

## بررسی ارتعاشات غیرخطی تیر یک سرگیردار با یک ترک خستگی عرضی

سعید ایرانی\*، مسعود خرازان، محمدعلی نوریان

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۱۱

بازنگری: ۱۴۰۰/۰۱/۲۷

پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۰۳

ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۲/۰۷

### کلمات کلیدی:

ارتعاشات غیرخطی

ترک تنفسی

رفتار دوخطی ترک

رزونانس سوپرهارمونیک

پایش سلامت سازه

**خلاصه:** پدیده‌های غیرخطی به طور گسترده‌ای در کاربردهای مهندسی وجود دارند. یک نمونه متداول از این پدیده‌ها در سازه‌های هوافضایی، ایجاد ترک‌های خستگی می‌باشد که تحت بارهای دینامیکی در طی سیکل ارتعاشات مدام باز و بسته می‌شوند و سبب ایجاد یک رفتار دو خطی در سازه می‌شوند. شناسایی دیر هنگام چنین آسیب‌های سازه‌ای می‌تواند منجر به ایجاد خرابی‌های فاجعه بار شود. بنابراین، شناسایی رفتار غیرخطی سازه ترک‌دار امری ضروری و بسیار حائز اهمیت می‌باشد. در این مطالعه رفتار غیرخطی یک تیر یکسرگیردار با یک ترک خستگی تنفسی و رفتار دوخطی مورد بررسی قرار گرفته است. به همین منظور در ابتدا به تخمین تابع چندجمله‌ای معادل با تابع دو خطی سفتی تیر پرداخته می‌شود. در ادامه با استفاده از روش اغتشاشات مقیاس‌های چندگانه معادله غیرخطی تیر مورد بررسی قرار گرفته و روابط دامنه بر حسب فرکانس تنظیمی در هر دو حالت رزونانس‌های هارمونیک و سوپرهارمونیک استخراج می‌گردند. سپس به بررسی حساسیت پاسخ به پارامترهایی مانند عمق و محل قرارگیری ترک، مقدار نیروی تحریک و میرایی تیر پرداخته شده است. با توجه به نتایج مشاهده گردید منحنی‌های پاسخ تیر در رزونانس اصلی در اثر تشدید پارامترهای ترک به شدت غیر خطی شده و دچار پدیده نرم‌شوندگی منحنی پاسخ گردیده‌اند. همچنین مطابق با نتایج رفتار تیر در رزونانس سوپرهارمونیک مرتبه دوم حساسیت بالاتری را به وجود ترک تنفسی نسبت به حالت رزونانس اصلی تیر دارد.

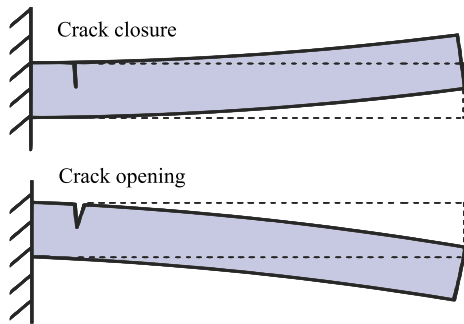
### ۱- مقدمه

پایش سلامت سازه انجام گرفته است. مدل‌سازی رفتار دینامیکی یک سازه ترک‌دار می‌تواند اولین مرحله از پایش سلامت یک سازه مطرح گردد. برای نمونه شناسایی محل و عمق ترک در سازه‌هایی مانند تیر یک مثال مهم از موارد پایش سلامت سازه می‌باشد که اهمیت قابل توجهی در کاربردهای مهندسی دارد. در حال حاضر بسیاری از روش‌های ارتعاشاتی موجود برای شناسایی این خرابی‌ها، استفاده از اطلاعات مودال سازه قبل از وقوع خرابی به عنوان اطلاعات پایه می‌باشد که همه تست‌های بعدی با این اطلاعات پایه مقایسه می‌گردند. به صورت کلی هر گونه تغییراتی نسبت به اطلاعات پایه، برای تخمین پارامترهای عمق و موقعیت ترک استفاده می‌گردد. اولین مطالعات برای بررسی تأثیر خرابی‌های موضعی بر ویژگی‌های ارتعاشی

ارزیابی و شناسایی آسیب‌های سازه‌ای مانند ترک‌ها، به ویژه در مراحل اولیه تشکیل آن، یک فرآیند حیاتی در کاربردهای مهندسی می‌باشد تا از آسیب‌های فاجعه آمیز و غیر قابل جبران به سازه جلوگیری به عمل آورد. ترک‌های ناشی از خستگی معمولاً در سازه‌هایی که در معرض نیروهای رفت و برگشتی هستند به وجود می‌آیند و می‌توانند توانایی سازه را برای تحمل بار وارده به طرز قابل توجهی کاهش دهند. به همین منظور تاکنون مطالعات بسیاری بر روی رفتار دینامیکی ترک‌های ناشی از خستگی بر روی سازه، به منظور ابداع یک روش شناسایی خرابی غیر مخرب و همچنین

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: Irani@kntu.ac.ir





شکل ۱. باز و بسته شدن ترک تنفسی در طی سیکل نوسان تیر  
**Fig. 1. Opening and closing of the breathing crack during the beam oscillation cycle**

ترک بسته همان سختی تیر سالم و نیروی بازبایی تیر نیز معمولاً به صورت یک سیستم تکه‌ای خطی نامتقارن<sup>۲</sup> تصور می‌شود [۷]. در مطالعات تجربی برودا و همکاران [۹] و همچنین لانگ و همکاران [۱۰] برای بررسی رفتار تنفسی ترک، به ایجاد یک ترک خستگی واقعی بر روی تیر پرداختند. بنابراین هرچه ترک ایجاد شده بر روی تیر دارای عرض کمتر باشد و دو سطح ترک نیز به یکدیگر نزدیک‌تر باشند، آن ترک به طبیعت خستگی خود نزدیک‌تر بوده و می‌تواند منجر به باز و بسته شدن کامل ترک و ایجاد رفتار دوخطی<sup>۳</sup> در آن منجر شود [۱۱ و ۱۲].

تعداد زیادی سیستم دینامیکی غیرخطی در مهندسی وجود دارد که برای مدلسازی آن‌ها از مدل‌های ارتعاشی دو خطی استفاده می‌شود. کاسیولا و همکاران [۱۳] به تحلیل پاسخ ارتعاشی یک تیر با ترک لبه‌ای غیر قابل رشد با استفاده از نیروی بازبایی سفتی دو خطی پرداختند. همچنین ریوولا و وایت [۱۴] برای شبیه‌سازی رفتار غیرخطی یک تیر با ترک تنفسی، از مدل ارتعاشی دو خطی استفاده کرده و از روش دو طیفی<sup>۴</sup> برای تجزیه و تحلیل پاسخ سیستم استفاده کردند. شماری از مطالعات تحلیلی و عددی در مورد نوسانگرهای دو خطی در ادبیات فن وجود دارند. ناتسیاواس [۱۵] یک روش تحلیلی را برای تعیین پاسخ دقیق یک سیستم چند ضابطه‌ای<sup>۵</sup> تحت بار تحریک هارمونیک اعمال کردند که در آن میرایی و نیروی بازگرداننده توابع دوخطی از سرعت و جابجایی سیستم بودند. چو و شن [۱۶] نیز از دو تابع موج مربع<sup>۶</sup> برای

سازه توسط کرمسر [۱] و تامسون [۲] انجام گردید. در این مطالعات به مدل‌سازی خرابی در یک ترک حاصل از خستگی و همچنین تعیین روش‌هایی برای محاسبه فرکانس طبیعی ارتعاشات تیر ترک‌دار پرداخته شده است. با توجه به مطالعات متعددی که انجام پذیرفته است [۳] تغییرات فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها<sup>۱</sup> برای شناسایی ترک‌های کوچک به نظر ناکافی می‌باشند. به همین منظور تحقیقات برای کشف پارامترهای ارتعاشاتی سازه که حساسیت بیشتری به وجود خرابی داشته و همچنین در کاربرد نیز ساده هستند، تا امروز ادامه یافته است. این پارامترها شامل موارد مهمی مانند تغییرات غیر خطی ارتعاشات در فرکانس رزونانس اصلی، تغییر در میرایی سازه ترک‌دار، حساسیت پاسخ در ارتعاشات ساب هارمونیک و سوپر هارمونیک و غیره می‌باشند [۴]. در بسیاری از مطالعاتی که توسط محققان در زمینه بررسی رفتار دینامیکی تیر ترک دار انجام گرفته از مدل ترک باز استفاده شده است. در این مطالعات ترک صرف نظر از علامت تنش وارده به تیر بصورت مداوم باز در نظر گرفته شده است. در این مدل نیروی بازگرداننده تیر خطی باقی می‌ماند. هرچند این ساده‌سازی مساله در مقایسه با ترک واقعی منجر به برآورد نادرست از تغییرات فرکانس طبیعی و شکل مدها در سازه می‌گردد [۵ و ۶]. به علاوه مدل‌های با ترک باز برای تفسیر رفتار غیر خطی سازه‌های دارای ترک‌های واقعی و با رفتار تنفسی مناسب نیستند. همچنین این مدل‌ها قادر به مشخص کردن رزونانس سوپر هارمونیک در تیر ترک دار نیز نمی‌باشند [۷ و ۸]. بنابراین می‌توان گفت فرض ترک همیشه باز در سازه کاملاً صادق نمی‌باشد زیرا بارهای فشاری باعث بسته شدن ترک می‌گردند. ترک‌های واقعی معمولاً در اثر خستگی و خوردگی در سازه ایجاد می‌گردند و معمولاً در طول نیم سیکل کشش دچار باز شدگی و در طول نیم سیکل فشاری بسته می‌گردند (شکل ۱)، بنابراین این رفتار باعث تغییر در سفتی سازه در طول دوره ارتعاشات تیر خواهد گردید. به همین دلیل نام این ترک‌ها را در سازه، ترک‌های تنفسی گذاشته‌اند. در بررسی ترک‌های تنفسی، سفتی تیر در زمان بسته شده ترک، برابر با سفتی تیر بدون ترک فرض شده و نیروی بازگرداننده معمولاً به صورت ضربی از سفتی تیر در حالت ترک بسته در نظر گرفته می‌شود.

