. با توجه به اینکه متغیرهای تصادفی به صورت نرمال در نظر گرفته شده‌اند، لذا با افزایش میزان انحراف معیار، پراکندگی افزایش یافته و میزان قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر کاهش می‌یابد.

#### ۴- نتیجه‌گیری

امروزه، استفاده از مواد کامپوزیتی به‌عنوان ماده انتخابی به‌جای مواد فلزی در بسیاری از کاربردهای فناوری مشاهده می‌شود. با توجه به اینکه بررسی قابلیت اطمینان و عدم قطعیت در متغیرهای طراحی مواد کامپوزیتی در مسائل آیرولاستیسیته کمتر مورد توجه قرار گرفته است، در کار حاضر قابلیت اطمینان فلاتر صفحه چند لایه کامپوزیتی متقارن با لایه چینی‌ها و شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو و روش عددی دیفرانسیل مربعی تعمیم‌یافته به دست آورده شده‌است. نتایج

سر لولا دارای بیشترین مقدار قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر و صفحه کامپوزیتی با لایه چینی  $[-15/+15/-15]_s$  و شرایط مرزی چهار سر گیردار دارای کمترین مقدار قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر است.

به‌منظور بررسی تعداد لایه‌های صفحه کامپوزیتی بر رفتار آیرولاستیک آن، در جدول ۴ فشار آیرودینامیکی بی‌بعد شده بحرانی فلاتر، قابلیت اطمینان و عدم قطعیت آستانه وقوع فلاتر برای صفحه کامپوزیتی متقارن با زاویه الیاف ۳۰ درجه و شرایط مرزی تمام لولا برای تعداد لایه‌های ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ آورده شده است. همان‌طور که از جدول ۴ مشخص است افزایش تعداد لایه‌ها در صفحه کامپوزیتی سبب کاهش قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر و افزایش عدم قطعیت می‌شود.

با توجه به جدول‌های ۲ تا ۴، مشخص است که فشار آیرودینامیکی بی‌بعد شده بحرانی فلاتر با مقدار قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه کامپوزیتی نسبت عکس دارد و هر جا که فشار آیرودینامیکی بی‌بعد شده

جدول ۴. فشار آیرودینامیکی بی‌بعد شده بحرانی فلاتر، قابلیت اطمینان و عدم قطعیت فلاتر برای صفحه کامپوزیتی متقارن با شرایط مرزی تمام لولا و تعداد لایه‌های ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰

**Table 4. Critical dimensional aerodynamic pressure of the flutter, reliability, and uncertainty of the flutter for a composite plate symmetrical with SSSS boundary conditions and number of 2,4,6 and, 8 laminates**

عدم قطعیت	قابلیت اطمینان	فشار بحرانی بی‌بعد	
٪۴/۶۹	٪۹۵/۳۱	۱۱۹/۵۸۰۰	$[-۳۰]_S$
٪۴/۲۵	٪۹۲/۷۵	۱۸۹/۹۷۰۴	$[+۳۰/-۳۰]_S$
٪۹/۱۳	٪۹۰/۸۷	۲۴۸/۶۰۰۱	$[-۳۰/+۳۰/-۳۰]_S$
٪۱۰/۶۴	٪۸۹/۳۶	۲۶۶/۸۱۹۷	$[+۳۰/-۳۰/+۳۰/-۳۰]_S$
٪۱۲/۸۶	٪۸۷/۱۴	۲۷۸/۹۷۰۵	$[-۳۰/+۳۰/-۳۰/+۳۰/-۳۰]_S$

