Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(10) (2022) 1195-1198
DOI: 10.22060/mej.2021.19796.7116

Investigating The Influence Of Higher-Order Boundary Conditions On Free Vibrations Of Bi-Directional FG Thick Conical Micro-Shells

M. Taghizadeh, A.R. Askari*

Department of Mechanical Engineering, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran

ABSTRACT: The present paper investigates the influence of higher-order boundary conditions caused by accounting the small scales effect on free vibrations of bi-directional functionally graded thick conical micro-shells. The present model accounts for the gradation of the material length scale parameter as one of the micro-shell mechanical properties along its thickness as well as its axial axis. The modified couple stress as well as the first-order shear deformable love shell theories together with the Ritz method are employed to obtain the eigenvalue eigenvector equations governing on the free vibrations of the micro-structure. These equations are solved for some different types of boundary conditions. The present findings are compared and successfully validated by the available results in the literature. The influences of small scales, higher-order boundary conditions and power law distribution indices in both the transversal and axial directions on free vibrations of conical micro-shells are then investigated. The results reveal that higher-order boundary conditions play a crucial role in dynamics of conical micro-shells especially when these boundary conditions directly affect the eigenmodes which are dominant in the dynamics of the structure. In addition, it is observed that although the dynamics of the present conical micro-shell is affected by the power law distribution indices in both the transversal and axial directions, it is more sensitive to the transversal one.

Review History:

Received: Mar. 28, 2021
Revised: May, 2021-05-23
Accepted: Jul. 17, 2021
Available Online: Jul. 19, 2021

Keywords:

Modified couple stress theory
Conical micro-shells
Bi-directional functionally graded materials
Higher-order boundary conditions
The Ritz method

1. INTRODUCTION

Engineering at micron and sub-micron scales is very important nowadays. Bearing in mind that classical continuum mechanics is incapable of describing the behavior of small-scale structures and predicting the behavior of these structures via empirical observations and molecular dynamic simulations is very computational expensive, employing higher-order size-dependent theories of elasticity such as the Modified Couple Stress Theory (MCST) to provide mathematical models for micro-structures motivates many researchers to date.

Despite micro-beams and micro-plates, the number of research works devoted to the analysis of micro-shells based on the MCST is very limited [1]. In addition, amongst all the available literature dealing with the size-dependent investigation of micro-shells, conical structures have been less studied than other types of shells [2]. In this regard, it is worth noting that according to the best of the authors' knowledge, there exists no study in the open literature dealing with the investigation of truncated conical micro-shells made of bi-directional functionally graded materials (FGMs). Therefore, the present work aims to study the size-dependent oscillatory behavior of such structures based on the MCST.

2. MATHEMATICAL MODEL OF THE PROBLEM

According to the MCST, the deviatoric part of the couple stress tensor, conjugated with the symmetric curvature tensor, also acts on material elements of a structure and so, it should be included in the strain energy expression [3]. Considering a truncated conical micro-shell as is shown in Table. 1, the strain energy expression is given by

$$U=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{m}:\boldsymbol{\chi})\,d\Omega \tag{1}$$

where $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{m}$ and $\boldsymbol{\chi}$ denote Cauchy's stress, strain, deviatoric part of the couple stress, and symmetric curvature tensors. The micro-shell is assumed to be made of a two-phase material graded along the *x*- and *z*-directions according to the power-law distribution function. In view of the first-order shear deformable Love shell theory, the displacement field is also assumed to be as

$$\begin{aligned}u(x,\theta,z,t)&=u_0(x,\theta,t)+z\psi_x(x,\theta,t)\\ v(x,\theta,z,t)&=v_0(x,\theta,t)+z\psi_\theta(x,\theta,t)\\ w(x,\theta,z,t)&=w_0(x,\theta,t)\end{aligned} \tag{2}$$

*Corresponding author's email: ar.askari@hsu.ac.ir

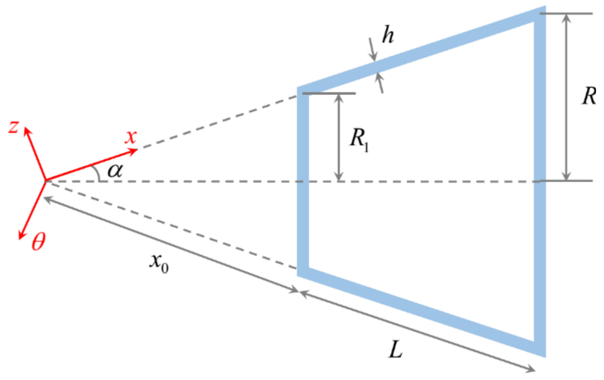


Fig. 1. Side view of a truncated conical micro-shell.

where u_0, v_0 and w_0 denote the displacements of a point placed on the mid-surface and ψ_x and ψ_θ are rotations around the x and θ axes, respectively. Substituting from the strain and kinetic energies into the Hamilton principle, discretizing the displacement components along the x and θ axes, and assuming harmonic motion for the present system, the reduced eigenvalue-eigenfunction equations associated with the present system are obtained as

$$\left([\mathbf{K}]-\omega^2[\mathbf{M}]\right)\{d\}=0 \tag{3}$$

Vanishing the determinant of $[\mathbf{K}]-\omega^2[\mathbf{M}]$, the natural frequencies of the system as well as their corresponding eigenmodes will be obtained.

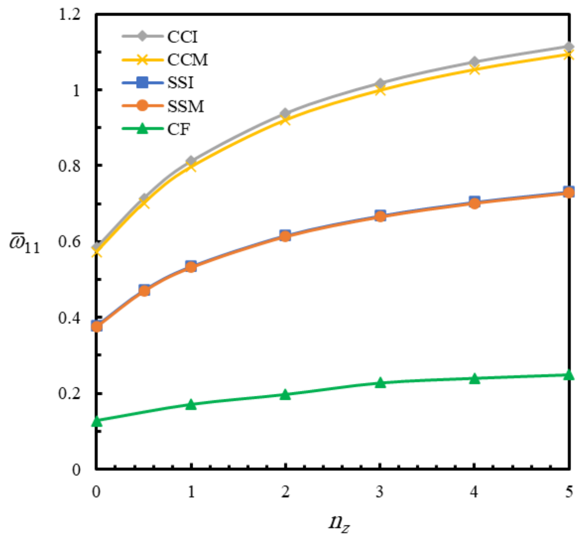
3. RESULTS AND DISCUSSIONS

To investigate the influence of small scales, a homogeneous micro-shell with mechanical properties $E=1.06$ TPa, $\nu=0.3$, $\rho=2300\,\mathrm{kg/m^3}$ and $l=h$ as well as the geometrical properties $\alpha=30^\circ$, $h/R_1=0.1$ and $L/h=50$ is considered.