در ترک‌های تنفسی معمولاً فرض بر این است که سختی تیر با

2 Asymmetric piecewise linear

3 Bilinear

4 Bispectrum

5 Piecewise

6 Square wave functions

1 Mode shapes

اصلی و سوپرهارمونیک پرداخته شده است. در ادامه نیز به بررسی پارامترهای تاثیرگذار بر رفتار دینامیکی تیر ترک‌دار مانند اندازه ترک، محل قرارگیری ترک، مقدار نیروی تحریک هارمونیک و ضریب میرایی پرداخته شده است.

## ۲- مدل‌سازی رفتار دوخطی ترک تنفسی

در این مطالعه یک تیر اولر برنولی با سطح مقطع ثابت در نظر گرفته شده است. همچنین فرض بر این است که مواد متشکله تیر همگن و ایزوتروپ است که تحت تأثیر یک نیروی هارمونیک متمرکز در انتهای تیر می‌باشد. بنابراین، می‌توان معادله حرکت یک تیر الاستیک بدون ترک را که در صفحه  $x-z$  و بدون میرایی، به صورت زیر نوشت [۱۹]:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial t^4}(x,t) + \rho s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = F_0 \cos(\Omega t) \delta(x-L) \quad (1)$$

در اینجا،  $w$  تغییر مکان تیر در جهت محور  $Z$ ،  $t$  زمان و  $s$  مساحت سطح مقطع تیر می‌باشد. همچنین  $F$  دامنه نیروی تحریک خارجی،  $\Omega$  فرکانس نیروی تحریک،  $E$  مدول الاستیک،  $I$  ممان اینرسی سطح مقطع تیر،  $\rho$  چگالی ماده و  $\delta$  نیز تابع دیراک می‌باشد. با فرض یک مود برای توصیف رفتار دینامیکی، پاسخ دینامیکی تیر را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲۱]:

$$w(x,t) = u(t)\psi(x) \quad (2)$$

که  $u(t)$  مختصات مودال وابسته به زمان تیر و  $\psi(x)$  با فرض شرایط مرزی تیر یک سر گیر دار و ارتعاش تیر در مود اصلی مطابق رابطه زیر به دست می‌آید [۲۱]:

$$\psi(x) = \cos \lambda x - \cosh \lambda x - \frac{(\cos \lambda L - \cosh \lambda L)}{(\sin \lambda L + \sinh \lambda L)} (\sin \lambda x + \sinh \lambda x) \quad (3)$$

که در آن مقدار  $\lambda L = 1/175$  برای اولین شکل مود تیر یک سر گیردار با حل معادله زیر به دست می‌آید.

$$1 + \cos \lambda L \cdot \cosh \lambda L = 0 \quad (4)$$

با قرار دادن معادله (۲) در معادله (۱) و ضرب طرفین در تابع

مدلسازی تغییر سفتی در نوسانگرهای دو خطی استفاده کردند و یک راه حل جدید برای نوسانگرهای دو خطی تحت تحریک با فرکانس پایین ارائه دادند. بیلی [۱۷] یک رابطه تحلیلی بین ناپیوستگی سفتی ضعیف در سازه و اندازه نقاط ماکزیمم سوپر هارمونیک در طیف فوریه<sup>۱</sup> به دست آمده از یک نوسانگر دو خطی را بدست آورد. پراوین و راثو [۱۸] به مدلسازی یک تیر دارای ترک عرضی تنفسی و رفتار دوخطی تحت بار هارمونیک پرداختند. به همین منظور ابتدا به تبدیل تابع دو خطی به یک تابع چندجمله‌ای کرده و سپس به مقایسه دقت تابع چند جمله‌ای پیشنهاد شده پرداختند.

لیو و بارکی [۱۹] به مطالعه در مورد پاسخ ارتعاشات غیر خطی یک تیر با ترک لبه‌ای<sup>۲</sup> پرداختند که در آن یک مدل از سفتی چند جمله‌ای درجه دو جهت توصیف مناسب‌تر رفتار ترک تنفسی پیشنهاد گردیده است. در این مطالعه نشان داده شده که غیرخطی بودن متأثر از عمق ترک و محل قرارگیری آن می‌باشد. همچنین دامنه و منحنی فازی متأثر از تغییر در پارامترهای ترک، میرایی، بارگذاری، فرکانس تحریک و دامنه ارتعاشات می‌باشند. با توجه به این مطالعه، یک روش مؤثر و کاربردی از ارتعاشات غیرخطی جهت شناسایی ترک‌ها در تیر، می‌تواند توسط بررسی اثرات ترک‌ها بر روی پاسخ حالت پایدار، منحنی فازی و پاسخ دامنه فرکانس پیشنهاد گردد.

خرازان و همکاران [۲۰] نیز در یک مطالعه تئوری و تجربی با در نظر گرفتن رفتار تنفسی ترک به بررسی تغییرات میرایی در یک تیر یک سرگیردار با ترک تنفسی پرداختند. مطابق با مطالعه تجربی انجام شده، تغییرات میرایی در اثر وجود ترک به عنوان یک پارامتر مهم و تأثیر گذار در پاسخ غیرخطی ترک مورد بررسی قرار گرفته است و اهمیت آن به تفسیر مورد بحث قرار گرفته است.

در این مطالعه با تقریب یک تابع دوخطی سفتی تیر یک سر گیردار با ترک عرضی تنفسی و تحت تحریک هارمونیک، معادله چند جمله‌ای غیرخطی با یک ترم مربعی<sup>۳</sup> از سفتی تیر ایجاد می‌گردد. سپس با حل این معادله توسط روش مقیاس‌های چندگانه به بررسی رفتار منحنی‌های پاسخ فرکانسی تیر ترک دار در رزونانس‌های

1 Fourier spectrum  
2 Edge crack  
3 Quadratic

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + H[u(t)] = f \cos(\Omega t) \quad (9)$$

که در آن  $H[u(t)]$  تابع دوخطی ترک می‌باشد که مطابق رابطه

زیر تعریف می‌گردد [۲۲]:

$$H[u(t)] = \begin{cases} \alpha k_c u & u \geq 0 \\ k_c u & u < 0 \end{cases} \quad (10)$$

پارامتر  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) نیز ضریب سفتی تیر با ترک تنفسی می‌باشد. ضریب سفتی  $\alpha$  در یک سیستم خطی برابر با عدد یک می‌باشد و در یک سیستم غیر خطی با ترک تنفسی مطابق رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\alpha = \frac{k_o}{k_c} \quad (11)$$

که در آن  $k_o$  سفتی تیر در نیم سیکل‌هایی هستند که ترک باز می‌باشد و مطابق با رابطه (۱۳) محاسبه می‌گردد.

$$k_o = \frac{1}{C_o} \quad (12)$$

که در آن  $C_o$  نرمی تیر ترک‌دار در حالت کاملاً باز می‌باشد و طبق رابطه زیر تعیین می‌گردد [۲۳].

$$C_o = C_\Delta + C_{cc} \quad (13)$$

که در آن  $C_\Delta$ ، تغییر نرمی تیر در اثر باز شدن ترک می‌باشد که مطابق رابطه زیر تعریف می‌گردد [۲۴].

$$C_\Delta = \frac{\partial u_i}{\partial P_i} = W \frac{\partial^2}{\partial P_i^2} \int_0^a J da = \frac{72L_c^2 \pi (1 - \nu^2)}{E W b^4} \phi \quad (14)$$

که در آن  $L_c$  نمایش دهنده فاصله ترک از سر آزاد تیر،  $\nu$  نشان دهنده ضریب پواسون،  $W$  نشان دهنده عرض تیر و  $\phi$  نیز توسط رابطه زیر به دست می‌آید [۲۴]:

$$\begin{aligned} \phi = & 19.60 \left(\frac{a_c}{b}\right)^{10} - 40.693 \left(\frac{a_c}{b}\right)^9 + 47.041 \left(\frac{a_c}{b}\right)^8 - \\ & 32.993 \left(\frac{a_c}{b}\right)^7 + 20.295 \left(\frac{a_c}{b}\right)^6 - 9.975 \left(\frac{a_c}{b}\right)^5 + \\ & 4.602 \left(\frac{a_c}{b}\right)^4 - 1.047 \left(\frac{a_c}{b}\right)^3 + 0.629 \left(\frac{a_c}{b}\right)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

مودال  $\psi(x)$  و انتگرال گیری در طول تیر می‌توان معادله یک درجه آزادی تیر را به صورت معادله (۵) نوشت [۱۹]:

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + c \frac{du(t)}{dt} + k_c u(t) = F^* \quad (5)$$

که در آن  $m$  جرم تعمیم یافته بوده و مطابق رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$m = \int_0^L m(x) \psi^2(x) dx \quad (6)$$

پارامتر  $k_c$  سفتی تیر سالم می‌باشد که از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$k_c = \frac{1}{c_{cc}} = \int_0^L EI \psi'^2(x) dx \quad (7)$$

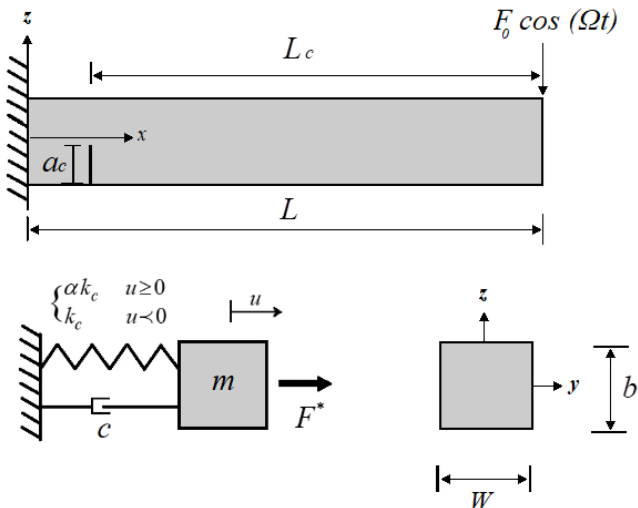
که در آن  $c_{cc}$  نرمی تیر در حالت ترک بسته می‌باشد و همچنین  $F^*$  نیز نیروی تحریک خارجی بوده و مطابق رابطه زیر به دست می‌آید [۱۹]:

$$F^* = f \cos(\Omega t) \quad (8)$$

که در آن  $f = F \psi(L)$  می‌باشد.

همچنین از آنجا که میرایی یکی از عوامل مؤثر بر سیستم‌های ارتعاشی است، فرض بر این است که تیر ترک دار به یک دمپینگ ویسکوز متصل شده و  $c$  ضریب میرایی می‌باشد که با فرض میرایی مودال نسبت میرایی آن  $c = \gamma m \omega$  می‌شود.

