



## تحلیل تنش حرارتی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

حامد امینی ویدا، حسن شکراللهی\*، رضا بیگ پور

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۲۰

بازنگری: ۱۴۰۰/۰۳/۰۸

پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۲۹

ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۴/۰۵

### کلمات کلیدی:

پوسته استوانه‌ای

کامپوزیت

نانولوله کربنی

تنش حرارتی

روش ریتز

**خلاصه:** در این مقاله، رفتار پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار حرارتی و شرایط تکیه‌گاهی ساده، به روش تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار گرفته است. میدان جابجایی خطی و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول فرض شده است. برای حل معادلات از روش انرژی ریتز و نرم افزار المان محدود آباکوس استفاده شده است. برای تعیین ویژگی‌ها و خواص مکانیکی ماده، تئوری اختلاط با پنج شکل مختلف توزیع نانولوله‌ها به کار رفته است. این توزیع نانولوله‌ها به شکل یکنواخت و شکل‌های  $V$ ،  $A$ ،  $X$  و  $O$ ، با فرض توزیع یکنواخت دما و عدم وجود شار حرارتی تولیدی در پوسته در نظر گرفته شده است. در هر یک از این حالت‌ها، شرایط تکیه‌گاهی یکسان است، اما درجه حرارت، شرایط مرزی حرارتی و مقادیر توابع حجم نانولوله کربنی متفاوت است. نتایج اعتبارسنجی نشان می‌دهد که هر دو روش حل انرژی و المان محدود دارای تطابق خوبی با یکدیگر هستند. نتایج تفاوت رفتار هر یک از مدل‌های ماده توزیع نانولوله‌های کربنی و همچنین تاثیر افزایش درجه حرارت و افزایش تابع حجم نانولوله‌های کربنی بر روی گرادینان حرارت، مولفه‌های تنش و جابجایی نمایش داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش تابع حجم نانولوله کربنی باعث افزایش مقادیر تنش و گرادینان حرارتی شده و از طرف دیگر باعث کاهش جابجایی شده است.

### ۱- مقدمه

مدول الاستیک بوده است. این پژوهش توسط آنوماندا و گیبسون صورت گرفته است [۱]. بنت و همکاران [۲] در یک پژوهش در سال ۲۰۰۷، خصوصیات حرارتی کامپوزیت پلیمر-نانولوله کربنی تک لایه را ارائه کردند. در برخی از مقالات با استفاده از شبیه سازی دینامیکی ملکولی<sup>۴</sup>، خصوصیات الاستیک ماده کامپوزیت پلیمری تقویت شده با نانولوله کربنی تخمین زده شده است [۳-۵].

در سال ۲۰۱۲ یاس و حشمتی [۶] در یک پژوهش خصوصیات ارتعاشاتی تیر نانو کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره<sup>۵</sup> تحت بار حرکتی مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این مطالعه تئوری تیر تیموشنکو و تئوری تیر اویلر-برنولی برای محاسبات دینامیکی تیر مورد استفاده قرار گرفته است. روش اشلیبی-موری-

ماده کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی<sup>۱</sup> تاکنون به صورت کلی مورد بررسی قرار گرفته است. این ماده در ساده‌ترین صورت، می‌تواند از یک ماتریس (رزین) پلیمری تشکیل شده باشد که برای تقویت آن از نانولوله‌های کربنی استفاده شده است. این ماده می‌تواند به صورت تک لایه<sup>۲</sup> و یا به صورت چند لایه<sup>۳</sup> ساخته شده باشد. در سال ۲۰۰۶ یک تحقیق بر روی خصوصیات ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از یک مدل میکرو مکانیک انجام شده است که نتیجه این پژوهش یک مفهوم کلی برای تخمین

- 1 Carbon Nanotube Reinforced Composite (CNTRC)
- 2 Single Wall (SW)
- 3 Multi Wall (MW)

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: hshokrollahi@khu.ac.ir

4 Molecular Dynamics (MD)

5 Single-Wall Carbon Nanotubes (SWCNT)



تاناکا<sup>۱</sup> بر اساس فرض الیاف معادل برای تخمین خواص مواد تیر به کار گرفته شده است. در این پژوهش با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت با فرض تئوری تیر تیموشنکف بدست آمده است. روش حل روش المان محدود برای حل معادلات حرکت استفاده شده است.

در سال ۲۰۱۳ شن و ایکسانگ [۷] رفتار ارتعاشات با دامنه بزرگ، خمش غیر خطی و پس کمانش حرارتی تیر نانوکامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره را که بر روی فندانسیون الاستیک قرار گرفته است، مورد بررسی قرار داده‌اند. این پژوهش در دمای محیط انجام شده است. در این پژوهش دو نوع از نانولوله‌های کربنی ارائه شده که به صورت یک جهته<sup>۲</sup> و مواد طبقه‌بندی شده تابعی<sup>۳</sup> است و توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت تیر طبقه بندی شده است و خواص مواد بر اساس یک مدل میکرومکانیکال تخمین زده شده است. در این مطالعه معادلات حرکت بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا<sup>۴</sup> استخراج شده است. نتایج عددی به خوبی نشان می‌دهد که تیر با ماده کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با مقدار متوسط تابع حجم الزاماً دارای فرکانس غیرخطی با مقدار متوسط نیست.

علی بیگلو و لیو [۸] در سال ۲۰۱۳ به مطالعه بر روی رفتار خمش صفحه دایره‌ای با تکیه‌گاه ساده تحت بار ترمومکانیکال پرداخته‌اند، این کار با انجام یک تجزیه تحلیل ترموالاستیک بر روی ورق با ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با تئوری الاستیسته انجام شده است. علی بیگلو [۹] در سال ۲۰۱۳ آنالیز استاتیکی ورق کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی که توسط دو لایه پیزوالکتریکی پوشش داده شده را مطالعه کرده است. علی بیگلو [۱۰] در سال ۲۰۱۶ حل الاستیک ورق دایره‌ای با ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار مکانیکی-حرارتی را بررسی کرده است. تعیین خواص ماده از قانون اختلاط استفاده شده است. تعیین توزیع دما از یک تابع سری فوریه که هماهنگی خوبی با شرایط مرزی دمایی دارد به کار رفته است. از تئوری‌های ورق برای معادلات پایه استفاده شده است.

مهار و پاندا [۱۱] در سال ۲۰۱۶ آنالیز ترموالاستیک ورق با ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مورد بررسی قرار داده‌اند.

- 1 Eshelby-Mori-Tanaka
- 2 Unidirectional (UD)
- 3 Functionally Graded (FG)
- 4 Higher Order Shear Deformation Theory (HSDT)

تعیین خواص ماده از قانون اختلاط استفاده شده است و همچنین تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا برای تعیین میدان جابجایی به کار رفته است. زغال و فریخا [۱۲] در سال ۲۰۱۸ رفتار استاتیکی صفحه دایره‌ای با ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این پژوهش از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول<sup>۵</sup> برای تعیین میدان جابجایی استفاده شده است و قانون اختلاط برای بدست آوردن خواص ماده کامپوزیتی به کار رفته است.

جیاراج و راجکومار [۱۳] در سال ۲۰۱۳ رفتار استاتیکی ورق مستطیلی کامپوزیت تقویت شده با نانولوله کربنی را تحت بارگذاری حرارتی غیریکنواخت مورد بررسی قرار داده‌اند. در این پژوهش توزیع نانولوله‌های کربنی به صورت عملکردی درجه بندی شده FG-V، FG-O و FG-X بوده است و از روش المان محدود و نرم افزار تجاری انسیس برای حل مساله استفاده شده است و نتایج خروجی با نتایج دیگر مقالات مرتبط مورد مقایسه قرار گرفته است.

در سال ۲۰۱۱ وانگ و شن [۱۴]، در یک پژوهش بر روی ارتعاشات غیر خطی صفحه‌ای نانولوله‌های کربنی کامپوزیتی تک جداره که بر روی فندانسیون الاستیک در دمای محیط قرار گرفته است مطالعه کرده‌اند. در این پژوهش توزیع نانولوله‌های کربنی به دو صورت یک طرفه و عملکردی درجه بندی شده در راستای ضخامت است. خواص ماده کامپوزیت توسط مدل میکرومکانیکی تخمین زده شده است و معادله حرکت بر پایه تغییر شکل برشی مرتبه بالا فرض شده است. در این پژوهش تاثیرات دما در معادلات درج شده است و فرض شده است که خواص مواد کامپوزیت وابسته به دما است. نتایج عددی به خوبی نمایش داده است که فرکانس طبیعی در حالت خطی و غیر خطی با افزایش تابع حجم افزایش می‌یابد. همچنین این نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دما و یا با کاهش سفتی فوندانسیون، فرکانس طبیعی کاهش یافته ولی نرخ فرکانس طبیعی غیر خطی نسبت به حالت خطی افزایش یافته است. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که حالت عملکردی درجه بندی شده تأثیر چشم‌گیری بر روی ارتعاشات غیر خطی صفحه از جنس ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی دارد.

شن و ایکسانگ [۱۵] در سال ۲۰۱۵ در یک مطالعه به بررسی رفتار بعدازکمانش حرارتی صفحه دایره‌ای نانوکامپوزیتی پرداخته‌اند.

5 First Order Shear Deformation Theory (FSDT)

دیفرانسیلی تعمیم یافته<sup>۲</sup> در راستای ضخامت و در جهت طولی و از توابع مثلثاتی در راستای زوایه استفاده شده است. در این پژوهش تأثیر پارامترهایی همچون تقویت کننده‌ها، تابع حجم نانولوله‌های کربنی و انواع توزیع نانولوله‌های کربنی بر روی رفتار خمشی پوسته استوانه کامپوزیتی بررسی شده است. نتایج تنش‌های الاستیک بدست آمده از الاستیسیته سه بعدی با نتایج بدست آمده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم در نواحی مختلف هندسه استوانه و با در نظر گرفتن پارامترهای تقویت کننده، مقایسه شده است.

نین و تین [۲۰] در سال ۲۰۱۹ در پژوهشی به بررسی ارتعاشات پوسته استوانه نانوکامپوزیت با جریان سیال داخلی پرداخته‌اند. در این مطالعه روابط بر پایه روابط غیرخطی هندسی ون-کارمن و تئوری پوسته‌ی نازک کلاسیک بوده است. آنالیز ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی، انتقال سیال با لایه پیزوالکتریکی در دمای محیط با روش تحلیلی صورت گرفته است. حالت یک طرفه و عملکردی درجه بندی شده برای توزیع نانولوله‌های کربنی در جهت ضخامت پوسته استوانه به کار رفته است. جریان سیال درون پوسته به صورت غیرویسکوز، غیر تراکم پذیر، ایزوتروپیک و غیرچرخشی فرض شده است. لایه پیزوالکتریکی در قسمت بیرونی پوسته و به عنوان لایه‌ای فعال قرار گرفته است. در این مطالعه فرکانس طبیعی و پاسخ ارتعاشات غیرخطی مطالعه شده است. علاوه بر این، تأثیرات تابع حجم نانولوله کربنی، لایه پیزوالکتریکی فعال، دمای محیط، پارامترهای هندسی و سرعت جریان سیال به صورت دقیق تحلیل و آنالیز شده است.

در سال ۲۰۱۷ علی بیگلو و پاشا زنوسی [۲۱] به بررسی رفتار پیزوالکتریکی پوسته استوانه با ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی که با لایه‌های پیزوالکتریک پوشیده شده پرداخته‌اند. در این پژوهش پوسته تحت بارهای مکانیکی، حرارتی و ولتاژ الکتریکی قرار گرفته است. در این مطالعه از شبیه‌سازی الاستیسیته-الکتریکی-حرارتی استفاده شده است و همچنین توزیع نانولوله‌های کربنی به صورت یک طرفه، FG-V، FG-A، FG-X و FG-O ارائه شده است. علی بیگلو [۲۲] در سال ۲۰۱۶ با استفاده از آنالیز ترموالاستیک به بررسی رفتار ورق استوانه‌ای شکل با ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با پوشش لایه پیزوالکتریکی حسگر و لایه فعال پرداخته است. علی بیگلو [۲۳] در سال ۲۰۱۴ با شبیه‌سازی

در این پژوهش صفحه دایره‌ای بر روی فندانسیون الاستیک قرار گرفته است و همچنین صفحه تحت تغییرات حرارتی غیریکنواخت قرار گرفته است. ماده صفحه دایره‌ای به صورت کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی است و توزیع نانولوله‌های کربنی به دو صورت یک طرفه و FG در راستای ضخامت است. خواص مواد با استفاده از یک مدل میکرومکانیکی و نتایج حل دینامیک ملکولی تخمین زده شده است. معادلات حاکم بر پایه تغییر شکل برشی مرتبه بالا و به صورت غیرخطی فرض شده است. نتایج به خوبی تأثیرات چشم‌گیر تابع حجم نانولوله‌های کربنی و سفتی فندانسیون بر روی رفتار بعدازکمانش حرارتی صفحه استوانه‌ای از جنس ماده کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را نمایش می‌دهد.

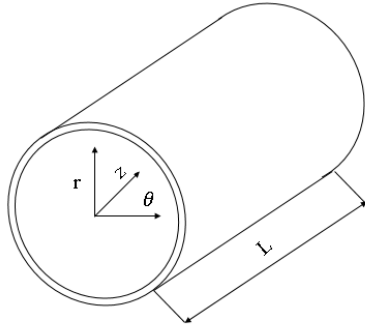
شن و ایکسیانگ [۱۶] در سال ۲۰۱۳ رفتار بعداز کمانش پوسته استوانه‌ای کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در دمای محیط که تحت بار ترکیبی محوری و شعاعی قرار گرفته است را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این پژوهش از یک کامپوزیت تک جداره استفاده شده است. همچنین، شن [۱۷] در سال ۲۰۱۴ بررسی جامعی بر روی رفتار بعداز کمانش پیچشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در دمای محیط انجام داده است.

لیو و همکاران [۱۸] در سال ۲۰۱۵ در یک مطالعه مروری، به بررسی پژوهش‌های انجام شده در حوزه مواد کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی پرداخته‌اند و نتایج ارائه شده تا سال ۲۰۱۵ پرداخته‌اند. در این مطالعه خواص ماده کامپوزیت، رفتار استاتیکی، رفتار دینامیکی و رفتار ارتعاشاتی برای اشکال تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها ارائه شده است.

