



تحلیل تشدیدهای مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک یک غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر الاستیک غیرخطی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه

سینا کریمی، حبیب احمدی*، کامران فروتن

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۲۴
بازنگری: ۱۳۹۹/۱۲/۲۱
پذیرش: ۱۴۰۰/۲/۲۳
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۳/۰۲

کلمات کلیدی:

غشای مستطیلی هایپرالاستیک
بستر غیرخطی وینکلر-پسترناک
تشدید مافوق هارمونیک
تشدید مادون هارمونیک
روش مقیاس‌های چندگانه

خلاصه: در این تحقیق ارتعاشات غیرخطی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر الاستیک غیرخطی وینکلر-پسترناک تحت فشار خارجی گسترده و یکنواخت مورد بررسی قرار گرفته است. ساختار ماده‌ای این غشا تراکم‌ناپذیر، همگن و ایزوتروپیک می‌باشد. بستر الاستیک غیرخطی شامل دو جمله خطی وینکلر و پسترناک و یک جمله غیرخطی درجه سه وینکلر می‌باشد. با استفاده از نظریه غشا، اصل هامیلتون و با فرض تغییر شکل محدود، معادلات حاکم بر سیستم استخراج گردیده است. هم‌چنین با توجه به تابع چگالی انرژی کرنشی مدل ساختاری هایپرالاستیک نئو-هوکن، انرژی جنبشی، کار ناشی از بارگذاری گسترده و فشار یکنواخت و اثرات میرایی تعیین می‌گردند. با اعمال روش گلرکین، معادله حرکت غیرخطی با مشتقات جزئی درجهت عرضی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. سپس با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به تحلیل تشدیدهای مافوق و مادون هارمونیک شامل تشدیدهای مافوق هارمونیک ۳:۱ و مادون هارمونیک ۱:۳، ۱:۳، مافوق هارمونیک ۵:۱ و مادون هارمونیک ۱:۵، مافوق هارمونیک ۷:۱ و مادون هارمونیک ۱:۷، پرداخته شده است. هم‌چنین نتایج حاصل از روش تحلیلی با نتایج موجود در ادبیات موضوع، مقایسه شده است. در انتها اثر پارامترهای مختلف سختی وینکلر، پسترناک، خواص مواد و هندسی مختلف بر روی رفتار ارتعاشی غشای مستطیلی هایپرالاستیک در تشدیدهای مختلف مافوق و مادون هارمونیک مورد بررسی قرار گرفته است.

۱- مقدمه

غیرخطی ممکن است اثراتی مانند سخت‌شوندگی^۱، نرم‌شوندگی^۲ و غیره داشته باشد [۱]. در یک محور چرخشی با غیرخطی درجه دوم تحت نیروی بازیابی، تشدید مادون هارمونیک ۱:۲ اتفاق می‌افتد [۲]. برای پوسته استوان‌های چند لایه مرکب غیرخطی در جریان هوا با سرعت مادون صوت، تشدید مادون هارمونیک ۱:۳ رخ می‌دهد [۳]. در میله‌های به هم متصل پیش‌رانه دریایی، تشدیدهای مافوق هارمونیک عرضی اتفاق می‌افتد [۴]. تشدید مافوق هارمونیک در روتور مغناطیسی نیز رخ می‌دهد [۵]. هم‌چنین، طی سال‌های اخیر، به طور چشمگیری، توجه به بررسی رژیم‌های تشدید مادون هارمونیک و مافوق هارمونیک برای کاربرد در مسئله تشخیص آسیب

امروزه غشاهای از جنس ماده هایپرالاستیک تحت بارگذاری‌های مختلف استاتیکی و دینامیکی به دلیل توسعه قوانین ساختاری و ماده‌ای، در سازه‌های فضایی، عمرانی، رباتیک و سنسورها تا مسائل مختلف زیست‌محیطی، پزشکی و جراحی کاربرد فراوانی داشته است که مطالعه و تحلیل آن‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است. با استفاده از یک تحریک با فرکانس بالا می‌توان بسیاری از سیستم‌های فیزیکی را بهینه کرد و کاربرد آن در بسیاری از زمینه‌های علمی و مهندسی بسیار زیاد است. به عنوان مثال، تحریک با فرکانس بالا در یک سیستم

1 Hardening
2 Softening

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: habibahmadif@shahroodut.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لایسنس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لایسنس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



متمرکز شده است [۸-۶].

در سال‌های اخیر محققان، مطالعات و پژوهش‌های متنوعی را در زمینه ارتعاشات انواع ورق، پوسته و غشای هایپرالاستیک ارائه داده‌اند. سلوادورای [۹] و ساکوماندی و اگدن [۱۰]، در حوزه مدل‌های ساختاری مواد هایپرالاستیک مطالعاتی را بر روی لاستیک ارائه داده‌اند. آمابیلی و همکاران [۱۱] به بررسی و تحلیل ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری ورق‌های نازک مربعی ساخته شده از ماده هایپرالاستیک پرداخته‌اند. در تحقیق فوق، غیرخطی‌های فیزیکی و ماده‌ای با استفاده از قوانین ساختاری هایپرالاستیک نئو-هوکین، مونی-ریولین و اگدن و غیرخطی‌های هندسی با استفاده از نظریه پوسته غیرخطی نووژیولو مدل‌سازی شده است.

رضوی و شوشتری [۱۲]، تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق نازک مستطیلی مگنتوالکتروالاستیک را ارائه داده‌اند. ورق بر روی یک بستر غیرخطی قرار گرفته است و برای استخراج معادلات حرکت از نظریه کلاسیک ورق استفاده شده است. ورق به دو صورت تک‌لایه‌ای یکنواخت و مدرج در نظر گرفته شده است. تکیه‌گاه ورق به صورت ساده در نظر گرفته شده و سطوح بالا و پایین ورق تحت اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی قرار گرفته‌اند. تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر هایپرالاستیک ساخته شده از لاستیک سیلیکونی و لاستیک طبیعی پرنشده با استفاده از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا و قوانین ساختاری هایپرالاستیک نئو-هوکین، مونی-ریولین، ایشیهارا و یئو توسط فرصت [۱۳] بررسی شده است. چن و همکاران [۱۴]، با استفاده از مدل ساختاری نئو-هوکین، به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر هایپرالاستیک با تغییر کرنش‌های بزرگ پرداخته‌اند.

ورزندیان و ضیایی [۱۵]، با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلی به بررسی اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاش آزاد غیرخطی نانو ورق نازک همگن پرداخته‌اند. فرمول‌بندی براساس نظریه ورق کلاسیک (مدل کیرشهف) انجام گرفته و مدل غیرخطی فون کارمن در روابط جابجایی کرنشی استفاده شده است. ژانگ و همکاران [۱۶] به تحلیل ارتعاشات غیرخطی یک پوسته استوان‌های جدار نازک که از ماده هایپرالاستیک طبق قانون ساختاری مونی-ریولین تشکیل شده و تحت تحریک هارمونیک شعاعی قرار می‌گیرد، پرداخته‌اند. با استفاده از نظریه لاو کیرشهف^۱، نظریه پوسته سطحی غیر خطی دائل^۲، روابط

ساختاری هایپرالاستیک، معادلات لاگرانژ و نظریه کرنش جزئی، معادلات دیفرانسیل غیرخطی استخراج می‌شود. هم‌چنین براساس نمودارهای چندشاخگی و مقاطع پوانکاره^۳، رفتارهای غیرخطی توصیف‌کننده ارتعاشات شعاعی پوسته بررسی شده است. تحلیل رفتار ارتعاشی و مدل‌سازی دینامیکی پوسته‌های کروی هایپرالاستیک تحت بارگذاری دینامیکی و میرایی ساختاری با استفاده از مدل ساختاری هایپرالاستیک یئو توسط ژائو و همکاران [۱۷] بررسی شده است.

کویورو و پرامیلا [۱۸]، یک فرمول‌بندی جهت تحلیل ارتعاشات غیرخطی غشای متحرک محوری ارائه داده‌اند. این فرمولاسیون شامل اثرات غیرخطی هندسی جابجایی‌های بزرگ، تغییر تنش غشا و تغییر در سرعت محوری ناشی از تغییرشکل می‌باشد. سپس از یک مدل عددی برای تخمین این اثرات غیرخطی هندسی بر رفتار دینامیکی این غشای متحرک محوری استفاده شده‌است و تأثیر تماس بین آن و تکیه‌گاه‌های استوانه‌ای و هوای محیط اطراف آن بررسی شده است. ژی-می وو و همکاران [۱۹] به تحلیل ارتعاشات غیرخطی غشای متحرک با چگالی متغیر در فرایند چاپ پرداخته‌اند. این غشا با چگالی متغیر سهموی مدل‌سازی شده است. سپس معادلات فون کارمن با استفاده از تابع انحراف بیان شده‌اند و تابع نیروی داخلی غشای متحرک محوری براساس نظریه الاستیسیته به‌دست آمده است. ژی-می وو و همکاران [۲۰] نیز به مشخصه‌های ارتعاشات غیرخطی و پایداری غشای متحرک در فرآیند چاپ پرداخته‌اند. معادله ارتعاشات انحراف بالای غشای متحرک محوری معادلات فون کارمن با استفاده از تابع انحراف به‌دست آمده است. ارتعاشات انحراف بالا برای غشای متحرک مستطیل شکل با چهار لبه مرزی گیردار با استفاده از روش بانبو-گلرکین مورد مطالعه قرار گرفته‌است. فرید خان و همکاران [۲۱] به تحلیل رفتار غیرخطی برداشت‌کننده انرژی الکترومغناطیسی غشایی تحت ارتعاشات هارمونیک و تصادفی پرداخته‌اند.

ژو سان و ژانگ [۲۲] به بررسی ارتعاشات غیرخطی غشای انعطاف پذیر تحت بار متناوب با روش عددی و اجزای محدود پرداخته‌اند. لیو و همکاران [۲۳] به بررسی مسأله ارتعاشات اجباری غیرخطی با میرایی ویسکوز پایین برای سازه غشایی تحت بارگذاری ضربه‌ای پرداخته‌اند. معادلات حاکم بر حرکت براساس نظریه فون کارمن و اصل دالامبر^۴ به‌دست‌آمده و با استفاده از روش‌های بانبو-گلرکین و روش اغتشاش

3 Poincaré sections
4 D'Alembert's principle

1 Kirchhoff-love
2 Donnell

دایروی بر روی بستر صلب و الاستیک را به عنوان ابزاری برای عمل جراحی پوست ارائه داده‌اند. از جمله مسائل کلاسیک در مکانیک سازه‌ای، تحلیل و بررسی پوسته‌ها، غشاها و ورق‌ها بر روی بسترهای خطی الاستیک حاوی یک یا دو پارامتر می‌باشد [۲۹]. مدل معروف و رایج، بستر غیرخطی وینکلر با ترم غیرخطی درجه سه می‌باشد [۳۰]. همچنین، مدل‌هایی مانند فیلونکو-بورودیچ، پسترناک و ولاسوف نیز در بسترها و فونداسیون به کار می‌روند [۳۱-۳۳]. کریمی و همکاران [۳۴] به تحلیل تشدید اولیه یک غشای مستطیلی که بر روی بستر الاستیک غیرخطی وینکلر تحت بارگذاری گسترده و یکنواخت هیدرواستاتیک پرداخته‌اند، در تحقیق فوق تشدید ثانویه شامل تشدیدهای مافوق و مادون هارمونیک مدنظر نبوده است و تنها تحلیل تشدید اولیه انجام شده است.

با توجه به سوابق مطالعات، تحقیقات در مورد غشاهای هایپرالاستیک، در وضعیت‌های مختلف استاتیکی بررسی شده است و تحلیل غیرخطی دینامیکی آن‌ها کمتر مورد توجه واقع شده است. در این خصوص تحلیل تشدیدهای ثانویه شامل تشدیدهای مافوق و مادون هارمونیک برای غشاهای هایپرالاستیک تاکنون گزارش نشده است. لذا نوآوری‌های کار حاضر به صورت زیر می‌باشد: تحلیل غیرخطی تشدیدهای مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک یک غشای مستطیلی هایپرالاستیک با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه بررسی شده است. سیستم بر بستر الاستیک غیرخطی وینکلر-پسترناک شامل دو جمله خطی وینکلر و پسترناک و جمله غیرخطی درجه سه وینکلر در نظر گرفته شده است. سپس، تشدیدهای مافوق هارمونیک ۳:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega$) و مادون هارمونیک ۱:۳ ($\Omega \approx 3\omega$)، مافوق هارمونیک ۵:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega$) و مادون هارمونیک ۱:۵ ($\Omega \approx 5\omega$)، مافوق هارمونیک ۷:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{7}\omega$) و مادون هارمونیک ۱:۷ ($\Omega \approx 7\omega$) با در نظر گرفتن اثر مقادیر نرخ کشیدگی، پارامترهای سختی خطی و غیرخطی بستر و پارامتر تنظیم σ ، مورد بررسی قرار گرفته است. برای تعیین معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر سیستم، از نظریه غشا با فرض تغییرشکل محدود و مدل ساختاری هایپرالاستیک استفاده می‌شود، سپس با گسسته‌سازی معادلات غیرخطی حاکم به روش گلرکین و تبدیل آن به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی از روش مقیاس‌های چندگانه جهت حل معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی استفاده شده است.

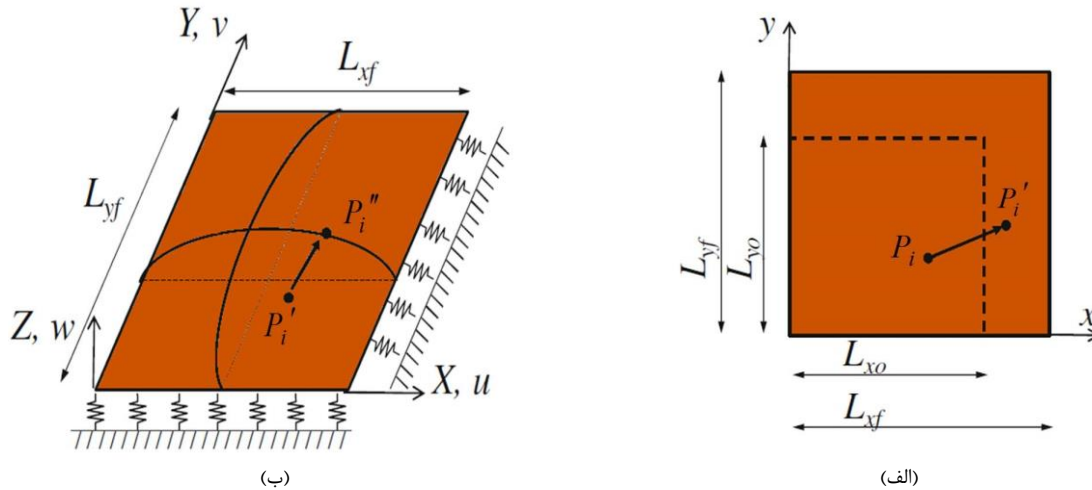
کریلوف-بوگولوبوف-میتروپولسکی^۱ حل شده‌اند. گونچالوز و همکاران [۲۴] به بررسی ارتعاشات غیرخطی غشای دایروی هایپرالاستیک با کشیدگی اولیه تحت تغییرشکل محدود و فشار جانبی متغیر با زمان با استفاده از ماده ایزوتروپیک، همگن و هایپرالاستیک نئوهوکین پرداخته‌اند. ابتدا حل دقیق غشا تحت کشیدگی یکنواخت شعاعی به دست آمده است. سپس معادلات حرکت غشا استخراج شده و با استفاده از معادلات خطی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای غشا به صورت تحلیلی به دست آمده است. سوارز و گونچالوز [۲۵] به بررسی و مطالعه ارتعاشات غیرخطی غشای حلقوی هایپرالاستیک با کشیدگی اولیه تحت تغییرشکل محدود با استفاده از مدل ساختاری هایپرالاستیک نئوهوکین و در مرجع [۲۶]، به تحلیل ارتعاشات غیرخطی غشای کروی هایپرالاستیک تحت فشار داخلی با استفاده از مدل ساختاری هایپرالاستیک مونی-ریولین پرداخته‌اند. حل عددی و تحلیلی آن توسط روش شوتینگ^۲ به دست آمده و شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی از معادلات خطی شده به صورت عددی و تحلیلی به دست آمده است. همچنین سوارز و گونچالوز [۲۷] به بررسی ارتعاشات غیرخطی و پایداری غشای هایپرالاستیک با کشیدگی اولیه تحت فشار جانبی هارمونیک و تغییرشکل اولیه محدود، با استفاده از چهار مدل ساختاری هایپرالاستیک پرداخته‌اند. معادلات حرکت غشا با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده است. با استفاده از معادلات خطی شده، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای غشا به صورت تحلیلی به دست آمده است. سپس با استفاده از روش گلرکین میدان جابجایی غیرخطی تخمین زده می‌شود. معادلات غیرخطی به روش عددی رانج-کوتا^۳ حل شده‌اند. اما در کار حاضر، علاوه بر بستر الاستیک وینکلر، بستر الاستیک پسترناک نیز در نظر گرفته شده است و با استفاده از روش تحلیلی مقیاس‌های چندگانه به بررسی تمامی تشدیدهای ثانویه با در نظر گرفتن اثر مقادیر نرخ کشیدگی، پارامترهای سختی خطی و غیرخطی بستر و پارامتر تنظیم σ ، پرداخته شده است.