در یک تیر مرتعش با ترک تنفسی، زمانی که ترک تحت بار فشاری می‌باشد بسته شده و دو سطح ترک با یکدیگر در تماس می‌باشند. در این حالت سفتی تیر ترک‌دار برابر با سفتی تیر سالم در نظر گرفته می‌شود. همچنین زمانی که ترک تحت بار کششی قرار می‌گیرد در فاز باز شدن قرار گرفته و سفتی تیر ضریبی از سفتی تیر سالم می‌باشد که این ضریب توسط پارامتر  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) که در ادامه تفسیر خواهد شد محاسبه می‌گردد. بنابراین یک تیر با ترک تنفسی در طول سیکل‌های ارتعاشی خود رفتاری دو خطی<sup>۱</sup> داشته و پاسخ هارمونیک غیرخطی به سیگنال‌های تحریک می‌دهد. معادله حرکت تیر با ترک تنفسی (نوسانگر دو خطی) را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲۲].



شکل ۲. ابعاد تیر یک سرگیردار با ترک تنفسی عرضی و مدل یک درجه آزادی معادل

Fig. 2. Dimensions of the cantilever beam with a transverse breathing crack and equivalent single degree-of-freedom model

که بسط رابطه (۱۱) به صورت رابطه (۱۲) بیان می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 E(c_0, c_1, c_2, c_3) = & \int_{-x}^0 \{ (k_c x) - (C_0 + C_1 k_c x + C_2 k_c x^2 + C_3 k_c x^3) \}^2 dx + \\
 & \int_0^x \{ (\alpha k_c x) - (C_0 + C_1 k_c x + C_2 k_c x^2 + C_3 k_c x^3) \}^2 dx = \\
 & \frac{2}{7} C_3^2 k_c^2 X^7 + \frac{2}{5} X^5 C_1 C_3 k_c^2 + \frac{1}{5} X^5 C_2^2 k_c^2 - \\
 & \frac{2}{5} X^5 C_3 k_c^2 - \frac{1}{2} X^4 C_1 C_2 k_c^2 - \frac{1}{2} X^4 C_0 C_3 k_c + \\
 & \frac{1}{2} X^4 C_2 k_c^2 + \frac{1}{3} X^3 C_1^2 k_c^2 \quad (18) \\
 & + \frac{2}{3} X^3 C_0 C_2 k_c - \frac{2}{3} X^3 C_1 k_c^2 + \frac{1}{3} X^3 k_c^2 - \\
 & X^2 C_0 C_1 k_c + X^2 C_0 k_c + 2C_0^2 X + \\
 & \frac{1}{5} (-2(\alpha k_c - C_1 k_c) C_3 k_c + C_2^2 k_c^2) X^5 \\
 & + \frac{1}{4} (2C_0 C_3 k_c - 2(\alpha k_c - C_1 k_c) C_2 k_c) X^4 + \\
 & \frac{1}{3} (2C_0 C_2 k_c + (\alpha k_c - C_1 k_c)^2) X^3 - C_0 (\alpha k_c - C_1 k_c) X^2
 \end{aligned}$$

که در آن مطابق رابطه زیر مشتق تابع خطای  $E$  به نسبت هر

کدام از ضرایب  $C_1, C_2, C_3$  و  $C_0$  برابر با صفر می‌باشد.

$$\frac{\partial E}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (19)$$

که در آن  $a_c$  نمایش دهنده عمق ترک و  $b$  نیز بیانگر عمق تیر می‌باشد که در شکل ۲ نمایش داده شده‌اند.

همچنین این نکته نیز می‌بایست مد نظر قرار داده شود که حداکثر بازه ضریب عمق ترک برای دسترسی به دقت مناسب در تخمین میزان  $k_o$  ترک برابر با  $\frac{a_c}{b} \leq 0.6$  می‌باشد [۲۵].

### ۳- مدل‌سازی تابع چند جمله‌ای سفتی تیر با ترک تنفسی

در این قسمت جهت بررسی رفتار دینامیکی غیر خطی تیر ترک دار به تبدیل تابع دوخطی به تابع پیوسته چند جمله‌ای با استفاده از تئوری تقریب و ایرشتراس<sup>۱</sup> پرداخته می‌شود [۲۶]. تئوری تخمین و ایرشتراس بیان می‌کند که اگر  $f(x)$  یک تابع پیوسته در بازه  $[a, b]$  باشد و برای هر  $\epsilon > 0$ ، یک چندجمله‌ای  $p(x)$  در بازه  $[a, b]$  موجود بوده که برای تمامی ضرایب  $x$  در بازه  $[a, b]$  عبارت  $|f(x) - p(x)| < \epsilon$  برقرار می‌باشد. با استفاده از این تئوری هر تابع پیوسته در یک بازه بسته می‌تواند با یک چند جمله‌ای با هر درجه‌ای از دقت تخمین زده شود. در ادامه، تابع تنفسی ترک با یک تابع از درجه سوم در بازه  $[-X, X]$  توسط تئوری تقریب و ایرشتراس، تخمین زده می‌شود. همچنین، نیروی بازگرداننده  $h[u(t)]$  یک تابع پیوسته از جابجایی  $u$  تیر می‌باشد که می‌تواند به صورت چند جمله‌ای زیر تخمین زده شود.

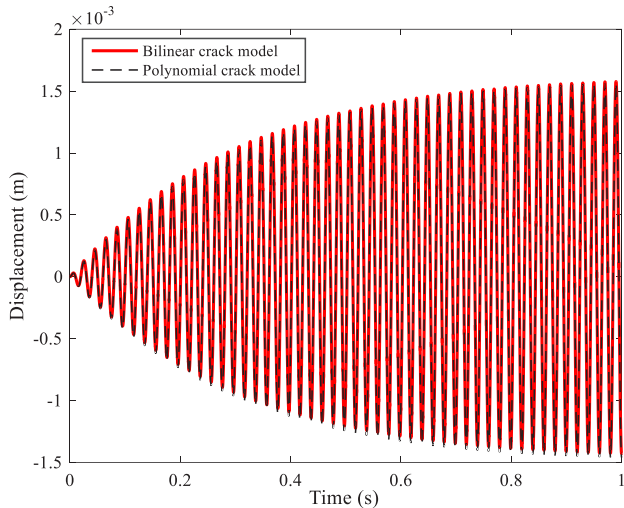
$$h[u(t)] = C_0 + C_1 k_c u + C_2 k_c u^2 + C_3 k_c u^3 \quad (16)$$

که در آن  $C$  ترم ثابت،  $k$  سفتی تیر سالم بدون ترک، عامل  $C_1 k u$  ترم خطی معادله و ترم‌های با درجه بالاتر نمایش دهنده اجزای غیرخطی از چند جمله‌ای تخمین زده شده می‌باشد. در عمل زمانی که نیروی استاتیکی به سیستم اعمال نشود، ضریب  $C$  می‌تواند در نظر گرفته نشود [۱۱].

ضرایب  $C_1, C_2, C_3$  و  $C_0$  با حداقل سازی تابع خطای  $E$  بین سیستم واقعی دوخطی و چندجمله‌ای غیرخطی حاصل از تقریب و ایرشتراس در بازه  $[-X, X]$  به صورت معادله زیر تخمین زده می‌شوند [۲۲].

$$E(C_0, C_1, C_2, C_3) = \int_{-X}^X \{ H[u(t)] - h[u(t)] \}^2 dx \quad (17)$$

1 Weierstrass approximation theorem



شکل ۳. مقایسه مدل‌های دوخطی و چند جمله‌ای تابع ترک تنفسی  
**Fig. 3. Comparison of the bilinear and polynomial functions of the breathing crack**

با توجه به شکل ۳ مشاهده می‌گردد پاسخ تیر با استفاده از چند جمله‌ای تخمین زده شده از تیر با ترک تنفسی تطابق کامل با مدل اولیه دوخطی از سفتی ترک دارد.

در ادامه شکل ۴ نیز نشان دهنده تغییرات ضریب غیرخطی  $C_p$  به نسبت عمق و موقعیت ترک می‌باشد. با توجه به شکل ۴ ملاحظه می‌شود که افزایش عمق ترک و همچنین نزدیک شدن ترک به سر گیردار تیر منجر به افزایش ضریب غیرخطی  $C_p$  و در نتیجه رفتار غیرخطی سیستم خواهد شد.

#### ۴- پاسخ رزونانس اصلی تیر ترک دار

در این قسمت به بررسی و تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر ترک دار با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه [۲۷] پرداخته می‌شود. این روش قابل استفاده برای سیستم‌های با ویژگی غیرخطی ضعیف معتبر می‌باشد. با استفاده از تابع چند جمله‌ای ترک، معادله حرکت یک درجه آزادی تیر با ترک تنفسی مطابق رابطه (۲۵) بیان می‌گردد.

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + c_1ku + c_2ku^2 = f \cos(\Omega t) \quad (25)$$

که می‌توان رابطه (۲۵) را به صورت رابطه (۲۶) بیان نمود.

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + 2\zeta\omega_0 \frac{d}{dt}u(t) + \omega_0^2u + \beta u^2 = \frac{f}{m} \cos(\Omega t) \quad (26)$$

با توجه به عدم وجود بار استاتیکی بر روی تیر مقدار  $C$  برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود.