جعفری مهرآبادی و سبحانی آراغ [۱۹] در سال ۲۰۱۴ آنالیز استاتیکی رفتار خمشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را بررسی کرده‌اند. در این مطالعه، پوسته تحت بارهای مکانیکی قرار گرفته است و خواص مواد کامپوزیت با استفاده از مدل میکرومکانیکی دو متغیره و روش اشلیبی-موری-تاناکا بدست آمده است. فرمول بندی خمش بر پایه تئوری الاستیسیته سه بعدی خطی در محدوده کرنش کوچک بنا شده است. علاوه بر این برای بدست آوردن میدان جابجایی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم<sup>۱</sup> استفاده شده است. برای حل این معادلات روش حل کوادراتور

2 Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)

1 Third-Order Shear Deformation Plate Theory (TSDT)



شکل ۱. هندسه استوانه از جنس ماده کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

Fig. 1. Geometry of composite cylinder reinforced with carbon nanotubes

کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شده است. معادله (۱) بیانگر میدان جابجایی پوسته استوانه است.

$$\begin{aligned} U_z(z, r) &= u_z(z) + r\beta_1(z) \\ U_r(z, r) &= u_r(z) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن،  $u_z$  و  $u_r$  مربوط به جابجایی در راستای طولی و شعاعی پوسته استوانه‌ای هستند.  $\beta_1$  مربوط به ترم چرخش حول محور اصلی طولی می‌باشد.

ارتباط کرنش و جابجایی در معادله (۲) نمایش داده شده است که مولفه‌های غیر صفر کرنش، شامل کرنش طولی، کرنش محیطی و یک کرنش برشی در صفحه شعاعی و طولی می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz}^o \\ \varepsilon_{\theta\theta}^o \\ \gamma_{rz}^o \end{Bmatrix} + r \begin{Bmatrix} k_{zz} \\ k_{\theta\theta} \\ k_{rz} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

که در معادله (۲) داریم،

$$\varepsilon^o = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz}^o \\ \varepsilon_{\theta\theta}^o \\ \gamma_{rz}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du_z}{dz} \\ \frac{u_r}{r} \\ \frac{du_r}{dz} + \beta_1 \end{Bmatrix}; \quad k = \begin{Bmatrix} k_{zz} \\ k_{\theta\theta} \\ k_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d\beta_1}{dz} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

## ۲-۲ روابط تنش-کرنش

برای بدست آوردن روابط تنش، ماتریس سفتی لازم است. ماده

سه‌بعدی ترموالاستیک رفتار ورق کامپوزیت تقویت شده با نانولوله کربنی پوشیده شده با لایه پیزوالکتریکی حسگر و لایه فعال را بررسی کرده‌است. علی بیگلو [۲۴] همچنین، در سال ۲۰۱۳ حل الاستیک پوسته استوانه‌ای با ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی که با لایه پیزوالکتریکی سنسور و لایه فعال پوشیده شده‌است را مورد بررسی قرار داده‌است.

باتوجه به مرور مقالات که در این بخش مورد بررسی قرار گرفت، در کارهای تحقیقاتی در حوزه سازه‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، عمدتاً به رفتار ارتعاشی این نوع کامپوزیت‌ها پرداخته شده است و در کارهای اندکی که تحلیل‌های استاتیکی ارائه شده‌است، جامعیت تحلیل در این بخش چندان مشاهده نمی‌شود. هدف پژوهش حاضر برطرف کردن این خلأ تا حد ممکن و ارائه نتایج قابل کاربرد در طراحی این سازه‌ها است. در این مقاله، با استفاده از حل تحلیلی و حل عددی رفتار پوسته استوانه‌ای از جنس ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله کربنی تحت شرایط حرارتی بررسی شده‌است. در این پژوهش از پنج حالت مدل توزیع نانولوله کربنی استفاده شده‌است، خواص ماده کامپوزیتی با استفاده از تئوری اختلاط استخراج شده‌است. میدان جابجایی بر حسب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول می‌باشد. انتقال حرارت در پوسته به صورت پایدار بوده‌است و شعاع داخلی و خارجی تحت دمای مشخص قرار گرفته‌است.

## ۲- معادلات حاکم

در این مطالعه یک پوسته نازک استوانه‌ای با سیستم مختصات استوانه‌ای مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده‌است. ماده تشکیل دهنده این کامپوزیت از یک رزین پلیمری و نانولوله‌های کربنی تشکیل شده‌است. شعاع داخلی و خارجی تحت درجه حرارت خاصی قرار گرفته‌اند. باتوجه به اینکه استوانه کامل است و نیروی ایجاد شده متقارن و شرایط مرزی و خواص ماده نیز متقارن است می‌توان از فرض تقارن محوری استفاده کرد. در این حالت، جابجایی در راستای زاویه‌ای صفر است و تنش دارای دو مؤلفه طولی و یک مؤلفه برشی بوده و ماتریس سفتی ماده، ماتریس سه در سه خواهد شد.

## ۲-۱ میدان جابجایی و کرنش

برای بدست آوردن میدان جابجایی برای پوسته استوانه‌ای

$$\begin{Bmatrix} N_{zz} \\ N_{\theta\theta} \\ M_{zz} \\ M_{\theta\theta} \\ Q_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & B_{12} & B_{22} & 0 \\ B_{11} & B_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ k_{zz} \\ 0 \\ \gamma_{rz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{zz}^T \\ N_{\theta\theta}^T \\ M_{zz}^T \\ M_{\theta\theta}^T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ضرایب  $A$ ،  $B$  و  $C$  ضرایب مربوط به انتگرال خصوصیات مادی است که به صورت زیر بدست می‌آید:

$$[A_{ij} \ B_{ij} \ C_{ij}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1 \ r \ r^2] Q_{ij} dr \quad (10)$$

پارامترهای  $N_{ii}^T$  و  $M_{ii}^T$  به ترتیب نشانگر نیرو و ممان حرارتی است که به صورت معادله (۱۱) نشان داده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} N_{zz}^T & M_{zz}^T \\ N_{\theta\theta}^T & M_{\theta\theta}^T \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{zz} \\ \alpha_{\theta\theta} \end{bmatrix} [1 \ r] (T - T_0) dr \quad (11)$$

### ۲-۳- روابط مربوط به فرمول بندی خواص مواد

روابط مربوط به خواص ماده از قانون اختلاط استخراج شده و به صورت زیر نمایش داده شده‌است. این روابط مربوط به مدول الاستیسته، مدول برشی، ضرایب پوسون و ضریب انبساط حرارتی است [۲۱ و ۲۵]. خواص ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی ترکیبی از خواص مواد ماتریس و خواص نانولوله‌های کربنی است.

$$E_{zz} = \eta_1 V_{CNT} E_{zz}^{CNT} + V_m E_m \quad (12)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{\theta\theta}} = \frac{V_{CNT}}{E_{\theta\theta}^{CNT}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (13)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{z\theta}} = \frac{V_{CNT}}{G_{z\theta}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (14)$$

$$v_{12} = V_{CNT} v_{12}^{CNT} + V_m v_m \quad (15)$$

$$\alpha_z = \frac{V_{CNT} E_{zz}^{CNT} \alpha_z^{CNT} + V_m E_m \alpha_m}{E_{zz}^{CNT} V_{CNT} + V_m E_m} \quad (16)$$

$$\alpha_\theta = (1 + v_{12}^{CNT}) V_{CNT} \alpha_\theta^{CNT} + (1 + v_m) V_m \alpha_m - v_{12} \alpha_z \quad (17)$$

کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی دارای خواص مکانیکی مختلف در سه راستای مختصات است، همچنین نیاز به ضریب انبساط حرارتی در دو راستای اصلی است. می‌توان رابطه تنش-کرنش را به صورت معادله (۴) نمایش داد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} - (T - T_0) \begin{bmatrix} \alpha_z \\ \alpha_\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

مقادیر مؤلفه‌های ماتریس سفتی در معادله (۵) نمایش داده شده است. این مقادیر به خصوصیات مدول الاستیک، ضریب پوسون و مدول برشی ماده کامپوزیتی وابسته است.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{zz}}{1 - v_{12} v_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_{\theta\theta}}{1 - v_{12} v_{21}} \\ Q_{55} &= G_{zr} \\ Q_{12} &= \frac{E_{zz} v_{21}}{1 - v_{12} v_{21}} \end{aligned} \quad (5)$$

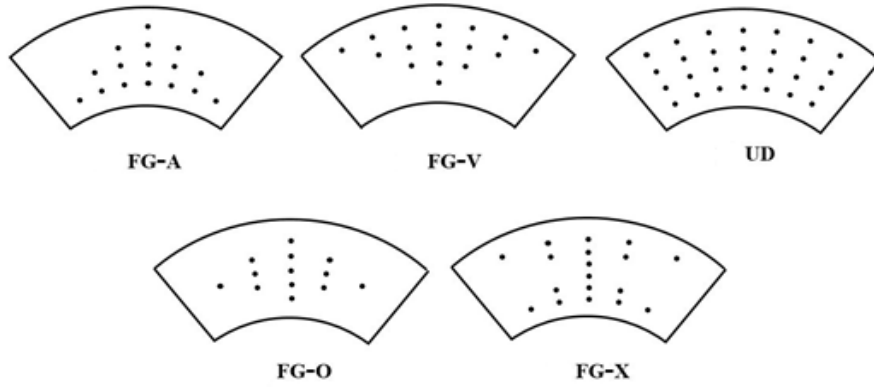
بعد از بدست آمدن روابط تنش، می‌توان روابط نیرو و ممان را نیز بر اساس تنش‌ها محاسبه کرد. اهمیت این موضوع در روش حل انرژی نمایان شده‌است. روابط (۶) تا (۸) مربوط به روابط نیرو و ممان است. این روابط باعث ساده‌تر شدن روابط انرژی می‌شود، به گونه‌ای که در روابط انرژی باعث ساده شده انتگرال در راستای شعاع شده و حجم محاسبات کاهش یافته و باعث دقیق‌تر شدن روند حل می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} N_{zz} \\ N_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix} dr \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{zz} \\ M_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix} r dr \quad (7)$$

$$Q_{rz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k_s \sigma_{rz} dr \quad ; \quad k_s = \frac{\pi^2}{12} \quad (8)$$

ضریب  $k_s$  در معادله (۸) مربوط به ضریب اصلاح تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است. روابط مربوط به نیرو و ممان‌ها را می‌توان به صورت ماتریسی بازنویسی کرد:



شکل ۲. حالت‌های مختلف توزیع نانولوله‌های کربنی

Fig. 2. Different types of distribution of carbon nanotubes

تابع حجم نانولوله‌های کربنی ( $V_{CNT}$ ) به شکل توزیع آن‌ها بستگی دارد. خواص ماده ارائه شده در قسمت قبل وابسته به تابع حجم نانولوله‌های کربنی و تابع حجم ماتریس پلیمری ( $V_m$ ) است. شکل ۲ نشان دهنده حالت‌های مختلف مربوط به تابع حجم نانولوله‌های کربنی است که شامل پنج توزیع مختلف برای نانولوله‌های کربنی است [۲۱].

توابع حجم مربوط به نانولوله‌ها در پنج حالت مختلف توزیع آن‌ها در ادامه ارائه شده‌است. روابط (۱۸) تا (۲۲) مربوط به این توابع حجم نانولوله‌های کربنی می‌باشد. با تعیین شدن تابع حجم نانولوله‌های کربنی، تابع حجم ماتریس پلیمری نیز با استفاده از معادله (۲۳) محاسبه می‌شود.

$$V_{CNT} = V_{CNT}^* ; \quad \text{UD} \quad (18)$$

$$V_{CNT} = 2V_{CNT}^* \left( 1 - \frac{r-r_1}{h} \right) ; \quad \text{FG-A} \quad (19)$$

$$V_{CNT} = 2V_{CNT}^* \left( 1 + \frac{r-r_o}{h} \right) ; \quad \text{FG-V} \quad (20)$$

$$V_{CNT} = 2V_{CNT}^* \left( 1 - \frac{2(r-r_1)}{h} \right) ; \quad r \leq r_i + \frac{h}{2} \quad \text{FG-X} \quad (21)$$

$$V_{CNT} = 2V_{CNT}^* \left( 1 - \frac{2(r-r_o)}{h} \right) ; \quad r \geq r_i + \frac{h}{2}$$

$$V_{CNT} = 2V_{CNT}^* \left( \frac{2(r-r_1)}{h} \right) ; \quad r \leq r_i + \frac{h}{2} \quad \text{FG-O} \quad (22)$$

$$V_{CNT} = 2V_{CNT}^* \left( \frac{2(r-r_o)}{h} \right) ; \quad r \geq r_i + \frac{h}{2}$$

$$V_{CNT} + V_m = 1 \quad (23)$$

#### ۲-۴- انتقال حرارت

در این پژوهش استوانه تحت گرادیان دمایی قرار گرفته و همین موضوع باعث ایجاد جابجایی و تنش می‌شود. تغییرات دما در استوانه فقط در راستای شعاعی بوده و در دو راستای بعدی هیچ‌گونه گرادیان حرارتی وجود ندارد. معادله انتقال حرارت در حالت پایدار برای دو حالت یک طرفه و عملکردی درجه بندی شده در روابط (۲۴) و (۲۵) ارائه شده است.

$$\frac{1}{r} k_r \frac{\delta}{\delta r} \left( r \frac{\delta T}{\delta r} \right) = 0 \quad \text{UD} \quad (24)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} \left( r k_r \frac{\delta T}{\delta r} \right) = 0 \quad \text{FG-A} \quad (25)$$

برای بدست آوردن گرادیان حرارتی نیاز به ضریب انتقال حرارت می‌باشد، ضریب انتقال حرارت در روابط (۲۶) تا (۳۱) برای هر پنج حالت توزیع نانولوله کربنی نمایش داده شده است. حالت FG-X و FG-O متفاوت از دیگر ضرایب انتقال حرارت است و دارای دو رابطه



مدد زده شده در مورد جابجایی شروع شده و سپس با جایگذاری این میدان جابجایی در روابط کرنش-جابجایی، مولفه‌های کرنش بدست می‌آید و سپس همین روابط در مولفه‌های ممان و نیرو قرار داده می‌شود. در مرحله بعد، روابط حاصل در توابع انرژی قرار داده می‌شود.