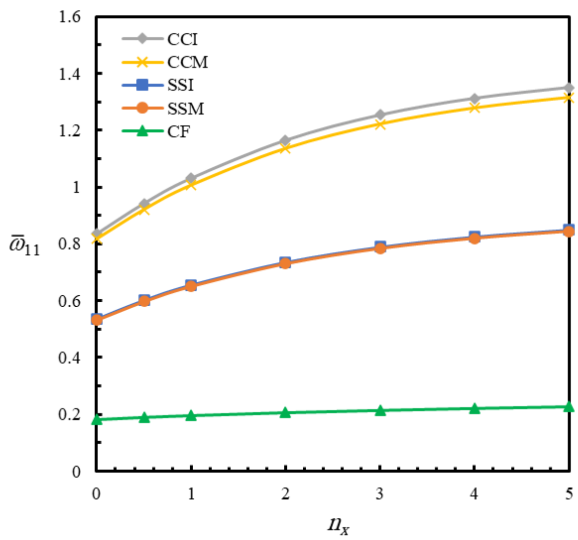
Table 1 compares the normalized size-dependent fundamental natural frequency ($\bar{\omega}=\omega R_2\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$) of this structure with and without satisfying the higher-order boundary conditions with those obtained based on the CT. As it is seen from this Table, satisfying higher-order boundary conditions satisfying a crucial role in the micro-structure dynamics especially the ones with simply supported boundary conditions.

Table. 2 investigates the influence of the power-law index on the variation of the fundamental natural frequency of the system. To this end, a conical copper-silicon graded micro-shell with geometric properties similar to those selected in the previous section is considered again. The mechanical properties of copper and silicon are assumed to be as $E_{\mathrm{Cu}}=108\,\mathrm{GPa}$, $\nu_{\mathrm{Cu}}=0.32$, $\rho_{\mathrm{Cu}}=8960\,\mathrm{kg/m^3}$, $l_{\mathrm{Cu}}=1.422\,\mu\mathrm{m}$ [4] and $E_{\mathrm{Si}}=169\,\mathrm{GPa}$, $\nu_{\mathrm{Si}}=0.3$, $\rho_{\mathrm{Si}}=2332\,\mathrm{kg/m^3}$ and $l_{\mathrm{Si}}=0.592\,\mu\mathrm{m}$ [5].

It is worth mentioning that by increasing the power-law index along with the micro-shell thickness (i.e. n_z) and length (i.e. n_x), the volume fraction of silicon increases.



(a)



(b)

Fig. 2. Variation of the fundamental natural frequency versus the power law indices

Therefore, in view of the fact that $E_{\mathrm{Si}}>E_{\mathrm{Cu}}$ and $\rho_{\mathrm{Si}}<\rho_{\mathrm{Cu}}$, increasing the power-law indices increases the fundamental natural frequency at all the considered boundary conditions. However, the influence of the power-law index along the micro-shell thickness is more than that of along its length.

4. CONCLUSIONS

This study focused on the investigation of the influence of satisfying the higher-order boundary conditions on free vibration characteristics of thick truncated conical micro-shells made of bi-directional FGM. Despite most of the previous studies, the present work accounted for the gradation of material length scale parameters along with the micro-shell thickness and length. Satisfying all the classical and non-classical higher-order essential boundary conditions, the eigenvalue-eigenfunction problem associated with the present system was solved through the Ritz method. Results revealed

Table 1. Influence of satisfying higher-order boundary conditions on the fundamental natural frequency of the present micro-shell

BCs	CT	MCST-without satisfying higher-order BCs	MCST-with satisfying higher-order BCs
SSM	0.8402	0.8800	1.1511
SSI	0.8664	0.9108	1.1829
CCM	1.2108	1.2253	1.3734
CCI	1.2427	1.2577	1.4010
CF	0.2524	0.2526	0.2635

that satisfying the higher-order boundary conditions seriously affected the natural frequencies and their corresponding mode-shapes of the micro-structure and so plays a crucial role in its dynamic. Especially, when accounting for the influence of the higher-order boundary conditions makes a serious change in the primary variables affecting the transversal stiffness of the structure. It was found that considering the influence of couple stress components increases the natural frequencies of the micro-structure at all types of the studied boundary conditions. In addition, it was observed that increasing the power law indices along both the length and thickness of the micro-shell increases the natural frequencies of the system. However, these changes are more sensitive to the thickness index than the length.

REFERENCES

[1] J. Awrejcewicz, A.V. Krysko, M.V. Zhigalov, V.A. Krysko, Size-Dependent Theories of Beams, Plates and Shells, in: J. Awrejcewicz, A.V. Krysko, M.V. Zhigalov, V.A. Krysko (Eds.) Mathematical Modelling and Numerical Analysis of Size-Dependent Structural Members in Temperature Fields: Regular and Chaotic Dynamics of Micro/Nano Beams, and Cylindrical Panels, Springer International Publishing, Cham, 2021, pp. 25-78.

[2] H. Zeighampour, Y. Tadi Beni, Analysis of conical shells in the framework of coupled stresses theory, Int. J. Eng. Sci., 81 (2014) 107-122.

[3] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, Int. J. Solids Struct., 39 (2002) 2731-2743.

[4] Z. Li, Y. He, J. Lei, S. Guo, D. Liu, L. Wang, A standard experimental method for determining the material length scale based on modified couple stress theory, Int. J. Mech. Sci., 141 (2018) 198-205.

[5] M. Rahaeifard, M.H. Kahrobaiyan, M. Asghari, M.T. Ahmadian, Static pull-in analysis of microcantilevers based on the modified couple stress theory, Sensor Actuat. A-Phys. , 171 (2011) 370-374.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Taghizadeh, A.R. Askari, Investigating the influence of higher-order boundary conditions on free vibrations of Bi-directional FG thick conical micro-shells, Amirkabir J. Mech Eng., 53(10) (2022) 1195-1198.