به طور خاص، در بیومکانیک و مهندسی پزشکی، مطالعات ویژه‌ای در مسائل حاوی غشاهای قرار گرفته بر روی بستر نرم انجام شده است؛ پامپلونا و موتا [۲۸]، آنالیز تحلیلی و عددی یک غشای هایپرالاستیک

1 Krylov-Bogolubov-Mitropolsky (KBM)

2 Shooting method

3 Runge-Kutta



شکل ۱. شماتیک غشای هایپراالاستیک بر بستر الاستیک
 Fig. 1. Schematic of the hyperelastic membrane resting on elastic foundation

مشخص شده و فرمول استخراجی شامل ثوابتی است که برای هر ماده خاص قابل حصول است. هم‌چنین، ماده تغییرشکل نیافته، ایزوتروپیک فرض می‌شود یعنی رفتار ماده مستقل از جهت‌گیری اولیه ماده نسبت به بارگذاری است. تابع چگالی انرژی کرنشی بر واحد حجم تغییرشکل نیافته مطابق با معادله (۱)، تعریف می‌شود [۲۷].

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W(I_1, I_2, I_3) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= (\lambda_1 \lambda_2)^2 + (\lambda_2 \lambda_3)^2 + (\lambda_1 \lambda_3)^2 \\ I_3 &= (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ کشیدگی‌های اصلی در سه جهت دستگاه مختصات و I_1, I_2, I_3 ناوردهای کرنش می‌باشند. در کرنش‌های بزرگ و در غیاب کرنش‌های بازگشت‌ناپذیر طی بارگذاری‌های مختلف، از مدل ساختاری نئو-هوکین برای مدل هایپراالاستیک، جهت تعیین تابع چگالی کرنشی برای غشای همگن و ایزوتروپیک طبق معادله (۳) استفاده می‌گردد.

$$W = C_1(I_1 - 3) \quad (3)$$

که C_1 جزو پارامترهای معین ماده می‌باشد. مطابق شکل ۱ ذره‌ای در مختصات اولیه P_i در دستگاه مختصات مرجع x, y, z بر

۲- شرح مسئله

۲-۱- هندسه مسئله

با توجه به شکل ۱، هندسه مورد بررسی در تحقیق حاضر یک غشای مستطیلی با ضخامت h ، چگالی جرمی Γ و طول‌های تغییرشکل نیافته L_{x0} و L_{y0} به ترتیب در جهت‌های x و y می‌باشد. هم‌چنین با فرض $\frac{h}{L_{y0}}, \frac{h}{L_{x0}} \ll 1$ از نظریه غشای هایپراالاستیک با ضخامت بسیار کم برای غشای تغییرشکل یافته در مسئله استفاده شده است [۲۷].

۲-۲- نظریه غشای هایپراالاستیک

مدل الاستیک خطی، رفتار مشاهده شده برای بسیاری از مواد را با دقت توضیح نمی‌دهد. در واقع مدل هایپراالاستیک یا گرین-الاستیک مدلی ساختاری برای گروهی از مواد ایده‌آل الاستیک ارائه می‌دهد که رابطه‌ی تنش-کرنش در آن‌ها از یک تابع انرژی کرنشی استخراج می‌شود. از انواع مواد هایپراالاستیک می‌توان به لاستیک‌ها و الاستومرها اشاره کرد که در این میان، الاستومرها دارای ایده‌آل‌ترین رفتار الاستیک در بین مواد هایپراالاستیک می‌باشند که ماده مورد نظر این مقاله می‌باشد.

رابطه تنش-کرنش برای ماده هایپراالاستیک با مشخص نمودن تابع چگالی انرژی کرنشی W که تابعی از تانسور گرادیان تغییرشکل است، بیان می‌گردد ($W = W(F)$). این امر نشان می‌دهد که ماده کاملاً الاستیک بوده و نیز بدین معنی است که صرفاً نیازمند کار با یک تابع اسکالر است. شکل کلی تابع چگالی انرژی کرنشی با آزمایش‌های

همچنین، کار انجام شده توسط نیروهای گسترده اعمالی بر مرزها (f_x و f_y) در جهت‌های x و y و کار انجام شده توسط فشار خارجی بر سطح غشا ($P_h(t)$) به صورت زیر است:

$$W_e = L_{x0} f_y (Y - y) \Big|_{y=L_{y0}} - L_{x0} f_y (Y - y) \Big|_{y=0} + L_{y0} f_x (X - x) \Big|_{x=L_{x0}} - L_{y0} f_x (X - x) \Big|_{x=0} + P_h(t) \Delta V \quad (7)$$

$\Delta V = V_f - V$ تغییر حجم ناشی از فشار است. V_f حجم غشای تغییرشکل یافته و V حجم غشای تغییرشکل نیافته است که به دلیل تخت بودن $V = 0$. همچنین، f_x و f_y نیروهای گسترده بر واحد طول و $P_h(t)$ فشار یکنواخت بر واحد سطح می‌باشد. اکنون، غشای از پیش کشیده شده در شکل ۱-الف تحت بارگذاری عرضی متغیر با زمان قرار می‌گیرد. با توجه به پیکره تغییرشکل نیافته در شکل ۱-ب، میدان جابجایی کلی برابر است با:

$$\begin{aligned} X &= X_0(x, y) + u(x, y, t) \\ Y &= Y_0(x, y) + v(x, y, t) \\ Z &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (8)$$

که $X_x = \delta_x$ و $Y_y = \delta_y$ به ترتیب کشیدگی‌های اولیه و δ_x و δ_y به ترتیب نرخ کشیدگی در راستای x و y می‌باشند. u و v و w نیز به ترتیب جابه‌جایی در راستای x و y و w می‌باشند. همچنین، $\delta_x = L_{xf} / L_{x0}$ و $\delta_y = L_{yf} / L_{y0}$ بیانگر سفتی اولیه غشا می‌باشند که کلیه مؤلفه‌های تنش و کرنش، تابعی از این دو متغیر هستند. برای غشای کشیده نشده δ_x و δ_y برابر ۱ است. انرژی جنبشی T مطابق معادله (۹) به دست می‌آید:

$$T = \int_0^{L_{x0}} \int_0^{L_{y0}} \int_0^h \bar{A} \frac{(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)}{2} dz dy dx \quad (9)$$

که $\dot{(\quad)} = \partial / \partial t$ و چگالی جرمی (\bar{A}) به دلیل تراکم ناپذیری در تغییرشکل، ثابت باقی می‌ماند.

اکنون با توجه به شکل ۱ب، غشای کشیده شده بر روی بستر

اثر کشیدگی به مختصات تغییرشکل یافته P_i' و سپس به موقعیت P_i'' در دستگاه مختصات مرجع $X(x, y, t), Y(x, y, t), Z(x, y, t)$ جابجا می‌گردد. ناوردهای کرنش در معادله (۲) از تانسور متریک حالت‌های تغییرشکل یافته و اولیه تعیین می‌شود. تانسور متریک پادورا^۱ برای غشا در پیکره مرجع و تغییرشکل نیافته برابر با ماتریس همانی است، در حالی که در یک میدان تغییرشکل دلخواه، تانسور متریک کوواریانس برای غشای تغییرشکل یافته برابر است با [۳۵]:

$$A = \begin{bmatrix} X_{,x}^2 + Y_{,x}^2 + Z_{,x}^2 & X_{,x}X_{,y} + Y_{,x}Y_{,y} + Z_{,x}Z_{,y} \\ X_{,x}X_{,y} + Y_{,x}Y_{,y} + Z_{,x}Z_{,y} & X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

بنابراین، ناوردهای اول کرنش مطابق تعریف تانسور راست تغییرشکل کوشی-گرین و معادله (۲) به صورت معادله (۵) به دست می‌آید [۲۷]:

$$I_1 = \left[\frac{1}{(X_{,x}^2 + Y_{,x}^2 + Z_{,x}^2)(X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2)} - (X_{,x}X_{,y} + Y_{,x}Y_{,y} + Z_{,x}Z_{,y}) + X_{,x}^2 + Y_{,x}^2 + Z_{,x}^2 + X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2 \right] \quad (5)$$

$$\lambda_1^2 = 1 / \det(A) \quad \text{و} \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \text{tr}(A) \quad \text{که}$$

۲-۳- معادلات حاکم

با توجه به مدل ساختاری نئو-هوکین برای مدل هایپر الاستیک، تابع چگالی کرنشی به صورت معادله (۳) تعریف شد، لذا انرژی کرنشی الاستیک U ، با انتگرال گیری از تابع چگالی کرنشی فوق (W) در پیکره مرجع و تغییرشکل نیافته به صورت معادله (۶) نوشته می‌شود:

$$U = \int_0^{L_{x0}} \int_0^{L_{y0}} \int_0^h W(X, X_{,x}, X_{,y}, Y, Y_{,x}, Y_{,y}, Z, Z_{,x}, Z_{,y}, x, y) dz dy dx \quad (6)$$

روش اجزای محدود نشان داده‌اند که در پاسخ آزاد و اجباری برای غشا در ارتعاشات با دامنه‌های بزرگ و کوچک، مؤلفه‌های u و v در مقایسه با جابجایی عرضی w در ارتعاشات عرضی غشا قابل اغماض می‌باشند.

در روابط بالا $C = \xi C_c$ ضریب میرایی، ξ نسبت میرایی، C_c میرایی بحرانی خطی، $P_h(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ فشار خارجی یکنواخت گسترده، P_0 دامنه تحریک و Ω فرکانس تحریک می‌باشد.

۲-۴- گسسته‌سازی معادلات

پاسخ عرضی ارتعاشات غیرخطی با در نظر گرفتن شکل مود (ψ) به صورت $\psi(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_{xo}}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_{yo}}\right)$ با توجه به معادله (۱۵) در نظر گرفته می‌شود:

$$w(x, y, t) = W(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_{xo}}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_{yo}}\right) \quad (15)$$

در معادله (۱۵)، $W(t)$ دامنه‌های مودال وابسته به زمان در پاسخ فرکانسی می‌باشند. با اعمال روش گلرکین، معادله حرکت غیرخطی با مشتقات جزئی ارتعاشات عرضی (معادله (۱۴)) به معادله دیفرانسیل عادی غیرخطی ارتعاشات عرضی غشا بر بستر الاستیک غیرخطی به صورت معادله (۱۶) تبدیل می‌شود که با روش تحلیلی مقیاس‌های چندگانه قابل حل است.

$$\ddot{W}(t) + \hat{\mu} \dot{W}(t) + \omega_0^2 W(t) + \hat{\alpha}_2 W^3(t) + \hat{\alpha}_3 W^5(t) + \hat{\alpha}_4 W^7(t) = \eta P_h(t) \quad (16)$$

مشاهده می‌شود ترم‌های غیرخطی ۳، ۵ و ۷ در معادله حضور دارند. ضرایب معادله (۱۶) به صورت زیر می‌باشند:

$$\omega_0^2 = + \frac{\delta_x \delta_y k_1}{\tilde{A} h} + \frac{2C_1 n^2 \pi^2}{\tilde{A} L_{yo}^2} + \frac{2C_1 m^2 \pi^2}{\tilde{A} L_{xo}^2} - \frac{2C_1 m^2 \pi^2}{\tilde{A} L_{xo}^2 \delta_x^4 \delta_y^2} - \frac{2C_1 n^2 \pi^2}{\tilde{A} L_{yo}^2 \delta_x^2 \delta_y^4} - \frac{\delta_x \delta_y k_2 n^2 \pi^2}{\tilde{A} h L_{yo}^2} - \frac{\delta_x \delta_y k_2 m^2 \pi^2}{\tilde{A} h L_{xo}^2} \quad (17)$$

الاستیک وینکلر-پسترناک در نظر گرفته می‌شود، به طوری که رابطه نیروی واکنش آن بر غشا برابر است با:

$$F = k_1 w + k_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + k_3 w^3 \quad (10)$$

که w جابجایی عرضی متغیر با زمان غشا و k_1 و k_2 به ترتیب پارامترهای سختی خطی و غیرخطی وینکلر می‌باشد و k_3 پارامتر سختی پسترناک است.

هم چنین U_f انرژی کرنشی بستر الاستیک با انتگرال معادله (۱۰) در ناحیه مربوطه تعریف می‌گردد. با جایگذاری معادله (۸) در ناوردای کرنش (۵) و معادلات (۶)، (۷)، (۹) و (۱۰) لاگرانژین براساس مؤلفه‌های u ، v و w معادله (۱۱) دست می‌آید:

$$L = T - U - U_f + W_e \quad (11)$$

با اعمال اصل هامیلتون معادلات حاکم بر سیستم به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial W}{\partial X_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial W}{\partial X_{,y}} \right) + h \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial W}{\partial Y_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial W}{\partial Y_{,y}} \right) + h \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - C \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial W}{\partial Z_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial W}{\partial Z_{,y}} \right) + h \Gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - C \frac{\partial w}{\partial t} - P_h(t) \delta_x \delta_y + \left[k_1 w + k_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + k_3 w^3 \right] \delta_x \delta_y = 0 \quad (14)$$

معادلات (۱۲) تا (۱۴) مربوط به رابطه استخراج شده از روش هامیلتون براساس مؤلفه‌های u ، v و w است که معادلات (۱۲) و (۱۳) مربوط به راستاهای u و v است و معادله (۱۴) مربوط به راستای w می‌باشد. در مقاله‌های [۲۴ و ۲۵]، نویسندگان بر اساس تحلیل به

$$\ddot{W}(t) + \omega_0^2 W(t) + \varepsilon \mu \dot{W}(t) + \varepsilon \alpha_2 W^3(t) + \varepsilon^2 \alpha_3 W^5(t) + \varepsilon^2 \alpha_4 W^7(t) = \eta P_0 \cos(\Omega t) \quad (24)$$

برای تقریب مرتبه یک، دو مقیاس زمانی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1 \quad (25)$$

در ادامه پاسخ سیستم بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$W(t, \varepsilon) = W_0(T_0, T_1) + \varepsilon^1 W_1(T_0, T_1) + \dots \quad (26)$$

با جایگذاری معادله (۲۶) در (۲۴) و برابر صفر قرار دادن ضرایب مختلف ε^0 و ε^1 ، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon^0 : D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = \eta P_0 \cos(\Omega t) \quad (27)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \alpha_2 W_0^3 - \mu D_0 W_0 \quad (28)$$

که در روابط بالا:

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, \quad n = 0, 1 \quad (29)$$

جواب عمومی معادله (۲۷) به صورت (۳۰) است:

$$W_0 = A(T_1) \ddot{E}^{i\omega_0 T_0} + \bar{c} (T_1) \dot{E}^{i\omega_0 T_0} + c c \quad (30)$$

که $c.c$ در معادله بالا جمله مربوط به مزدوج مختلط می‌باشد.