توابع مربوط به انرژی سیستم از سه مؤلفه تشکیل می‌شود که این مولفه‌ها مربوط به انرژی پتانسیل  $U$ ، انرژی جنبشی  $T$  و کار انجام‌شده توسط نیروی خارجی  $W$  است.

$$G = U + W - T \quad (32)$$

در این معادله،  $G$  مربوط به انرژی کل سیستم است. انرژی پتانسیل ناشی از کرنش ایجاد شده در سیستم با معادله (۳۳) ارائه می‌شود.

$$U = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{z\theta} \gamma_{z\theta} + k_s \sigma_{zr} \gamma_{zr} + k_s \sigma_{\theta r} \gamma_{\theta r} \right) R dr d\theta dz \quad (33)$$

معادله (۳۳) با استفاده از روابط نیروها و ممان‌ها قابل ساده‌سازی به صورت معادله (۳۴) است.

$$U = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( N_{zz} \varepsilon_{zz}^0 + N_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta}^0 + N_{z\theta} \varepsilon_{z\theta}^0 + M_{zz} k_{zz} + M_{\theta\theta} k_{\theta\theta} + M_{z\theta} k_{z\theta} + Q_{zr} \gamma_{zr} + Q_{\theta r} \gamma_{\theta r} \right) r d\theta dz \quad (34)$$

معادله (۳۴) مربوط به حالت کلی است که مدل به صورت غیر متقارن محوری است و سیستم دارای مؤلفه جابجایی در راستای زوایه می‌باشد. در حالتی که مدل به صورت متقارن محوری فرض شود، معادله (۳۴) تغییر می‌کند و چند مؤلفه آن حذف می‌شود؛ مطابق معادله (۳۵).

$$U = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( N_{zz} \varepsilon_{zz}^0 + N_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta}^0 + M_{zz} k_{zz} + Q_{zr} \gamma_{zr} \right) r d\theta dz \quad (35)$$

با توجه به عدم وجود بارگذاری خارجی در مساله، کار انجام شده برابر صفر است، از سوی دیگر به دلیل استاتیکی بودن مساله و عدم وابستگی به زمان، جمله انرژی جنبشی برابر صفر است. در انتها، تنها انرژی موجود در سیستم، انرژی پتانسیل می‌باشد. در این مرحله با جایگذاری توابع جابجایی در روابط کرنش-جابجایی، روابط نیرو و ممان‌ها کامل می‌شود و با قرار دادن آن‌ها در معادله (۳۶)، انرژی پتانسیل کامل شده و با انجام انتگرال‌گیری نسبت به مؤلفه طولی و زاویه‌ای، انرژی پتانسیل استخراج می‌شود. توابع فرضی در این

می‌باشد؛ یکی از روابط مربوط به قسمت اول ضخامت و رابطه دوم مربوط به قسمت دوم ضخامت است. دلیل این موضوع به خاطر تغییر شکل توزیع نانولوله‌های کربنی از شعاع میانی پوسته است [۲۱].

$$\frac{k_r}{k_m} = 1 + D_r ; \quad \text{UD} \quad (26)$$

$$\frac{k_r}{k_m} = 1 + 2D_r \left( 1 - \frac{r-r_1}{h} \right) ; \quad \text{FG-A} \quad (27)$$

$$\frac{k_r}{k_m} = 1 + 2D_r \left( \frac{r-r_1}{h} \right) ; \quad \text{FG-V} \quad (28)$$

$$\frac{k_r}{k_m} = 1 + 2D_r \left( 1 - \frac{2(r-r_1)}{h} \right) ; r \leq r_i + \frac{h}{2} \quad \text{FG-X} \quad (29)$$

$$\frac{k_r}{k_m} = 1 + 2D_r \left( 1 - \frac{2(r-r_0)}{h} \right) ; r \geq r_i + \frac{h}{2}$$

$$\frac{k_r}{k_m} = 1 + 2D_r \left( \frac{2(r-r_1)}{h} \right) ; r \leq r_i + \frac{h}{2} \quad \text{FG-O} \quad (30)$$

$$\frac{k_r}{k_m} = 1 + 2D_r \left( \frac{2(r-r_0)}{h} \right) ; r \geq r_i + \frac{h}{2}$$

$$D_r = \frac{PV_{CNT}^*}{3} \left( \frac{\frac{k_{r,CNT}}{k_m}}{P + \frac{2a_k}{d} \left( \frac{k_{r,CNT}}{k_m} \right)} \right) \quad (31)$$

### ۳- روش حل

روش حل استفاده شده در این پژوهش روش حل انرژی است، در این روش با ارائه یک میدان جابجایی که شرایط مرزی را ارضا می‌کند، مولفه‌های کرنش و تنش محاسبه می‌شود. این جملات می‌تواند از یک چند جمله ساده یا یک چند جمله مثلثاتی تشکیل شده باشد اما این چند جمله‌ای نباید دارای جملات زیادی باشد، زیرا با افزایش تعداد جملات حجم محاسبات بسیار بالا رفته و در مقابل دقت نتایج افزایش چشم‌گیری نمی‌یابد و در مواردی باعث کاهش دقت نتایج نیز می‌شود، به همین دلیل باید در انتخاب تعداد جملات دقت شود.

در این پژوهش از یک چند جمله مثلثاتی استفاده شده است که دارای یک ضریب مجهول است که برای بدست آوردن این ضریب مجهول از روش انرژی استفاده شده است. این روند با ارائه جملات

پژوهش در معادله (۳۶) نمایش داده شده است.

$$\begin{aligned} u_z(z) &= a_m \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \\ u_r(z) &= b_m \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \\ \beta_z(z) &= c_m \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \end{aligned} \quad (36)$$

توابع جابجایی معادله (۳۶)، از نوع مثلثاتی با ضرایب مجهول  $a$ ،  $b$  و  $c$  هستند که این ضرایب مجهول با استفاده از روش انرژی بدست می‌آید. توابع مربوط به جابجایی، معادله (۳۶) در روابط کرنش-جابجایی (۳) قرار داده می‌شود. نتیجه حاصل شده در معادله (۳۷) نمایش داده شده است.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}^0 &= a_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 &= b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \\ \gamma_{rz}^0 &= b_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right) + c_m \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \\ k_{zz} &= -c_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \end{aligned} \quad (37)$$

روابط کرنش جابجایی (۳۷) در روابط نیرو و ممان (۹) قرار داده شده و روابط کامل شده نیرو و ممان در معادله (۳۸) ارائه شده است.

$$\begin{aligned} N_{zz} &= A_{11} \left(a_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) + \\ &A_{12} \left(b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) + \\ &B_{11} \left(-c_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) - N_{zz}^T \\ N_{\theta\theta} &= A_{12} \left(a_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) + \\ &A_{22} \left(b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) + \\ &B_{12} \left(-c_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) - N_{\theta\theta}^T \\ M_{zz} &= B_{11} \left(a_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) + \\ &B_{12} \left(b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) + \\ &C_{11} \left(-c_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) - M_{zz}^T \\ M_{\theta\theta} &= B_{12} \left(a_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) + \\ &B_{22} \left(b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) + \\ &C_{12} \left(-c_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) - M_{\theta\theta}^T \\ Q_{rz} &= A_{55} \left(-c_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \end{aligned} \quad (38)$$

با قرار دادن روابط نیرو و ممان، معادله (۳۸)، و روابط کرنش جابجایی، معادله (۳۷)، در رابطه انرژی پتانسیل، معادله (۳۵)، انرژی پتانسیل کامل می‌شود. انرژی پتانسیل در معادله (۳۹) ارائه شده است.

$$U = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[ \begin{aligned} &A_{11} \left(a_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right)^2 + \\ &A_{12} \left(b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \left(a_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \\ &+ B_{11} \left(-c_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \left(b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) - \\ &N_{zz}^T \left(b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \\ &+ A_{12} \left(a_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \left(b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) + \\ &A_{22} \left(b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right)^2 \\ &+ B_{12} \left(-c_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \left(b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) - \\ &N_{\theta\theta}^T \left(b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \\ &+ B_{11} \left(a_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \left(-c_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \\ &+ B_{12} \left(b_m \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \left(-c_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \\ &+ C_{11} \left(-c_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right)^2 - M_{zz}^T \left(-c_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right) \\ &+ A_{55} \left(b_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right) + c_m \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right)\right)^2 \end{aligned} \right] r d\theta dz \quad (39)$$

سپس از معادله انرژی پتانسیل نسبت به ضرایب مجهول توابع جابجایی، مشتق گرفته می‌شود (مطابق معادله (۴۰)).

$$\frac{\partial U}{\partial a_m} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial b_m} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial c_m} = 0 \quad (40)$$

معادله (۴۰)، یک دستگاه معادلات خطی برحسب ضرایب مجهول است که با حل آن، ضرایب مجهول و در نهایت توابع جابجایی حاصل می‌شود. لازم به ذکر است که به دلیل حجم بالای معادلات حاصل، این معادلات در اینجا ارائه نشده است. با بدست آمدن این توابع جابجایی، کرنش‌ها و تنش‌ها استخراج می‌شود. در نهایت می‌توان برای هر نقطه از استوانه، نتایج تنش، جابجایی و درجه حرارت را مشخص کرد.

روش حل المان محدود برای اعتبار سنجی روش حل انرژی استفاده شده است. این کار در نرم افزار آباکوس انجام شده است که در بخش نتایج، به آن اشاره می‌شود. لازم به ذکر است که برای حل مساله در این نرم افزار، نیاز به یک سابروتین در قسمت تعریف خواص ماده است که در این پژوهش، این سابروتین در نرم افزار ویژوال استودیو نوشته شده است.



جدول ۱. نتایج مربوط به همگرایی تعداد جملات روش انرژی

Table 1. The convergence results based on the number of the energy method terms

تعداد جملات	یک جمله	سه جمله	پنج جمله	هفت جمله	نه جمله	یازده جمله
$\sigma_{zz}$	-۲۱۶/۵	-۳۰۴/۶	-۳۶۱/۹	-۳۹۷/۰	-۴۱۴/۰	-۴۲۶/۰
درصد اختلاف	-	۴۰/۶	۱۸/۸	۹/۷	۴/۳	۲/۹
$\sigma_{\theta\theta}$	-۰/۳۲۱	-۰/۴۱۹	-۰/۴۶۶	-۰/۴۹۰	-۰/۵۰۷	-۰/۵۱۹
درصد اختلاف	-	۳۰/۵	۱۱/۲	۵/۱	۳/۵	۲/۴
$u_r$	۰/۲۷۳	۰/۳۳۳	۰/۳۵۸	۰/۳۷۷	۰/۳۸۹	۰/۳۹۸
درصد اختلاف	-	۲۲/۰	۷/۵	۵/۳	۳/۲	۲/۳

### ۳- نتایج و بحث

#### ۳-۱ همگرایی و اعتبارسنجی روش حل

پارامتریک نیز، تمام مسائل با هر دو روش حل انرژی و المان محدود حل و مقایسه شده است. شکل ۳ مربوط به نتایج توزیع گرادیان حرارتی، تنش‌های حرارتی و جابجایی در راستای شعاعی است.

همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است، برای نمودار (الف) که مربوط به توزیع گرادیان حرارتی است، اختلافات بسیار ناچیز بوده و حداکثر اختلاف کمتر از دو درصد است. در نمودار (ب)، نتایج مربوط به توزیع تنش حرارتی دارای اختلاف کمتر از ۱۰ درصد است و نتایج در شعاع داخلی دارای اختلاف ۵ درصدی است. این اختلاف ۵ تا ۱۰ درصدی بین دو روش حل به دلیل اختلاف حل این دو تئوری حل است. زیرا در روش حل المان محدود، به صورت سه بعدی مسئله آنالیز می‌شود، اما در تئوری پوسته، تنش در راستای شعاعی برابر با صفر فرض می‌شود. در نمودارهای (ج) و (د) هم اختلاف دو روش حل کمتر از ۱۰ درصد است. در مجموع، اختلاف دو روش با توجه به فرضیات در نظر گرفته شده در روش پیشنهادی در این مقاله، قابل قبول است.

#### ۳-۲ مطالعات پارامتریک

در این بخش، سه موضوع اصلی مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ موضوع اول بررسی تفاوت‌های بین رفتار انواع مدل‌های ماده توزیع نانولوله‌های کربنی است. موضوع دوم بررسی تأثیر افزایش درجه حرارت بر رفتار انواع مدل‌های ماده است. در آخر بررسی تأثیر افزایش تابع حجم نانولوله کربنی بر روی نتایج و رفتار هر پنج حالت مدل ماده توزیع نانولوله‌های کربنی می‌باشد. در بخش زیر هر سه موضوع به صورت مجزا بررسی شده است، که در هر مطالعه، کمیت‌های گرادیان حرارتی، تنش راستای طولی، تنش راستای زاویه‌ای و جابجایی شعاعی مورد بررسی قرار می‌گیرند. لازم به یادآوری است که جابجایی راستای

ابتدا قبل از بررسی نتایج بدست آمده، باید همگرایی نتایج در روش حل بررسی شود. برای این منظور نتایج بدست آمده مدل FG-A در مرکز لوله و شعاع میانی استوانه در نظر گرفته شده است. مشخصات مساله به این صورت است:

$$T_1 = 120^\circ\text{C}, T_2 = 20^\circ\text{C}$$

$$r = 100 \text{ mm}, z = 500 \text{ mm}, h = 2 \text{ mm}, L = 1000 \text{ mm}, i$$

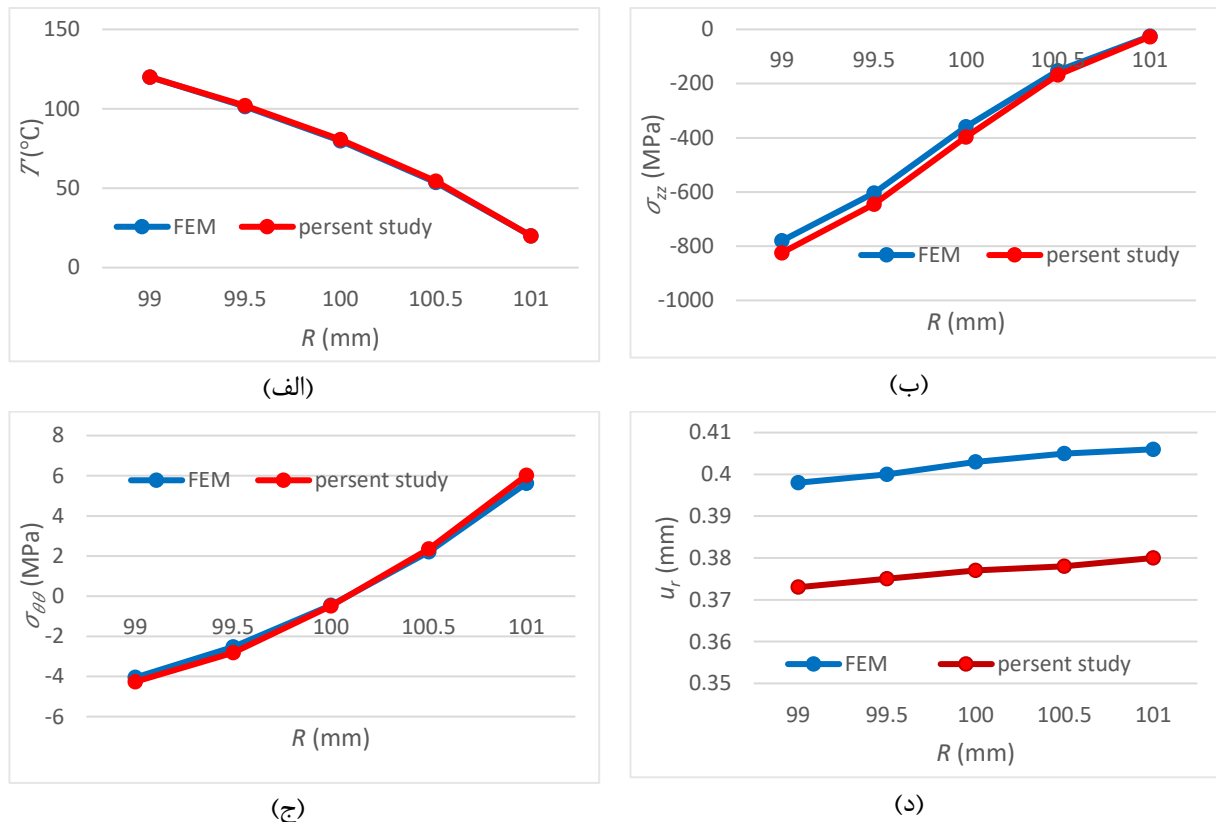
$$r_1 = 99 \text{ mm}, r_2 = 101 \text{ mm}$$

نتایج بدست آمده برای همگرایی در جدول ۱ نشان داده شده است.