DOI: 10.22060/mej.2021.19796.7116

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ۱۰، سال ۱۴۰۰، صفحات ۵۰۸۵ تا ۵۱۰۴
DOI: 10.22060/mej.2021.19796.7116

بررسی تأثیر شرایط مرزی مرتبه بالا بر ارتعاشات آزاد ریزپوسته‌های ضخیم مخروطی مدرج تابعی دوجهته

محسن تقی‌زاده، امیر رضا عسکری*

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

خلاصه: پژوهش پیش‌رو تأثیر شرایط مرزی مرتبه بالای ناشی از در نظر گرفتن اثر ابعاد کوچک را بر ارتعاشات آزاد ریزپوسته‌های ضخیم مخروطی مدرج تابعی دوجهته بررسی می‌کند. مدل حاضر تغییرات پارامتر مقیاس طول مادی را به‌عنوان یکی از خواص مکانیکی ریزپوسته در راستای ضخامت و همچنین در امتداد محور طولی آن مد نظر قرار می‌دهد. تئوری‌های تنش‌کوپل بهبود یافته و پوسته لاو با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول به‌همراه روش ریتز به‌خدمت گرفته می‌شوند تا معادلات مقدار ویژه - بردار ویژه حاکم بر ارتعاشات آزاد ریز سازه تعیین شوند. این معادلات برای چند شرط مرزی مختلف حل می‌گردند. نتایج حاضر با نتایج موجود در مقالات مرتبط مقایسه و به‌صورت موفقیت‌آمیزی صحه‌گذاری می‌شوند. سپس اثرات ابعاد کوچک، شرایط مرزی مرتبه بالا و اندیس‌های تابع توزیع توانی در هر دو راستای عرضی و طولی بر ارتعاشات ریزپوسته‌های مخروطی شکل مورد بررسی قرار می‌گیرند. نتایج حاکی از آنند که شرایط مرزی مرتبه بالا نقشی حیاتی در دینامیک ریزپوسته مخروطی بازی می‌کنند؛ خصوصاً هنگامی‌که این شرایط مرزی مودهای غالب در دینامیک سازه را مستقیماً تحت تأثیر قرار می‌دهند. همچنین مشاهده گردید اگرچه دینامیک ریزپوسته مخروطی حاضر از اندیس‌های تابع توزیع توانی در هر دو راستای عرضی و طولی تحت تأثیر می‌پذیرد، اما حساسیت بیشتری نسبت به اندیس عرضی دارد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۰۸
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۳/۰۲
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۲۶
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۴/۲۸

کلمات کلیدی:
تئوری تنش‌کوپل بهبود یافته
ریزپوسته‌های مخروطی
مواد مدرج تابعی دوجهته
شرایط مرزی مرتبه بالا
روش ریتز

۱- مقدمه

امروزه مهندسی در ابعاد میکرو و نانو بسیار حائز اهمیت می‌باشد. ریزساختارها بدلیل قابلیت تولید انبوه و کاربردهای فراوانی که در صنایع گوناگون از جمله صنایع مرتبط با ابزارهای میکروالکترومکانیکی دارند، توجه محققین بسیاری را به خود جلب نموده‌اند. در این میان، محققان بدلیل هزینه بر بودن روش‌های تجربی و مدل‌سازی دینامیک مولکولی این سازه‌ها و از طرفی ناکارآمدی مکانیک محیط پیوسته کلاسیک، به سراغ تئوری‌های محیط پیوسته مرتبه‌بالایی رفته‌اند که قابلیت توصیف اثر ابعاد کوچک بر رفتار این سازه‌ها را داشته باشند [۱]. یکی از کارآمدترین تئوری‌ها در این زمینه تئوری تنش‌کوپل بهبود یافته است که اولین بار در سال ۲۰۰۲ توسط یانگ و همکاران [۲] معرفی گردید. بر اساس این تئوری علاوه بر تانسور تنش کلاسیک، بخش انحرافی مؤلفه‌های تنش‌کوپل نیز بر تغییر شکل یک المان مؤثر بوده و به همراه مؤلفه‌های تنش در انرژی کرنشی سازه دخیل هستند. همچنین همان‌طور که مؤلفه‌های تنش و کرنش مزدوج یکدیگر بوده و از طریق قانون هوک با هم مرتبط می‌شوند، بخش انحرافی تانسور تنش کوپل نیز مزدوج بخش متقارن تانسوری موسوم به تانسور انحنا می‌باشد. این دو تانسور نیز از طریق تنها یک ثابت مادی به نام پارامتر مقیاس طول مادی[1] برای مواد همسان‌گرد با هم در ارتباط هستند. لازم بذکر است پارامتر مقیاس طول مادی خاصیتی از یک ماده می‌باشد که به صورت آزمایشگاهی قابل تعیین است [۳].

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ar.askari@hsu.ac.ir

1 Material length scale parameter

تاکنون پژوهش‌های بسیاری بر بررسی ارتعاشات ریزسازه‌ها بر اساس تئوری تنش‌کوپل بهبود یافته متمرکز شده است [۷-۴]. هرچند در این میان، ریزپوسته‌ها تاکنون کمتر از سایر انواع ریزساختارها مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در ادامه مهمترین پژوهش‌های منتشر شده در زمینه بررسی ارتعاشات آزاد وابسته به بعد ریزپوسته‌های استوانه‌ای شکل مرور خواهند شد. ضیغم‌پور و طادی‌بنی [۸] معادلات حرکت را برای ریزپوسته‌ای استوانه‌ای شکل با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های برشی استخراج نمودند. آن‌ها ارتعاشات آزاد ریزسازه را برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با استفاده از روش حل ناویر[1] مورد بررسی قرار دادند. طادی‌بنی و همکاران [۹] همچنین معادلات حرکت وابسته به بعد را برای ریزپوسته‌ای استوانه‌ای شکل و نازک ساخته شده از مواد مدرج تابعی در راستای ضخامت استخراج نمودند. آن‌ها ارتعاشات آزاد سازه مذکور را برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با استفاده از روش حل ناویر مورد بررسی قرار دادند. شایان ذکر است علی رغم این حقیقت که پارامتر مقیاس طول مادی نیز می‌بایست مانند سایر خواص مکانیکی در راستای ضخامت متغیر در نظر گرفته شود [۱۰ و ۱۱]، آن‌ها از تغییرات آن صرف نظر کرده و آن را ثابت فرض کرده بودند. طادی‌بنی و همکاران [۱۲] هم‌چنین اثر تغییر شکل‌های برشی را بر ارتعاشات آزاد وابسته به بعد ریزپوسته‌های استوانه‌ای ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده از طریق روش حل ناویر مورد بررسی قرار دادند. لازم بذکر است در این پژوهش نیز از تغییرات پارامتر مقیاس طول مادی در راستای ضخامت صرف نظر شده بود.