با اعمال رابطه (۱۶)، معادلات (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) تشکیل می‌شوند.

$$\frac{\partial E}{\partial C_1} = \frac{4}{5}X^5C_3k_c^2 + \frac{2}{3}X^3C_1k_c^2 - \quad (20)$$

$$\frac{2}{3}X^3k_c^2 - \frac{2}{3}(\alpha k_c - C_1k_c)k_cX^3 = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial C_2} = \frac{4}{5}C_2k_c^2X^5 - \frac{1}{2}X^4C_1k_c^2 + \frac{1}{2}X^4k_c^2 + \quad (21)$$

$$\frac{4}{3}C_0k_cX^3 - \frac{1}{2}(\alpha k_c - C_1k_c)k_cX^4 = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial C_3} = \frac{4}{7}C_3k_c^2X^7 + \frac{2}{5}X^5C_1k_c^2 - \quad (22)$$

$$\frac{2}{5}X^5k_c^2 - \frac{2}{5}(\alpha k_c - C_1k_c)k_cX^5 = 0$$

که با حل دستگاه معادلات (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) مقادیر هر کدام از ضرایب  $C_1$ ،  $C_p$  و  $C_r$  مطابق رابطه (۲۳) به دست می‌آیند.

$$C_1 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{5\alpha - 1}{8X}, \quad C_3 = 0 \quad (23)$$

مقدار  $X$  در این مساله برابر با دامنه پاسخ دینامیکی بر اثر فرکانس تحریک در رزونانس اصلی سازه ( $\Omega = \omega$ ) می‌باشد که توسط رابطه زیر تخمین زده می‌شود [۱۱].

$$X = \frac{f}{2m\zeta\omega_0^2} \quad (24)$$

برای ارزیابی دقت مدلسازی چندجمله‌ای در شکل ۳ منحنی جابجایی سر آزاد تیر بر حسب زمان با استفاده از روش عددی رانگ کوتا برای مدل‌های ترک دوخطی و چند جمله‌ای رسم گردیده است برای این ارزیابی تیر یک سرگیردار با ابعاد  $L = 400 \text{ mm}$ ،  $W = 10 \text{ mm}$ ،  $b = 10 \text{ mm}$  در نظر گرفته شده است. مقدار نیروی تحریک  $f = 1 \text{ N}$  می‌باشد. همچنین ضریب عمق ترک (نسبت عمق ترک به عمق تیر) برابر  $\alpha_c = \frac{a_c}{b} = 0/3$  و ضریب موقعیت آن (نسبت فاصله ترک از سر آزاد تیر به طول تیر)  $\eta = \frac{L_c}{L} = 0/9$  در نظر گرفته شده است.



با استفاده از سه مقیاس زمانی زیر جهت بسط درجه دوم

$$T_0 = t, T_1 = \varepsilon^1 t, T_2 = \varepsilon^2 t \quad (30)$$

جایابی سر آزاد تیر مطابق رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (31)$$

با جایگزینی معادله بالا و بازنویسی با استفاده از روش مقیاس‌های

چندگانه معادله زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2))(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) + \\ & 2\varepsilon^2 \mu (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) \\ & + \omega_0^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) + \varepsilon \beta (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2)^2 = \\ & \varepsilon^2 \frac{F}{2} (e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0}) \end{aligned} \quad (32)$$

با جداسازی معادلات با ضرایب  $\varepsilon^0$ ،  $\varepsilon^1$  و  $\varepsilon^2$  معادلات (۳۳)،

(۳۴) و (۳۵) به دست می‌آید.

$$\varepsilon^0 : D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (33)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \beta u_0^2 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 : D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = & -2D_0 D_1 u_1 - 2D_0 D_2 u_0 - \\ & 2\mu D_0 u_0 - D_1^2 u_0 - 2\beta u_0 u_1 + \frac{F}{2} e^{i\Omega T_0} + \frac{F}{2} e^{-i\Omega T_0} \end{aligned} \quad (35)$$

با حل عمومی برای معادله با مرتبه  $\varepsilon^0$ ، پاسخ  $u$  مطابق رابطه

زیر نوشته می‌شود:

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (36)$$

که با جایگزینی معادله (۳۶) در معادله (۳۴)، معادله زیر به دست

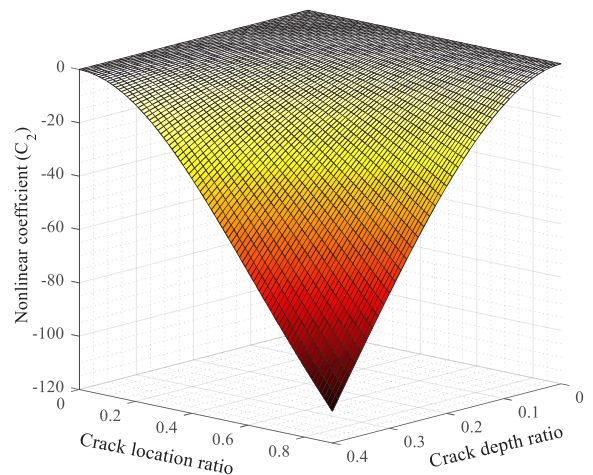
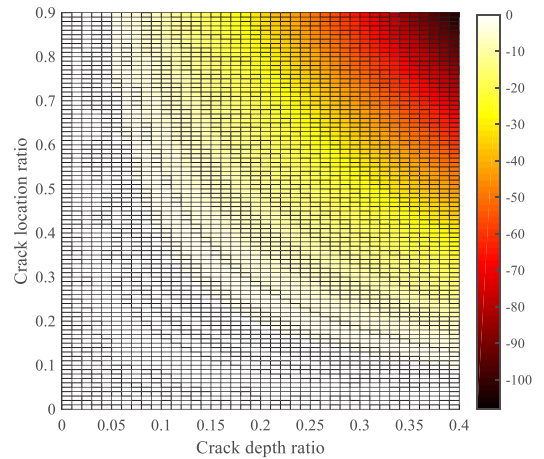
می‌آید.

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = & -2i\omega_0 D_1 A e^{i\omega_0 t} - A^2 \beta e^{2i\omega_0 t} - \\ & 2\beta A \bar{A} - \bar{A}^2 \beta e^{-2i\omega_0 t} + 2i\omega_0 D_1 \bar{A} e^{-i\omega_0 t} \end{aligned} \quad (37)$$

با حذف ضرایب سکولار در معادله (۳۷) معادله (۳۸) به دست

می‌آید.

$$-2i\omega_0 D_1 A e^{i\omega_0 t} = 0 \quad (38)$$



شکل ۴. تغییرات در ضریب غیرخطی ترک به نسبت عمق و موقعیت ترک

Fig. 4. Changes in the nonlinear crack coefficient for different crack depth and location ratios

که در آن فرکانس طبیعی سیستم از رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$\omega_0^2 = \frac{C_1 k}{m} = \frac{(1 + \alpha) k_c}{2m} \quad (27)$$

و همچنین مرتبه ضرایب در رابطه (۲۶) نیز به صورت زیر بیان

می‌گردد:

$$\zeta \omega_0 = \mu = \varepsilon^2 \mu, \quad \frac{C_2 k_c}{m} = \beta = \varepsilon \beta, \quad \frac{f}{m} = F = \varepsilon^2 F \quad (28)$$

که در آن  $0 < \varepsilon < 1$  بوده [۲۸] و با جایگزینی مرتبه ضرایب

رابطه (۲۸)، معادله (۲۶) جهت استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه

به فرم استاندارد زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) + 2\varepsilon^2 \mu \frac{d}{dt} u(t) + \omega_0^2 u + \varepsilon \beta u^2 = \varepsilon^2 F \cos(\Omega t) \quad (29)$$

$$\begin{cases} \omega_0 a(\sigma - \gamma') + \frac{5}{12} \frac{a^3 \beta^2}{\omega_0^2} + \Lambda \cos(\gamma) = 0 \\ -\mu a \omega_0 - a' \omega_0 + \Lambda \sin(\gamma) = 0 \end{cases} \quad (47)$$

که در آن  $\Lambda$  مطابق رابطه زیر تعیین می‌گردد.

$$\Lambda = \frac{F}{2} \quad (48)$$

بنابراین دستگاه معادلات (۴۹) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{cases} \gamma' = \sigma + \frac{5}{12} \frac{a^3 \beta^2}{\omega_0^3 a} + \frac{\Lambda}{\omega_0 a} \cos(\gamma) \\ a' = -\mu a + \frac{\Lambda}{\omega_0} \sin(\gamma) \end{cases} \quad (49)$$

با در نظر گرفتن وضعیت پایدار در ارتعاشات  $\gamma' = 0$  و  $a' = 0$  معادله (۵۰) به دست می‌آید.

$$\begin{cases} -\frac{\omega_0 a}{\Lambda} \left( \sigma + \frac{5}{12} \frac{a^2 \beta^2}{\omega_0^3} \right) = \cos(\gamma) \\ \frac{\omega_0}{\Lambda} (\mu a) = \sin(\gamma) \end{cases} \quad (50)$$

معادله فرکانسی تیر ترک دار در حالت رزونانس مطابق رابطه زیر به دست می‌آید.

$$[\omega_0 a \left( \sigma + \frac{5}{12} \frac{a^2 \beta^2}{\omega_0^3} \right)]^2 + [\omega_0 \mu a]^2 = \Lambda^2 \quad (51)$$

در نهایت  $\sigma$  مطابق با معادله (۵۲) به دست می‌آید.

$$\sigma = \frac{1}{12} \frac{-5a^3 \beta^2 m \pm 6(-4a^2 m^2 \zeta^2 \omega_0^8 + f^2 \omega_0^4)^{0.5}}{ma \omega_0^3} \quad (52)$$

شکل ۵ (الف) نمایش دهنده منحنی دامنه بر حسب فرکانس تنظیمی برای تیر یکسرگردار با ابعاد مذکور در بخش ۳ این مقاله می‌باشد. ضریب عمق ترک برابر  $\alpha_c = 0/3$  و ضریب موقعیت آن نیز برابر با  $\eta = 0/9$  می‌باشد. مقدار بزرگی نیروی تحریک هارمونیک در فرکانس رزونانس اصلی نیز ثابت و برابر  $f = 2N$  می‌باشد. مقدار نیروی انتخاب شده برای بررسی رفتار غیر خطی تیر با ترک تنفسی بایستی به اندازه‌ای بزرگ باشد که بتواند سبب بسته شدن ترک در نیم سیکلی که تحت بار فشاری قرار می‌گیرد شود. با توجه به مطالعات تجربی انجام شده در مرجع [۲۰] و همچنین با توجه به این

ضریب  $A$  مطابق رابطه (۳۹) تعیین می‌گردد.

$$D_1 A = 0, \quad A = A(T_2) \quad (39)$$

و همچنین  $u_1$  با حل معادله (۳۷) مطابق رابطه زیر بیان می‌گردد.

$$u_1 = \frac{1}{3} \frac{A^2 \beta}{\omega_0^2} e^{2i\omega_0 T_0} - \frac{2A\bar{A}\beta}{\omega_0^2} + \frac{1}{3} \frac{\bar{A}^2 \beta}{\omega_0^2} e^{-2i\omega_0 T_0} \quad (40)$$

با جایگزینی  $u_1$  در معادله (۳۵)، معادله (۴۱) به دست می‌آید:

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = [-2i\omega_0 D_2 A - 2\mu i A \omega_0 + \frac{10}{3\omega_0^2} \beta^2 A^2 \bar{A}] e^{i\omega_0 T_0} + \frac{F}{2} e^{i\Omega T_0} + NST + CC \quad (41)$$

جهت حل معادله بالا مقادیر  $A$  و  $\bar{A}$  به صورت معادله (۴۱) نوشته می‌شود:

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\theta}, \quad \bar{A} = \frac{1}{2} a e^{-i\theta} \quad (42)$$

با در نظر گرفتن مجاورت فرکانس تحریک تیر با فرکانس طبیعی سیستم مطابق با معادله (۴۳):

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \sigma \quad (43)$$

که در آن  $\sigma$  یک پارامتر به نام فرکانس تنظیمی<sup>۱</sup> جهت مطالعه رفتار دینامیکی حول پاسخ رزونانس می‌باشد.