هم‌چنین:

$$\ddot{E} = \frac{P_0}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad (31)$$

با جایگذاری معادله (۳۰) در (۲۸) معادله (۳۲) به دست می‌آید:

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{1}{16} \frac{1}{\tilde{A} h L_{x0}^4 L_{y0}^4 \delta_x^6 \delta_y^6} \left(9 \delta_x^7 \delta_y^7 k_3 L_{x0}^4 L_{y0}^4 + 18 h \delta_y^4 n^2 \pi^4 C_1 L_{x0}^2 (L_{x0}^2 n^2 + L_{y0}^2 m^2) \delta_x^6 + 18 C_1 h \pi^4 (m^2 L_{y0}^2 (L_{x0}^2 n^2 + L_{y0}^2 m^2) \delta_y^6 + n^4 L_{x0}^4) \delta_x^4 - 28 C_1 L_{x0}^2 L_{y0}^2 \pi^4 h m^2 n^2 \delta_x^2 \delta_y^2 + 18 C_1 L_{y0}^4 \pi^4 h m^4 \delta_y^4 \right) \quad (18)$$

$$\hat{\alpha}_3 = \frac{15}{32} \frac{C_1 \pi^6}{\tilde{A} L_{x0}^6 L_{y0}^6 \delta_x^4 \delta_y^4} \left(m^6 L_{y0}^6 \delta_y^4 + \frac{2}{5} m^4 n^2 \right) \left(L_{x0}^2 L_{y0}^4 \delta_y^2 \left(\delta_x^2 + \frac{5}{2} \delta_y^2 \right) + 2 n^4 m^2 L_{x0}^4 L_{y0}^2 \delta_x^2 \left(\delta_x^2 + \frac{1}{5} \delta_y^2 \right) + n^6 L_{x0}^6 \delta_x^4 \right) \quad (19)$$

$$\hat{\alpha}_4 = \frac{175}{2048} \frac{C_1 \pi^8 (L_{x0}^2 n^2 \delta_x^2 + L_{y0}^2 m^2 \delta_y^2)}{\tilde{A} L_{x0}^8 L_{y0}^8 \delta_x^6 \delta_y^6} \left(m^4 L_{y0}^4 \delta_y^4 - \frac{26}{35} m^2 n^2 L_{x0}^2 L_{y0}^2 \delta_x^2 \delta_y^2 + n^4 L_{x0}^4 \delta_x^4 \right) \times (L_{x0}^2 n^2 + L_{y0}^2 m^2) \quad (20)$$

$$\hat{\mu} = -\frac{C}{\Gamma h} \quad (21)$$

$$\eta = -\frac{4 \delta_x \delta_y (\cos(m\pi) - 1)(\cos(n\pi) - 1)}{\Gamma h m n \pi^2} \quad (22)$$

۳- حل تحلیلی به روش مقیاس‌های چندگانه

۳-۱- تشدیدهای مافوق هارمونیک ۳:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{3} \omega$) و مادون

هارمونیک ۱:۳ ($\Omega \approx 3\omega$):

جهت حل معادله غیرخطی (۱۶) پارامترهای جدید به صورت معادله (۲۳) تعریف می‌گردند [۳۶]:

$$\hat{\mu} = \varepsilon \mu, \quad \hat{\alpha}_2 = \varepsilon \alpha_2, \quad \hat{\alpha}_3 = \varepsilon^2 \alpha_3, \quad \hat{\alpha}_4 = \varepsilon^2 \alpha_4 \quad (23)$$

در معادلات و روابط ذکر شده ε به اندازه کافی کوچک در نظر گرفته شده است. با جایگذاری معادله (۲۳) در معادله (۱۶)، معادله (۲۴) به صورت زیر حاصل می‌شود:

که $a(T_1)$ و $\beta(T_1)$ حقیقی می‌باشند.

با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۳۵) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، معادلات (۳۷) و (۳۸) به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^3\alpha_2}{\omega_0}\sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (37)$$

$$a\beta' = 3\frac{a\Lambda^2\alpha_2}{\omega_0} + \frac{3}{8}\frac{a^3\alpha_2}{\omega_0} + \frac{\Lambda^3\alpha_2}{\omega_0}\cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (38)$$

زاویه فاز جدید (γ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta \quad (39)$$

بنابراین، معادلات (۳۷) و (۳۸) به صورت سیستم خودگردان^۱ زیر تبدیل می‌گردند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^3\alpha_2}{\omega_0}\sin(\gamma) \quad (40)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 3\frac{\Lambda^2\alpha_2}{\omega_0}\right)a - \frac{3}{8}\frac{a^3\alpha_2}{\omega_0} - \frac{\Lambda^3\alpha_2}{\omega_0}\cos(\gamma) \quad (41)$$

هنگامی که a' و γ' برابر با صفر باشند، حرکت حالت پایا رخ می‌دهد. لذا با برابر صفر قرار دادن آن‌ها، به توان دو رساندن و سپس جمع دو طرف معادلات بالا، معادله پاسخ فرکانسی طبق معادله (۴۲) برای تشدید مافوق هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4}\mu^2 + \left(\sigma - 3\frac{\Lambda^2\alpha_2}{\omega_0} - \frac{3}{8}\frac{a^2\alpha_2}{\omega_0}\right)^2\right)a^2 = \frac{\Lambda^6\alpha_2^2}{\omega_0^2} \quad (42)$$

۳-۱-۲- تشدید مادون هارمونیک ۱:۳ ($\Omega \approx 3\omega$)

طبق معادله (۳۲)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک

$$\begin{aligned} D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = & -3\bar{A}\Lambda^2\alpha_2 e^{iT_0(2\Omega - \omega_0)} - 3\Lambda\bar{A}^2\alpha_2 e^{iT_0(\Omega - 2\omega_0)} \\ & - 3\Lambda A^2\alpha_2 e^{iT_0(\Omega + 2\omega_0)} - 3A\Lambda^2\alpha_2 e^{iT_0(2\Omega + \omega_0)} \\ & - A^3\alpha_2 e^{3i\omega_0 T_0} - \left(\begin{array}{l} 2iA'\omega_0 + A \\ i\mu\omega_0 + 6\Lambda^2\alpha_2 \\ + 3\alpha_2 A\bar{A} \end{array} \right) e^{i\omega_0 T_0} \\ & - \Lambda \left(\begin{array}{l} i\mu\Omega + 3\Lambda^2\alpha_2 \\ + 6\alpha_2 A\bar{A} \end{array} \right) e^{i\Omega T_0} - \Lambda^3\alpha_2 e^{3i\Omega T_0} + c.c. \end{aligned} \quad (32)$$

طبق معادله (۳۲)، برای حذف جملات نامحدود و سکولار، ضریب $\exp(i\omega T)$ برابر صفر قرار داده می‌شود که به صورت زیر می‌باشد:

$$2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 6\Lambda^2\alpha_2 + 3\alpha_2 A\bar{A}) = 0 \quad (33)$$

با توجه به معادله (۳۲)، هنگامی که فرکانس تحریک از ω دور باشد، تشدیدهای مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک رخ خواهد داد، این حالت‌ها در بخش‌های بعدی ارائه خواهد شد.

۳-۱-۳- تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega$)
بر اساس معادله (۳۲)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک $\frac{1}{3}\omega$ باشد، یک جمله نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را تشدید مافوق هارمونیک می‌گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به $\frac{1}{3}\omega$ را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$3\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (34)$$

حال معادله (۳۴) در (۳۲) جایگذاری می‌گردد و جملات نامحدود و سکولار به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند.

$$\Lambda^3\alpha_2 e^{i\sigma T_1} + 2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 6\Lambda^2\alpha_2 + 3\alpha_2 A\bar{A}) = 0 \quad (35)$$

برای حل معادله (۳۵)، A به فرم قطبی زیر تعریف می‌گردد:

$$A = \frac{1}{2}ae^{i\beta}, \quad \bar{A} = \frac{1}{2}ae^{-i\beta} \quad (36)$$

می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4} \mu^2 + \left(\sigma - 3 \frac{\Lambda^2 \alpha_2}{\omega_0} - \frac{3}{8} \frac{a^2 \alpha_2}{\omega_0} \right)^2 \right) a^2 = \frac{9}{16} \frac{\Lambda^2 a^4 \alpha_2^2}{\omega_0^2} \quad (50)$$

۲-۳- تشدیدهای مافوق هارمونیک ۵:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{5} \omega$) و مادون هارمونیک ۱:۵ ($\Omega \approx 5\omega$):

جهت حل معادله غیرخطی (۱۶) پارامترهای جدید به صورت معادله (۵۱) تعریف می‌گردند:

$$\hat{\mu} = \varepsilon \mu, \quad \hat{\alpha}_2 = \varepsilon^2 \alpha_2, \quad \hat{\alpha}_3 = \varepsilon \alpha_3, \quad \hat{\alpha}_4 = \varepsilon^2 \alpha_4 \quad (51)$$

با جایگذاری پارامترهای (۵۱) در معادله (۱۶) و در نظر گرفتن معادلات (۲۵) و (۲۶)، پس از حل و برابر صفر قرار دادن ضرایب مختلف ε و ε' ، معادلات خطی زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon^0: D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = \eta P_0 \cos(\Omega t) \quad (52)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \alpha_3 W_0^5 - \mu D_0 W_0 \quad (53)$$

با تعریف مشابه معادلات (۲۹) تا (۳۱) با جایگذاری معادله (۳۰) در (۵۳)، معادله (۵۴) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = & -5\bar{A}\Lambda^4 \alpha_3 e^{iT_0(4\Omega - \omega_0)} \\ & -5A\Lambda^4 \alpha_3 e^{iT_0(4\Omega + \omega_0)} - A^5 \alpha_3 e^{5i\omega_0 T_0} \\ & -20\alpha_3 \bar{A}\Lambda^2 \left(\Lambda^2 + \frac{3}{2} A\bar{A} \right) e^{iT_0(2\Omega - \omega_0)} \\ & -20\alpha_3 A\Lambda^2 \left(\Lambda^2 + \frac{3}{2} A\bar{A} \right) e^{iT_0(2\Omega + \omega_0)} \\ & -30\alpha_3 A^2 \Lambda \left(\Lambda^2 + \frac{2}{3} A\bar{A} \right) e^{iT_0(\Omega + 2\omega_0)} \\ & -30\alpha_3 \bar{A}^2 \Lambda \left(\Lambda^2 + \frac{2}{3} A\bar{A} \right) e^{iT_0(\Omega - 2\omega_0)} \\ & -5\alpha_3 \bar{A}^4 \Lambda e^{iT_0(\Omega - 4\omega_0)} - 5\alpha_3 A^4 \Lambda e^{iT_0(\Omega + 4\omega_0)} \\ & -10\alpha_3 \Lambda^2 A^3 e^{iT_0(2\Omega + 3\omega_0)} - 10\alpha_3 \Lambda^2 \bar{A}^3 e^{iT_0(2\Omega - 3\omega_0)} \\ & -10\alpha_3 \Lambda^3 \bar{A}^2 e^{iT_0(3\Omega - 2\omega_0)} - 10\alpha_3 \Lambda^3 A^2 e^{iT_0(3\Omega + 2\omega_0)} \\ & - (20\alpha_3 \Lambda^2 A^3 + 5\alpha_3 A^4 \bar{A}) e^{3i\omega_0 T_0} \\ & - (2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 30\Lambda^4 \alpha_3 + 10\alpha_3 A^2 \bar{A}^2 + 60\alpha_3 A\bar{A}\Lambda^2)) e^{i\omega_0 T_0} \\ & - \Lambda(i\mu\Omega + 10\Lambda^4 \alpha_3 + 30\alpha_3 A^2 \bar{A}^2 + 60\alpha_3 A\bar{A}\Lambda^2) e^{i\Omega T_0} \\ & - 5\Lambda^3 \alpha_3 (\Lambda^2 + 4A\bar{A}) e^{3i\Omega T_0} - \Lambda^5 \alpha_3 e^{5i\Omega T_0} + c.c. \end{aligned} \quad (54)$$

3ω باشد، یک جمله نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را تشدید مادون هارمونیک می‌گویند. فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$\Omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (43)$$

حال معادله (۴۳) در (۳۲) جایگذاری می‌گردد و جملات نامحدود و سکولار به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند.

$$3\Lambda \bar{A}^2 \alpha_2 e^{i\sigma T_1} + 2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 6C^2 \alpha_2 + 3\alpha_2 A\bar{A}) = 0 \quad (44)$$

برای حل معادله (۴۴)، مشابه روابط بیان شده در تشدید مافوق هارمونیک A به فرم قطبی معادله (۳۶) در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۴۴) و جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، معادلات (۴۵) و (۴۶) به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2} a \mu - \frac{3}{4} \frac{\Lambda a^2 \alpha_2}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (45)$$

$$a\beta' = 3 \frac{a\Lambda^2 \alpha_2}{\omega_0} + \frac{3}{8} \frac{a^3 \alpha_2}{\omega_0} + \frac{3}{4} \frac{\Lambda a^2 \alpha_2}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (46)$$

زاویه فاز جدید (γ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\gamma = \sigma T_1 - 3\beta \quad (47)$$

بنابراین، معادلات (۴۵) و (۴۶) به حالت‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردند:

$$a' = -\frac{1}{2} a \mu - \frac{3}{4} \frac{\Lambda a^2 \alpha_2}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (48)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 3 \frac{\Lambda^2 \alpha_2}{\omega_0} \right) a - \frac{3}{8} \frac{a^3 \alpha_2}{\omega_0} - \frac{3}{4} \frac{\Lambda a^2 \alpha_2}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (49)$$

مشابه معادله (۴۲) برای حرکت حالت پایا، معادله پاسخ فرکانسی طبق معادله (۵۰) برای تشدید مادون هارمونیک به صورت زیر حاصل

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^5 \alpha_3}{\omega_0} \sin(\gamma) \quad (60)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 15 \frac{\Lambda^4 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{15}{2} \frac{a^2 \Lambda^2 \alpha_3}{\omega_0} \right) \quad (61)$$

$$a - \frac{5}{16} \frac{a^5 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{\Lambda^5 \alpha_3}{\omega_0} \cos(\gamma)$$

برای حرکت حالت پایا، معادله پاسخ فرکانسی طبق معادله (۶۲) برای تشدید مافوق هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4} \mu^2 + \left(\frac{\sigma - 15 \frac{\Lambda^4 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{15}{2} \frac{a^2 \Lambda^2 \alpha_3}{\omega_0}}{\frac{a^2 \Lambda^2 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{5}{16} \frac{a^4 \alpha_3}{\omega_0}} \right)^2 \right) a^2 = \frac{\Lambda^{10} \alpha_3^2}{\omega_0^2} \quad (62)$$

۳-۲-۲- تشدید مادون هارمونیک ۱:۵ ($\Omega \approx 5\omega$)

طبق معادله (۵۴)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک 5ω باشد، یک جمله نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را تشدید مادون هارمونیک می‌گویند. برای تحلیل فرکانسی، پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به 5ω را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$\Omega = 5\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (63)$$

حال معادله (۶۳) در (۵۴) جایگذاری می‌گردد و جملات نامحدود و سکولار به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند.

$$5\Lambda^4 \alpha_3 e^{i\sigma T_1} + 2iA'\omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 30\Lambda^4 \alpha_3 + 10\alpha_3 A^2 \bar{A}^2 + 60\alpha_3 A \bar{A} \Lambda^2 \right) = 0 \quad (64)$$

برای حل معادله (۶۴)، مشابه روابط بیان شده قبل، A به فرم قطبی معادله (۳۶) در نظر گرفته می‌شود.