ضیغم‌پور و شجاعیان [۱۳] ارتعاشات آزاد وابسته به بعد ریزپوسته‌های استوانه‌ای ضخیم ساخته از مواد مدرج تابعی ساندویچی را با استفاده از روش حل ناویر برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در این پژوهش سه چینش مختلف مدرج تابعی شامل هسته سرامیکی- سطوح فلزی، هسته فلزی- سطوح سرامیکی و هسته مدرج تابعی-سطح درونی فلزی-سطح بیرونی سرامیکی برای سازه در نظر گرفته و تأثیر همزمان ابعاد کوچک، تغییر شکل‌های برشی و تغییر جنس در راستای ضخامت را بر فرکانس‌های طبیعی سازه مورد بررسی قرار دادند. لازم بذکر است آن‌ها نیز از تغییرات پارامتر مقیاس طول مادی در راستای ضخامت صرف نظر نمودند.

قدیری و صفرپور [۱۴] ارتعاشات آزاد ریزپوسته‌های استوانه‌ای ضخیم ساخته شده از مواد متخلخل مدرج تابعی را در حضور اختلاف دما بین سطوح داخلی و خارجی آن‌ها مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها گرادیان دمای بین سطح داخلی و خارجی ریزپوسته را به‌صورت خطی فرض کرده و خواص مکانیکی سازه را نیز وابسته به دما در نظر گرفتند. آن‌ها همچنین در مرجع [۱۵] پاسخ ارتعاشات آزاد وابسته به بعد یک نانو پوسته ضخیم استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی واقع بر بستر الاستیک از نوع پاسترناک[2] را مورد مطالعه قرار داده و با در نظر گرفتن شرایط مرزی ریزسازه از نوع تکیه‌گاه ساده، معادلات مقدار ویژه حاکمه را با استفاده از روش ناویر حل نمودند. آن‌ها همچنین نتایج خود را برای ریزپوسته‌های ساخته شده از مواد همگن با نتایج حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی موجود در پژوهش‌های پیشین صحه‌گذاری نمودند. لازم بذکر است آن‌ها در این دو پژوهش تأثیر تغییرات خواص به‌صورت مدرج تابعی را بر پارامتر مقیاس طول در نظر نگرفتند.

رضوی و همکاران [۱۶] ارتعاشات آزاد وابسته به بعد ریزپوسته‌های نازک ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی[3] را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با ثابت فرض کردن پارامتر مقیاس طول مادی، معادلات مقدار ویژه حاکم بر مسأله را برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده از طریق روش ناویر و برای تکیه‌گاه گیردار توسط روش گالرکین حل نمودند. زِنگ و همکاران [۱۷] ارتعاشات آزاد وابسته به بعد ریزپوسته‌های استوانه‌ای نازک ساخته شده از مواد فلکسوالکتریک[4] را برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده توسط روش ناویر مورد بررسی قرار دادند. لازم بذکر است برخلاف سایر پژوهش‌های منتشر شده تا آن زمان که تأثیر ابعاد کوچک بر رفتار الکترومکانیکی مواد پیزوالکتریک به‌عنوان نوع خاصی از مواد فلکسوالکتریک را مد نظر قرار نمی‌دادند، آن‌ها در این مطالعه اثر ابعاد کوچک را در مدل‌سازی این مواد در نظر گرفتند.

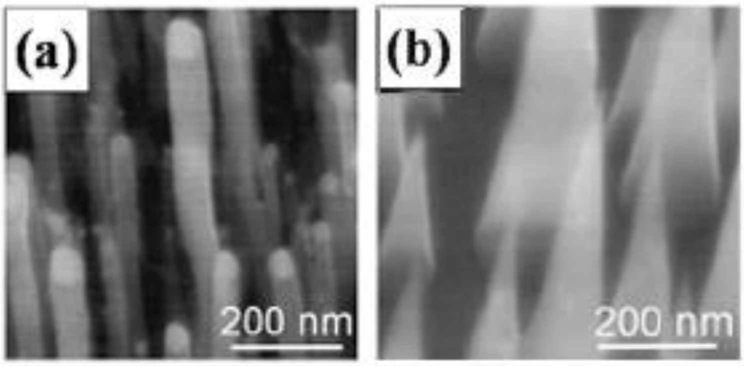
وانگ و همکاران [۱۸] با استفاده از یک تئوری واحد اثر همزمان ابعاد کوچک و تغییر شکل‌های برشی را بر ارتعاشات آزاد ریزپوسته‌های ضخیم استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی مورد بررسی قرار دادند. شایان ذکر است تئوری تغییر شکل برشی استفاده

1 Navier solution

2 Pasternak

3 Functionally Graded Piezoelectric Materials (FGPM)

4 Flexoelectric materials



شکل ۱. نانولوله کربنی (a) و نانومخروط کربنی (b) بکار رفته در پراب میکروسکوپ نیروی اتمی [۲۵]
Fig. 1. (a) Carbon nanotube AFM probe (b) Carbon nanocone AFM probe [25]

شده توسط ایشان با تغییر تابع کرنش برشی[۱] قابلیت ارائه نتایج بر اساس تئوری‌های برشی مرتبه اول و سوم را داشت. هرچند آن‌ها نیز از تغییرات پارامتر مقیاس مادی طول در راستای ضخامت صرف نظر کرده بودند. احیایی و همکاران [۱۹] ارتعاشات آزاد وابسته به بعد ریزپوسته‌های استوانه‌ای دولایه ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی را با استفاده از روش تربیعات تفاضلی تعمیم یافته برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند. لازم بذکر است برخلاف سایر پژوهش‌های منتشر شده تا آن زمان، آن‌ها پارامتر مقیاس طول مادی را نیز مانند سایر خواص مکانیکی در راستای ضخامت متغیر در نظر گرفتند. هرچند شرایط مرزی مرتبه بالای ناشی از در نظر گرفتن اثر مؤلفه‌های تنش‌کوپل در مدل ارائه شده توسط ایشان اقناع نشده بود.

ریزپوسته‌های مخروطی برخلاف ریزپوسته‌های استوانه‌ای شکل، تاکنون کمتر مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته‌اند. ریزپوسته‌های مخروطی در زمینه‌های گوناگونی از قبیل پلاسمای سرد و گسیل‌کننده میدان[۲] [۲۰]، جاذب‌ها [۲۱]، حسگرهای مکانیکی [۲۲ و ۲۳]، میکروسکوپ نوری میدان نزدیک روبشی[۳] [۲۴] و میکروسکوپ نیروی اتمی[۴] [۲۵] بکار گرفته می‌شوند. علاوه بر این، کاربرد ریزپوسته مخروطی می‌تواند به طور چشمگیری خواص اپتیکی و الکتریکی سلول‌های خورشیدی را بهبود بخشد به نحوی که میزان جذب سلول‌های خورشیدی دارای نانو پوسته مخروطی حدود ۹٪ بیشتر از سلول‌های خورشیدی حاوی نانوسیم[۵] می‌باشد [۲۶]. همچنین از نانو مخروط‌های طلایی به منظور ساخت آرایه‌های زیست سازگار[۶] استفاده می‌شود زیرا این نوع ابزارها بستری مناسب با خواص منحصر به فرد برای مطالعه رفتار یاخته‌های عصبی هستند [۲۷]. در شکل ۱ تصویر ثبت شده توسط میکروسکوپ الکترونی روبشی، از نانولوله‌های کربنی و نانومخروط‌های کربنی رشدیافته در بستر سیلیکونی نشان داده شده است. این ریزپوسته‌ها در پراب میکروسکوپ نیروی اتمی استفاده می‌شوند.