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۱ می‌توان نتیجه گرفت که از جمله ۹ به بعد، درصد اختلاف بسیار کم می‌شود. این نتیجه نشان می‌دهد که نتایج در جمله ۹ همگرا شده و دیگر نیازی به بالا بردن تعداد جملات نیست. زیرا که با افزایش تعداد جملات نتایج تغییر بسیار کوچکی کرده و از سوی دیگر حجم محاسبات افزایش می‌یابد که باعث افزایش زمان حل می‌شود.

بعد از اطمینان از همگرایی نتایج، بررسی و مقایسه نتایج در دو روش انرژی و المان محدود انجام شده است. در اینجا خصوصیات هندسی، اطلاعات مربوط به دما و خواص مواد همانند مساله همگرایی است، همان‌طور که گفته شد، پنج حالت توزیع نانولوله کربنی بررسی شده است.

برای اعتبار سنجی روش حل انرژی به کار رفته در این پژوهش از مدل توزیع شکل A (FG-A) نانولوله‌های کربنی استفاده شده است. برای اعتبار سنجی، فقط به این مساله بسنده نمی‌شود و در بخش نتایج



شکل ۳. نتایج بخش اعتبار سنجی: (الف) گرادیان حرارتی، (ب) تنش راستای طولی، (ج) تنش راستای زاویه‌ای، (د) جابجایی راستای شعاعی  
 Fig. 3. Validation results; (a) thermal gradient, (b) longitudinal stress, (c) circumferential stress, (d) radial displacement

جدول ۲. توابع حجم نانولوله‌های کربنی و ضرایب کامپوزیت

Table 2. Carbon nanotube volume functions and composite coefficients

$\eta_r$	$\eta_z$	$\eta_l$	$V_{CNT}^*$
۰/۹۳۴	۰/۹۳۴	۰/۱۴۹	۰/۱۱
۰/۹۴۱	۰/۹۴۱	۰/۱۵۰	۰/۱۴
۱/۳۸۱	۱/۳۸۱	۰/۱۴۹	۰/۱۷

می‌باشد. خصوصیات هندسی مشابه مساله اعتبار سنجی و همگرایی می‌باشد. شعاع داخلی تحت دمای ۱۲۰ درجه سانتی‌گراد قرار گرفته است و شعاع خارجی تحت دمای ۲۰ درجه سانتی‌گراد است. خصوصیات هندسی و شرایط مرزی حرارتی در ادامه ارائه شده است. تابع حجم استفاده شده در این مطالعه ۰/۱۱ است که مقادیر خواص مادی این تابع حجمی در جدول ۳ ارائه شده است.

$$T_1 = 120^\circ\text{C}, T_2 = 20^\circ\text{C}$$

$$r = 100 \text{ mm}, z = 500 \text{ mm}, h = 2 \text{ mm}, L = 1000 \text{ mm},$$

$$r_1 = 99 \text{ mm}, r_2 = 101 \text{ mm}, V_{CNT}^* = 0/11$$

طولی و تنش برشی صفحه طولی و شعاعی، به دلیل شکل بارگذاری و شرایط مرزی مسئله برابر صفر است.

در جدول ۲ مشخصات هر سه حالت تابع حجم نانولوله کربنی و مقادیر مربوط به ضرایب کامپوزیت هر یک از توابع حجم نانولوله کربنی را نشان می‌دهد. همچنین، جدول ۳ مربوط به مقادیر و خصوصیات مادی نانولوله کربنی و رزین پلیمری می‌باشد.

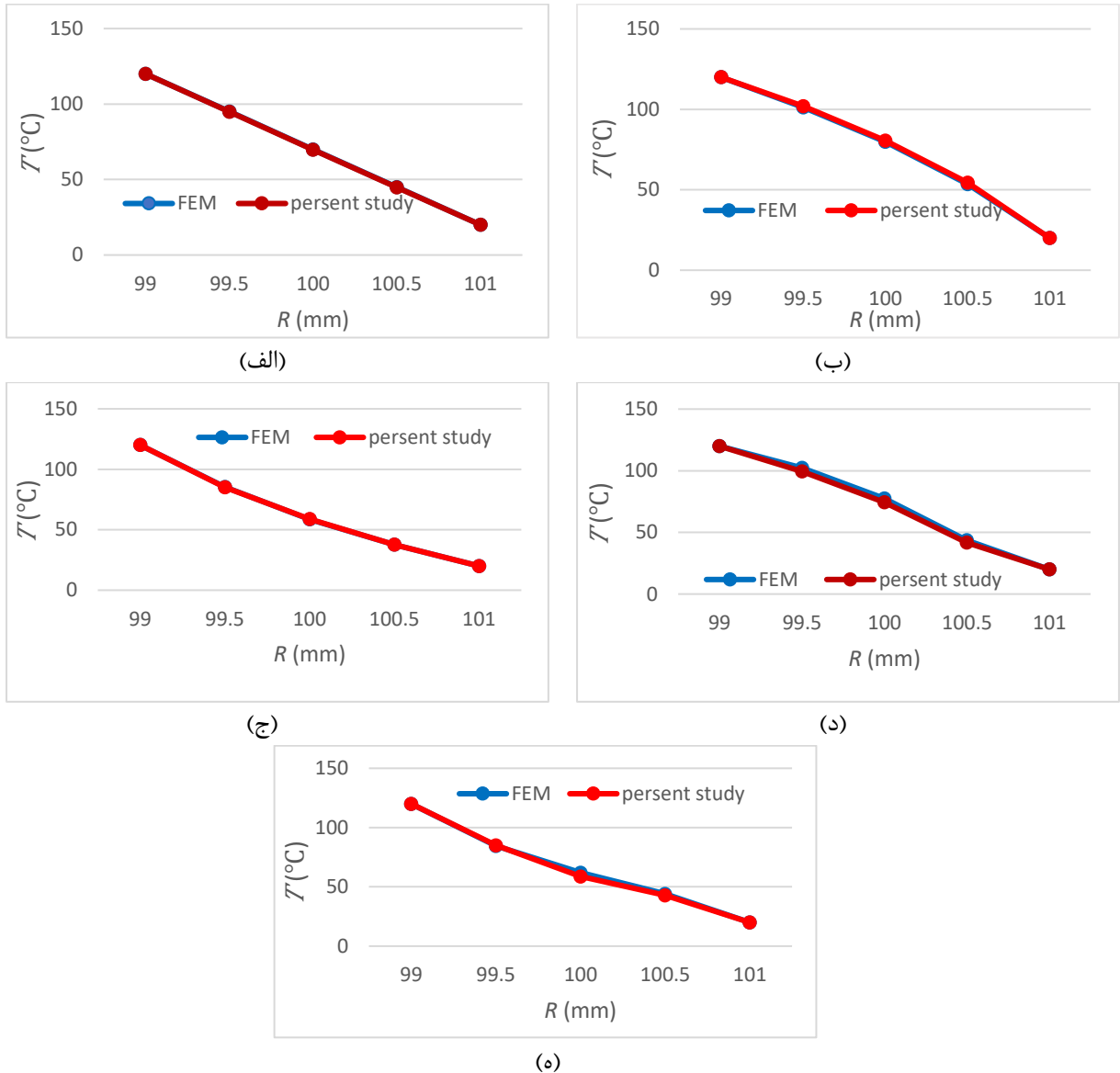
۱-۲-۳ اثر توزیع نانولوله کربنی

مدل استفاده شده در این مساله یک هندسه پوسته استوانه

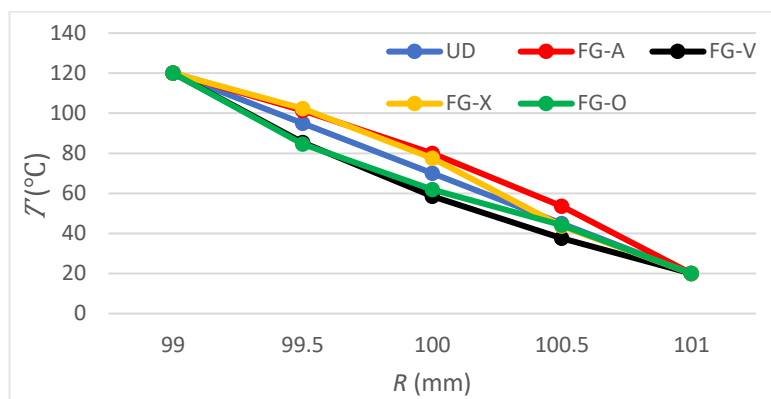
جدول ۳. خواص ماده نانولوله کربنی و ماتریس پلیمری

Table 3. Properties of carbon nanotube material and polymer matrix

$\alpha_{\theta}^{CNT}$ ( $10^{-6} 1/K$ )	$\alpha_z^{CNT}$ ( $10^{-6} 1/K$ )	$k_{\theta}^{CNT}$ (W/mK)	$k_z^{CNT}$ (W/mK)	$\nu_{12}^{CNT}$	$\rho^{CNT}$ ( $kg/m^3$ )	$G_{12}^{CNT}$ (TPa)	$G_{13}^{CNT}$ (TPa)	$E_{22}^{CNT}$ (TPa)	$E_{11}^{CNT}$ (TPa)	نانولوله کربنی
۳/۴۵۸۴	۳/۴۵۸۴	۱۰۰	۳۰۰۰	۰/۱۷۵	۱۴۰۰	۱/۹۴۴۵	۱/۹۴۴۵	۷/۰۸	۵/۶۴۶۶	
$\alpha^m$ ( $10^{-6} 1/K$ )	$k^m$ (W/mK)		$\nu^m$	$\rho^m$ ( $kg/m^3$ )	$E^m$ (GPa)		ماتریس پلیمری			
۴۵	۵		۰/۳۴	۱/۵	۲/۱					
$\eta_1 = 0/149; \eta_2 = 0/934; \eta_3 = 0/934$										$\eta_i$
۳۵۰										$P$
$\lambda$ ( $10^{-4} m^2K/W$ )										$R_k$



شکل ۴. بررسی گرادیان حرارتی: الف. حالت UD، ب. FG-A، ج. FG-V، د. FG-X، ه. FG-O  
Fig. 4. Thermal gradient analysis; (a) UD, (b) FG-A, (c) FG-V, (d) FG-X, (e) FG-O



شکل ۵. گرادیان حرارتی بر اساس پنج حالت توزیع نانولوله‌های کربنی

Fig. 5. Thermal gradient based on five distribution types of carbon nanotubes

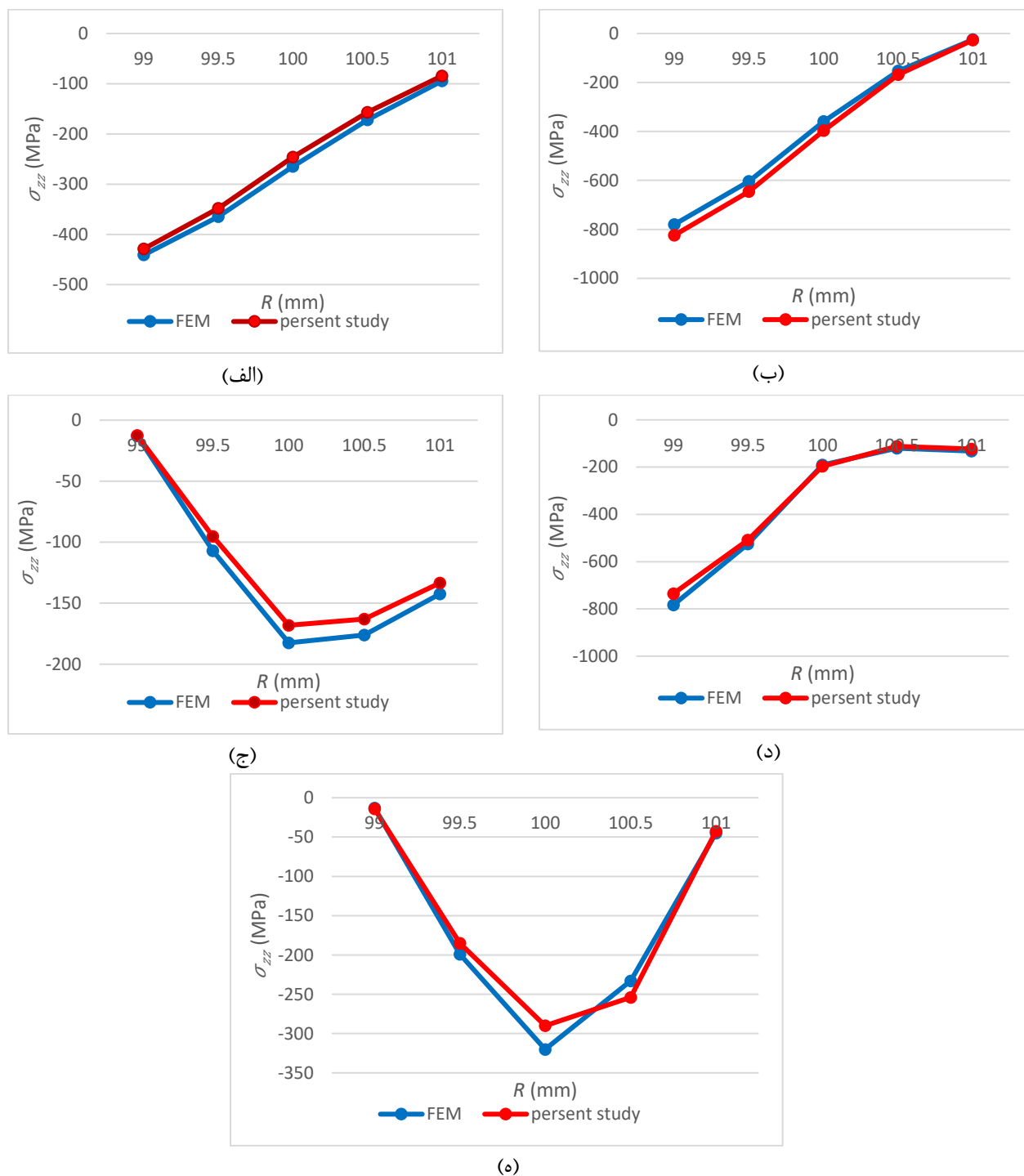
حالت توزیع است و می‌توان این سه حالت را پایه توزیع نانولوله‌ها دانست. همان‌طور که در شکل ۵ مشخص است، درجه حرارت گرادیان حالت FG-A نسبت به توزیع یک طرفه چیزی در حدود ۶/۶ درصد تا ۱۹/۱ درصد اختلاف دارد و دارای درجه حرارت بالاتری است، در سوی دیگر حالت FG-V نسبت به حالت یک طرفه دارای اختلاف در حدود ۱۰/۲ تا ۱۶/۴ درصد است و درجه حرارت پایین‌تری نسبت به حالت یک طرفه دارد. همچنین، حالت توزیع X در نیمه پایینی ضخامت از حالت A و در نیمه بالایی ضخامت از حالت V تشکیل شده‌است. به همین دلیل قسمت اول نمودار آن مشابه حالت A است و در قسمت دوم مشابه حالت V است. همین موضوع برای حالت توزیع FG-O مشهود است که در نیمه پایینی ضخامت از حالت V و در نیمه بالایی ضخامت از حالت A تبعیت می‌کند.