در ادامه با حذف ترم‌های سکولار معادله (۴۴) حاصل می‌گردد.

$$\omega_0 a \theta' - i\mu a \omega_0 - i\omega_0 a' + \frac{5}{12} \frac{a^3 \beta^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{2} F e^{i(\sigma T_2 - \theta)} = 0 \quad (44)$$

معادله (۴۴) با تعریف پارامتر  $\gamma$  به صورت معادله (۴۵) مستقل<sup>۲</sup> می‌گردد.

$$\gamma = \sigma T_2 - \theta \quad (45)$$

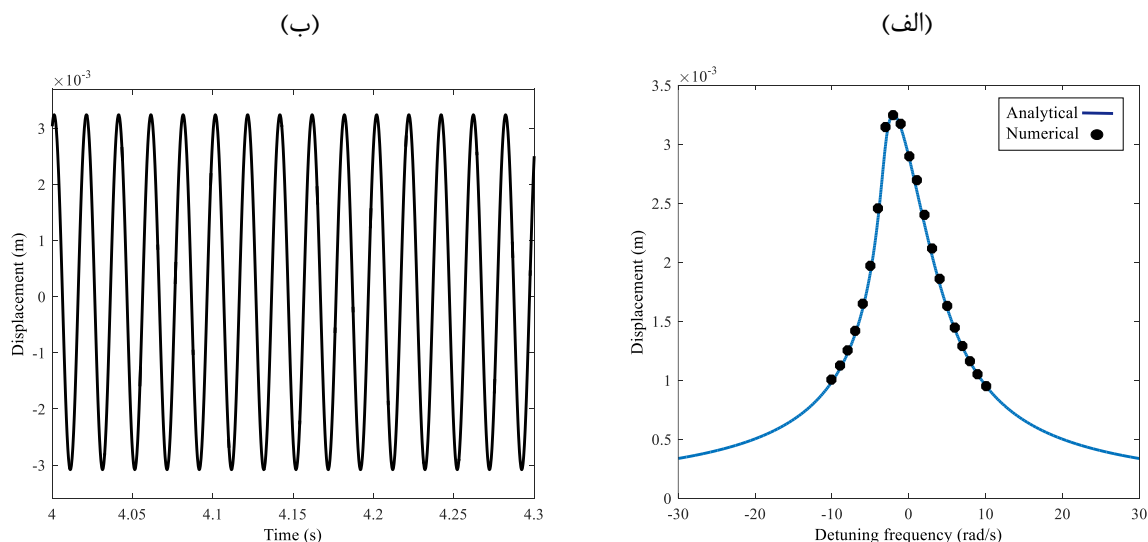
که با جایگزینی  $\theta'$  مطابق رابطه زیر

$$\theta' = \sigma - \gamma' \quad (46)$$

دستگاه معادلات (۴۷) به دست می‌آید.

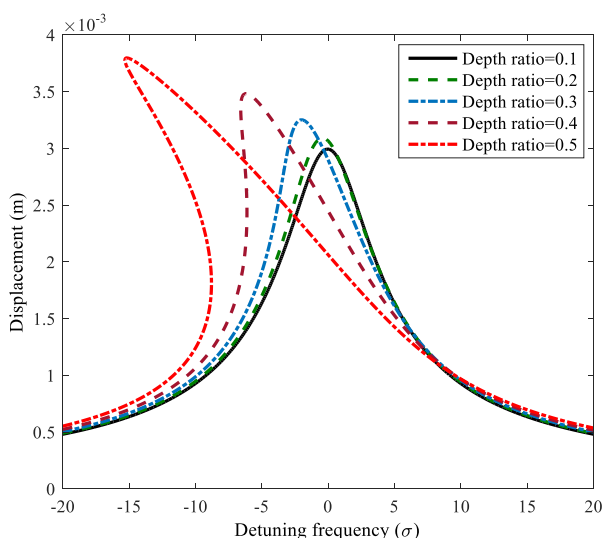
1 Detuning frequency  
2 Autonomous





شکل ۵. پاسخ رزونانس حاصل از (الف) حل تحلیلی (خط ممتد) و نقاط متناظر از روش عددی (●) و (ب) پاسخ حالت پایدار عددی معادله تیر با ترک تنفسی

Fig. 5. Resonance response from (a) analytical solution (continuous line) and the corresponding points of the numerical method (●) and (b) the numerical steady-state response of the cracked beam equation



شکل ۶. منحنی‌های پاسخ فرکانسی تیر در رزونانس اصلی با عمق‌های مختلف از ترک تنفسی

Fig. 6. Frequency-response curves in the primary resonance with different depths of the breathing crack

تحریک هارمونیک نیز برابر با مقدار ثابت  $f = 2N$  می‌باشد. در شکل ۷ نیز ملاحظه می‌گردد که هرچه ترک تنفسی به قسمت گیردار تیر نزدیک‌تر شود شاهد افزایش شدت رفتار غیرخطی سیستم خواهیم بود.

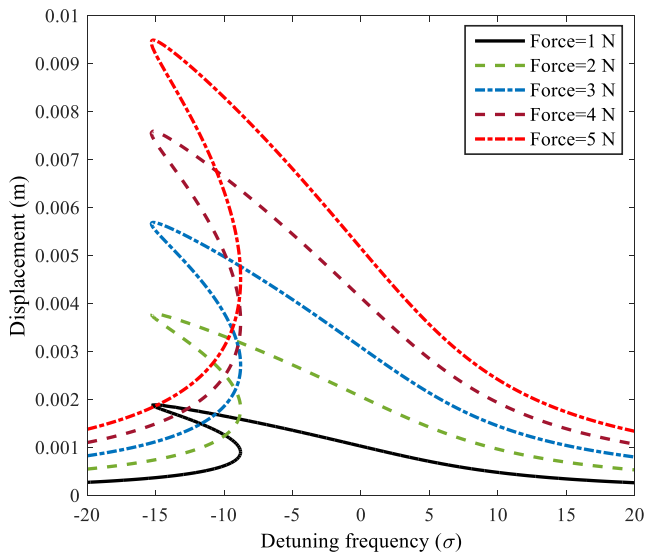
با توجه به شکل‌های ۶ و ۷ مشاهده می‌شود که با افزایش عمق ترک و همچنین نزدیک‌تر شدن موقعیت ترک به سر گیردار تیر، دامنه

که تحریک در فرکانس رزونانس اصلی تیر فرض می‌گردد، نیرویی به بزرگی ۲ نیوتن برای بستن ترک در نیم سیکلی که تحت بار فشاری است کافی بوده و سبب ایجاد رفتار تنفسی ترک خواهد گردید.

نقاط به رنگ مشکی بر روی شکل ۵ (الف) نمایش دهنده دامنه ارتعاشات حالت پایدار تیر با ترک تنفسی پس از ۴ ثانیه می‌باشد که توسط ترسیم عددی معادله تیر با استفاده روش رانگ کوتا به دست آمده است. با توجه به شکل ۵ (الف) تطابق حل تحلیلی با حل عددی معادله تیر با ترک تنفسی مشاهده می‌گردد. همچنین شکل ۵ (ب) نیز نمایش دهنده ترسیم عددی پاسخ حالت پایدار تیر مذکور می‌باشد.

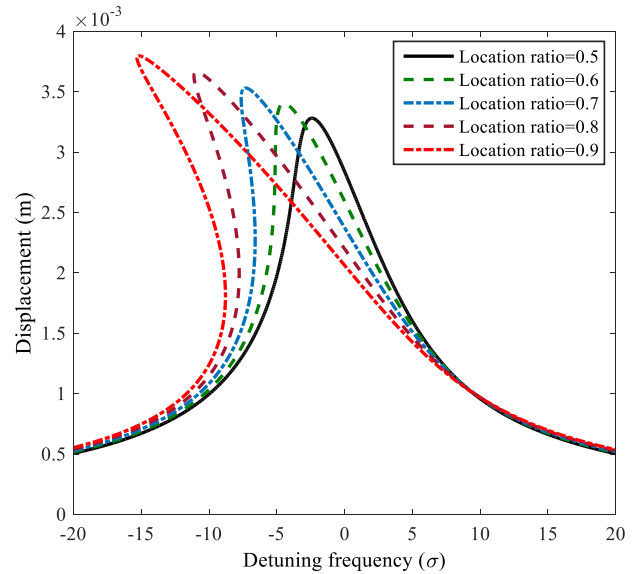
در ادامه با ترسیم شکل ۶ به مقایسه منحنی‌های تیر در رزونانس اصلی با عمق‌های مختلف ترک تنفسی پرداخته شده است. همچنین ضریب محل قرارگیری ترک برابر با  $\eta = 0/9$  و مقدار نیروی تحریک هارمونیک برابر با  $f = 2N$  در نظر گرفته شده است. با توجه به منحنی‌های پاسخ فرکانسی تیر مشاهده می‌شود با افزایش عمق ترک تنفسی، مقدار ضریب نرم شوندگی تیر بیشتر شده که منجر به افزایش رفتار غیر خطی می‌شود.