ریزپوسته‌های مخروطی می‌توانند از جنس مواد مدرج تابعی تک‌جهته یا دوجهته ساخته شوند. مواد مدرج تابعی دو جهته اغلب به‌منظور بهینه کردن رفتار مکانیکی یا حرارتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. به‌عنوان نمونه ژیان و باترا [۲۸] با استفاده از روش بدون المان پتروف-گالرکین[۷] فرکانس طبیعی اول و دوم یک صفحه از جنس مواد مدرج تابعی دوجهته را نسبت به اندیس‌های تابع توانی توزیع حجمی بیشینه کردند. برای ساخت مواد مدرج تابعی از روش‌های گوناگونی مانند رسوب‌دهی فیزیکی بخار[۸]، رسوب‌دهی شیمیایی بخار[۹]، رسوب‌دهی الکتریکی[۱۰]، پاشش حرارتی[۱۱]، متالورژی پودر[۱۲]، ساخت افزایشی[۱۳] و ریخته‌گری گردابی[۱۴] استفاده می‌شود [۲۹]. شایان ذکر است از روش رسوب‌دهی بخار و رسوب‌دهی الکتریکی برای ساخت مواد مدرج چندجهته و در مقیاس کوچک می‌توان

1 Shear–strain function
2 Cold electron and field emitter
3 Scanning near-field optical microscope
4 Atomic force microscopy imaging
5 Nanowire

6 Bio-interface arrays
7 Meshless Petrov–Galerkin method
8 Physical vapor deposition method
9 Chemical vapor deposition method
10 Electrodeposition methods
11 Thermal spray method
12 Powder metallurgy method
13 Additive manufacturing methods
14 Centrifugal casting methods

استفاده نمود [۲۹].

در ادامه پژوهش‌هایی که بر بررسی ارتعاشات آزاد وابسته به بعد ریز سازه‌های مخروطی متمرکز شده‌اند بررسی می‌شود. ضیغم‌پور و طادی‌بنی [۳۰] ارتعاشات آزاد وابسته به بعد ریزپوسته‌های مخروطی شکل نازک را برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده توسط روش ناویر مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها ضمن استخراج معادلات حاکم بر حرکت، شرایط مرزی مرتبه بالای ناشی از در نظر گرفتن تأثیر مؤلفه‌های تنش‌کوپل را نیز تعیین نمودند. ضیغم‌پور و همکارانش همچنین در مرجع [۳۱] مدل وابسته به بعدی برای بررسی ارتعاشات آزاد ریزپوسته‌های ضخیم مخروطی شکل ارائه نمودند. آن‌ها معادلات مقدار ویژه حاکمه را برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده از طریق روش ناویر حل نمودند. طادی‌بنی و مهرعلیان [۳۲] ارتعاشات آزاد وابسته به بعد ریزپوسته‌های نازک مخروطی شکل ساخته شده از مواد مدرج تابعی را با استفاده از روش ناویر برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده حل نمودند. لازم بذکر است در این پژوهش نیز از تغییرات پارامتر مقیاس طول مادی در راستای ضخامت صرف نظر شده بود. یوان و همکاران [۳۳] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و در نظر گرفتن تأثیر جابجایی‌های بزرگ، معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت یک ریزپوسته مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با استفاده از روش تربیعات تفاضلی تعمیم یافته به همراه روش گالرکین، ارتعاشات خطی و غیرخطی ریزپوسته‌های مخروطی را برای شرایط مرزی دو طرف گیردار، یک طرف‌گیردار طرف دیگر تکیه‌گاه ساده و هر دو طرف تکیه‌گاه ساده بررسی نمودند. لازم بذکر است ایشان نیز از تغییرات پارامتر مقیاس طول مادی صرف نظر نموده بودند. همچنین آن‌ها شرایط مرزی مرتبه بالای ناشی از در نظر گرفتن تأثیر مؤلفه‌های تنش‌کوپل را در مد نظر قرار نداده بودند.

بر اساس مرور ادبیات انجام شده در بالا، مشاهده می‌گردد تأثیر شرایط مرزی مرتبه بالای ناشی از در نظر گرفتن اثر مؤلفه‌های تنش‌کوپل بر ارتعاشات آزاد ریزپوسته‌های ضخیم مخروطی تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. همچنین دیده می‌شود در تمام مدل‌های ارائه شده برای ریزپوسته‌های مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی از تغییرات پارامتر مقیاس طول مادی صرف نظر شده و این خاصیت مکانیکی ماده که در ابعاد میکرون بروز می‌کند بر خلاف سایر خواص ثابت فرض شده است. بعلاوه مشاهده می‌گردد، اکثر پژوهش‌های منتشر شده به بررسی تغییرات خواص مکانیکی به صورت مدرج تابعی در راستای ضخامت پرداخته‌اند، حال آنکه ریزپوسته‌های مدرج تابعی در راستای محور پوسته نیز کاربردهای فراوانی در مهندسی دارند [۳۴]. بنابراین پژوهش حاضر به مطالعه ارتعاشات آزاد ریزپوسته‌های ضخیم به شکل مخروط ناقص ساخته شده از مواد مدرج تابعی دوجهته (هم در راستای ضخامت و هم در امتداد محور پوسته) می‌پردازد. بدین منظور معادلات مقدار ویژه حاکم بر ارتعاشات آزاد ریزپوسته حاضر با اقناع تمام شرایط مرزی ضروری متناظر توسط روش ریتز[1] حل می‌گردند. در ادامه تأثیر اقناع و یا عدم اقناع شرایط مرزی مرتبه بالای ناشی از در نظر گرفتن تأثیر مؤلفه‌های تنش‌کوپل نیز بر فرکانس‌های طبیعی ریزسازه و شکل‌مودهای متناظر با آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲- استخراج مدل ریاضی مسأله