با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۶۴) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، معادلات (۶۵) و (۶۶) حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{5}{16} \frac{\Lambda^4 \alpha_3}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - 5\beta) \quad (65)$$

برای حذف جملات نامحدود و سکولار، ضریب $\exp(i\omega T)$ برابر صفر قرار داده می‌شوند که به صورت زیر می‌باشد:

$$2iA'\omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 30\Lambda^4 \alpha_3 + 10\alpha_3 A^2 \bar{A}^2 + 60\alpha_3 A \bar{A} \Lambda^2 \right) = 0 \quad (55)$$

۳-۲-۱- تشدید مافوق هارمونیک ۱:۵ ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega$)

بر اساس معادله (۵۴)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک $\frac{1}{5}\omega$ باشد، یک جمله نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را تشدید مافوق هارمونیک می‌گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به $\frac{1}{5}\omega$ را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$5\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (56)$$

حال معادله (۵۶) در (۵۴) جایگذاری می‌گردد و جملات نامحدود و سکولار به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند.

$$\Lambda^5 \alpha_3 e^{i\sigma T_1} + 2iA'\omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 30\Lambda^4 \alpha_3 + 10\alpha_3 A^2 \bar{A}^2 + 60\alpha_3 A \bar{A} \Lambda^2 \right) = 0 \quad (57)$$

برای حل معادله (۵۷)، مشابه روابط بیان شده قبل، A به فرم قطبی معادله (۳۶) در نظر گرفته می‌شود.

با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۵۷) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، معادلات (۵۸) و (۵۹) به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^5 \alpha_3}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (58)$$

$$a\beta' = 15 \frac{a\Lambda^4 \alpha_3}{\omega_0} + \frac{15}{2} \frac{a^3 \Lambda^2 \alpha_3}{\omega_0} + \frac{5}{16} \frac{a^5 \alpha_3}{\omega_0} + \frac{\Lambda^5 \alpha_3}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (59)$$

با در نظر گرفتن زاویه فاز طبق معادله (۳۹)، معادلات (۵۸) و (۵۹) به حالت‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردند:

در (۷۳) معادله (۷۴) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = & -2\bar{A}^4 \bar{A}_4 \left(\Lambda^2 + \frac{5}{2} \bar{A} \bar{A} \right) e^{i T_0 (\bar{\omega} - \omega_0)} \\
 & -42 A \Lambda^4 \alpha_4 \left(\Lambda^2 + \frac{5}{2} \bar{A} \bar{A} \right) \\
 e^{i T_0 (4\Omega + \omega_0)} - & (42 \Lambda^2 A^5 \alpha_4 + 7 \bar{A} A^6 \alpha_4) e^{5 i \omega_0 T_0} \\
 & -105 \alpha_4 \bar{A} \Lambda^2 \left(\frac{\Lambda^4 + 4 \Lambda^2}{\bar{A} \bar{A} + 2 A^2 \bar{A}^2} \right) e^{i T_0 (2\Omega - \omega_0)} \\
 & -105 \alpha_4 A \Lambda^2 \left(\frac{\Lambda^4 + 4 \Lambda^2}{\bar{A} \bar{A} + 2 A^2 \bar{A}^2} \right) e^{i T_0 (2\Omega + \omega_0)} \\
 & -210 \alpha_4 A^2 \Lambda \left(\frac{\Lambda^4 + 2 \Lambda^2}{\bar{A} \bar{A} + \frac{1}{2} A^2 \bar{A}^2} \right) e^{i T_0 (\Omega + 2\omega_0)} \\
 & -210 \alpha_4 \bar{A}^2 \Lambda \left(\frac{\Lambda^4 + 2 \Lambda^2}{\bar{A} \bar{A} + \frac{1}{2} A^2 \bar{A}^2} \right) \\
 e^{i T_0 (\Omega - 2\omega_0)} - & 105 \alpha_4 \bar{A}^4 \Lambda \left(\Lambda^2 + \frac{2}{5} \bar{A} \bar{A} \right) e^{i T_0 (\Omega - 4\omega_0)} \\
 & -105 \alpha_4 A^4 \Lambda \left(\Lambda^2 + \frac{2}{5} \bar{A} \bar{A} \right) \\
 e^{i T_0 (\Omega + 4\omega_0)} - & 140 \alpha_4 \Lambda^2 A^3 \left(\Lambda^2 + \frac{3}{4} \bar{A} \bar{A} \right) e^{i T_0 (2\Omega + 3\omega_0)} \\
 & -140 \alpha_4 \Lambda^2 \bar{A}^3 \left(\Lambda^2 + \frac{3}{4} \bar{A} \bar{A} \right) \\
 e^{i T_0 (2\Omega - 3\omega_0)} - & 105 \alpha_4 \Lambda^3 \bar{A}^2 \left(\Lambda^2 + \frac{4}{3} \bar{A} \bar{A} \right) e^{i T_0 (3\Omega - 2\omega_0)} \\
 & -105 \alpha_4 \Lambda^3 A^2 \left(\Lambda^2 + \frac{4}{3} \bar{A} \bar{A} \right) \\
 e^{i T_0 (3\Omega + 2\omega_0)} - & 7 \alpha_4 \Lambda^5 \left(\Lambda^2 + 6 \bar{A} \bar{A} \right) e^{5 i \Omega T_0} \\
 & -21 \alpha_4 \bar{A}^2 \Lambda^5 e^{i T_0 (5\Omega - 2\omega_0)} \\
 -21 \alpha_4 A^2 \Lambda^5 e^{i T_0 (5\Omega + 2\omega_0)} - & 7 \alpha_4 \bar{A} \Lambda^6 e^{i T_0 (6\Omega - \omega_0)} \\
 & -7 \alpha_4 A \Lambda^6 e^{i T_0 (6\Omega + \omega_0)} \\
 -7 \alpha_4 \bar{A}^6 \Lambda e^{i T_0 (\Omega - 6\omega_0)} - & 7 \alpha_4 A^6 \Lambda e^{i T_0 (\Omega + 6\omega_0)} \\
 & -21 \alpha_4 \bar{A}^5 \Lambda^2 e^{i T_0 (2\Omega - 5\omega_0)} \\
 -21 \alpha_4 A^5 \Lambda^2 e^{i T_0 (2\Omega + 5\omega_0)} - & 35 \alpha_4 \bar{A}^4 \Lambda^3 e^{i T_0 (3\Omega - 4\omega_0)} \\
 & -35 \alpha_4 A^4 \Lambda^3 e^{i T_0 (3\Omega + 4\omega_0)} \\
 -35 \alpha_4 \bar{A}^3 \Lambda^4 e^{i T_0 (4\Omega - 3\omega_0)} - & 35 \alpha_4 A^3 \Lambda^4 e^{i T_0 (4\Omega + 3\omega_0)} \\
 & - \left(210 \alpha_4 \Lambda^4 A^3 + 210 \alpha_4 \Lambda^2 \right) e^{3 i \omega_0 T_0} \\
 & - \left(A^4 \bar{A} + 21 \alpha_3 A^5 \bar{A}^2 \right) e^{i \omega_0 T_0} \\
 & - \left(2 i A' \omega_0 + A \left(\frac{i \mu \omega_0 + 140 \Lambda^6 \alpha_4 + 630 \alpha_4 \bar{A} \bar{A} \Lambda^4}{+35 \alpha_4 A^3 \bar{A}^3 + 420 \alpha_4 A^2 \bar{A}^2 \Lambda^2} \right) \right) e^{i \omega_0 T_0} \\
 & - \Lambda \left(2 i A' \omega_0 + A \left(\frac{i \mu \omega_0 + 140 \Lambda^6 \alpha_4 + 630 \alpha_4}{\bar{A} \bar{A} \Lambda^4 + 35 \alpha_4 A^3 \bar{A}^3 + 420 \alpha_4 A^2 \bar{A}^2 \Lambda^2} \right) \right) e^{i \Omega T_0} \\
 & - \Lambda \left(2 i A' \omega_0 + A \left(\frac{i \mu \omega_0 + 140 \Lambda^6 \alpha_4 + 630 \alpha_4}{\bar{A} \bar{A} \Lambda^4 + 35 \alpha_4 A^3 \bar{A}^3 + 420 \alpha_4 A^2 \bar{A}^2 \Lambda^2} \right) \right) e^{i \Omega T_0} \\
 & - \Lambda \left(2 i A' \omega_0 + A \left(\frac{i \mu \omega_0 + 140 \Lambda^6 \alpha_4 + 630 \alpha_4}{\bar{A} \bar{A} \Lambda^4 + 35 \alpha_4 A^3 \bar{A}^3 + 420 \alpha_4 A^2 \bar{A}^2 \Lambda^2} \right) \right) e^{i \Omega T_0} \\
 & -21 \Lambda^3 \alpha_4 \left(\Lambda^4 + 10 \Lambda^2 \bar{A} \bar{A} + 10 A^2 \bar{A}^2 \right) \\
 e^{3 i \Omega T_0} - \Lambda^7 \alpha_4 e^{7 i \omega_0 T_0} + & c.c.
 \end{aligned}
 \tag{74}$$

$$a\beta' = 15 \frac{a\Lambda^4 \alpha_3}{\omega_0} + \frac{15 a^3 \Lambda^2 \alpha_3}{2 \omega_0} + \frac{5 a^5 \alpha_3}{16 \omega_0} + \frac{5 \Lambda a^4 \alpha_3}{16 \omega_0} \cos(\sigma T_1 - 5\beta) \tag{66}$$

زاویه فاز جدید (γ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\gamma = \sigma T_1 - 5\beta \tag{67}$$

بنابراین، معادلات (۶۵) و (۶۶) به حالت‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردند:

$$a' = -\frac{1}{2} a \mu - \frac{5 \Lambda a^4 \alpha_3}{16 \omega_0} \sin(\gamma) \tag{68}$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 15 \frac{\Lambda^4 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{15 a^2 \Lambda^2 \alpha_3}{2 \omega_0} \right) a - \frac{5 a^5 \alpha_3}{16 \omega_0} - \frac{5 \Lambda a^4 \alpha_3}{16 \omega_0} \cos(\gamma) \tag{69}$$

برای حرکت حالت پایا، معادله پاسخ فرکانسی طبق معادله (۷۰)

برای تشدید مادون هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4} \mu^2 + \left(\frac{\sigma - 15 \frac{\Lambda^4 \alpha_3}{\omega_0} - \frac{15}{2}}{a^2 \Lambda^2 \alpha_3 - \frac{5 a^4 \alpha_3}{16 \omega_0}} \right)^2 \right) a^2 = \frac{25 \Lambda^2 a^8 \alpha_3^2}{256 \omega_0^2} \tag{70}$$

۳-۳- تشدیدهای مافوق هارمونیک ۷:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{7} \omega$) و مادون هارمونیک ۱:۷ ($\Omega \approx 7\omega$):

جهت حل معادله غیرخطی (۱۶) پارامترهای جدید به صورت

معادله (۷۱) تعریف می‌گردند:

$$\hat{\mu} = \varepsilon \mu, \quad \hat{\alpha}_2 = \varepsilon^2 \alpha_2, \quad \hat{\alpha}_3 = \varepsilon^2 \alpha_3, \quad \hat{\alpha}_4 = \varepsilon \alpha_4 \tag{71}$$

با جایگذاری پارامترهای (۷۱) در معادله (۱۶) و در نظر گرفتن

معادلات (۲۵) و (۲۶)، پس از حل و برابر صفر قرار دادن ضرایب مختلف ε' و ε ، معادلات خطی زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon^0 : D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = \eta P_0 \cos(\Omega t) \tag{72}$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \alpha_4 W_0^7 - \mu D_0 W_0 \tag{73}$$

با تعریف مشابه معادلات (۲۹) تا (۳۱) با جایگذاری معادله (۳۰)

(۷۹) به حالت‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^7\alpha_4}{\omega_0}\sin(\gamma) \quad (۸۰)$$

$$a\gamma' = \left(\frac{\sigma - 70\frac{\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} + \frac{315}{4}}{\frac{a^2\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} + \frac{105}{8}\frac{a^4\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0}} \right) a - \frac{35}{128}\frac{a^7\alpha_4}{\omega_0} - \frac{\Lambda^7\alpha_4}{\omega_0}\cos(\gamma) \quad (۸۱)$$

برای حرکت حالت پایا، معادله پاسخ فرکانسی طبق معادله (۸۲) برای تشدید مافوق هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4}\mu^2 + \left(\frac{\sigma - 70\frac{\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} - \frac{315}{4}\frac{a^2\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0}}{\frac{105}{8}\frac{a^4\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0} - \frac{35}{128}\frac{a^6\alpha_4}{\omega_0}} \right)^2 \right) a^2 = \frac{\Lambda^{14}\alpha_4^2}{\omega_0^2} \quad (۸۲)$$

۳-۳-۳- تشدید مادون هارمونیک ۱:۷ (Ω ≈ ۷ω)

بر اساس معادله (۷۴)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک ۷ω باشد، یک جمله نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را تشدید مادون هارمونیک می‌گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به ۷ω را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$\Omega = 7\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (۸۳)$$

حال معادله (۸۳) در (۷۴) جایگذاری می‌گردد و جملات نامحدود و سکولار به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند.

$$7\Lambda^7\alpha_4 e^{i\sigma T_1} + \left(2iA'\omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 140\Lambda^6\alpha_4 + 630\alpha_4 A\bar{A}\Lambda^4 + 35\alpha_4 A^3\bar{A}^3 + 420\alpha_4 A^2\bar{A}^2\Lambda^2 \right) \right) = 0 \quad (۸۴)$$

برای حل معادله (۸۴)، مشابه روابط بیان شده قبل، A به فرم

برای حذف جملات نامحدود، ضریب exp(iω.T) برابر صفر قرار داده می‌شوند که به صورت زیر می‌باشد:

$$\left(2iA'\omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 140\Lambda^6\alpha_4 + 630\alpha_4 A\bar{A}\Lambda^4 + 35\alpha_4 A^3\bar{A}^3 + 420\alpha_4 A^2\bar{A}^2\Lambda^2 \right) \right) = 0 \quad (۷۵)$$

۳-۳-۱- تشدید مافوق هارمونیک ۷:۱ (Ω ≈ 1/7 ω) طبق معادله (۷۴)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک 1/7 ω باشد، یک جمله نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را تشدید مافوق هارمونیک می‌گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به 1/7 ω را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$7\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (۷۶)$$

حال معادله (۷۶) در (۷۴) جایگذاری می‌گردد و جملات نامحدود و سکولار به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند.

$$\Lambda^7\alpha_4 e^{i\sigma T_1} + \left(2iA'\omega_0 + A \left(i\mu\omega_0 + 140\Lambda^6\alpha_4 + 630\alpha_4 A\bar{A}\Lambda^4 + 35\alpha_4 A^3\bar{A}^3 + 420\alpha_4 A^2\bar{A}^2\Lambda^2 \right) \right) = 0 \quad (۷۷)$$

برای حل معادله (۷۷)، مشابه روابط بیان شده قبل، A به فرم قطبی معادله (۳۶) در نظر گرفته می‌شود.