در ادامه، تغییرات تنش حرارتی طولی در راستای شعاع مورد ارزیابی قرار گرفته‌است. در شکل ۶، نمودارهای مربوط به هر یک از توزیع نانولوله‌های کربنی ارائه شده‌است.

در نمودار (الف) شکل ۶، نتایج مربوط به تنش در راستای طولی برحسب ضخامت برای حالت یک طرفه نشان داده شده‌است. در شعاع داخلی به دلیل بالا بودن درجه حرارت، مقدار تنش نیز بالا است و با حرکت به سمت شعاع خارجی با توجه با ثابت بودن تابع حجم مقدار تنش کاهش می‌یابد که این موضوع به دلیل کم شدن درجه حرارت است. از سوی دیگر تنش در راستای طولی منفی بوده و نشان‌دهنده تحت فشار بودن پوسته در راستای طولی است. نتایج مربوط به تنش طولی برحسب ضخامت برای حالت FG-A در نمودار (ب) شکل ۶ ارائه شده‌است. نتایج این نمودار نسبت به نمودار حالت یک طرفه

در قسمت اول، نتایج گرادیان حرارتی انواع مدل ماده توزیع نانولوله‌های کربنی در قالب هر دو روش حل ارائه شده‌است. در بخش بعدی مقایسه کامل و جامع بر روی تفاوت‌ها و اختلافات نتایج گرادیان حرارتی هر پنج حالت مدل توزیع نانولوله‌های کربنی انجام شده است. شکل ۴ دارای پنج نمودار جداگانه است که نمایانگر توزیع گرادیان حرارتی در هر پنج حالت مدل ماده توزیع نانولوله‌های کربنی است. همان‌طور که در نمودار (الف) شکل ۴ نشان داده شده است، گرادیان حرارتی در حالت یک طرفه، تغییرات خطی دارد. دلیل این امر، عدم وابستگی تابع حجم نانولوله به متغیر شعاعی در حالت یک طرفه است که همین موضوع باعث می‌شود که خواص ضریب انتقال حرارت در سرتاسر ضخامت دارای مقدار ثابتی باشد. همچنین اختلاف دو روش حل بسیار کم بوده و مقداری کمتر از ۱ درصد دارد. در همین شکل، برای حالت‌های دیگر توزیع نانولوله، تغییرات دما به صورت غیرخطی ظاهر شده است. برای مشاهده جزئیات هر یک از توزیع‌های نانولوله کربنی، در نمودار شکل ۵، پنج حالت توزیع نانولوله کربنی نشان داده شده‌است. با توجه به این که خواص ماده وابسته به تابع حجم است، خواص ماده در محدوده ضخامت تغییر می‌کند و در نتیجه نتایج نیز تغییر می‌کند. بیشترین درجه حرارت در قسمت‌های داخلی ضخامت مربوط به حالت FG-A بوده و کمترین مربوط به حالت FG-V است. دو حالت FG-O و FG-X از ترکیب همان دو حالت A و V تشکیل شده‌است و همین موضوع باعث شده که رفتار این دو نوع توزیع نانولوله کربنی، در قسمت ابتدایی و انتهایی ضخامت مشابه حالت A و V باشد.

توزیع نانولوله‌های کربنی در حالت یک طرفه، A و V ابتدایی‌ترین

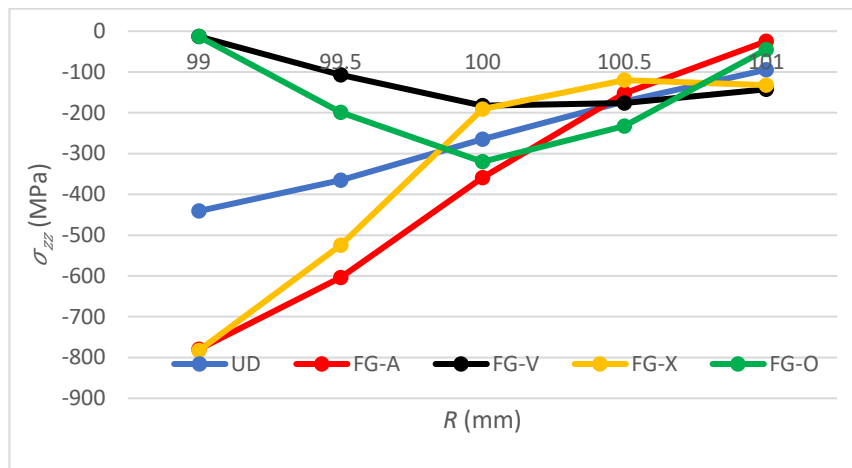


شکل ۶. بررسی تنش راستای طولی: الف. حالت UD، ب. FG-A، ج. FG-V، د. FG-X، ه. FG-O

**Fig. 6. Longitudinal stress analysis; (a) UD, (b) FG-A, (c) FG-V, (d) FG-X, (e) FG-O**

درجه حرارت است و دلیل دوم به خاطر بالا بودن تابع حجم نانولوله کربنی در شعاع داخلی است. با حرکت به سمت شعاع داخلی به دلیل کم شدن درجه حرارت و کاهش تابع حجم نانولوله‌های کربنی مقدار تنش نیز با شیب سریع‌تری کاهش پیدا می‌کند و در شعاع خارجی

تغییرات غیر خطی بیشتری دارد که این موضوع به دلیل وابستگی تابع حجم به متغیر شعاع است، این موضوع در دیگر حالت‌های عملکردی درجه بندی شده نیز صدق می‌کند. نتایج تنش در شعاع داخلی به دو دلیل بسیار بالا است که دلیل اول به خاطر بالا بودن



شکل ۷. مقایسه نتایج تنش راستای طولی در پنج حالت توزیع نانولوله‌های کربنی  
**Fig. 7. Comparison of longitudinal stress regarding different distributions of carbon nanotubes**

و کاهش تابع حجم، همچون حالت FG-A مقدار تنش نیز کاهش پیدا می‌کند.

همان‌طور که در نتایج مساله‌های قبلی نشان داده‌شد، تنش حرارتی در راستای طولی بسیار بزرگ‌تر از تنش در دیگر راستاها است و به منظور مقایسه بهتر نتایج توزیع‌های مختلف نانولوله کربنی، نمودار شکل ۷، نتایج تنش‌های طولی را به صورت یک‌جا نشان می‌دهد. این نمودار به خوبی نشان می‌دهد که توزیع تنش در حالت یک طرفه نسبتاً خطی بود و این به دلیل عدم وابستگی تابع حجم نانولوله‌های کربنی به مؤلفه شعاعی است، همین امر باعث شده که تغییرات تنش در راستای شعاع متناسب‌تر باشد و تغییر ناگهانی در نمودار آن صورت نگیرد. در مقابل چهار حالت دیگر توزیع نانولوله‌های کربنی به دلیل وابسته بودن تابع حجم نانولوله کربنی به مؤلفه شعاع نمودار تنش حرکت غیر خطی داشته‌باشد و باعث شود تغییرات تنش در راستای شعاع بیشتر نمایان شود. این امر از آنجا نشأت می‌گیرد که تغییر تابع حجم نانولوله‌ها در راستای شعاعی باعث تغییر خواص ماده می‌شود.

با یک مقایسه ساده، تفاوت‌های رفتار انواع توزیع نانولوله‌های کربنی در برابر حرارت نمایان می‌شود. می‌توان این‌گونه برداشت کرد که با افزایش تراکم تابع حجم نانولوله‌های کربنی در شعاع داخلی تنش افزایش می‌یابد و با کاهش تراکم، تنش نیز کاهش می‌یابد. این امر به این دلیل است که با افزایش تراکم تابع حجم نانولوله‌ها مدول الاستیسیته در راستای طولی پوسسته افزایش می‌یابد و همین امر باعث

به کمترین مقدار خود می‌رسد. دلیل وابستگی مستقیم نتایج تنش به تابع حجم نانولوله‌های کربنی به این دلیل است که با افزایش تابع حجم نانولوله کربنی مقاومت در برابر بار خارجی افزایش یافته و همین افزایش مقاومت باعث افزایش تنش می‌شود، این موضوع در هر پنج حالت توزیع نانولوله‌ها صدق می‌کند. در شکل ۶، نمودار (ج) نتایج تنش طولی حالت FG-V را برحسب ضخامت نمایش می‌دهد. در این حالت به دلیل کم بودن تابع حجم در شعاع داخلی، مقدار تنش بسیار کم است اما با حرکت به سمت شعاع میانی با افزایش تابع حجم مقدار تنش نیز افزایش می‌یابد اما در ناحیه دوم به دلیل کم بودن درجه حرارت، مقدار تنش نسبت به نتایج تنش در شعاع میانی مقداری کاهش پیدا می‌کند. نمودار (د) در شکل ۶، نتایج تنش در راستای طولی در محدوده ضخامت را برای حالت FG-X نمایش می‌دهد. نتایج تنش در محدوده ابتدایی ضخامت هم‌چون حالت FG-A دارای مقدار بالایی است و در ناحیه دوم ضخامت همچون حالت FG-V یک تغییر جهت در نمودار رخ می‌دهد. مقادیر تنش در ناحیه اول ضخامت بالاتر است که به دلیل بالا بودن تابع حجم نانولوله کربنی است و با حرکت به سمت شعاع میانی و کم شدن تابع حجم مقادیر تنش نیز کاهش پیدا می‌کند. نمودار (ه) نمایش دهنده نتایج تنش طولی در محدوده ضخامت است. هم‌چون حالت FG-V در شعاع داخلی به دلیل پایین بودن تابع حجم، مقدار تنش نیز نسبتاً پایین است اما با حرکت به سمت شعاع میانی و بالا رفتن تابع حجم مقدار تنش نیز به حداکثر مقدار خود می‌رسد. با عبور از شعاع میانی



شعاع میانی و حرکت به سمت شعاع خارجی، تابع حجم مشابه حالت A کاهش یافته و در شعاع خارجی به کمترین مقدار خود می‌رسد. همین امر باعث شده‌است که نتایج تنش برای توزیع حالت O در نیمه ابتدایی ضخامت مشابه حالت V عمل کند و در شعاع میانه به حداکثر مقدار خود برسد و در قسمت دوم ضخامت با کاهش دما و تابع حجم نانولوله‌های کربنی مقدار تنش نیز کاهش پیدا کند و یک تغییر جهت در نمودار ایجاد شود.

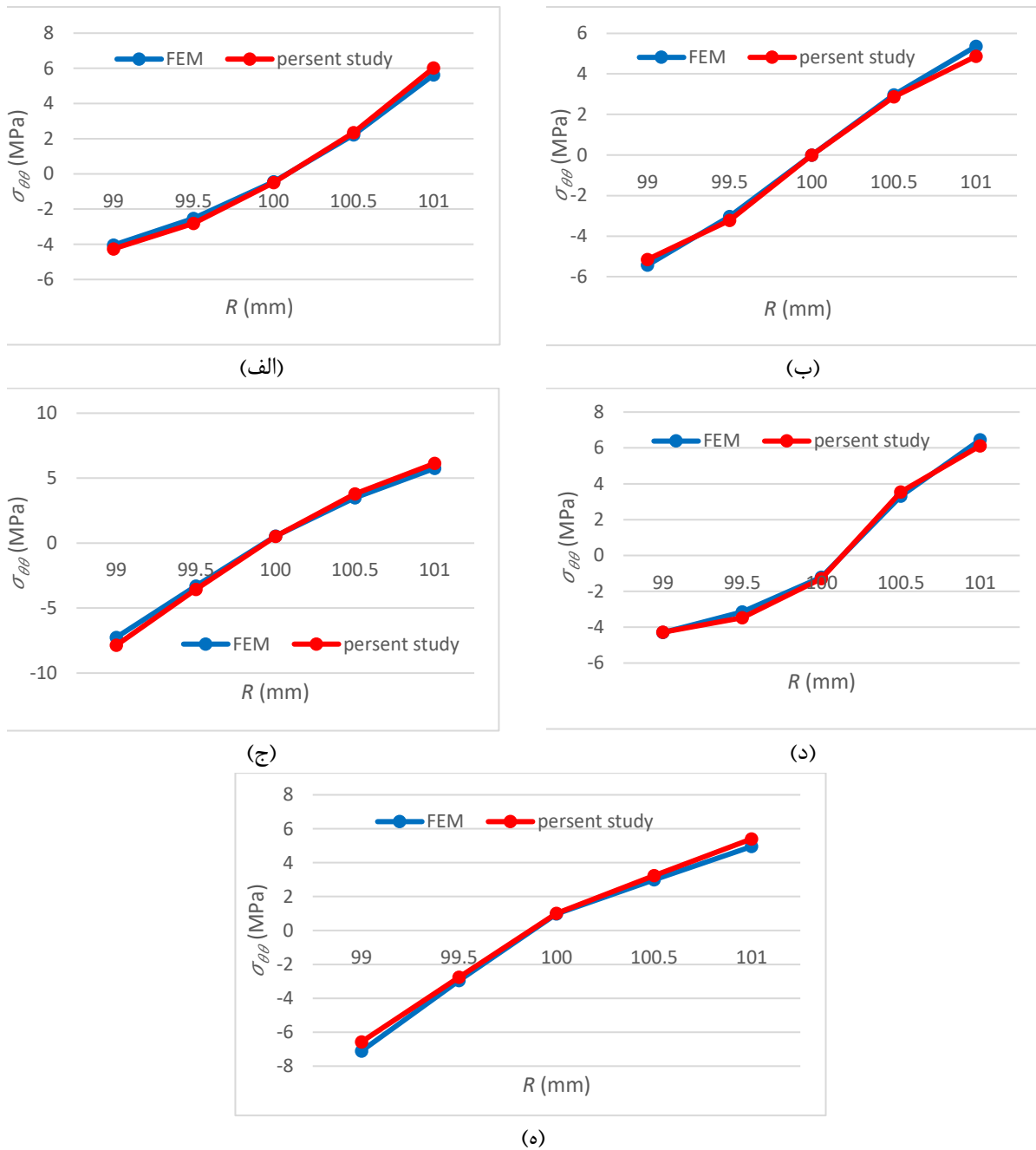
در ادامه نتایج این بخش، تنش راستای زاویه‌ای بررسی می‌شود. در نمودارهای شکل ۸، تنش زاویه‌ای هر یک از انواع مدل ماده توزیع نانولوله‌های کربنی ارائه شده‌است.