بر اساس تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته [۲] بخش انحرافی تانسور تنش‌کوپل مزدوج با بخش متقارن تانسور گرادیان چرخش، تانسور انحنا، بوده و تنها از طریق یک پارامتر مقیاس طول مادی با آن مرتبط می‌شود. بنابراین انرژی کرنشی در این تئوری علاوه بر تانسورهای تنش کوشی و کرنش، شامل تانسورهای تنش‌کوپل و انحنا نیز می‌باشد. انرژی کرنشی بر اساس این تئوری برای یک جسم با حجم Ω به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$U=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{m}:\boldsymbol{\chi}\right)d\Omega \tag{۱}$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}$، $\boldsymbol{\varepsilon}$، $\mathbf{m}$ و $\boldsymbol{\chi}$ به ترتیب تانسور تنش کوشی، تانسور کرنش کوشی، تانسور تنش‌کوپل و تانسور متقارن انحنا هستند. این تانسورها به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{u}+\left(\nabla\mathbf{u}\right)^{T}\right] \tag{۲ الف}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\lambda tr\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right)+2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \tag{۲ ب}$$

$$\boldsymbol{\chi}=\frac{1}{2}\left[\nabla\boldsymbol{\Theta}+\left(\nabla\boldsymbol{\Theta}\right)^{\mathrm{T}}\right] \tag{۲ ج}$$

1 Ritz's method

$$\mathbf{m}=2\mu l^2\boldsymbol{\chi} \tag{۲ د}$$

در روابط (۲) $\mathbf{u}$ بردار جابجایی، $\lambda=E\upsilon/(1-\upsilon)(1-2\upsilon)$ و $\mu=E/(2+2\upsilon)$ ثوابت لامه، l پارامتر مقیاس طول مادی و $\boldsymbol{\Theta}$ بردار چرخش هستند. لازم بذکر است بردار $\boldsymbol{\Theta}$ بر اساس رابطه‌ی زیر به بردار جابجایی مرتبط می‌شود:

$$\boldsymbol{\Theta}=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u} \tag{۳}$$

شکل ۱ نمای جانبی مخروط ناقصی از جنس ماده‌ای مدرج تابعی دوجهته را نشان می‌دهد. مطابق این شکل محور x در جهت یال مخروط و محور z در راستای ضخامت آن در نظر گرفته شده است. θ نیز بیان‌گر جهت محیطی می‌باشد. در این شکل R_1 شعاع قاعده کوچکتر و R_2 شعاع قاعده بزرگتر است. همچنین α زاویه رأس مخروط بوده و L طول یال آن را نشان می‌دهد.

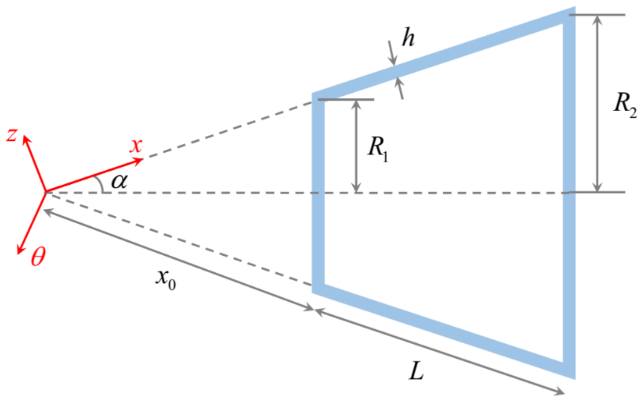
بر اساس قانون هوک تعمیم‌یافته، معادلات ساختاری برای مخروطی از جنس مواد مدرج تابعی با فرض تنش صفحه‌ای در تئوری مرتبه اول برشی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{x\theta}\\ \sigma_{zx}\\ \sigma_{z\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0\\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ 2\varepsilon_{x\theta}\\ 2k_s\varepsilon_{zx}\\ 2k_s\varepsilon_{z\theta}\end{Bmatrix} \tag{۴}$$

که در آن ثوابت الاستیک Q_{11}، Q_{12}، Q_{21}، Q_{22}، Q_{33}، Q_{44} و Q_{66} به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}&Q_{11}=Q_{22}=\frac{E(x,z)}{1-\upsilon(x,z)^2},\ Q_{12}=\\ &Q_{21}=\frac{\upsilon(x,z)E(x,z)}{1-\upsilon(x,z)^2},\ Q_{33}=\\ &Q_{44}=Q_{55}=\mu(x,z)\end{aligned} \tag{۵}$$

همچنین k_s ضریب تصحیح برشی می‌باشد. در رابطه (۵)، $E(x,z)$ و $\nu(x,z)$ به ترتیب مدول الاستیسته و نسبت پوآسون هستند. شایان ذکر است چون مخروط ناقص مورد نظر از جنس



شکل ۲ . نمای جانبی ریز مخروط ناقص

Fig. 2. Side view of a truncated conical micro-shell

ماده‌ای مدرج تابعی دوجهته ساخته شده است، خواص آن بطور پیوسته از یکی از اجزا (به‌طور مثال فلز) به جزء دیگر (مثلاً سرامیک) تغییر می‌کند، مدول الاستیسته و نسبت پوآسون تابعی از x و z می‌باشند.

همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد، مواد مدرج تابعی معمولاً از دو جنس متفاوت (بطور مثال فلز و سرامیک) تشکیل می‌شوند و خواص ماده مدرج تابعی بطور پیوسته از یکی از اجزا به دیگری تغییر می‌کند. در این حالت اگر نسبت حجمی فلز $V_m(x,z)$ باشد، نسبت حجمی سرامیک به صورت $V_c(x,z)=1-V_m(x,z)$ خواهد بود. این نسبت‌های حجمی می‌توانند با توابع مختلفی بیان شوند. در این مطالعه از قانون توزیع توانی استفاده شده است. براساس قانون توزیع توانی، کسر حجمی پوسته مخروطی مدرج تابعی دوجهته بصورت پیوسته در دو جهت x و z به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$V_m(x,z)=\left(\frac{x-x_0}{L}\right)^{n_x}\left(\frac{h-2z}{2h}\right)^{n_z} \tag{۶}$$

که در آن n_x و n_z اندیس تابع توانی و اعدادی حقیقی و بزرگتر از صفر هستند. قابل توجه است اندیس‌های تابع توانی درصد اختلاط سرامیک و فلز را در دو جهت x و z کنترل می‌کنند. به‌عنوان مثال با برابر صفر قرار دادن n_x، ماده‌ای مدرج تابعی تک جهته در راستای ضخامت به وجود خواهد آمد که در سطح داخلی مخروط ناقص تماماً از فلز و در سطح بیرونی آن تماماً از سرامیک ساخته شده است. همچنین با برابر صفر قرار دادن n_z، به ماده‌ای مدرج تابعی تک جهته در راستای طول منجر می‌شود که در سمت قاعده کوچک

مخروط ناقص تماماً از سرامیک و در سمت قاعده بزرگتر آن تماماً از فلز ساخته شده است. لازم بذکر است میل کردن هریک از اندیس‌های تابع توانی n_x و n_z به سمت بی‌نهایت، مخروطی ناقص و همگن تماماً از جنس سرامیک بدست خواهد داد. بنابراین بر اساس قانون اختلاط تغییرات خاصیت دلخواه P مطابق رابطه (۷) متناسب با کسر حجمی مواد سازنده در نظر گرفته می‌شود:

$$P(x,z)=P_mV_m(x,z)+P_cV_c(x,z) \tag{۷}$$

که در آن زیروند m مربوط به فلز و زیروند c مرتبط با سرامیک می‌باشد.