با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۷۷) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، معادلات (۷۸) و (۷۹) حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^7\alpha_4}{\omega_0}\sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (۷۸)$$

$$a\beta' = 70\frac{a\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} + \frac{315}{4}\frac{a^3\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} + \frac{105}{8}\frac{a^5\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0} + \frac{35}{128}\frac{a^7\alpha_4}{\omega_0} + \frac{\Lambda^7\alpha_4}{\omega_0}\cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (۷۹)$$

با در نظر گرفتن زاویه فاز طبق معادله (۳۹)، معادلات (۷۸) و

جدول ۱. مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی
Table 1. Comparison of the natural frequencies

$$(L_{x0} = L_{y0} = 2m, m = n = 1, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, h = 0/0.01m)$$

$$(\Gamma = 120 \cdot \text{kg/m}^3, C = 0/0.2, C_1 = 0/17\text{MPa}, k_1 = 10^5 \text{N/m}^2)$$

مقاله حاضر [۲۷]	مقاله حاضر [۱۹]	دامنه (A(m))	سوارز و گونچالوز دامنه (A(m))	مقاله حاضر	دامنه (A(m))
۳۶۹/۳۴۷	۳۶۹/۵۹۹	۱/۱	۲۹۷/۷۳۴	۲۹۶/۳۷۶	۰/۱
۳۸۰/۰۰۰	۳۸۰/۷۹۹	۱/۲	۳۰۰/۰۰۰	۲۹۹/۱۹۹	۰/۲
۳۹۳/۲۱۸	۳۹۲/۶۹۹	۱/۳	۳۰۵/۴۷۶	۳۰۵/۰۰۸	۰/۳
۴۰۵/۸۰۶	۴۰۵/۳۶۶	۱/۴	۳۱۰/۹۶۸	۳۱۱/۰۴۸	۰/۴
۴۱۹/۶۶۹	۴۱۸/۸۷۹	۱/۵	۳۱۷/۰۸۹	۳۱۷/۳۳۰	۰/۵
۴۳۲/۹۰۳	۴۳۳/۳۲۰	۱/۶	۳۲۳/۸۷۱	۳۲۲/۲۱۴	۰/۶
۴۴۷/۴۱۱	۴۴۸/۷۹۸	۱/۷	۳۳۱/۲۸۲	۳۳۰/۶۹۳	۰/۷
۴۵۹/۳۱۲	۴۵۸/۶۶۶	۱/۸	۳۴۰/۰۰۰	۳۳۹/۶۳۱	۰/۸
۴۷۶/۴۴۳	۴۷۲/۴۱۹	۱/۹	۳۴۹/۳۴۷	۳۴۹/۰۶۵	۰/۹
۴۸۶/۴۰۰	۴۸۳/۳۲۱	۲/۰	۳۵۹/۳۵۵	۳۵۹/۰۳۹	۱/۰

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{7}{64} \frac{\Lambda a^6 \alpha_4}{\omega_0} \sin(\gamma) \quad (88)$$

قطبی معادله (۳۶) در نظر گرفته می‌شود.

با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۸۴) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، معادلات (۸۵) و (۸۶) حاصل می‌شوند:

$$a\gamma' = \left(\begin{array}{l} \sigma - 70 \frac{\Lambda^6 \alpha_4}{\omega_0} + \frac{315}{4} \\ \frac{a^2 \Lambda^4 \alpha_4}{\omega_0} + \frac{105 a^4 \Lambda^2 \alpha_4}{8 \omega_0} \end{array} \right) a \quad (89)$$

$$-\frac{35 a^7 \alpha_4}{128 \omega_0} - \frac{7 \ddot{E} a^6 \alpha_4}{64 \omega_0} \cos(\gamma)$$

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{7}{64} \frac{\Lambda a^6 \alpha_4}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - 7\beta) \quad (85)$$

مشابه قبل، برای حرکت حالت پایا معادله پاسخ فرکانسی طبق معادله (۹۰) برای تشدید مادون هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$a\beta' = 70 \frac{a\Lambda^6 \alpha_4}{\omega_0} + \frac{315 a^3 \Lambda^4 \alpha_4}{4 \omega_0} + \frac{105 a^5 \Lambda^2 \alpha_4}{8 \omega_0} + \frac{35 a^7 \alpha_4}{128 \omega_0} + \frac{7 \Lambda a^6 \alpha_4}{64 \omega_0} \cos(\sigma T_1 - 7\beta) \quad (86)$$

$$\left(\frac{1}{4} \mu^2 + \left(\begin{array}{l} \sigma - 70 \frac{\Lambda^6 \alpha_4}{\omega_0} - \frac{315 a^2 \Lambda^4 \alpha_4}{4 \omega_0} \\ -\frac{105 a^4 \Lambda^2 \alpha_4}{8 \omega_0} - \frac{35 a^6 \alpha_4}{128 \omega_0} \end{array} \right)^2 \right) \quad (90)$$

زاویه فاز جدید (γ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\gamma = \sigma T_1 - 7\beta \quad (87)$$

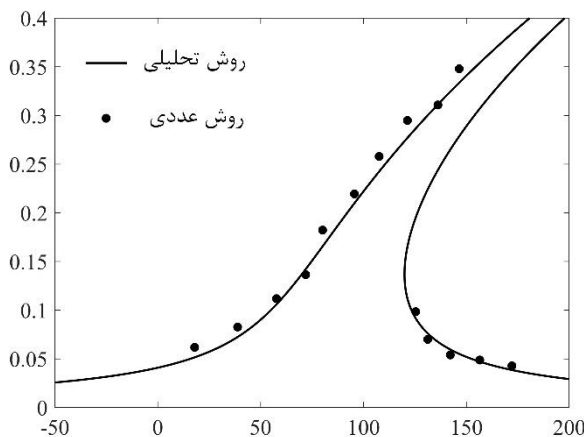
بنابراین، معادلات (۸۵) و (۸۶) به حالت‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردند:

$$a^2 = \frac{49}{4096} \frac{\Lambda^2 a^{12} \alpha_4^2}{\omega_0^2}$$

جدول ۲. مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی
Table 2. Comparison of the natural frequencies

$$(L_{x0} = L_{y0} = 1\text{m}, h = 0.001\text{m}, \Gamma = 120 \cdot \text{kg/m}^3, C = 0.02, C_1 = 0.2\text{MPa}, k_1 = 10^3 \text{N/m}^2)$$

δ_x	δ_y	$m=1, n=1$			$m=1, n=2$			$m=2, n=1$		
		مقاله حاضر	روش اجزای محدود [۱۹]	اختلاف (%)	مقاله حاضر	روش اجزای محدود [۱۹]	اختلاف (%)	مقاله حاضر	روش اجزای محدود [۱۹]	اختلاف (%)
۱/۱	۱/۱	۶۴/۶۵	۶۵/۹۴	۳/۸۸	۹۵/۹۲	۹۶/۶۶	۴/۴۴	۹۵/۹۲	۹۶/۶۶	۴/۴۴
۱/۱	۱/۵	۸۷/۶۵	۹۰/۶۳	۹/۸۸	۱۳۱/۶۴	۱۳۳/۴۶	۷/۱۹	۱۳۶/۳۵	۱۳۸/۱۰	۱۴/۶۷
۱/۱	۲/۰	۱۰۳/۵۸	۱۰۸/۲۳	۱۷/۴۹	۱۴۷/۱۹	۱۵۰/۲۷	۱۱/۲۱	۱۷۱/۷۴	۱۷۴/۳۳	۲۶/۱۶
۱/۵	۱/۵	۱۰۱/۷۶	۱۰۶/۶۹	۱۵/۲۴	۱۵۷/۰۰	۱۶۰/۰۱	۱۷/۰۲	۱۵۷/۰۰	۱۶۰/۰۱	۱۷/۰۲



شکل ۲. نمودار فرکانس-دامنه به دست آمده برای تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ با روش‌های عددی و تحلیلی

Fig. 2. Frequency-amplitude curve for 1:3 superharmonic resonance with numerical and analytical methods

۴- نتایج عددی
۱-۴- اعتبارسنجی مقاله حاضر

است و ملاحظه می‌شود نتایج ارائه شده در این مقاله با دقت مناسبی با نتایج موجود در مرجع [۲۷] مطابقت دارند.

در جدول‌های ۱ و ۲ مقایسه‌ای بین فرکانس‌های طبیعی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر وینکلر-پسترناک به دست آمده در این مقاله و نتایج مشابه در مقاله سوارز و گونچالوز [۲۷] صورت گرفته است که آن‌ها نتایج حاصل را با روش‌های تحلیلی و اجزای محدود به دست آورده‌اند.

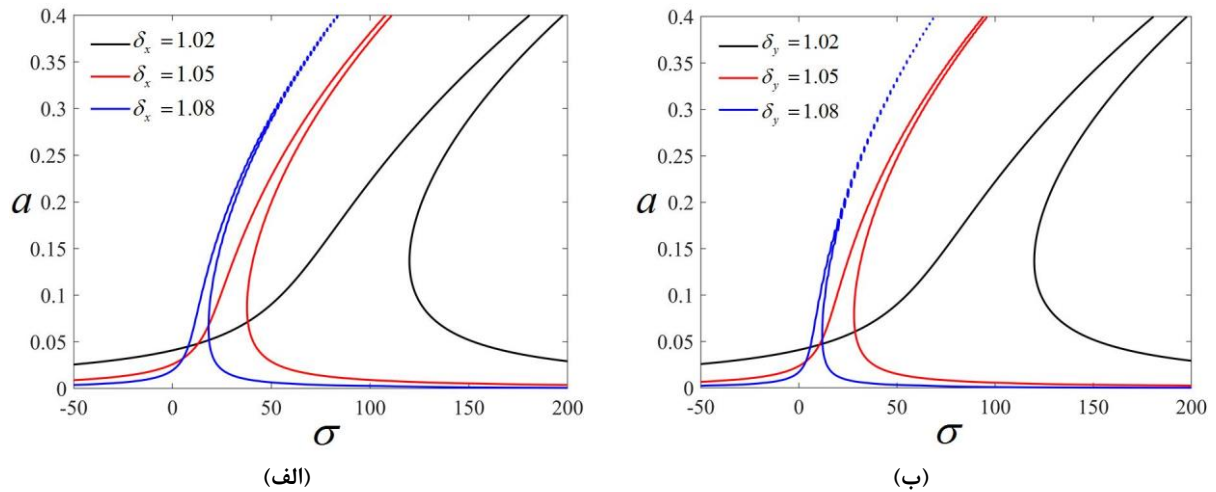
در روش اعتبارسنجی دوم، روش تحلیلی با روش عددی مقایسه شده است. در روش عددی، از روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم برای تجزیه و تحلیل معادله (۲۴) استفاده شده است. در این روش برای

در این بخش به منظور بررسی صحت نتایج، در ابتدا مقایسه‌ای بین مطالعه حاضر و کارهای دیگر محققان انجام شده است. سپس علاوه بر آن، نتایج تحلیلی به دست آمده در این مطالعه با روش‌های عددی نیز مقایسه شده است. این دو روش اعتبارسنجی در ادامه شرح داده شده است.

در اولین روش اعتبارسنجی، به منظور راستی آزمایی فرمول‌بندی موجود در مقاله حاضر، پاسخ‌های ارائه شده در مقاله حاضر با یکی از کارهای موجود در زمینه ارتعاش غشای هایپرالاستیک مقایسه شده

جدول ۳. مشخصات هندسی و پارامترهای ساختاری غشا
 Table 3. The geometrical characteristics and material parameters of membrane

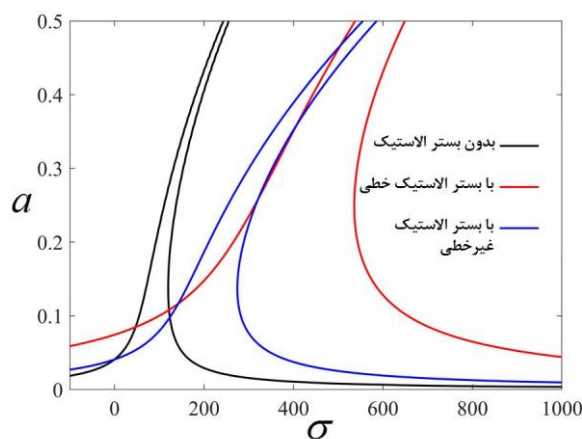
پارامتر ماده	عرض	طول	ضخامت	چگالی	
C_1 (MPa)	L_{y0} (m)	L_{x0} (m)	h (m)	Γ (kg/m ^۳)	
۰/۱۷	۱	۱/۵	۰/۰۰۱	۱۲۰۰	غشای مستطیلی هایپرالاستیک (نئو-هوکین)



شکل ۳. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = k_2 = k_3 = 0, C = 0/0.2, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 3. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves of the 1:3 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۴. اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = 50 \text{ N/m}^2, k_2 = 20 \text{ N/m}^2, k_3 = 10^5 \text{ N/m}^5, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 4. Effect of the elastic foundation on the frequency-response curves of the 1:3 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

به دست آوردن روابط و نمودارها بیان شده است که برای تحلیل روابط و تشدیدهای مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین در ادامه به منظور رسم توابع ضمنی دامنه-فرکانس که در قسمت‌های قبل به دست آمده است، از دستور پلات ضمنی در متلب استفاده شده است.

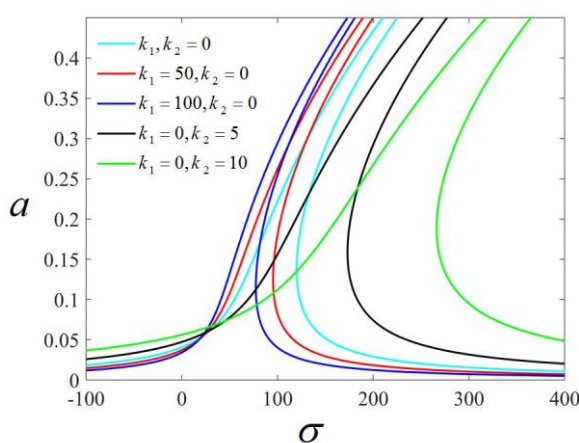
۴-۲-۱- تحلیل تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega$)

تأثیر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس تشدید مافوق هارمونیک

مقادیر مختلف فرکانس تحریک، ماکزیمم دامنه‌های مختلف استخراج شده است (شرایط اولیه صفر). در ادامه، منحنی‌های عددی و تحلیلی پاسخ فرکانسی برای حالت تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ در شکل ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج عددی تقریباً مشابه با نتایج تحلیلی می‌باشند. بنابراین، این نتایج نشان می‌دهد که شبیه‌سازی عددی نتایج تحلیلی را تأیید می‌کند.

۴-۲-۲ تشدیدهای مافوق و مادون هارمونیک

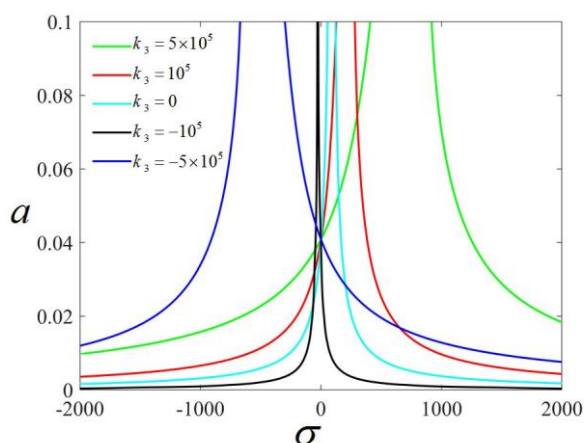
در جدول ۳ مشخصات فیزیکی و پارامترهای مشخص غشا، جهت



شکل ۵. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپراستیک

$$(C = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_o = 100 \text{ N/m}^2)$$

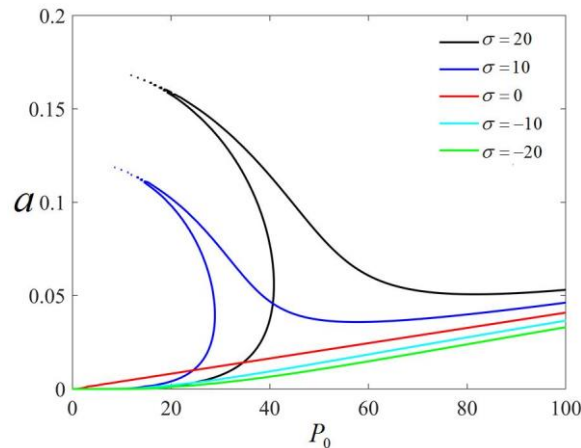
Fig. 5. Effect of the linear stiffness parameters on the frequency-response curves of the 1:3 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۶. اثر پارامتر سختی غیرخطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپراستیک

$$(C = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_o = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 6. Effect of the nonlinear stiffness parameter on the frequency-response curves of the 1:3 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۷. اثر پارامتر تنظیم بر منحنی‌های دامنه پاسخ-دامنه تحریک تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپرااستیک

$$(k_1 = k_2 = k_3 = 0, C = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1/0.2)$$

Fig. 7. Effect of the detuning parameter on the response amplitude versus excitation amplitude curves of the 1:3 super-harmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

به مقدار k_3 بستگی دارد. پارامتر بستر الاستیک غیرخطی منفی و مثبت به ترتیب منجر به کاهش و افزایش رفتار سخت‌شوندگی غشا می‌شود. در واقع پارامتر بستر الاستیک مثبت، رفتار سخت‌شوندگی را به یک رفتار سخت‌شونده و پارامتر بستر الاستیک منفی، رفتار سخت‌شوندگی را به یک رفتار نرم‌شونده تغییر می‌دهد.