### ۵- فهرست علائم

ماتریس سختی کششی	$A$	به‌دست‌آمده توانایی روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو را برای بررسی قابلیت
طول صفحه	$a$	اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه چندلایه کامپوزیتی نشان می‌دهد. با توجه
ماتریس سختی کششی-خمشی	$B$	به نتایج ارائه‌شده هر چه شرایط مرزی صفحه به سمت شرایط مرزی گیردار
عرض صفحه	$b$	می‌رود مقدار قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه چندلایه کامپوزیتی
ماتریس سختی خمشی	$D$	کاهش می‌یابد و با افزایش زاویه الیاف صفحه کامپوزیتی قابلیت اطمینان
مدول الاستیسیته، $N/m^2$	$E$	آستانه وقوع فلاتر صفحه افزایش می‌یابد. همچنین افزایش تعداد لایه‌ها در
مدول برش	$G$	صفحه کامپوزیتی سبب کاهش قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر می‌شود.
تابع هدف	$g(x)$	با توجه به نتایج ارائه‌شده در این مقاله، مشخص است که فشار آیرودینامیکی
ضخامت صفحه، متر	$h$	بی‌بعد شده بحرانی فلاتر با مقدار قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه
ماتریس همانی	$I$	کامپوزیتی نسبت عکس دارد و هر جا که فشار آیرودینامیکی بی‌بعد شده
کرنش‌های خمشی	$k$	بحرانی فلاتر دارای مقدار بالاتری است مقدار قابلیت اطمینان کمتری دارد.
گشتاور خارج از صفحه	$M$	در بررسی آستانه وقوع فلاتر برای صفحه کامپوزیتی متقارن با زاویه الیاف
نیروی میان صفحه	$N$	۳۰ درجه و شرایط مرزی تمام لولا برای تعداد لایه‌های ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰
تعداد کل سیکل‌های شبیه‌سازی شده	$N_f$	مشخص شد افزایش تعداد لایه‌ها در صفحه کامپوزیتی سبب کاهش ۸
فشار آیرودینامیکی ناپایدار	$p$	درصدی قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر خواهد شد. نتایج به‌دست‌آمده
عدم قطعیت	$P_f$	توانایی روش پیشنهادی را برای بررسی قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر
ضرایب سختی	$Q$	صفحه کامپوزیتی دوبعدی نشان می‌دهد. با توجه به نتایج ارائه‌شده مقدار
فشار آیرودینامیکی	$q$	قابلیت اطمینان آستانه وقوع فلاتر صفحه دوبعدی با شرایط مرزی تمام لولا
قابلیت اطمینان	$R$	از سایر شرایط مرزی بیشتر است. با توجه به اینکه در مسئله واقعی قابلیت
زمان	$t$	اطمینان از مقادیر حاصل شده بیشتر خواهد بود، انتظار می‌رود با در نظر گرفتن
سرعت جریان آزاد	$U$	حاشیه اطمینان به این مهم در طراحی دست‌یافت.
جابجایی خط میانی صفحه در راستای طولی	$u_0$	
جابجایی خط میانی صفحه در راستای عرضی	$v_0$	
جابجایی خط میانی صفحه در راستای ضخامت	$w_0$	
شاخص قابلیت اطمینان	$\beta$	
درجات آزادی نقاط دامنه	$\delta$	
مؤلفه کرنش	$\varepsilon$	
بردار کرنش‌های غشایی	$\varepsilon^0$	

- series A and B, 19 (1998) 503-505.
- [10] D. Liaw, H.T. Yang, Reliability and nonlinear supersonic flutter of uncertain laminated plates, AIAA journal, 31(12) (1993) 2304-2311.
- [11] D. Liaw, H.T. Yang, Reliability of uncertain laminated shells due to buckling and supersonic flutter, AIAA journal, 29(10) (1991) 1698-1708.
- [12] S. Pourzeynali, T. Datta, Reliability analysis of suspension bridges against flutter, Journal of Sound and Vibration, 254(1) (2002) 143-162.
- [13] Y. Ge, H. Xiang, H. Tanaka, Application of a reliability analysis model to bridge flutter under extreme winds, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 86(2-3) (2000) 155-167.
- [14] J. Cheng, R.-c. Xiao, Probabilistic free vibration and flutter analyses of suspension bridges, Engineering structures, 27(10) (2005) 1509-1518.
- [15] P.K. Swain, N. Sharma, D.K. Maiti, B.N. Singh, Aeroelastic analysis of laminated composite plate with material uncertainty, Journal of Aerospace Engineering, 33(1) (2020) 04019111.
- [16] G. Shanthini, A. Pankaj, M. Manjuprasad, Flutter Reliability Studies of a Swept Back Plate, in: Recent Advances in Structural Engineering, Volume 1, Springer, 2019, pp. 537-550.
- [17] E. Sadeghian, S. Toosi, Reliability analysis of a composite laminate using estimation theory, Journal of Central South University, 26(3) (2019) 665-672.
- [18] M. Farsi, V. Khalafi, Reliability analysis of flutter threshold for an isotropic panel with different boundary conditions, Journal of Aeronautical Engineering, 20(2) (2019) 67-74 (in Persian).
- [19] S. Kumar, A.K. Onkar, M. Manjuprasad, Stochastic Modeling and Reliability Analysis of Wing Flutter, Journal of Aerospace Engineering, 33(5) (2020) 04020044.
- [20] S. Shufang, L. Zhenzhou, Z. Weiwei, Y. Zhengyin, Reliability and sensitivity analysis of transonic flutter using improved line sampling technique, Chinese Journal