۲-۱- میدان جابجایی

میدان جابجایی برای یک پوسته مخروطی با فرض تئوری مرتبه اول برشی در راستاهای نشان داده شده در شکل ۱، بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۳۵]:

$$\begin{aligned}
u(x,\theta,z,t)&=u_0(x,\theta,t)+z\,\psi_x(x,\theta,t)\\
v(x,\theta,z,t)&=v_0(x,\theta,t)+z\,\psi_\theta(x,\theta,t)\\
w(x,\theta,z,t)&=w_0(x,\theta,t)
\end{aligned} \tag{۸}$$

در روابط فوق $u_0(x,\theta,t)$، $v_0(x,\theta,t)$ و $w_0(x,\theta,t)$ جابجایی‌های نقطه‌ای واقع بر سطح میانی ریزپوسته به ترتیب در امتداد محورهای x، θ و z هستند. همچنین $\psi_x(x,\theta,t)$ و $\psi_\theta(x,\theta,t)$ به ترتیب نمایان‌گر چرخش حول محورهای x و θ می‌باشند.

۲-۲- انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار انجام شده توسط نیروهای خارجی

در این پژوهش با نوشتن روابط کرنش-جابجایی، قانون هوک، استفاده از اصل همیلتون و نهایتاً گسسته‌سازی جابجایی‌ها مطابق روش ریتز، دستگاه معادلات مقدار اولیه حاکم بر حرکت یک پوسته مخروطی ساخته شده از جنس مواد مدرج تابعی دوجهته استخراج می‌گردد. مطابق فرضیات تئوری لاو[1]، یعنی $1\pm z/x\tan\alpha\approx 1$ و $(z/x\tan\alpha)^2\approx 0$، مؤلفه‌های غیر صفر تانسور کرنش با جایگذاری از روابط (۸) در معادله‌ی (۲ الف) بر اساس تئوری مرتبه اول برشی، به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}&=\frac{\partial u_0}{\partial x}+z\frac{\partial\psi_x}{\partial x},\\
\varepsilon_{\theta\theta}&=\frac{1}{x\sin\alpha}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial v_0}{\partial\theta}+\sin\alpha(u_0+z\psi_x)+\\ w_0\cos\alpha+z\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\end{array}\right],\\
\varepsilon_{x\theta}=\varepsilon_{\theta x}&=\frac{1}{2x\sin\alpha}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial u_0}{\partial\theta}+x\sin\alpha\left(\dfrac{\partial v_0}{\partial x}+z\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial x}\right)-\\ \sin\alpha\left(v_0+z\psi_\theta\right)+z\dfrac{\partial\psi_x}{\partial\theta}\end{array}\right],\\
\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w_0}{\partial x}+\psi_x\right],\\
\varepsilon_{z\theta}=\varepsilon_{\theta z}&=\frac{1}{2x\sin\alpha}\left[\frac{\partial w_0}{\partial\theta}-v_0\cos\alpha+x\psi_\theta\sin\alpha\right].
\end{aligned} \tag{۹}$$

مؤلفه‌های تانسور متقارن انحنا نیز با جایگذاری از روابط (۸) در معادله (۲ ج) مطابق زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
\chi_{xx}&=\frac{1}{2x\sin\alpha}\left[\begin{array}{l}\cos\alpha\left(\dfrac{v_0}{x}+\dfrac{z\psi_\theta}{x}-\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\right)+\\ \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial\theta}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial w_0}{\partial\theta}-x\sin\alpha\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial x}\end{array}\right],\\
\chi_{\theta\theta}&=\frac{1}{2x\sin\alpha}\left[\begin{array}{l}\cos\alpha\dfrac{\partial v_0}{\partial x}-\dfrac{1}{x\tan\alpha}\dfrac{\partial u_0}{\partial\theta}-\\ \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial\theta}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial w_0}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\psi_x}{\partial\theta}-\\ \psi_\theta\sin\alpha+z\cos\alpha\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial x}\end{array}\right],\\
\chi_{zz}&=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\cos\alpha}{x^2\sin^2\alpha}\dfrac{\partial u_0}{\partial\theta}-\dfrac{v_0\cos\alpha}{x^2\sin\alpha}+\\ \dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial x}-\dfrac{1}{x\sin\alpha}\dfrac{\partial\psi_x}{\partial\theta}+\dfrac{\psi_\theta}{x}\end{array}\right],\\
\chi_{x\theta}=\chi_{\theta x}&=\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{x^2\sin^2\alpha}\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}-\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\\ \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial w_0}{\partial x}-\dfrac{\cos\alpha}{x^2\sin^2\alpha}\dfrac{\partial v_0}{\partial\theta}+\\ \dfrac{\partial\psi_x}{\partial x}-\dfrac{\psi_x}{x}-\dfrac{1}{x\sin\alpha}\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\end{array}\right],\\
\chi_{z\theta}=\chi_{\theta z}&=\frac{1}{4x\sin\alpha}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial\theta}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial v_0}{\partial\theta}-\\ \dfrac{1}{x\sin\alpha}\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2}+\cos\alpha\dfrac{\partial w_0}{\partial x}-\\ \psi_x\cos\alpha-\dfrac{z}{x\sin\alpha}\dfrac{\partial^2\psi_x}{\partial\theta^2}+\\ z\dfrac{\partial^2\psi_\theta}{\partial x\partial\theta}+\dfrac{z}{x}\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\end{array}\right],\\
\chi_{xz}=\chi_{zx}&=\frac{1}{4x\sin\alpha}\left[\begin{array}{l}\sin\alpha\dfrac{\partial v_0}{\partial x}+x\sin\alpha\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\\ \dfrac{v_0\cos 2\alpha}{x\sin\alpha}-\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial\theta}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u_0}{\partial\theta}-\\ \dfrac{\cos\alpha}{x\sin\alpha}\dfrac{\partial w_0}{\partial\theta}\\ -z\dfrac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial\theta}+\dfrac{z}{x}\dfrac{\partial\psi_x}{\partial\theta}-\psi_\theta\cos\alpha+\\ z\sin\alpha\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial x}+zx\sin\alpha\dfrac{\partial^2\psi_\theta}{\partial x^2}\end{array}\right].
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