در شکل ۷ اثر پارامتر تنظیم بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم قابل مشاهده می‌باشد. با افزایش پارامتر تنظیم σ مقدار پرش نیز افزایش می‌یابد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای پارامترهای تنظیم مثبت، پدیده چندمقداری^۱ اتفاق می‌افتد، در حالیکه بقیه پارامترها، تک‌مقداری^۲ می‌باشد. هم‌چنین افزایش پارامتر تنظیم منجر به افزایش میزان پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ می‌شود. پدیده پرش یک پدیده غیرخطی است که برای سیستم‌های سخت و نرم اتفاق می‌افتد. لذا با کاهش فرکانس تحریک، دامنه پاسخ برای یک سیستم نرم به در نقطه‌ای خاص از دامنه بیشتر به دامنه کمتر و برای یک سیستم سخت از دامنه کمتر به دامنه بیشتر انتقال می‌یابد یا اصطلاحاً پرش می‌نماید. هم‌چنین رخ دادن پرش از منظر فیزیکی یعنی اینکه ممکن است سیستم در آن ناحیه جواب فیزیکی نداشته باشد.

شکل‌های ۸-الف و ۸-ب به ترتیب تأثیر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش نرخ کشیدگی که بیانگر

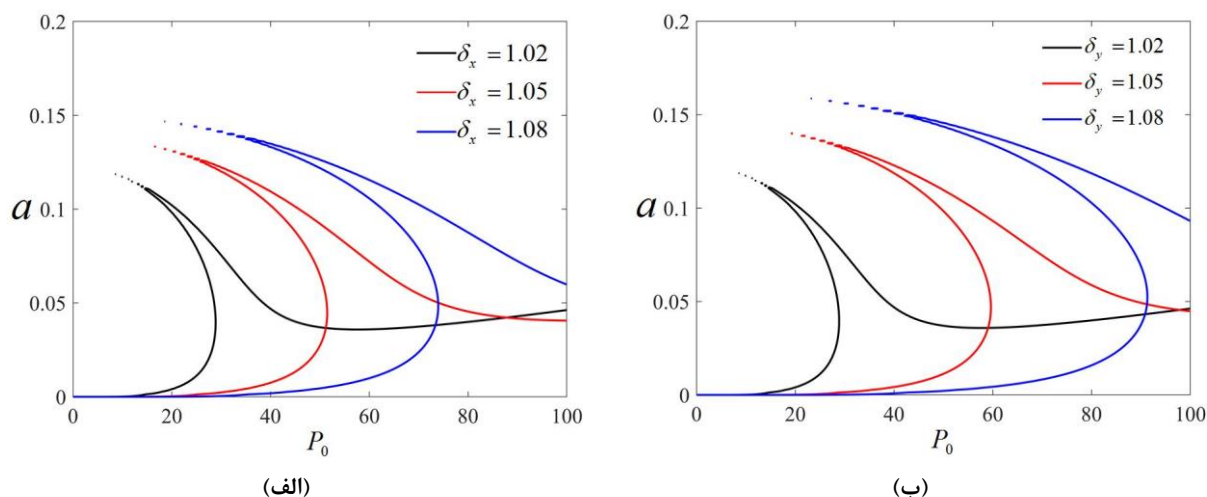
۳:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega$)، به ترتیب در شکل‌های ۳-الف و ۳-ب نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد و منحنی‌ها نیز به سمت چپ منتقل می‌شوند. در شکل ۴ اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. در واقع رفتار سخت‌شوندگی بدین معناست که علامت ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت معمولی، مثبت می‌باشد.

با توجه به شکل ۵، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. مشاهده می‌گردد حالت‌های $k_1 = 100$ و $k_2 = 10$ به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. هم‌چنین افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) به ترتیب منجر به کاهش و افزایش مقدار سخت‌شوندگی می‌شود. به عبارتی دیگر، زمانی که غشا با بستر الاستیک وینکلر در نظر گرفته می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از زمانی است که غشا با بستر پسترناک در نظر گرفته شود.

در شکل ۶ اثر پارامتر سختی غیرخطی k_3 بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که مقدار سخت‌شوندگی و نرم‌شوندگی و هم‌چنین ماکزیمم دامنه ارتعاشات

1Multi-valued phenomenon

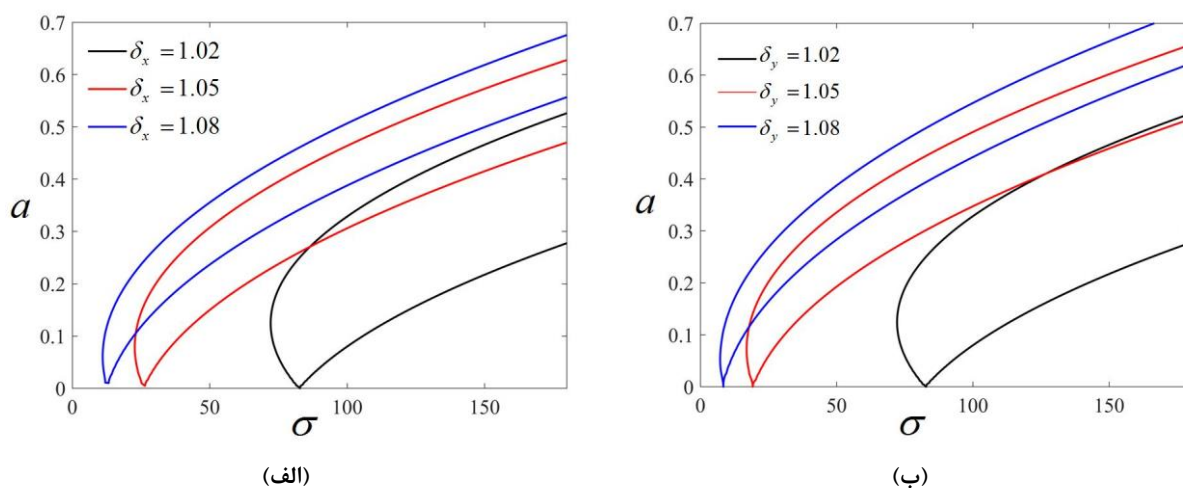
2Single-valued



شکل ۸. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های دامنه پاسخ-دامنه تحریک تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپراالاستیک

$$(k_1 = k_\gamma = k_\nu = 0, C = 0.02)$$

Fig. 8. Effect of the stretching ratio on the response amplitude versus excitation amplitude curves of the 1:3 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۹. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۳:۱ برای غشای مستطیلی هایپراالاستیک

$$(k_1 = k_\gamma = k_\nu = 0, C = 0.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

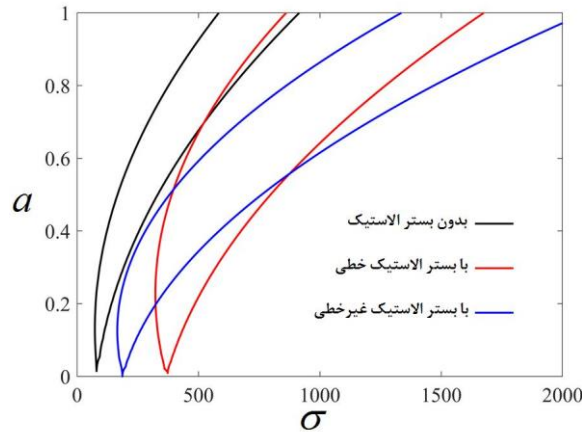
Fig. 9. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves of the 3:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مشابه حالت تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱، با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد و منحنی‌ها نیز به سمت چپ منتقل می‌شوند. هم‌چنین کاهش رفتار سخت‌شوندگی بدین معناست که ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت معمولی، کاهش می‌یابد. در شکل ۱۰ اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم

سفتی اولیه غشا می‌باشند، پدیده چندمقداری اتفاق می‌افتد و مقدار پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ نیز افزایش می‌یابد.

$$2-2-4 \text{ تحلیل تشدید مادون هارمونیک } 1:3 (\Omega \approx 3\omega)$$

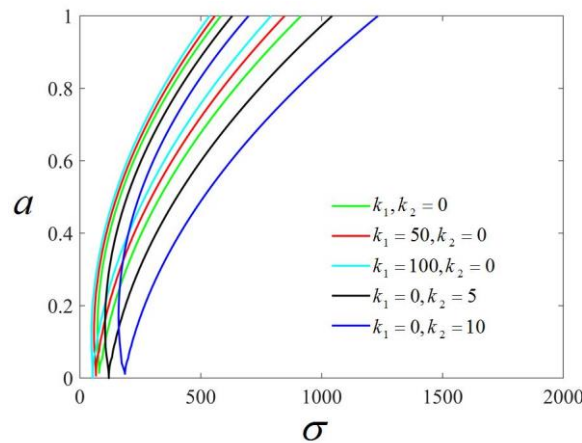
در شکل‌های ۹-الف و ۹-ب به ترتیب، اثر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس تشدید مادون هارمونیک ۳:۱ ($\Omega \approx 3\omega$)، نشان داده شده



شکل ۱۰. اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۱:۳ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = 5 \cdot \text{N/m}^2, k_2 = 2 \cdot \text{N/m}^2, k_3 = 1 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 10. Effect of the elastic foundation on the frequency-response curves of the 3:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۱۱. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۱:۳ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(C = 0/0.2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \text{ N/m}^2)$$

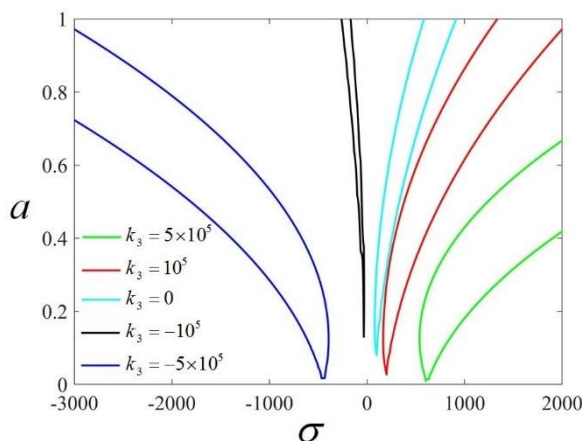
Fig. 11. Effect of the linear stiffness parameters on the frequency-response curves of the 3:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) به ترتیب منجر به کاهش و افزایش مقدار سخت‌شوندگی می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود مشابه حالت تشدید مافوق هارمونیک ۳:۱، رفتار سخت‌شوندگی غشا با ضریب بستر الاستیک پسترناک بیش‌تر از غشا با ضریب بستر الاستیک وینکلر می‌باشد.

شکل ۱۲ اثر پارامتر سختی غیرخطی k_3 بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که مقدار سخت‌شوندگی و نرم‌شوندگی و همچنین ماکزیمم دامنه ارتعاشات به مقدار k_3

نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. همچنین با توجه به این شکل، پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی منجر به افزایش رفتار سخت‌شوندگی غشا و مینیمم پاسخ دامنه می‌شود.

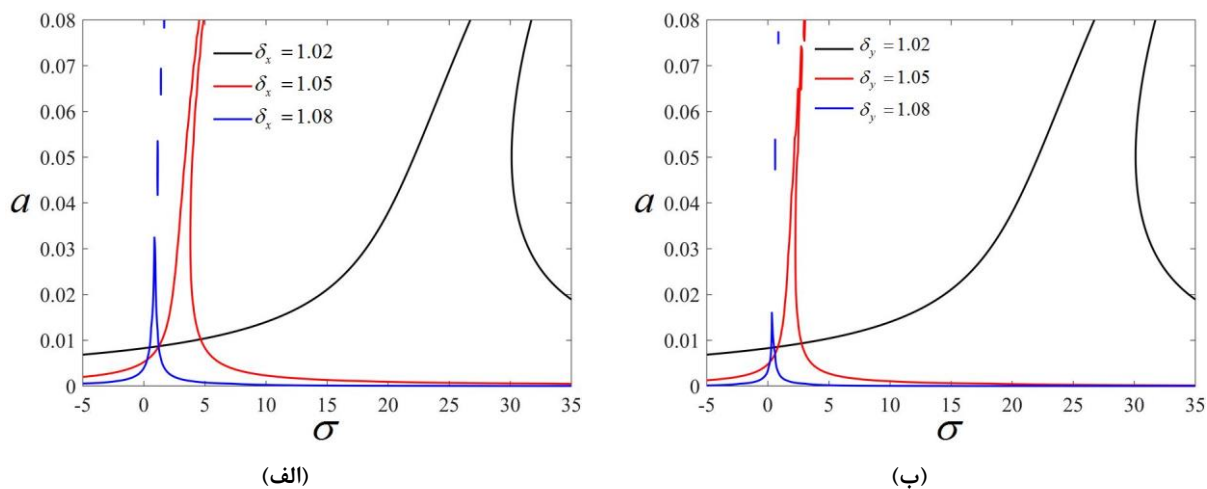
در شکل ۱۱، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. در حالت‌های $k_1 = 100$ و $k_2 = 10$ به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند.



شکل ۱۲. اثر پارامتر سختی غیرخطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۱:۳ برای غشای مستطیلی هایپراالاستیک (

$$(C = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_o = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 12. Effect of the nonlinear stiffness parameter on the frequency-response curves of the 3:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۱۳. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۵:۱ برای غشای مستطیلی هایپراالاستیک

$$(k_1 = k_\tau = k_\nu = 0, C = 0.02, P_o = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 13. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves of the 1:5 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

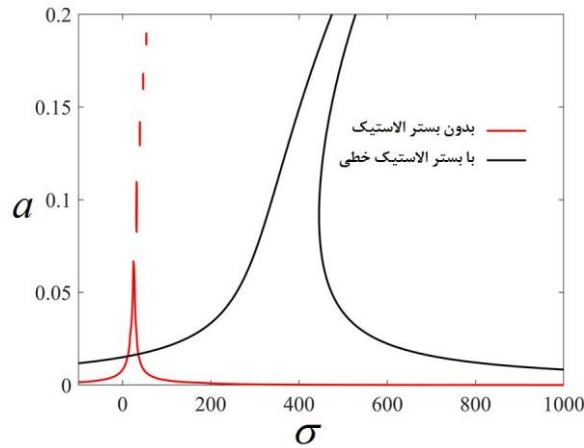
توجه به این شکل‌ها، با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی و مقدار پرش در سیستم کاهش می‌یابد و کاهش رفتار سخت‌شوندگی بدین معناست که ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت معمولی، کاهش می‌یابد. در شکل ۱۴ اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین سخت‌شوندگی و مقدار پرش می‌باشند.