در شکل ۸، نمودار (الف) نمایش دهنده نتایج تنش در راستای زاویه حالت یک طرفه در محدوده ضخامت است. نمودار تنش زاویه‌ای نسبت به تنش در راستای طولی دارای دو تفاوت کلی است، اولین تفاوت که با نگاه به نتایج مشهود است، مربوط به مقادیر تنش است که نسبت به تنش در راستای طولی دارای مقادیر کوچک‌تری است و دومین تفاوت مربوط به نوع تنش است که در نیمه ابتدایی ضخامت، پوسته تحت تنش فشاری است و در نیمه دوم ضخامت تحت تنش کششی است، در حالی که تنش طولی ایجاد شده پوسته فقط نوع فشاری است. نتایج تنش راستای زاویه حالت FG-A در محدوده ضخامت در نمودار (ب) ارائه شده‌است. اگرچه همانند حالت یک طرفه نیمه ابتدایی ضخامت تحت تنش فشاری بوده و نیمه دوم تحت تنش کششی است، اما نتایج تنش راستای زاویه حالت FG-A نسبت به یک طرفه متقارن نبوده و نواحی که دارای تابع حجم نانولوله‌های کربنی کمتری بوده مقدار تنش نیز افزایش یافته‌است. تنش ایجاد شده در ناحیه شعاع میانی، نزدیک به صفر است که این موضوع در چهار حالت عملکردی درجه بندی شده صدق می‌کند.

برای مقایسه بهتر تنش‌های مربوط به توزیع‌های مختلف نانولوله‌های کربنی، نتایج در نمودار شکل ۹ نشان داده شده‌است. این نمودار نشان می‌دهد که نتایج تنش حرارتی در راستای زاویه‌ای هر پنج حالت توزیع نانولوله‌ها نسبتاً نزدیک بود و اختلاف کمی با یکدیگر دارند. نتایج توزیع حالت یک طرفه همچون دو نتیجه قبل نسبتاً خطی بود و دیگر نتایج دارای نمودار غیرخطی است. در این بخش تراکم تابع حجم نانولوله‌های کربنی باعث کاهش مقدار تنش می‌شود، این مساله در نمودار A، یک طرفه و V نشان داده شده که به ترتیب

افزایش مقاومت پوسته در برابر حرارت شده و منجر به افزایش تنش می‌شود. این موضوع به خوبی در دو حالت توزیع V و A نمایان است. دو حالت دیگر نیز تا حدودی مشابه حالت V و A رفتار می‌کنند.

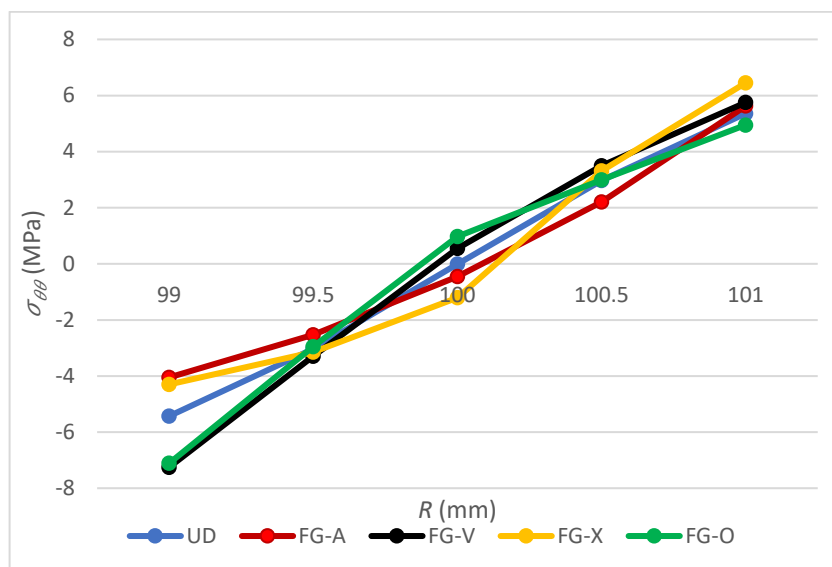
در نمودار شکل ۷، در شعاع ۹۹ میلی‌متر، سه رفتار مختلف مشاهده می‌شود؛ ابتدا حالت V که دارای کمترین تراکم تابع حجم نانولوله‌های کربنی است که باعث می‌شود کمترین میزان تنش مشاهده شود و در ادامه با حرکت به سمت شعاع بیرونی با افزایش تراکم تابع حجم نانولوله کربنی تنش افزایش یافته‌است، اما با کاهش دما در قسمت دوم ضخامت مقدار تنش تقریباً کاهش یافته‌است. حالت توزیع یک طرفه به دلیل ثابت بودن تابع حجم و بالا بودن دما در شعاع داخلی، تنش از ۴۴۰ مگاپاسکال شروع شده و با حرکت به سمت شعاع خارجی و با کاهش دما تنش کاهش پیدا کرده‌است، این تغییرات نسبتاً ثابت بود و تغییر ناگهانی در نمودار صورت نگرفته‌است. اما در حالت A، بالا بودن تراکم تابع حجم نانولوله‌های کربنی در شعاع داخلی باعث شده‌است که مقدار تنش بسیار بالا باشد و با حرکت به سمت شعاع خارجی و با کاهش تراکم تابع حجم و دما تنش نیز کاهش یابد و در نهایت در شعاع خارجی به کمترین مقدار خود برسد. با توجه به اینکه حالت توزیع X از حالت A در قسمت ابتدایی ضخامت و از حالت V در قسمت دوم ضخامت تشکیل شده‌است، رفتار این ماده در قسمت‌های مختلف مشابه دو حالت A و V عمل کند. در قسمت ابتدایی ضخامت مشابه حالت A عمل کرده و با حرکت به سمت شعاع میانی با کاهش سریع‌تر تراکم تابع حجم نانولوله‌های کربنی، شیب کاهش تنش نسبت به حالت A افزایش می‌یابد و در نیمه دوم ضخامت، با افزایش تراکم تابع حجم، مقداری تنش افزایش می‌یابد و سپس یک برگشت جهت نمودار مشابه حالت V در این قسمت رخ می‌دهد. این برگشت جهت نمودار را می‌توان به دلیل کاهش دما در نیمه دوم ضخامت دانست. نتایج در شعاع داخلی تنش حالت X کاملاً نزدیک به حالت A است و در شعاع خارجی کاملاً نزدیک به حالت V است و در شعاع میانی نتیجه نزدیک به حالت V است. نمودار نتایج تنش حالت توزیع O در نیمه ابتدایی ضخامت از حالت V سرچشمه گرفته و در نیمه دوم ضخامت توزیع نانولوله‌ها مشابه حالت A است، به گونه‌ای که در شعاع داخلی، تراکم تابع حجم نانولوله‌ها کربنی کم است و با حرکت به سمت شعاع میانه این تابع حجم افزایش می‌یابد و در شعاع میانی به حداکثر مقدار خود می‌رسد و سپس با عبور از



شکل ۸. بررسی تنش محیطی: الف. حالت UD، ب. FG-A، ج. FG-V، د. FG-X، ه. FG-O  
**Fig. 8. Circumferential stress analysis; (a) UD, (b) FG-A, (c) FG-V, (d) FG-X, (e) FG-O**

همانطور که در نمودار شکل ۹ نمایش داده شده است، در شعاع داخلی به دلیل بالا بودن دما و تابع حجم نانولوله‌های کربنی در حالت FG-V، مقدار تنش در این حالت بالاتر از حالت A و یک طرفه است. اما در شعاع خارجی به دلیل پایین بودن درجه حرارت نتایج نسبتاً به یکدیگر نزدیک است. در ادامه نتایج این بخش، جابجایی راستای شعاعی بررسی می‌شود.

دارای کمترین مقدار تنش در شعاع داخلی است. نتایج حالت توزیع FG-O و FG-X نیز در قسمت‌های مشابه حالت FG-A و FG-V است. از سوی دیگر برخلاف نتایج تنش حرارتی در راستای طولی که در سرتاسر ضخامت به صورت فشاری است، تنش در راستای زاویه، متفاوت است و در نیمی از ضخامت فشاری و در نیم دیگر آن کششی است.



شکل ۹. مقایسه نتایج تنش راستای زاویه هر پنج حالت توزیع نانولوله‌های کربنی

Fig. 9. Comparison of the circumferential stress regarding different distributions of carbon nanotubes

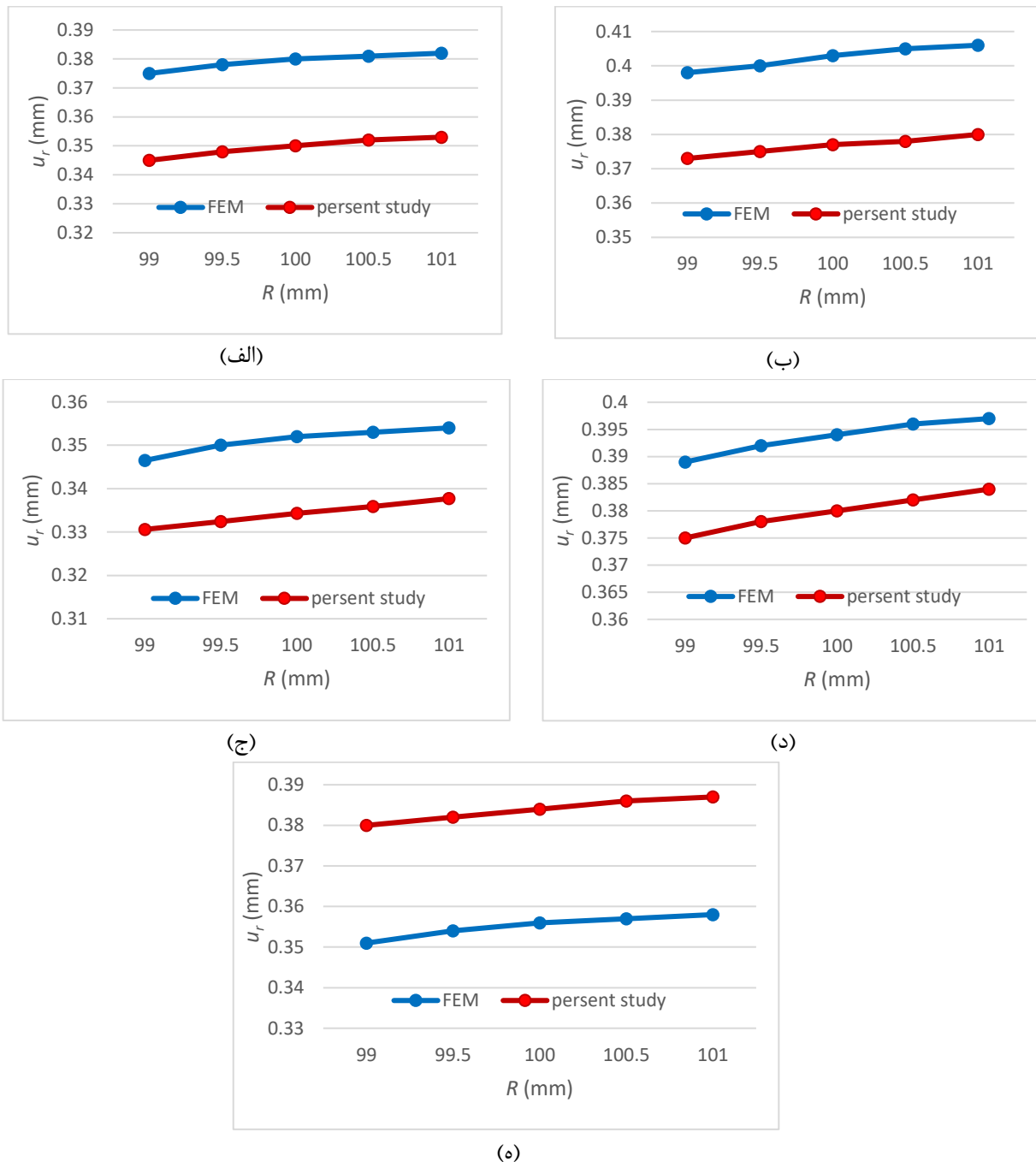
زاویه و جابجایی در راستای شعاعی بررسی می‌شود. این مقایسه برای توزیع نانولوله‌ها به شکل A صورت گرفته است و برای سایر توزیع‌های نانولوله کربنی، روند مشابهی مشاهده شده است.

نمودارهای شکل ۱۲، نشان دهنده تأثیر افزایش درجه حرارت گرادیان حرارتی بر روی نتایج مساله است. در نمودار (الف) شکل ۱۲، نحوه تغییرات نمودارهای گرادیان دما برای حالت‌های دمایی مختلف، مشابه یکدیگر است و فقط مقادیر آن‌ها تغییر کرده است. این افزایش دما، سبب تغییر شرایط مرزی حرارتی در شعاع داخلی و خارجی پوسته است. مقادیر درجه حرارت داخل در محدوده ضخامت پوسته با همین نسبت افزایش یافته است. مقادیر نتایج گرادیان حرارتی حالت  $200^{\circ}\text{C}$  به نسبت افزایش درجه حرارت شرایط مرزی حرارتی افزایش یافته است، این افزایش درجه حرارت دو برابر نتایج بدست آمده حالت  $100^{\circ}\text{C}$  است. این افزایش درجه حرارتی در مساله سوم ( $300^{\circ}\text{C}$ ) نسبتاً بیشتر است و تقریباً سه برابر درجه حرارت حالت  $100^{\circ}\text{C}$  است. این موضوع به دلیل بالا بودن شرایط مرزی حرارتی در شعاع داخلی و خارجی است. می‌توان این‌گونه برداشت کرد که با ثابت نگهداشتن تابع حجم نانولوله‌های کربنی و افزایش درجه حرارت، مقادیر درجه حرارت نیز با همان نسبت افزایش می‌یابد. در نمودار (ب) شکل ۱۲، نتایج تنش راستای طولی بدست آمد در سه حالت گرادیان حرارتی قابل مقایسه است. با توجه به نتایج بدست آمده در

در نمودارهای شکل ۱۰، جابجایی راستای شعاعی هر یک از انواع مدل ماده توزیع نانولوله‌های کربنی ارائه شده است. همچنین در شکل ۱۱، نتایج با توزیع نانولوله‌های مختلف در مقایسه با هم ارائه شده است. نتایج ارائه شده در شکل ۱۰ و ۱۱ نشان می‌دهد کمترین مقدار جابجایی در راستای شعاعی به حالت V و O تعلق دارد و بیشترین مقدار به حالت A و X مربوط است. حالت A بیشترین مقدار و حالت V کمترین مقدار را دارا است؛ نتایج حالت A چیزی در حدود ۱۴ تا ۱۵ درصد نسبت به حالت V اختلاف دارد. این اختلاف را می‌توان به حالت توزیع نانولوله‌های کربنی و ضریب انتقال حرارت مرتبط کرد، به این گونه که در هر شعاع که ضریب انتقال حرارت بالاتر باشد مقدار دما نیز بالا خواهد بود و با توجه به نتایج مربوط به نمودارهای گرادیان حرارتی و اختلاف قابل ملاحظه‌ای که بین دو نوع توزیع A و V وجود دارد و درجه حرارت مربوط به شعاع‌های مختلف در محدوده ضخامت برای حالت A بزرگ‌تر از حالت V است و همین امر باعث می‌شود که مقادیر جابجایی حالت V کمتر از حالت A باشد.