در شکل ۷ نیز به مقایسه منحنی‌های تیر در رزونانس اصلی با ضرایب موقعیت مختلف ترک تنفسی پرداخته شده است. در این شکل ضریب عمق ترک  $\alpha_c = 0/5$  فرض می‌شود. همچنین نیروی



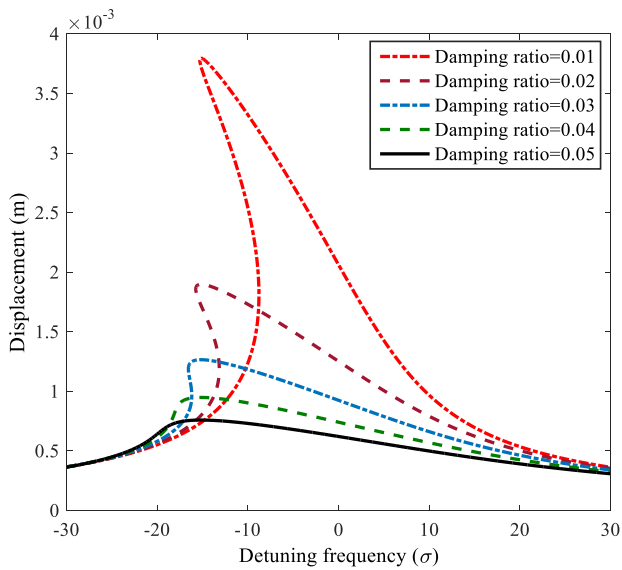
شکل ۸. منحنی‌های پاسخ فرکانسی تیر در رزونانس اصلی با مقادیر مختلف از نیروی تحریک

Fig. 8. Frequency-response curves at the primary resonance with different amplitudes of excitation force



شکل ۷. منحنی‌های پاسخ فرکانسی تیر در رزونانس اصلی با موقعیت‌های مختلف ترک تنفسی

Fig. 7. Frequency-response curves in the primary resonance with different locations of the breathing crack



شکل ۹. منحنی‌های پاسخ فرکانسی در رزونانس اصلی با مقادیر مختلف از ضریب میرایی

Fig. 9. Frequency-response curves in the primary resonance with different values of the damping coefficient

انتخاب گردد که مانع از نوسانات بزرگ تیر گردد [۲۷].  
 به جهت بررسی تأثیر میرایی در رفتار غیرخطی تیر ترک‌دار در شکل ۹ نیز به مقایسه منحنی‌های تیر در رزونانس اصلی با مقادیر مختلف از ضریب میرایی سیستم پرداخته شده است. در این مساله ضریب عمق ترک  $\alpha_c = 0/5$  و ضریب موقعیت ترک نیز  $\eta = 0/9$  است. همچنین مقدار نیروی تحریک نیز برابر با مقدار ثابت  $f = 2\text{ N}$

پاسخ ارتعاشات دچار تغییرات قابل توجه ناپیوسته و ناگهانی در پاسخ سیستم شده است که به آن پدیده پرش در ارتعاشات غیرخطی تیر تیرک دار می‌گویند. برای توصیف فیزیکی این پدیده فرض می‌شود که فرکانس به آرامی در اطراف رزونانس اصلی تیر ترک دار کاهش یابد که این امر منجر به افزایش تدریجی دامنه نوسان می‌شود که پس از رسیدن به نقطه ماکزیمم دامنه با مقدار کمی از کاهش پاسخ دچار افت شدید در دامنه نوسان (پدیده پرش) می‌شود.

در ادامه به جهت بررسی میزان حساسیت پاسخ سیستم به مقدار نیروی تحریک به بررسی تأثیر این پارامتر بر روی رفتار غیرخطی سیستم پرداخته می‌شود. شکل ۸ نمایش‌دهنده منحنی‌های پاسخ تیر در رزونانس اصلی و با مقادیر مختلف از نیروی تحریک هارمونیک می‌باشد. در این مساله نیز ضریب عمق ترک  $\alpha_c = 0/5$  و ضریب موقعیت ترک نیز  $\eta = 0/9$  می‌باشد. این نکته بایستی مورد توجه قرار گیرد که استفاده از نیروهای تحریک خیلی کوچک می‌تواند مانع از بسته شدن کامل ترک در طی دوره نوسان شود. همچنین با توجه به این که تحریک هارمونیک خارجی در رزونانس اصلی تیر ترک‌دار می‌باشد، می‌بایست این نکته نیز مدنظر قرار گیرد که استفاده از نیروهای بسیار بزرگ می‌تواند مانع از فرض رفتار سیستم غیرخطی ضعیف گردد. بنابراین میزان نیروی وارده به تیر بایستی در حدودی

با جایگزینی معادله بالا و بازنویسی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه معادله (۵۷) به دست می‌آید.

$$(D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) + 2\varepsilon \mu (D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) + \omega_0^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) + \varepsilon \beta (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^2 = \frac{f}{m} \cos(\Omega t) \quad (57)$$

با جداسازی معادلات با ضرایب  $\varepsilon^1$ ،  $\varepsilon^0$  معادلات (۵۸) و (۵۹) به دست می‌آید.

$$\varepsilon^0 : D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = \frac{f}{m} \cos(\Omega t) \quad (58)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - \beta u_0^2 \quad (59)$$

با حل عمومی برای معادله با مرتبه  $\varepsilon^0$ ، پاسخ  $u$  مطابق معادله (۶۰) نوشته می‌شود:

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} + F e^{i\Omega T_0} + F e^{-i\Omega T_0} \quad (60)$$

که در آن  $F$  توسط معادله (۶۱) بیان می‌گردد.

$$F = \frac{f}{2m} (\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} \quad (61)$$

با جایگزینی معادله (۶۰) در معادله (۵۹)، معادله (۶۲) به دست می‌آید.

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2i\omega_0 D_1 A e^{i\omega_0 t} + 2i\mu F \Omega e^{-i\Omega t} - 2\mu F \Omega e^{i\Omega t} + 2\mu i\omega_0 \bar{A} e^{-i\omega_0 t} - 2\mu i\omega_0 A e^{i\omega_0 t} - \beta A^2 e^{2i\omega_0 t} - 2\beta A \bar{A} - 2\beta A F e^{i(\omega_0 + \Omega)t} - 2\beta A F e^{i(\omega_0 - \Omega)t} - \beta \bar{A}^2 e^{-2i\omega_0 t} - 2\beta \bar{A} F e^{i(\Omega - \omega_0)t} - 2\beta \bar{A} F e^{-i(\Omega + \omega_0)t} - \beta F^2 e^{2i\Omega t} - 2\beta F^2 - \beta F^2 e^{-2i\Omega t} \quad (62)$$

با توجه به معادله (۶۲) مشاهده می‌شود که زمانی که فرکانس تحریک برابر  $\Omega = \frac{\omega_0}{\gamma}$  باشد یک رزونانس ثانویه در سیستم وجود دارد که مربوط به رزونانس سوپرهارمونیک سیستم است. بنابراین معادله (۶۳) جهت بررسی رفتار تیر با ترک تنفسی در نزدیکی فرکانس سوپرهارمونیک بیان می‌شود.

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2} + \varepsilon \sigma \quad (63)$$

در نظر گرفته شده است. شکل ۹ نمایش دهنده تأثیر ضریب میرایی بر روی منحنی‌های پاسخ است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که افزایش میرایی در سیستم منجر به کاهش تأثیرات غیرخطی تیر ترک‌دار می‌شود. هرچند در این مطالعه به جهت نمایش میزان تأثیر میرایی بر رفتار غیرخطی تیر، مقدار ضریب میرایی تا حدود پنج برابر نمونه اولیه افزایش یافته است. مقدار میرایی در پاسخ یک سیستم در رزونانس اصلی بسیار حائز اهمیت است. از نظر ریاضی در غیاب میرایی سیستم، دامنه نوسانات در حالت رزونانس میل به سمت بینهایت دارند که هرچند به دلیل وجود میرایی این دامنه دارای مقدار متناهی می‌باشد [۲۷]. با توجه به نتایج موجود در ادبیات فن [۲۰، ۲۹ و ۳۰] ایجاد یک ترک تنفسی بر روی تیر سبب افزایش مقدار ضریب میرایی تیر می‌شود. بنابراین میرایی یکی از پارامترهای تأثیرگذار است که بایستی در بررسی رفتار غیرخطی تیر با ترک تنفسی مورد توجه قرار گیرد.

## ۵ - پاسخ رزونانس سوپرهارمونیک تیر ترک دار

با فاصله گرفتن فرکانس تحریک  $\Omega$  از فرکانس طبیعی تیر، تأثیر میزان نیروی تحریک کمتر از حالت رزونانس اصلی تیر خواهد شد و در این صورت ارتعاشات به صورت تحریک سخت<sup>۱</sup> در نظر گرفته می‌شود. معادله (۲۶) می‌تواند با در نظر گرفتن مرتبه ضرایب زیر:

$$\mu = \zeta \omega_0 = \varepsilon \mu, \quad \frac{c_2 k}{m} = \beta = \varepsilon \beta \quad (53)$$

به صورت معادله (۵۴) نوشته شود.

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) + 2\varepsilon \mu \frac{d}{dt} u(t) + \omega_0^2 u + \varepsilon \beta u^2 = \frac{f}{m} \cos(\Omega t) \quad (54)$$

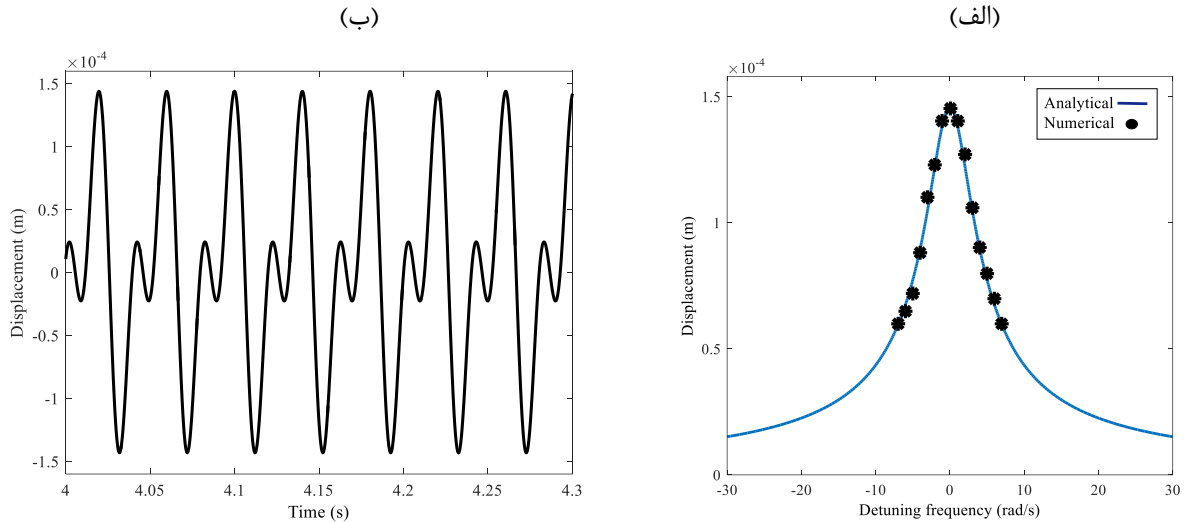
جهت بسط معادله (۵۴) از مقیاس‌های زمانی معادله (۵۵) استفاده می‌شود.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon^1 t \quad (55)$$

بنابراین جایابی سر آزاد تیر مطابق معادله (۵۶) بیان می‌گردد.