پارامتر بی‌بعد راستای عرض	$\eta$
فشار آیرودینامیکی بحرانی فلاتر	$\lambda_c$
فرکانس طبیعی	$\omega$
نسبت پواسون	$\nu$
اختلاف زاویه با دستگاه اصلی	$\theta$
تابع توزیع	$\phi$
چگالی جرمی سیال	$\rho$
مؤلفه تنش	$\sigma$
پارامتر بی‌بعد زمان	$\tau$
پارامتر بی‌بعد راستای طول	$\zeta$

## منابع

- [1] R.L. Bisplinghoff, H. Ashley, Principles of aeroelasticity, Courier Corporation, 2013.
- [2] J.W. Sawyer, Flutter and buckling of general laminated plates, Journal of Aircraft, 14(4) (1977) 387-393.
- [3] J.F. Abbas, R. Ibrahim, R.F. Gibson, Nonlinear flutter of orthotropic composite panel under aerodynamic heating, AIAA journal, 31(8) (1993) 1478-1488.
- [4] G. Cheng, C. Mei, Finite element modal formulation for hypersonic panel flutter analysis with thermal effects, AIAA journal, 42(4) (2004) 687-695.
- [5] M. Kouchakzadeh, M. Rasekh, H. Haddadpour, Panel flutter analysis of general laminated composite plates, Composite Structures, 92(12) (2010) 2906-2915.
- [6] J. Fazilati, V. Khalafi, Aeroelastic panel flutter optimization of tow-steered variable stiffness composite laminated plates using isogeometric analysis, Journal of Reinforced Plastics and Composites, 38(19-20) (2019) 885-895.
- [7] J. Cheng, C. Cai, R.-c. Xiao, S. Chen, Flutter reliability analysis of suspension bridges, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 93(10) (2005) 757-775.
- [8] Z.-G. Wu, C. Yang, Modeling and robust stability for aeroservoelastic systems with uncertainties, Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 24(4) (2003) 312-316.
- [9] Y. Liu, K. Chen, D. Zheng, Flutter reliability analysis of wing structure, Acta Aeronautica et astronautica sinica-

- Composite Structures, 88(3) (2009) 380-387.
- [24] C. Shu, Differential quadrature and its application in engineering, Springer Science & Business Media, 2012.
- [25] M.R. KAMYAB, M. Fadaee, Reliability assessment of structures by Monte Carlo simulation and neural networks, Asian journal of civil engineering, (2012).
- of Aeronautics, 22(5) (2009) 513-519.
- [21] W. Soedel, M.S. Qatu, Vibrations of shells and plates, in, Acoustical Society of America, 2005.
- [22] R.M. Christensen, Mechanics of composite materials, Courier Corporation, 2012.
- [23] K.-J. Sohn, J.-H. Kim, Nonlinear thermal flutter of functionally graded panels under a supersonic flow,

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Javadi, V. Khalafi, Flutter reliability analysis of laminated composite plates, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 53(Special Issue 6)(2021) 3925-3938.

DOI: 10.22060/mej.2021.19234.6982