### ۳-۲-۲- اثر افزایش دما

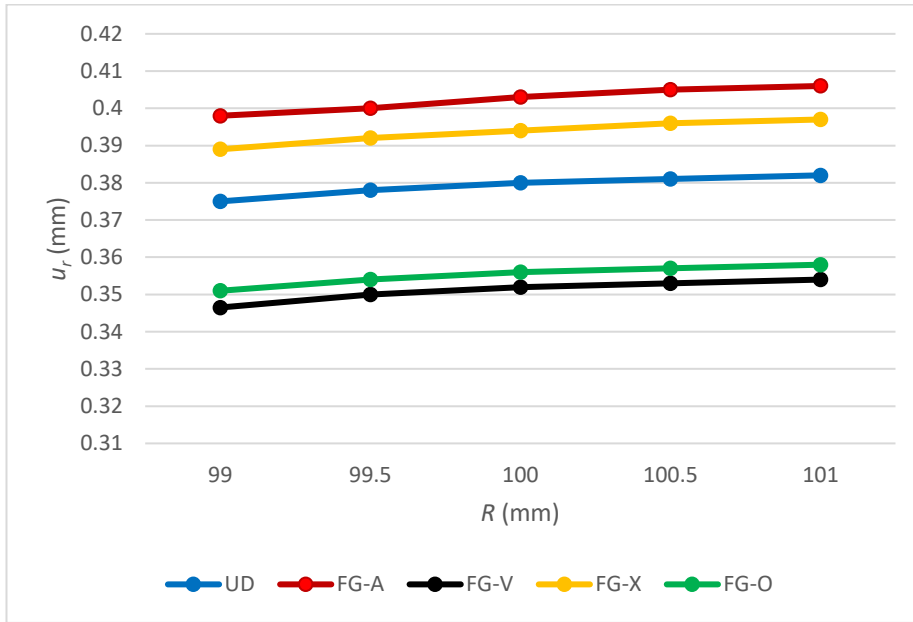
در این بخش ضریب تابع حجمی نانولوله‌های کربنی ثابت فرض می‌شود و تنها گرادیان دمایی افزایش داده می‌شود. تأثیر این افزایش حرارت در نتایج گرادیان دما، تنش در راستای طولی، تنش در راستای



شکل ۱۰. بررسی جابجایی راستای شعاع: الف. حالت UD، ب. FG-A، ج. FG-V، د. FG-X، ه. FG-O  
 Fig. 10. Radius displacements analysis; (a) UD, (b) FG-A, (c) FG-V, (d) FG-X, (e) FG-O

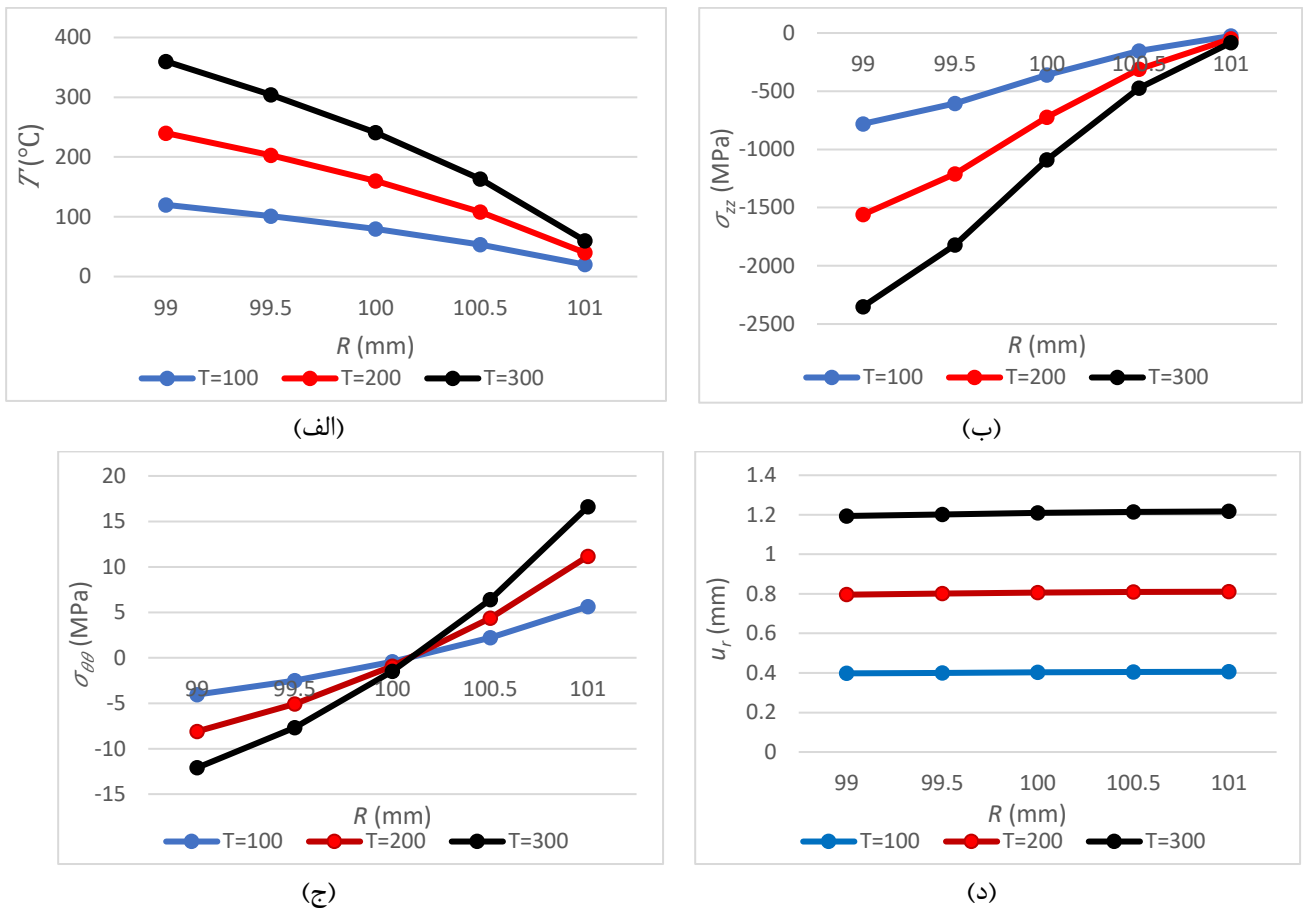
حجم، مقادیر تنش نیز افزایش می‌یابد، این افزایش متناسب با افزایش درجه حرارت است. این موضوع را در طراحی‌های این سازه‌ها باید در نظر گرفت. در نمودارهای (ج) و (د)، شکل ۱۲، روند مشابهی مشاهده می‌شود. به این معنی که تغییرات تنش راستای زاویه‌ای و جابجایی راستای شعاعی با گرادیان دمایی اعمالی، به صورت خطی است. لازم به ذکر است که جمع بندی ارائه‌شده برای شکل ۱۲، برای سایر

هر سه مساله و مقایسه این نتایج، مشاهده می‌شود که با افزایش دما، مقادیر تنش راستای طولی نیز افزایش یافته‌است، اما مساله که بیشتر اهمیت دارد درصد افزایش این مقادیر است. مقایسه مقادیر سه حالت گرادیان حرارتی نشان می‌دهد که مقادیر نتایج تنش راستای طولی با همان نسبت افزایش درجه حرارت، افزایش یافته‌است، می‌توان این گونه نتیجه گرفت که با افزایش درجه حرارت و ثابت ماندن تابع



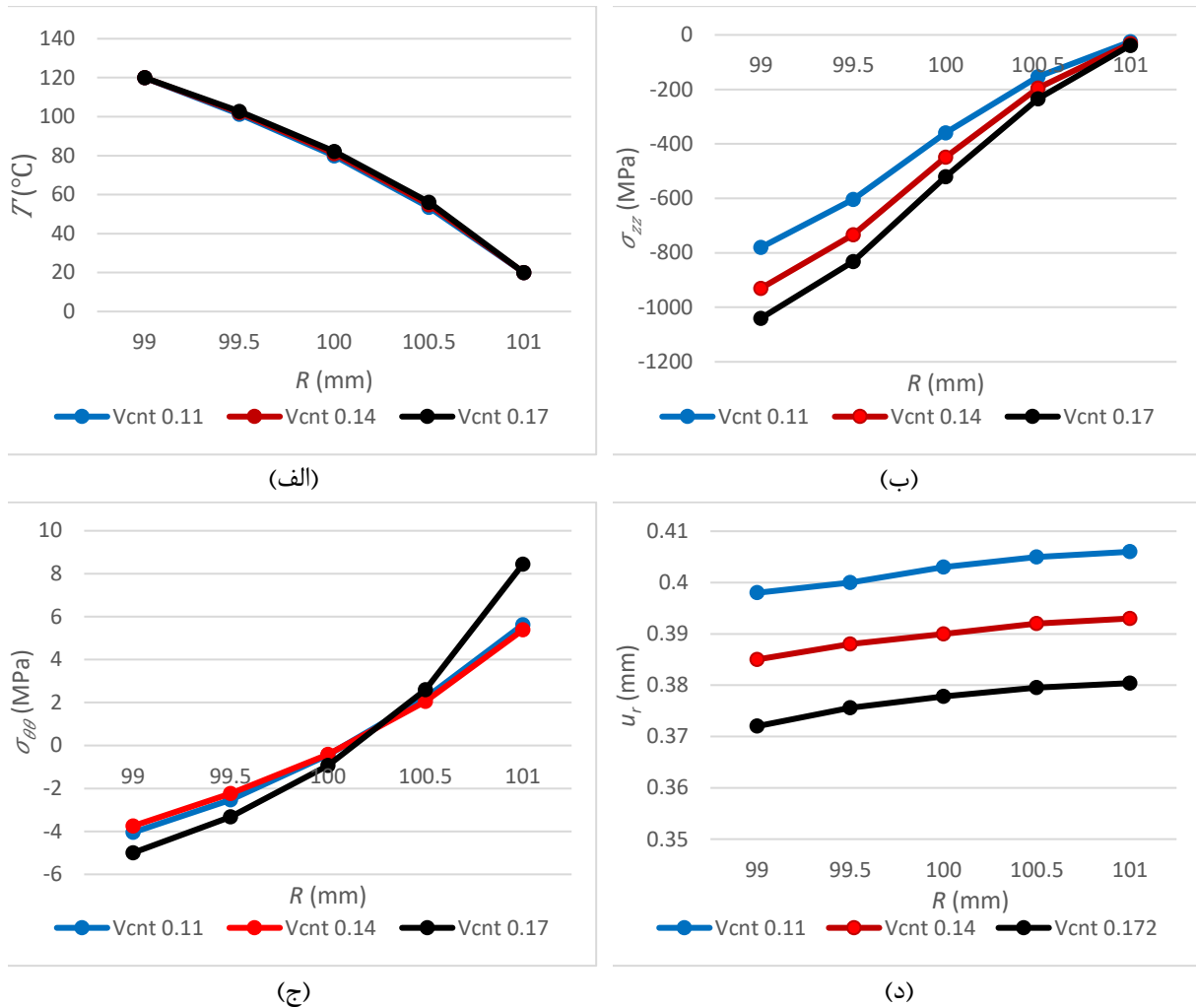
شکل ۱۱. مقایسه نتایج جابجایی در راستای شعاع هر پنج حالت توزیع نانولوله‌های کربنی

Fig. 11: Comparison of the radial displacements regarding different distributions of carbon nanotubes



شکل ۱۲. تأثیر افزایش دما بر نتایج: (الف) گرادیان حرارتی، (ب) تنش راستای طول، (ج) تنش راستای زاویه، (د) جابجایی در راستای شعاع

Fig. 12. Effect of temperature increase on the results; (a) thermal gradient, (b) longitudinal stress, (c) circumferential stress, (d) radial displacement



شکل ۱۳. تأثیر افزایش تابع حجم نانولوله‌های کربنی بر نتایج: (الف) گرادیان حرارتی، (ب) تنش راستای طولی، (ج) تنش راستای زاویه‌ای، (د) جابجایی راستای شعاعی

Fig. 13. The effect of increasing the volume function of carbon nanotubes on the results. (a) thermal gradient, (b) longitudinal stress, (c) circumferential stress, (d) radial displacement

نمودار (الف) شکل ۱۳، مربوط به نتایج گرادیان حرارتی در سه حالت تابع حجم نانولوله کربنی است. همانطور که مشاهده می‌شود، اختلاف بین نتایج گرادیان حرارتی بسیار کم است، اختلاف بین نتایج حالت تابع حجم ۰/۱۴ نسبت به حالت تابع حجم ۰/۱۱، کمتر از ۳ درصد است و حالت تابع حجم ۰/۱۷ نسبت به حالت ۰/۱۱ کمتر از ۵ درصد اختلاف دارد. دلیل این اختلاف کم، تأثیر کم تابع حجم بر روی ضرایب انتقال حرارت است. در نمودار (ب) شکل ۱۳، تفاوت بین نتایج تنش راستای طولی در سه حالت تابع حجم نانولوله کربنی ارائه شده است. با توجه به نتایج این نمودار می‌توان گفت که با افزایش تابع حجم نانولوله‌های کربنی، مقادیر تنش راستای طولی نیز افزایش می‌یابد. این افزایش مقادیر تابع حجم ۰/۱۴ نسبت به تابع حجم

توزیع‌های نانولوله کربنی هم صدق می‌کند.

### ۳-۲-۳- اثر تابع حجم نانولوله کربنی

در این بخش بررسی تأثیر افزایش تابع حجم نانولوله‌های کربنی بر نتایج مربوط به رفتار انواع مدل‌های توزیع نانولوله‌های کربنی ارائه شده است. برای این کار از سه حالت توزیع نانولوله‌های کربنی در جدول ۲ استفاده شده است. در نمودارهای شکل ۱۳، نتایج گرادیان حرارتی، تنش حرارتی در هر دو راستای طولی و زاویه‌ای، و جابجایی راستای شعاعی نمایش داده است. لازم به ذکر است که این نتایج برای حالت توزیع نانولوله‌ها به شکل A ارائه شده است و برای حالت‌های دیگر توزیع نانولوله‌ها نیز صدق می‌کند.



مستقیم این مدول با ضریب کامپوزیت  $\eta_r$  باعث شده تا  $E_{\theta\theta}$  افزایش یابد که این امر در ادامه باعث می‌شود که ضریب ماتریس  $Q_{1r}$  افزایش یابد، و از طرف دیگر با افزایش ضریب  $Q_{1r}$  منجر می‌شود که تنش راستای زاویه  $(\sigma_{\theta\theta})$  افزایش پیدا کند.