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (56)$$

1 Hard excitation



شکل ۱۰. پاسخ رزونانس سوپرهارمونیک حاصل از (الف) حل تحلیلی (خط ممتد) و نقاط متناظر از روش عددی (●) و (ب) پاسخ حالت پایدار عددی معادله تیر با ترک تنفسی

Fig. 10. Super harmonic resonance response of (a) analytical solution (continuous line) and corresponding points of the numerical method (●) and (b) The numerical steady-state response of the cracked beam equation

در ارتعاشات حالت پایدار تیر ترک دار در رزونانس سوپرهارمونیک دستگاه معادلات (۶۸) به صورت دستگاه معادلات (۶۹) نوشته می‌شود.

$$\begin{cases} \gamma' = \sigma - \frac{\beta F^2}{a\omega_0} \cos(\gamma) \\ a' = -\mu a + \frac{\beta F^2}{\omega_0} \sin(\gamma) \end{cases} \quad (69)$$

در نهایت با حل دستگاه معادلات (۶۹) معادلات (۷۰) و (۷۱) برای پارامترهای تنظیمی و همچنین دامنه به دست می‌آیند.

$$\sigma = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{f^4 \beta^2}{m^4 (\omega_0^2 - \Omega^2)^4} - 16a^2 \mu^2 \omega_0^2} \quad (70)$$

و همچنین مقدار  $a$  نیز توسط رابطه زیر بیان می‌گردد.

$$a = \frac{1}{4} \frac{\beta f^2}{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2} (\Omega + \omega_0)^2 (\Omega - \omega_0)^2 \omega_0 m^2} \quad (71)$$

شکل ۱۰ (الف) نمایش دهنده منحنی دامنه بر حسب فرکانس تنظیمی برای تیر یکسرگردار با ابعاد مذکور در بخش ۳ این مقاله است. ضریب عمق ترک برابر  $\alpha_c = 0.3$  و ضریب موقعیت آن نیز برابر با  $\eta = 0.9$  است. مقدار بزرگی نیروی تحریک هارمونیک در

با جایگزینی معادله (۶۳) در معادله (۶۲) و جداسازی ترم‌های سکولار معادله (۶۴) به دست می‌آید.

$$-2i\omega_0 D_1 A e^{i\omega_0 t} - 2\mu i\omega_0 A e^{i\omega_0 t} - \beta F^2 e^{2i\Omega t} = 0 \quad (64)$$

معادله (۶۴) به صورت معادله (۶۵) نوشته می‌شود.

$$-2i\omega_0 D_1 A - 2\mu i\omega_0 A - \beta F^2 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (65)$$

با قرار دادن مقادیر  $\bar{A} = \frac{1}{\gamma} a e^{-i\theta}$  و  $A = \frac{1}{\gamma} a e^{i\theta}$  در معادله (۶۵) معادله (۶۶) به دست می‌آید.

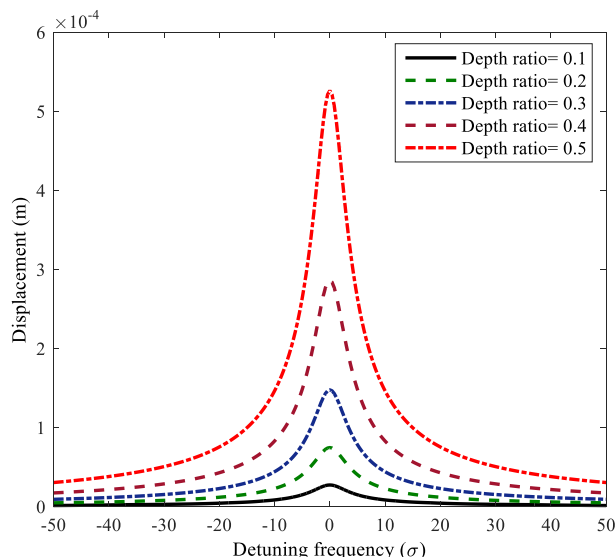
$$\omega_0 a \theta' e^{i\theta} - i\mu a \omega_0 e^{i\theta} - \beta F^2 e^{i\sigma T_1} - i\omega_0 a' e^{i\theta} = 0 \quad (66)$$

پارامتر  $\gamma$  نیز در این مساله مطابق با معادله (۶۷) تعیین می‌گردد.

$$\gamma = \sigma T_1 - \theta \quad (67)$$

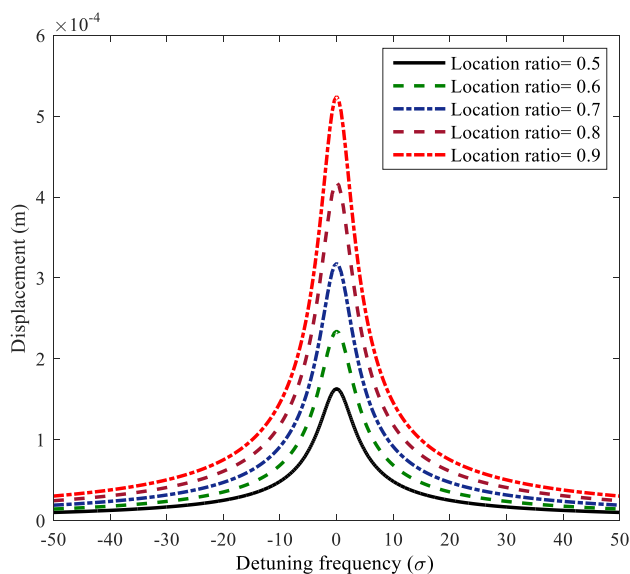
که با جایگزین معادله (۶۷) در معادله (۶۶) دستگاه معادلات (۶۸) به دست می‌آید.

$$\begin{cases} a' \omega_0 + a \mu \omega_0 + \beta F^2 \sin(\gamma) = 0 \\ a \omega_0 \sigma - a \omega_0 \gamma' - \beta F^2 \cos(\gamma) = 0 \end{cases} \quad (68)$$



شکل ۱۱. منحنی‌های پاسخ فرکانسی تیر در رزونانس سوپرهارمونیک با عمق‌های مختلف از ترک تنفسی

Fig. 11. Frequency-response curves in super harmonic resonance with different depths of the breathing crack



شکل ۱۲. منحنی‌های پاسخ فرکانسی تیر در رزونانس سوپرهارمونیک با موقعیت‌های مختلف از ترک تنفسی

Fig. 12. Frequency-response curves in super harmonic resonance with different locations of the breathing crack

از تئوری تقریب وایراشتراس استفاده شده است. جهت اعتبارسنجی مدل پیشنهادی، نتایج با حل عددی حاصل از معادله دو خطی مقایسه شده که تطبیق خوبی با حل عددی مشاهده گردید. مدل تیر ترک خورده شامل ترم درجه دوم مربعی، با استفاده از روش اغتشاشات مقیاس‌های چندگانه مورد بررسی قرار گرفت. با تحلیل رفتار تیر ترک

فرکانس سوپرهارمونیک با مرتبه  $\Omega = \frac{\omega}{\gamma}$  نیز ثابت و برابر  $f = 2N$  است. نقاط به رنگ مشکی بر روی شکل ۱۰ (الف) نیز نمایش دهنده دامنه ارتعاشات حالت پایدار تیر با ترک تنفسی است که توسط ترسیم عددی معادله تیر با استفاده روش رانگ کوتا به دست آمده است. با توجه به شکل ۱۰ (الف) تطابق حل تحلیلی با حل عددی معادله تیر با ترک تنفسی مشاهده می‌گردد. همچنین شکل ۱۰ (ب) نیز نمایش دهنده پاسخ حالت پایدار تیر مذکور است.

با توجه به شکل ۱۰ (ب) در فرکانس‌های نزدیک به رزونانس سوپرهارمونیک، ترک می‌تواند بیش از یک بار در طول دوره ارتعاش حالت خود را تغییر دهد که این مورد در مطالعات محققین دیگر نیز گزارش گردیده است [۷ و ۳۱].

در ادامه با ترسیم شکل ۱۱ به مقایسه منحنی‌های تیر در رزونانس سوپرهارمونیک با در نظر گرفتن عمق‌های مختلف از ترک تنفسی پرداخته شده است. در این بررسی ابعاد تیر مشابه با بخش ۳ است. همچنین ضریب محل قرار گیری ترک  $\eta = 0/9$  و مقدار نیروی تحریک نیز برابر با مقدار ثابت  $f = 2N$  در نظر گرفته شده است.

با توجه به شکل ۱۱، مشاهده می‌گردد که منحنی‌های دامنه فرکانس در حالت رزونانس سوپرهارمونیک دارای حساسیت بیشتری نسبت به حالت رزونانس اصلی است. همچنین با توجه به این مورد که در رزونانس سوپرهارمونیک، دامنه نوسانات نسبت به رزونانس اصلی تیر به اندازه قابل توجهی کمتر است، پدیده نرم شونددگی در پاسخ سوپرهارمونیک تیر نمایان نمی‌شود.

در شکل ۱۲ نیز به بررسی حساسیت پاسخ سوپرهارمونیک تیر به ضرایب موقعیت مختلف از ترک تنفسی پرداخته شده است. در شکل ۱۲ ضریب عمق ترک  $\alpha_c = 0/5$  فرض گردیده است. همچنین در این قسمت نیز مقدار نیروی تحریک برابر با مقدار ثابت  $f = 2N$  در نظر گرفته شده است.

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، یک چندجمله‌ای غیرخطی پیوسته مبتنی بر تئوری تیر اولر برنولی و رفتار تنفسی ترک به منظور تجزیه و تحلیل پاسخ غیر خطی تیر ترک‌دار تحت تحریک هارمونیک، تخمین زده شده است. برای مدلسازی تیر با ترک تنفسی و با رفتار دو خطی

خورده در رزونانس اصلی تیر، مشاهده شد که با افزایش نسبت‌های عمق و موقعیت ترک، رفتار دینامیکی تیر در رزونانس اصلی به شدت غیر خطی می‌شود و منحنی‌های پاسخ فرکانسی دچار نرم شوندگی می‌شوند. همچنین نرم شوندگی در پاسخ تیر ترک دار منجر به ایجاد پدیده پرش در منحنی دامنه فرکانس تیر می‌شود. با توجه به بررسی انجام شده مقدار نرم شوندگی ایجاد شده در منحنی پاسخ وابسته به ضریب سفتی درجه دوم معادله چند جمله‌ای است که وابستگی این ترم به پارامترهای عمق و موقعیت ترک نمایش داده شد. از جمله پارامترهای مهمی که تأثیر آنها در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفت عمق ترک، موقعیت ترک، مقدار نیروی تحریک و مقدار میرایی تیر ترک دار است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که افزایش ضرایب عمق و موقعیت ترک منجر به بروز رفتار غیرخطی تیر با ترک تنفسی می‌شود. همچنین با بررسی اثر میرایی مشاهده گردید که افزایش سطح میرایی می‌تواند سبب کاهش رفتار غیرخطی در پاسخ تیر ترک دار گردد.