با توجه به شکل ۱۵، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-

بستگی دارد. پارامتر بستر الاستیک غیرخطی منفی و مثبت به ترتیب منجر به کاهش و افزایش رفتار سخت‌شوندگی غشا می‌شود. در واقع پارامتر بستر الاستیک مثبت، رفتار سخت‌شوندگی را به یک رفتار سخت‌شونده و پارامتر بستر الاستیک منفی، رفتار سخت‌شوندگی را به یک رفتار نرم‌شونده تغییر می‌دهد.

$$3-2-4 \text{ تحلیل تشدید مافوق هارمونیک } 5:1 \left(\Omega \approx \frac{1}{5}\omega \right)$$

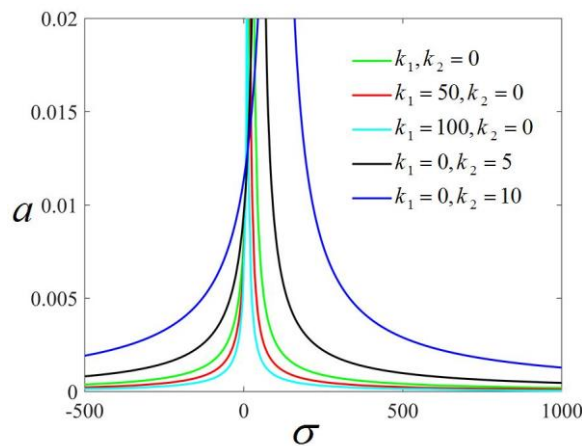
اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس تشدید مافوق هارمونیک ۵:۱ $(\Omega \approx \frac{1}{5}\omega)$ ، به ترتیب در شکل‌های ۱۳-الف و ۱۳-ب نشان داده شده است. با



شکل ۱۴. اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۵:۱ برای غشای مستطیلی هایپراستیک

$$(k_1 = 50 \text{ N/m}^2, k_2 = 20 \text{ N/m}^2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 14. Effect of the elastic foundation on the frequency-response curves of the 1:5 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



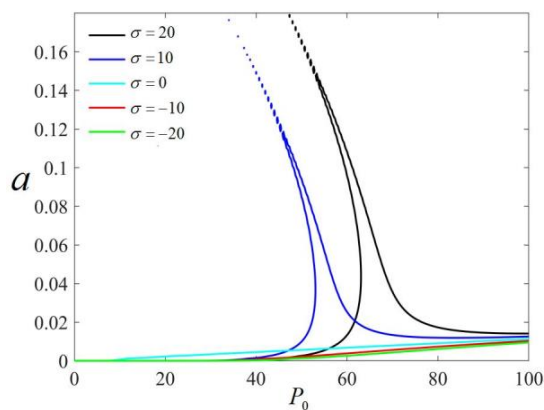
شکل ۱۵. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۵:۱ برای غشای مستطیلی هایپراستیک

$$(C = 1/0.2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 15. Effect of the linear stiffness parameters on the frequency-response curves of the 1:5 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

شکل ۱۶ اثر پارامتر تنظیم بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم را نشان می‌دهد. با افزایش پارامتر تنظیم σ مقدار پرش نیز افزایش می‌یابد. مشابه قسمت قبل، همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای پارامترهای تنظیم مثبت، پدیده چندمقداری اتفاق می‌افتد، در حالیکه بقیه پارامترها، تک‌مقداری می‌باشد. هم‌چنین افزایش پارامتر تنظیم منجر به افزایش میزان پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ می‌شود. شکل‌های ۱۷-الف و ۱۷-ب به ترتیب تأثیر مقادیر مختلف نرخ

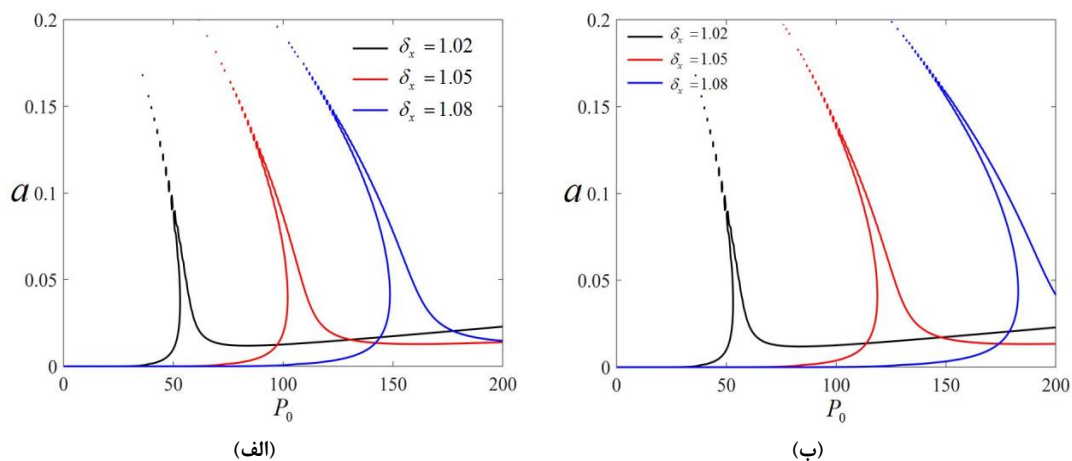
فرکانس سیستم بررسی شده است. مشاهده می‌گردد حالت‌های $k_1 = 10$ و $k_1 = 100$ به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار پرش می‌باشند. هم‌چنین افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) به ترتیب منجر به کاهش و افزایش مقدار پرش و سخت‌شوندگی می‌شود. به عبارتی دیگر، زمانی که غشا با بستر الاستیک وینکلر در نظر گرفته می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از زمانی است که غشا با بستر پسترناک در نظر گرفته شود.



شکل ۱۶. اثر پارامتر تنظیم بر منحنی‌های دامنه پاسخ-دامنه تحریک تشدید مافوق هارمونیک ۵:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = k_\gamma = k_\nu = 0, C = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1/0.2)$$

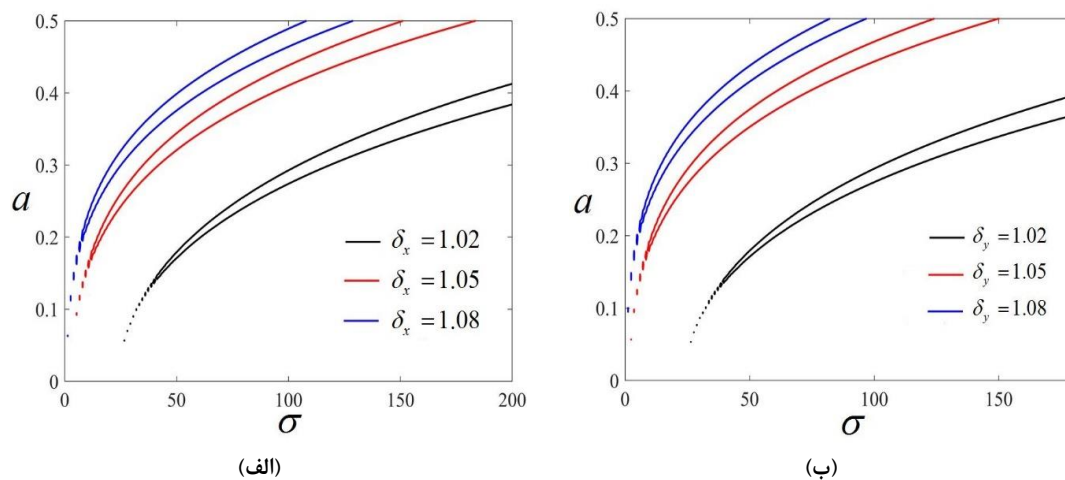
Fig. 16. Effect of the detuning parameter on the response amplitude versus excitation amplitude curves of the 1:5 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۱۷. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های دامنه پاسخ-دامنه تحریک تشدید مافوق هارمونیک ۵:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = k_\gamma = k_\nu = 0, C = 0.02)$$

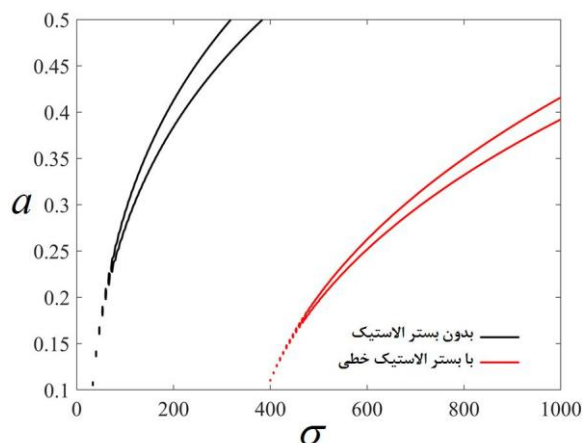
Fig. 17. Effect of the stretching ratio on the response amplitude versus excitation amplitude curves of the 1:5 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۱۸. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۵:۱ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = k_\gamma = k_\nu = 0, C = 0.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

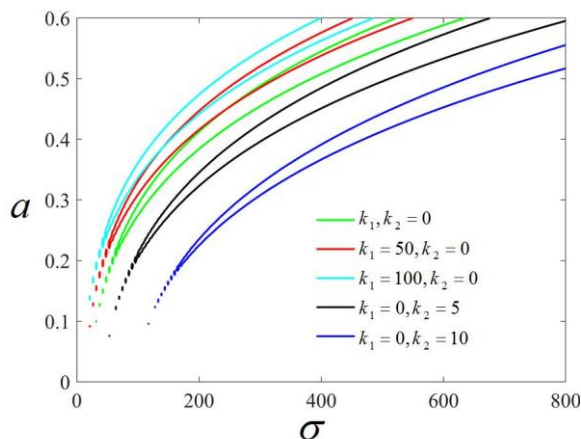
Fig. 18. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves of the 5:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۱۹. اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۱:۵ برای غشای مستطیلی هایپرا الاستیک

$$(k_1 = 5 \cdot \text{N/m}^2, k_2 = 20 \cdot \text{N/m}^2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \cdot \text{N/m}^2)$$

Fig. 19. Effect of the elastic foundation on the frequency-response curves of the 5:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۲۰. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۱:۵ برای غشای مستطیلی هایپرا الاستیک

$$(C = 1/0.2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \cdot \text{N/m}^2)$$

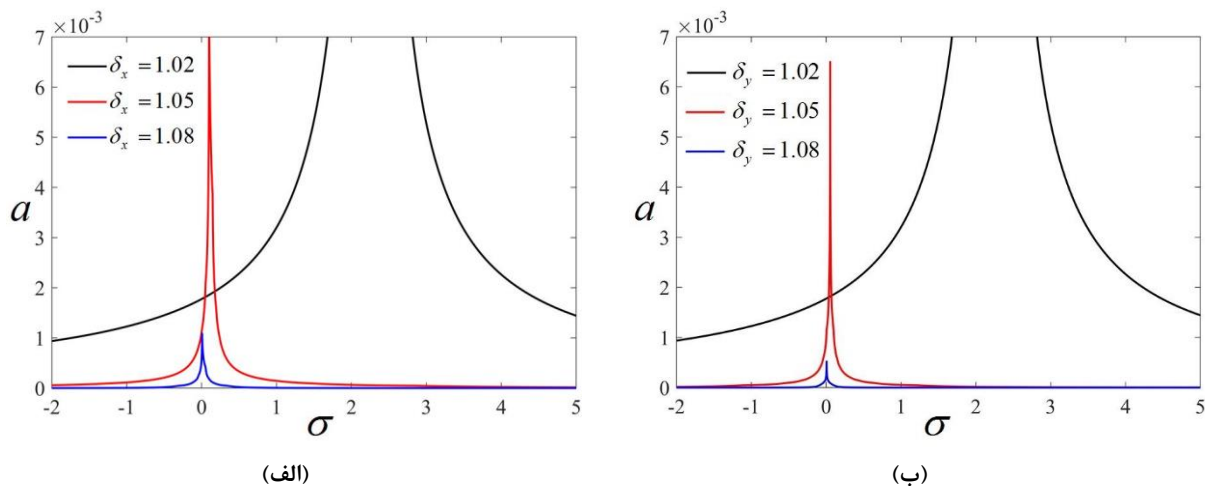
Fig. 20. Effect of the linear stiffness parameters on the frequency-response curves of the 5:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس تشدید مادون هارمونیک ۱:۵ ($\Omega \approx 5\omega$)، نشان داده شده است. با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد. در شکل ۱۹ اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. به عبارتی دیگر، زمانی که غشا با بستر الاستیک در نظر گرفته می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی بیش‌تر از زمانی

کشیدگی در راستای x و y بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که افزایش نرخ کشیدگی، افزایش مقدار پرش را به همراه خواهد داشت. به عبارتی دیگر با افزایش نرخ کشیدگی که بیانگر سفتی اولیه غشا می‌باشند، پدیده چندمقداری اتفاق می‌افتد و مقدار پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ نیز افزایش می‌یابد.

$$4-2-4- تحلیل تشدید مادون هارمونیک ۱:۵ ($\Omega \approx 5\omega$)$$

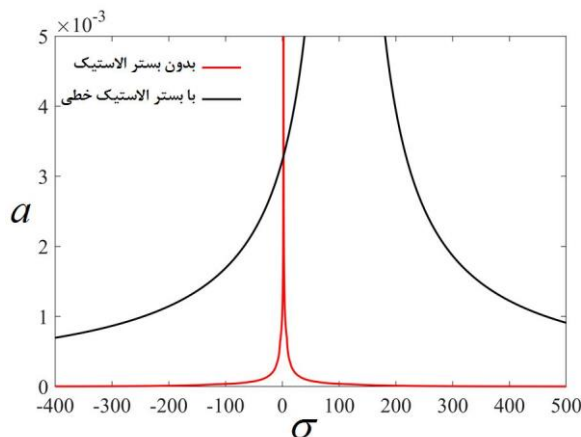
در شکل‌های ۱۸-الف و ۱۸-ب به ترتیب، اثر مقادیر مختلف نرخ



شکل ۲۱. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۷:۱ برای غشای مستطیلی هایپراالاستیک

$$(k_1 = k_\gamma = k_\tau = 0, C = 0.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 21. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves of the 1:7 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۲۲. اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۷:۱ برای غشای مستطیلی هایپراالاستیک

$$(k_1 = 50 \text{ N/m}^2, k_\gamma = 20 \text{ N/m}^2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

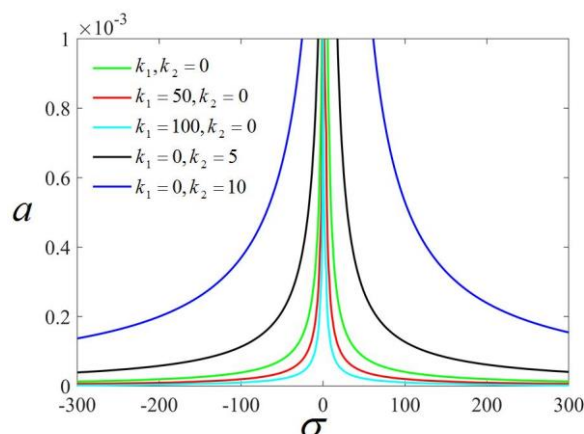
Fig. 22. Effect of the elastic foundation on the frequency-response curves of the 1:7 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

پسترناک در نظر گرفته شود.

است که غشا با بدون بستر الاستیک در نظر گرفته شود.