نمودار (د) شکل ۱۳، توزیع جابجایی راستای شعاعی بر حسب ضخامت برای سه حالت توابع حجم نانولوله کربنی را نمایش می‌دهد. همانطور که این نمودار نشان می‌دهد، با افزایش حجم نانولوله‌های کربنی، مقاومت ماده نیز افزایش یافته و باعث می‌شود جابجایی کاهش پیدا کند. این کاهش، در نتایج حالت دوم تابع حجم  $0/14$  نسبت به حالت اول، حدود ۳ درصد است و اختلاف نتایج حالت سوم تابع حجم  $0/17$  نسبت به حالت اول، حدود ۷ درصد است. لازم به ذکر است که روند تغییرات مشاهده شده در نمودارهای شکل ۱۳، برای حالت‌های دیگر توزیع نانولوله‌های کربنی صدق می‌کند و تنها مقادیر اختلاف بین نتایج مربوط به تابع حجم نانولوله‌های کربنی مختلف، متفاوت است.

#### ۴- نتیجه گیری

در این پژوهش، یک پوسته استوانه‌ای که از جنس ماده کامپوزیتی تقویت شده است، مورد تحلیل تنش حرارتی قرار گرفته است. ماده کامپوزیتی از یک ماتریس پلیمری تشکیل شده که برای افزایش مقاومت این رزین از نانولوله‌های کربنی استفاده شده است. انواع توزیع این نانولوله‌های کربنی به پنج حالت توزیع یکنواخت، توزیع شکل A (FG-A)، V (FG-V)، X (FG-X)، O (FG-O) بوده است. تئوری پایه برای تعریف میدان جابجایی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است، که این میدان جابجایی در شکل دادن انرژی کرنشی استفاده شده و از آنجا با استفاده از روش ریتز ضرایب مجهول توابع جابجایی استخراج شده است. برای اعتبار سنجی روش حل انرژی از حل المان محدود نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است. شرایط مرزی تکیه‌گاهی به صورت ساده بوده و شعاع داخلی و خارجی تحت دمای خاصی قرار گرفته است. به صورت خلاصه نتایج بدست آمده از این پژوهش به این شرح است:

• هرچند که در پوسته نیروی خارجی وجود نداشته باشد و تنها گرادیان حرارتی وجود داشته باشد باز هم باعث ایجاد تنش و جابجایی می‌شود. باتوجه به هندسه و شرایط مرزی، از جابجایی در راستای

$0/11$ ، بین  $19/2$  تا  $28$  درصد است و اختلاف نتایج حالت تابع حجم  $0/17$  نسبت به حالت تابع حجم  $0/11$ ، بین  $33$  تا  $53$  درصد می‌باشد. این اختلاف‌ها در شعاع خارجی دارای کمترین درصد اختلاف است و با حرکت به سمت شعاع داخلی، مقادیر درصد اختلاف افزایش می‌یابد. علت اصلی افزایش تنش با افزایش تابع حجم نانولوله، تأثیری است که تابع حجم نانولوله‌های کربنی بر روی خواص ماده کامپوزیت می‌گذارد، زیرا که با افزایش تابع حجم، مدول الاستیک کامپوزیت در راستای طولی افزایش یافته و همین موضوع باعث افزایش ضرایب ماتریس  $Q_{11}$  و  $Q_{1r}$  می‌شود، که باعث افزایش تنش راستای طولی می‌شود. این موضوع به خوبی در روابط خواص ماده و روابط تنش-کرنش، به صورت ارائه شده در زیر نمایان است:

$$V_{CNT}^* \uparrow \Rightarrow V_{CNT} \uparrow \Rightarrow E_{zz} \uparrow \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Q_{11} \\ Q_{12} \end{matrix} \right\} \uparrow \Rightarrow \sigma_{zz} \uparrow$$

در نمودار (ج) شکل ۱۳، نتایج تنش راستای زاویه‌ای در سه حالت تابع حجم نانولوله، نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج حالت دوم  $0/14$  نسبت به نتایج حالت اول  $0/11$  تغییر زیادی نکرده است (بین ۲ تا ۱۱ درصد)، در مقابل نتایج حالت سوم  $0/17$  نسبت به نتایج حالت اول تغییر زیادی دارد (حدود ۱۰۰ درصد). این امر به تأثیر تابع حجم در ضرایب مادی کامپوزیت بر می‌گردد. این رابطه نسبت مستقیم با ضریب کامپوزیت  $\eta_r$  دارد و دارای رابطه معکوس با تابع حجم نانولوله‌های کربنی است. در تابع حجم  $0/14$  ضریب  $\eta_r$  کامپوزیت تغییر زیادی نسبت به حالت اول نکرده است و از سوی دیگر تابع حجم تغییر بیشتری دارد و همین موضوع باعث شده که مدول الاستیک راستای محیطی  $(E_{\theta\theta})$  تأثیر بیشتری از تابع حجم نانولوله‌های کربنی بپذیرد و در نتیجه ضریب ماتریس  $Q_{2r}$  کاهش پیدا کند. از سوی دیگر در رابطه با  $Q_{1r}$  که با افزایش تابع حجم نانولوله‌های کربنی افزایش می‌یابد، باعث شده که افزایش ضریب  $Q_{1r}$  تأثیر کاهش ضریب  $Q_{2r}$  را خنثی کرده و باعث شده است اختلاف نتایج بین حالت اول نسبت به حالت دوم کاهش پیدا کند. این موضوع در نتایج حالت سوم تغییر کرده به صورتیکه با افزایش تابع حجم نانولوله‌های کربنی ضریب  $\eta_r$  کامپوزیت نیز افزایش نسبتاً بالایی نسبت به حالت اول دارد. این افزایش ضریب کامپوزیت نسبت به تابع حجم بیشتر بوده و تأثیر بیشتری بر خاصیت مدول الاستیک  $E_{\theta\theta}$  دارد. به دلیل شکل رابطه مدول  $E_{\theta\theta}$  و رابطه

مدول الاستیک کامپوزیت در راستای زاویه	$E_{\theta\theta}$	طولی استوانه، تنش برشی صفحه شعاعی و طولی و جابجایی راستای
مواد طبقه‌بندی شده تابعی	FG	زاویه‌ای صرف نظر شده است که با نتایج حاصل از روش المان محدود تطابق دارد.
مدول برشی نانولوله کربنی	$G_{z\theta}^{CNT}$	• روش حل انرژی ارائه شده در این پژوهش در نتایج مختلف، تطابق خوبی با روش حل اجزای محدود دارد.
مدول برشی ماتریس	$G_m$	• مقدار تنش در راستای طولی به مراتب بیشتر از تنش در راستای زاویه‌ای است.
مدول برشی کامپوزیت	$G_{z\theta}$	• با افزایش دما، مقادیر تنش و جابجایی نیز به صورت متناسب افزایش یافت.
ضخامت پوسته	$h$	• با افزایش تابع حجم نانولوله کربنی، مقادیر تنش و گرادیان حرارتی افزایش یافت.
ضریب انتقال حرارت نانولوله کربنی در راستای شعاع	$k_r^{CNT}$	• با افزایش تابع حجم نانولوله‌های کربنی، جابجایی در راستای شعاعی کاهش پیدا کرد.
ضریب انتقال حرارت ماتریس	$k_m$	• نتایج مربوط به توزیع حالت یک طرفه تقریباً خطی بوده و در مقابل نتایج حالت‌های عملکردی درجه بندی شده غیر خطی است.
ضریب انتقال حرارت کامپوزیت در راستای شعاع	$k_r$	• نتایج تنش راستای طولی در حالت FG-V و FG-O دارای مقدار کمتری نسبت به حالت FG-A و FG-X است، و نتایج حالت یک طرفه، میانگین دو حالت FG-V و FG-A است.
طول پوسته	$L$	• نتایج تنش راستای زاویه‌ای حالت FG-X و FG-A نسبت به نتایج حالت FG-V و FG-O دارای مقدار کمتری است و نتایج حالت یک طرفه دارای مقدار میانگین نسبت به دیگر نتایج است.
ممان راستای طول	$M_{zz}$	• جابجایی در راستای شعاعی حالت FG-V و FG-O نسبت به حالت FG-X و FG-A کمتر است. جابجایی حالت یک طرفه دارای مقدار میانگین نسبت به دیگر نتایج است.
ممان راستای زاویه	$M_{\theta\theta}$	• توزیع گرادیان حرارتی در هر نقطه که توزیع نانولوله‌ها دارای تراکم بیشتری باشد باعث کاهش اختلاف درجه حرارت بین نقاط مختلف می‌شود.
ممان حرارتی راستای طول	$M_{zz}^T$	
ممان حرارتی راستای زاویه	$M_{\theta\theta}^T$	
نیروی راستای طول	$N_{zz}$	
نیروی راستای زاویه	$N_{\theta\theta}$	
نیروی حرارتی راستای طول	$N_{zz}^T$	
نیروی حرارتی راستای زاویه	$N_{\theta\theta}^T$	
نیروی برشی راستای طول و شعاع	$Q_{rz}$	
شعاع پوسته	$r$	
شعاع داخلی پوسته	$r_1$	
شعاع خارجی پوسته	$r_o$	
دما	$T$	
دمای اولیه	$T_0$	
یکنواخت	UD	
جابجایی راستای طول	$u_z$	
جابجایی راستای شعاع	$u_r$	
تابع حجم نانولوله کربنی	$V_{CNT}^*$	مدول الاستیک نانولوله کربنی راستای طول $E_{zz}^{CNT}$
تابع حجم نانولوله‌های کربنی	$V_{CNT}$	مدول الاستیک نانولوله کربنی راستای زاویه $E_{\theta\theta}^{CNT}$
تابع حجم ماتریس	$V_m$	مدول الاستیک ماتریس $E_m$
		مدول الاستیک کامپوزیت در راستای طول $E_{zz}$
<b>علائم یونانی</b>		
زاویه	$\theta$	

- load, *Applied Mathematical Modelling*, 36(4) (2012) 1371-1394.
- [7] H.S. Shen, Y. Xiang, Nonlinear analysis of nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations in thermal environments, *Engineering Structures*, 56 (2013) 698-708.
- [8] A. Alibeigloo, K.M. Liew, Thermoelastic analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plate using theory of elasticity, *Composite Structures*, 106 (2013) 873-881.
- [9] A. Alibeigloo, Static analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plate embedded in piezoelectric layers by using theory of elasticity, *Composite Structures*, 95 (2013) 612-622.
- [10] A. Alibeigloo, Elasticity solution of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel subjected to thermo mechanical load, *Composites Part B: Engineering*, 87 (2016) 214-226.
- [11] K. Mehar, S.K. Panda, Thermoelastic analysis of FG-CNT reinforced shear deformable composite plate under various loadings, *International Journal of Computational Methods*, 14(2) (2017) 1750019.
- [12] S. Zghal, A. Frikha, Static Behavior of Carbon Nanotubes Reinforced Functionally Graded Nanocomposite Cylindrical Panels, in, Springer International Publishing, Cham, 2018, pp. 199-207.
- [13] P. Jeyaraj, I. Rajkumar, Static behavior of FG-CNT polymer nano composite plate under elevated non-uniform temperature fields, *Procedia Engineering*, 64 (2013) 825-834.
- [14] Z.X. Wang, H.S. Shen, Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, *Computational Materials Science*, 50(8) (2011) 2319-2330.
- [15] H.S. Shen, Y. Xiang, Thermal postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations, *Composite Structures*, 123 (2015) 383-392.
- [16] H.S. Shen, Y. Xiang, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells under combined axial and radial mechanical loads in thermal environment,
- تنش راستای طول  $\sigma_{zz}$
- تنش راستای زاویه  $\sigma_{\theta\theta}$
- تنش برشی در صفحه طول و شعاع  $\tau_{rz}$
- کرنش راستای طول  $\epsilon_{zz}$
- کرنش راستای زاویه  $\epsilon_{\theta\theta}$
- کرنش برشی در صفحه طول و شعاع  $\gamma_{rz}$
- تغییر زاویه راستای طول  $\beta_z$
- ضریب پواسون نانولوله کربنی  $\nu_{12}^{CNT}$
- ضریب پواسون ماتریس  $\nu^m$
- ضریب پواسون کامپوزیت  $\nu_{12}$
- ضریب انبساط حرارتی نانولوله کربنی راستای طول  $\alpha_z^{CNT}$
- ضریب انبساط حرارتی نانولوله کربنی راستای زاویه  $\alpha_\theta^{CNT}$

## مراجع

- [1] V. Anumandla, R.F. Gibson, A comprehensive closed form micromechanics model for estimating the elastic modulus of nanotube-reinforced composites, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 37(12) (2006) 2178-2185.
- [2] P. Bonnet, D. Sireude, B. Garnier, O. Chauvet, Thermal properties and percolation in carbon nanotube-polymer composites, *Applied Physics Letters*, 91(20) (2007) 201910.
- [3] M. Griebel, J. Hamaekers, Molecular dynamics simulations of the elastic moduli of polymer-carbon nanotube composites, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193(17-20) (2004) 1773-1788.
- [4] Y. Han, J. Elliott, Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/carbon nanotube composites, *Computational Materials Science*, 39(2) (2007) 315-323.
- [5] G.D. Seidel, D.C. Lagoudas, Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites, *Mechanics of Materials*, 38(8-10) (2006) 884-907.
- [6] M.H. Yas, M. Heshmati, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite beams reinforced by randomly oriented carbon nanotube under the action of moving

- piezoelectric layers, *Composite Structures*, 173 (2017) 268-280.
- [22] A. Alibeigloo, Thermoelastic analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite cylindrical panel embedded in piezoelectric sensor and actuator layers, *Composites Part B: Engineering*, 98 (2016) 225-243.
- [23] A. Alibeigloo, Three-dimensional thermoelasticity solution of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plate embedded in piezoelectric sensor and actuator layers, *Composite Structures*, 118 (2014) 482-495.
- [24] A. Alibeigloo, Elasticity solution of functionally graded carbon-nanotube-reinforced composite cylindrical panel with piezoelectric sensor and actuator layers, *Smart materials and structures*, 22(7) (2013) 075013.
- [25] H. Asadi, Numerical simulation of the fluid-solid interaction for CNT reinforced functionally graded cylindrical shells in thermal environments, *Acta Astronautica*, 138 (2017) 214-224.
- Composites Part B: Engineering*, 52 (2013) 311-322.
- [17] H.S. Shen, Torsional postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, *Composite Structures*, 116 (2014) 477-488.
- [18] K.M. Liew, Z.X. Lei, L.W. Zhang, Mechanical analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composites: a review, *Composite Structures*, 120 (2015) 90-97.
- [19] S. Jafari Mehrabadi, B. Sobhani Aragh, Stress analysis of functionally graded open cylindrical shell reinforced by agglomerated carbon nanotubes, *Thin-Walled Structures*, 80 (2014) 130-141.
- [20] D.G. Ninh, N.D. Tien, Investigation for electro-thermo-mechanical vibration of nanocomposite cylindrical shells with an internal fluid flow, *Aerospace Science and Technology*, 92 (2019) 501-519.
- [21] A. Alibeigloo, A.A. Pasha Zanoosi, Thermo-electro-elasticity solution of functionally graded carbon nanotube reinforced composite cylindrical shell embedded in

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

H. Aminivida, H. Shokrollahi, R. Beigpour, *Thermal stress analysis of the carbon nanotube reinforced composite cylindrical shells*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 53(10) (2022) 5269-5292.

DOI: [10.22060/mej.2021.19733.7099](https://doi.org/10.22060/mej.2021.19733.7099)