این نکته نیز قابل ذکر است که استفاده از روش اغتشاشات مقیاس‌های چندگانه در این مطالعه برای سیستم غیرخطی تک درجه آزادی با فرض ضعیف بودن سطح غیر خطی حاصل از نوسانات بزرگ دقت کافی دارد. به همین منظور به جهت اجتناب از عوامل غیر خطی دیگر و تداخل آن با عامل غیرخطی حاصل از ترک، می‌بایست دامنه نوسانات تیر تا حد امکان در سطح پایین نگاه داشته شود که تغییر مکان‌های سر آزاد تیر بزرگ نگردد. بنابراین با توجه به این که مهمترین عامل ایجاد رفتار غیرخطی در این مساله وجود ترک در تیر می‌باشد، می‌توان به بررسی تأثیر پارامترهای عمق و موقعیت آن پرداخت که با توجه به شکل‌های (۶) و (۷) مشاهده می‌شود که افزایش در هر کدام از این پارامترها منجر به بالا رفتن سطح غیر خطی پاسخ می‌شود که می‌توان از آن به عنوان یک نشانگر مبنی بر شدت ترک در تیر نیز استفاده نمود.

همچنین با توجه به بسط معادله چندجمله‌ای تیر ترک دار با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه مشاهده گردید که ایجاد ترک می‌تواند سبب ایجاد رزونانس سوپرهارمونیک مرتبه دوم در تیر ترک دار نیز شود که میزان حساسیت پاسخ سوپرهارمونیک به پارامترهای عمق و موقعیت ترک مورد بررسی قرار گرفت. علاوه بر موارد ذکر شده نتایج حاصل از بررسی پارامترهای ترک تنفسی در رزونانس‌های اصلی

و سوپرهارمونیک نشان دادند که پاسخ در رزونانس سوپرهارمونیک حساسیت بیشتری نسبت به وجود یک ترک تنفسی در تیر دارد. با توجه به نتایج این مطالعه می‌توان این نکته را بیان نمود که عدم در نظر گرفتن رفتار غیرخطی تیر ترک دار می‌تواند منجر به ایجاد خطاهای قابل توجه در بررسی رفتار دینامیکی یک تیر با ترک تنفسی گردد. هدف اصلی از این مطالعه ارائه یک مدل مؤثر جهت بررسی رفتار غیر خطی تیر با ترک تنفسی و رفتار دوخطی است که انتظار می‌رود با انجام مطالعات بیشتر بتوان از آن در روش‌های پایش سلامت تیرهای با ترک تنفسی استفاده نمود.

### فهرست علائم

#### علائم لاتین

|                                      |              |
|--------------------------------------|--------------|
| عمق ترک                              | $a_c$        |
| عمق تیر                              | $b$          |
| نرمی تیر در حالت ترک بسته            | $c_{cc}$     |
| نرمی تیر در حالت ترک باز             | $c_o$        |
| تغییر در نرمی تیر در اثر باز شدن ترک | $C_{\Delta}$ |
| مدول الاستیسیته                      | $E$          |
| فاصله ترک از سر آزاد تیر             | $L_c$        |
| طول تیر                              | $L$          |
| عرض تیر                              | $W$          |
| جرم تعمیم یافته                      | $m$          |
| مومنوم اینرسی                        | $I$          |
| نیروی تحریک خارجی                    | $F_0$        |
| جابجایی سر آزاد تیر                  | $u$          |
| زمان                                 | $t$          |
| مقیاس زمانی ( $n = 1, 2, \dots$ )    | $T_n$        |
| سفتی تیر سالم یا تیر با ترک بسته     | $k_c$        |
| سفتی تیر با ترک باز                  | $k_o$        |

#### علائم یونانی

|  |           |
|--|-----------|
| ضریب مودال                                       | $\psi(x)$ |
| ضریب پواسون                                      | $\nu$     |
| نسبت سفتی تیر با ترک باز به سفتی تیر با ترک بسته | $\alpha$  |



- longitudinal vibration of beams with breathing cracks, Journal of Sound and Vibration, 219-206 (2016) 381.
- [10] H. Long, Y. Liu, K. Liu, Nonlinear Vibration Analysis of a Beam with a Breathing Crack, Applied Sciences, (18)9 3874 (2019).
- [11] C. Surace, R. Ruotolo, D. Storer, Detecting nonlinear behaviour using the Volterra series to assess damage in beam-like structures, Journal of Theoretical and applied mechanics, 926-905 (2011) 49.
- [12] J. Prawin, K. Lakshmi, A.R.M. Rao, A novel vibration based breathing crack localization technique using a single sensor measurement, Mechanical Systems and Signal Processing, 138-117 (2019) 122.
- [13] P. Cacciola, N. Impollonia, G. Muscolino, Crack detection and location in a damaged beam vibrating under white noise, Computers & structures, -1773 (2003) (19-18)81 1782.
- [14] A. Rivola, P.R. White, Bispectral analysis of the bilinear oscillator with application to the detection of fatigue cracks, Journal of Sound and Vibration, (1998) (5)216 910-889.
- [15] S. Natsiavas, On the dynamics of oscillators with bilinear damping and stiffness, International Journal of Non-Linear Mechanics, 554-535 (1990) (5)25.
- [16] Y.C. Chu, M.H. Shen, Analysis of forced bilinear oscillators and the application to cracked beam dynamics, AIAA journal, 2519-2512 (1992) (10)30.
- [17] P.V. Bayly, On the spectral signature of weakly bilinear oscillators, (1996).
- [18] J. Prawin, A.R.M. Rao, Development of polynomial model for cantilever beam with breathing crack, Procedia Engineering, 1425-1419 (2016) 144.
- [19] W. Liu, M.E. Barkey, Nonlinear vibrational response of a single edge cracked beam, Journal of Mechanical Science and Technology, 5243-5231 (2017) (11)31.
- [20] M. Kharazan, S. Irani, M.A. Noorian, M.R. Salimi, Effect of a breathing crack on the damping changes in nonlinear vibrations of a cracked beam: Experimental and theoretical investigations, Journal of Vibration and Control, ((2020) 1077546320960312.
- $\alpha_c$  ضریب عمق ترک
- $\eta$  ضریب موقعیت ترک
- $\lambda L$  شکل مد تیر اولر برنولی
- $\omega$  فرکانس طبیعی
- $\Omega$  فرکانس تحریک
- $\varepsilon$  پارامتر مثبت کوچک و بدون بعد
- $\sigma$  فرکانس تنظیمی
- $\rho$  چگالی
- مراجع**
- [1] P.G. Kirmser, The effect of discontinuities on the natural frequency of beams, Proceedings of the American Society of Testing and Materials, 904-897 (1944) 44.
- [2] W.T. Thomson, Vibration of slender bars with discontinuities in stiffness, J.Appl.Mech.-203 (1949) ,16 207.
- [3] A.D. Dimarogonas, Vibration of cracked structures: A state of the art review, in, 1996.
- [4] M. Krawczuk, W. Ostachowicz, Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements: A survey, in, 1996.
- [5] P. Cawley, R. Ray, A comparison of the natural frequency changes produced by cracks and slots, Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design, (1988) (3)110 370-366.
- [6] P. Gudmundson, Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, (5)30 353-339 (1982).
- [7] A. Bovsunovsky, C. Surace, Non-linearities in the vibrations of elastic structures with a closing crack: A state of the art review, in, 2015.
- [8] A.P. Bovsunovskii, O.A. Bovsunovskii, Diagnostics of closing cracks in rodlike elements at nonlinear resonances by the method of variation of the asymmetry of driving forces, Strength of materials, 405-397 (2010) (4)42.
- [9] D. Broda, L. Pieczonka, V. Hiwarkar, W.J. Staszewski, V.V. Silberschmidt, Generation of higher harmonics in

- physics, Cambridge university press, 1999.
- [27] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, Nonlinear oscillations, John Wiley & Sons, 2008.
- [28] A.H. Nayfeh, Introduction to perturbation techniques, John Wiley & Sons, 2011.
- [29] A.P. Bovsunovskii, C. Surace, O.A. Bovsunovskii, The effect of damping and force application point on the non-linear dynamic behavior of a cracked beam at sub-and superresonance vibrations, Strength of materials, (5)38 497-492 (2006).
- [30] A.P. Bovsunovsky, Efficiency of crack detection based on damping characteristics, Engineering Fracture Mechanics, 473-464 (2019) 214.
- [31] R. Ruotolo, C. Surace, P. Crespo, D. Storer, Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack, Computers & structures, 1074-1057 (1996) (6)61.
- [21] M. Lalanne, Pa. Berthier, Mechanical vibrations for engineers, (1984).
- [22] J. Prawin, A.R.M. Rao, Nonlinear System Identification of Breathing Crack Using Empirical Slow-Flow Model, (1085-1075 (2019).
- [23] S.M. Cheng, A.S.J. Swamidias, X.J. Wu, W. Wallace, Vibrational response of a beam with a breathing crack, in, 1999.
- [24] A.D. Dimarogonas, S.A. Paipetis, T.G. Chondros, Analytical methods in rotor dynamics, Springer Science & Business Media, 2013.
- [25] A.E. Ismail, Mode I stress intensity factors of sickle-shaped surface cracks in round solid bars under bending moment., International Journal of Automotive \& Mechanical Engineering, 2016) (2)13).
- [26] H. Jeffreys, B. Jeffreys, B. Swirles, Methods of mathematical

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. Irani, M. Kharazan, M.A. Noorian, Investigation of nonlinear vibrations of a cantilever beam with a transverse fatigue crack, Amirkabir J. Mech Eng., 53(10) (2022) 5069-5084.

DOI: [10.22060/mej.2021.19435.7027](https://doi.org/10.22060/mej.2021.19435.7027)