در شکل ۲۰، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. در حالت‌های $k_1 = 100$ و $k_\gamma = 10$ به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_γ (پارامتر پسترناک) به ترتیب منجر به کاهش و افزایش مقدار سخت‌شوندگی می‌شود. به عبارتی دیگر، زمانی که غشا با بستر الاستیک وینکلر در نظر گرفته می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از زمانی است که غشا با بستر

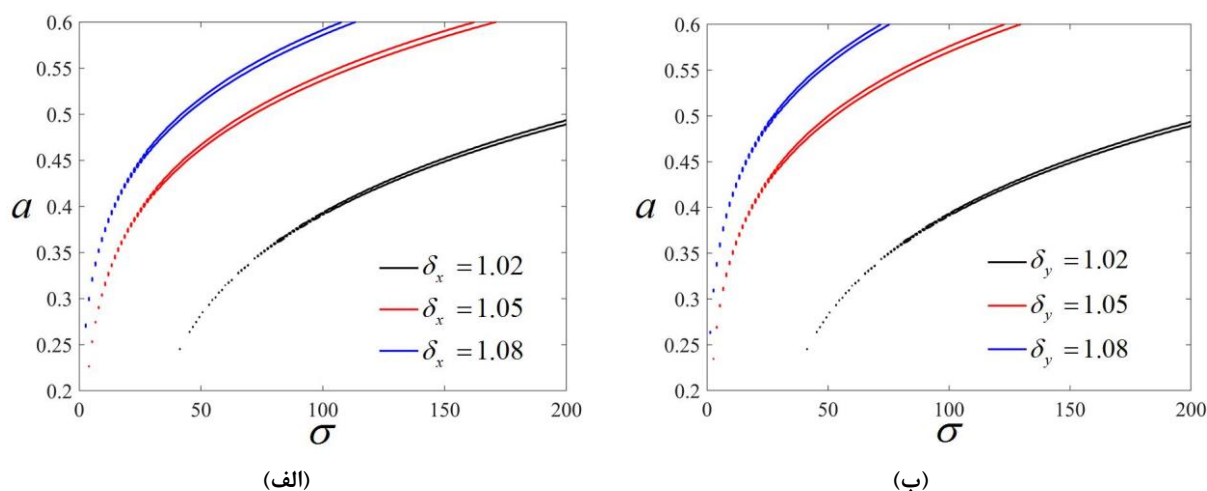
۴-۲-۵- تحلیل تشدید مافوق هارمونیک ۷:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{7}\omega$)
اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس تشدید مافوق هارمونیک ۷:۱ ($\Omega \approx \frac{1}{7}\omega$)، به ترتیب در شکل‌های ۲۱-الف و ۲۱-ب نشان داده شده است. توجه به این شکل‌ها، با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی و مقدار پرش در سیستم کاهش می‌یابد و منحنی‌ها نیز به سمت



شکل ۲۳. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مافوق هارمونیک ۷:۱ برای غشای مستطیلی هایپراالاستیک

$$(C = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_o = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 23. Effect of the linear stiffness parameters on the frequency-response curves of the 1:7 superharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



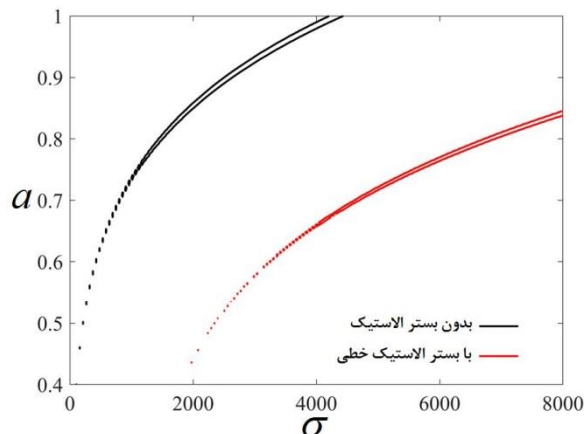
شکل ۲۴. اثر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۱:۷ برای غشای مستطیلی هایپراالاستیک

$$(k_1 = k_\gamma = k_\nu = 0, C = 0.02, P_o = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 24. Effect of the stretching ratio on the frequency-response curves of the 7:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

در شکل ۲۳، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. مشاهده می‌گردد حالت‌های $k_1 = 100$ و $k_2 = 10$ به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار پرش می‌باشند. هم‌چنین افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) به ترتیب منجر به کاهش و افزایش مقدار پرش می‌شود. به عبارتی دیگر، مشابه قسمت‌های قبلی، زمانی که غشا با بستر الاستیک وینکلر در نظر گرفته می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از زمانی است

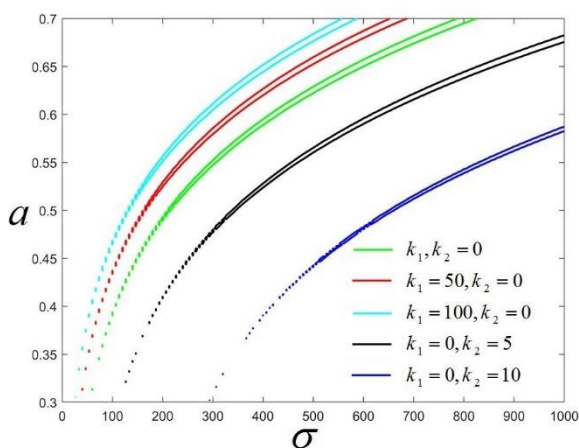
چپ منتقل می‌شوند. در شکل ۲۲ اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. همانند قبل حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین سخت‌شوندگی و مقدار پرش می‌باشند. به عبارتی دیگر، مشابه قسمت‌های قبلی، زمانی که غشا با بستر الاستیک در نظر گرفته می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی بیش‌تر از زمانی است که غشا با بدون بستر الاستیک در نظر گرفته شود.



شکل ۲۵. اثر بستر الاستیک بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۱:۷ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = 50 \text{ N/m}^2, k_2 = 20 \text{ N/m}^2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 25. Effect of the elastic foundation on the frequency-response curves of the 7:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane



شکل ۲۶. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی تشدید مادون هارمونیک ۱:۷ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(C = 0/0.2, \delta_x = \delta_y = 1/0.2, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

Fig. 26. Effect of the linear stiffness parameters on the frequency-response curves of the 7:1 subharmonic resonance for the rectangular hyperelastic membrane

می‌یابد و منحنی‌ها نیز به سمت چپ منتقل می‌شوند. همچنین کاهش رفتار سخت‌شوندگی بدین معناست که ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت معمولی، کاهش می‌یابد. در شکل ۲۵ اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. شکل ۲۶، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس

که غشا با بستر پسترناک در نظر گرفته شود.

۴-۲-۶- تحلیل تشدید مادون هارمونیک ۱:۷ ($\Omega \approx 7\omega$)
در شکل‌های ۲۴-الف و ۲۴-ب به ترتیب، اثر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس تشدید مادون هارمونیک ۱:۷ ($\Omega \approx 7\omega$)، نشان داده شده است. با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش

کاهش و افزایش مقدار سخت‌شوندگی و پدیده پرش می‌شود.
 • در تشدیدهای مافوق و مادون هارمونیک $\Omega \approx \frac{1}{3}\omega$ و $\Omega \approx 3\omega$ با افزایش مقدار مثبت k_p (پارامتر سختی غیرخطی)، سخت‌شوندگی افزایش می‌یابد و با افزایش مقدار منفی k_p سخت‌شوندگی کاهش می‌یابد.

• در منحنی دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم با افزایش پارامتر تنظیم σ ، مقدار پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ نیز افزایش می‌یابد.
 • در منحنی دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم با افزایش نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک، مقدار پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ نیز افزایش می‌یابد.

مراجع

- [1] J.J. Thomsen, *Vibrations and stability: advanced theory, analysis, and tools*, Springer, Berlin, 2003.
- [2] Y. Ishida, T. Yamamoto, T. Ikeda, Nonlinear forced oscillations caused by quartic nonlinearity in a rotating shaft system, *Journal of Vibration and Acoustics*, 112(3) (1990) 288-297.
- [3] E.M. Li, G. Yao, 1/3 Subharmonic resonance of a nonlinear composite laminated cylindrical shell in subsonic air flow, *Composite Structures*, 100 (2013) 249-256.
- [4] D. Zou, Z. Rao, N. Ta, Coupled longitudinal-transverse dynamics of a marine propulsion shafting under superharmonic resonances, *Journal of Sound and Vibration*, 346 (2015) 248-264.
- [5] J.C. Ji, A.Y.T. Leung, Non-linear oscillations of a rotor-magnetic bearing system under superharmonic resonance conditions, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(6) (2003) 829-835.
- [6] S.L. Tsyfansky, V.I. Beresnevich, Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring, *Journal of Sound and Vibration*, 213(1) (1998). 159-168.
- [7] A.P. Bovsunovskii, Vibrations of a nonlinear mechanical system simulating a cracked body, *Strength of materials*, 33(4) (2001) 370-379.
- [8] A.P. Bovsunovsky, C. Surace, R. Ruotolo, The effect of damping on the non-linear dynamic behaviour of a cracked

سیستم را نشان می‌دهد. حالت‌های $k_1 = 100$ و $k_2 = 10$ به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) به ترتیب منجر به کاهش و افزایش مقدار سخت‌شوندگی می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، رفتار ارتعاشی غیرخطی غشای مستطیلی هایپرالاستیک، تحت فشار خارجی گسترده و یکنواخت بر بستر الاستیک وینکلر-پسترناک بررسی شد. با استفاده از نظریه غشا با فرض تغییرشکل محدود و با تعیین تابع چگالی انرژی کرنشی مدل ساختاری هایپرالاستیک نئو-هوکین، انرژی جنبشی و کار ناشی از بارگذاری یکنواخت گسترده و فشار یکنواخت با نظر گرفتن واکنش بستر الاستیک و اثر میرایی، به دست آمد. از اصل هامیلتون برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیل حاکم سه بعدی استفاده شده است. با استفاده از یکی از روش‌های مجزاسازی با عنوان روش گلرکین، معادله حرکت غیرخطی با مشتقات جزئی در جهت عرضی حرکت به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه زمان تبدیل شده است و از روش مقیاس‌های چندگانه جهت حل معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی و تحلیل تشدیدهای مافوق و مادون هارمونیک استفاده شده است. اثر پارامترهای مختلف سختی و دیگر پارامترهای فیزیکی، هندسی و ساختاری سیستم شامل پارامتر سختی وینکلر، پسترناک و پارامتر تنظیم σ ، بر روی رفتار ارتعاشی غشای مستطیلی هایپرالاستیک در تشدیدهای مختلف مافوق و مادون هارمونیک بررسی شده است و نمودارها و منحنی‌های مختلف پاسخ فرکانسی در تشدیدهای مختلف به دست آمده است. از جمله نتایج این تحقیق به شرح زیر می‌باشد:

• با افزایش نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک در تمام تشدیدها، سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد و کاهش رفتار سخت‌شوندگی بدین معناست که ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت معمولی، کاهش می‌یابد.
 • در تشدیدهای مختلف، غشا در حالت‌های بدون بستر و بستر الاستیک خطی به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشد.

• در تشدیدهای مختلف، افزایش مقدار k_1 (پارامتر سختی خطی وینکلر) و k_2 (پارامتر سختی خطی پسترناک) به ترتیب منجر به

- characteristics analysis of variable density printing moving membrane, in: 2016 Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications (SPAWDA), IEEE, 2016, pp. 407-410.
- [20] J. Wu, M. Shao, Y. Wang, Q. Wu, Z. Nie, Nonlinear vibration characteristics and stability of the printing moving membrane, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 36(3) (2017) 306-316.
- [21] F. Khan, F. Sassani, B. Stoeber, Nonlinear behaviour of membrane type electromagnetic energy harvester under harmonic and random vibrations, *Microsystem Technologies*, 20(7) (2014) 1323-1335.
- [22] X. Sun, J.Z. Zhang, Nonlinear vibrations of a flexible membrane under periodic load, *Nonlinear Dynamics*, 85(4) (2016) 2467-2486.
- [23] C.J. Liu, Z.L. Zheng, X.Y. Yang, H. Zhao, Nonlinear damped vibration of pre-stressed orthotropic membrane structure under impact loading, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 14(1) (2014) 1350055.
- [24] P.B. Gonçalves, R.M. Soares, D. Pamplona, Nonlinear vibrations of a radially stretched circular hyperelastic membrane, *Journal of Sound and Vibration*, 327(1-2) (2009) 231-248.
- [25] R.M. Soares, P.B. Gonçalves, Nonlinear vibrations and instabilities of a stretched hyperelastic annular membrane, *International Journal of Solids and Structures*, 49(3-4) (2012) 514-526.
- [26] R.M. Soares, P.F. Amaral, F.M. Silva, P.B. Gonçalves, Nonlinear breathing motions and instabilities of a pressure-loaded spherical hyperelastic membrane, *Nonlinear Dynamics*, 99(1) (2020) 351-372.
- [27] R.M. Soares, P.B. Gonçalves, Nonlinear vibrations of a rectangular hyperelastic membrane resting on a nonlinear elastic foundation, *Meccanica*, 53(4-5) (2018) 937-955.
- [28] D. Pamplona, D. Mota, Numerical and experimental analysis of inflating a circular hyperelastic membrane over a rigid and elastic foundation, *International Journal of Mechanical Sciences*, 65(1) (2012) 18-23.
- [29] A. Kerr, On the formal development of elastic foundation models, *Ingenieur-Archiv*, 54(6) (1984) 455-464.
- beam at resonance and super-resonance vibrations, In *Key Engineering Materials*, 245 (2003) 97-106.
- [9] A. Selvadurai, Deflections of a rubber membrane, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(6) (2006) 1093-1119.
- [10] G. Saccomandi, R.W. Ogden, *Mechanics and thermomechanics of rubberlike solids*, Springer, New York, 2004.
- [11] I.D. Breslavsky, M. Amabili, M. Legrand, Nonlinear vibrations of thin hyperelastic plates, *Journal of Sound and Vibration*, 333(19) (2014) 4668-4681.
- [12] S. Razavi, A. Shooshtari, Analytical investigation of nonlinear free vibration of Magneto-electro-elastic rectangular thin plate resting on a nonlinear elastic foundation, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 49(2) (2017) 317-324. (In Persian)
- [13] M. Forsat, Investigating nonlinear vibrations of higher-order hyper-elastic beams using the Hamiltonian method, *Acta Mechanica*, 231(1) (2020) 125-138.
- [14] W. Chen, L. Wang, H. Dai, Nonlinear free vibration of hyperelastic beams based on neo-Hookean model, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 20(1) (2020) 2050015.
- [15] G. Varzandian, S. Ziaei, Analytical solution of non-linear free vibration of thin rectangular plates with various boundary conditions based on non-Local theory, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 48(4) (2017). (In Persian)
- [16] J. Zhang, J. Xu, X. Yuan, H. Ding, D. Niu, W. Zhang, Nonlinear vibration analyses of cylindrical shells composed of hyperelastic materials, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 32(4) (2019) 463-482.
- [17] Z. Zhao, X. Yuan, W. Zhang, D. Niu, H. Zhang, Dynamical modeling and analysis of hyperelastic spherical shells under dynamic loads and structural damping, *Applied Mathematical Modelling*, 95 (2021) 468-483.
- [18] H. Koivurova, A. Pramila, Nonlinear vibration of axially moving membrane by finite element method, *Computational Mechanics*, 20(6) (1997) 573-581.
- [19] J.M. Wu, Z. Tian, Y. Wang, X.X. Guo, Nonlinear vibration

- non-linear elastic foundation under periodic loads, *Shock and Vibration*, 13(4-5) (2006) 273-284.
- [34] S. Karimi, H. Ahmadi, K. Foroutan, Nonlinear vibration analysis of rectangular hyperelastic membrane resting on nonlinear elastic foundation using the method of multiple scales, *Iranian Society of Acoustics and Vibration*, December (2019). (In Persian)
- [35] A.E. Green, J.E. Adkins, *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1960.
- [36] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [30] R.D. Chien, C.S. Chen, Nonlinear vibration of laminated plates on a nonli ,near elastic foundation, *Composite structures*, 70(1) (2005) 90-99.
- [31] S. Esfahani, Y. Kiani, M. Eslami, Non-linear thermal stability analysis of temperature dependent FGM beams supported on non-linear hardening elastic foundations, *International Journal of Mechanical Sciences*, 69 (2013) 10-20.
- [32] P. Malekzadeh, A. Setoodeh, Large deformation analysis of moderately thick laminated plates on nonlinear elastic foundations by DQM, *Composite Structures*, 80(4) (2007) 569-579.
- [33] D.M. Santee, P.B. Gonçalves, Oscillations of a beam on a

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. Karimi , H. Ahmadi, K. Foroutan, *Superharmonic and Subharmonic Resonance Analysis of A Rectangular Hyperelastic Membrane Resting on Nonlinear Elastic Foundation Using The Method of Multiple Scales*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 53(8) (2021) 4535-4564.

DOI: [10.22060/mej.2021.18261.6787](https://doi.org/10.22060/mej.2021.18261.6787)