1 Love's shell theory

بر اساس اصل همیلتون می‌توان نوشت:

$$\delta\int_{t_i}^{t_f}\left(T-U+W_{ext}\right)dt=0 \tag{۱۱}$$

که در معادله بالا T انرژی جنبشی، U انرژی کرنشی و W_{ext} کار نیروهای خارجی است. برای محاسبه انرژی کرنشی بر حسب مؤلفه‌های میدان جابجایی، کافیست روابط کرنش-جابجایی (۹) بهمراه معادلات انحنا-جابجایی (۱۰) در رابطه (۱) جایگذاری شوند. با انتگرال‌گیری از روابط حاصله در راستای ضخامت و ساده‌سازی نتایج می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
U=&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+L}\Bigg(N_{xx}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\\
&\left(\begin{array}{l}\dfrac{N_{x\theta}}{x\sin\alpha}-\dfrac{\Upsilon_{\theta\theta}\cos\alpha}{2x^2\sin^2\alpha}+\\ \dfrac{\Upsilon_{zz}\cos\alpha}{2x^2\sin^2\alpha}+\dfrac{\Upsilon_{xz}}{2x^2\sin^2\alpha}\end{array}\right)\frac{\partial u_0}{\partial\theta}-\\
&\left(\frac{\Upsilon_{z\theta}}{2x^2\sin^2\alpha}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2}-\left(\frac{\Upsilon_{zx}}{2x\sin\alpha}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial\theta}+\\
&\left(\frac{N_{\theta\theta}}{x}-\frac{N_{xx}}{x}\right)u_0+\left(\frac{\Upsilon_{z\theta}}{2x\sin\alpha}\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial\theta}+\\
&\left(\frac{N_{\theta\theta}}{x\sin\alpha}-\frac{\Upsilon_{x\theta}\cos\alpha}{x^2\sin^2\alpha}-\frac{\Upsilon_{z\theta}}{x^2\sin^2\alpha}\right)\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+\\
&\left(N_{x\theta}-\frac{\Upsilon_{xx}}{2x\tan\alpha}+\frac{\Upsilon_{\theta\theta}}{2x\tan\alpha}-\frac{\Upsilon_{xz}}{2x}\right)\frac{\partial v_0}{\partial x}+\\
&\left(\begin{array}{l}\dfrac{-2N_{x\theta}}{x}-\dfrac{Q_{z\theta}}{x\tan\alpha}+\dfrac{\Upsilon_{xx}}{2x^2\tan\alpha}-\\ \dfrac{\Upsilon_{zz}}{2x^2\tan\alpha}+\dfrac{\Upsilon_{xz}\cos 2\alpha}{2x^2\sin^2\alpha}\end{array}\right)v_0+\\
&\left(\frac{\Upsilon_{xz}}{2}\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\left(Q_{z\theta}+\frac{\Upsilon_{z\theta}}{x\tan\alpha}+\frac{3\Upsilon_{x\theta}}{2x}\right)\frac{\partial w_0}{\partial x}-\\
&\left(\frac{\Upsilon_{x\theta}}{2}\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\left(\frac{N_{\theta\theta}}{x\tan\alpha}-\frac{Q_{xz}}{x}\right)w_0+\\
&\left(\begin{array}{l}\dfrac{Q_{z\theta}}{x\sin\alpha}-\dfrac{\Upsilon_{xx}}{2x^2\sin\alpha}+\\ \dfrac{\Upsilon_{\theta\theta}}{2x^2\sin\alpha}-\dfrac{\Upsilon_{xz}\cos\alpha}{2x^2\sin^2\alpha}\end{array}\right)\frac{\partial w_0}{\partial\theta}+\\
&\left(\frac{\Upsilon_{xx}}{2x\sin\alpha}-\frac{\Upsilon_{\theta\theta}}{2x\sin\alpha}\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial\theta}+\left(\frac{\Upsilon_{x\theta}}{2x^2\sin^2\alpha}\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}+\\
&\left(\begin{array}{l}\dfrac{M_{x\theta}}{x\sin\alpha}+\dfrac{\Upsilon_{\theta\theta}}{2x\sin\alpha}-\\ \dfrac{\Upsilon_{zz}}{2x\sin\alpha}+\dfrac{\mathrm{P}_{xz}}{2x^2\sin\alpha}\end{array}\right)\frac{\partial\psi_x}{\partial\theta}+\\
&\left(M_{xx}+\frac{\Upsilon_{x\theta}}{2}\right)\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\left(\begin{array}{l}Q_{xz}+\dfrac{M_{\theta\theta}}{x}-\dfrac{M_{xx}}{x}-\\ \dfrac{\Upsilon_{z\theta}}{2x\tan\alpha}\end{array}\right)\psi_x-\\
&\left(\frac{\mathrm{P}_{xz}}{2x\sin\alpha}\right)\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial\theta}-\left(\frac{\mathrm{P}_{z\theta}}{2x^2\sin^2\alpha}\right)\frac{\partial^2\psi_x}{\partial\theta^2}+\\
&\left(\frac{M_{\theta\theta}}{x\sin\alpha}-\frac{\Upsilon_{x\theta}}{2x\sin\alpha}+\frac{\mathrm{P}_{z\theta}}{2x^2\sin\alpha}\right)\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}+\\
&\left(\frac{\mathrm{P}_{xz}}{2}\right)\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial x^2}+\left(\frac{\mathrm{P}_{z\theta}}{2x\sin\alpha}\right)\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial x\partial\theta}-\\
&\left(M_{x\theta}-\frac{\Upsilon_{xx}}{2}+\frac{\mathrm{P}_{\theta\theta}}{2x\tan\alpha}+\frac{\Upsilon_{zz}}{2}-\frac{\mathrm{P}_{xz}}{2x}\right)\frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}+\\
&\left(\begin{array}{l}Q_{z\theta}-\dfrac{2M_{x\theta}}{x}-\dfrac{\Upsilon_{\theta\theta}}{2x}+\dfrac{\Upsilon_{xx}}{2x}+\\ \dfrac{\Upsilon_{xz}}{2x\tan\alpha}+\dfrac{\mathrm{P}_{zz}}{2x^2\tan\alpha}\end{array}\right)\psi_\theta\Bigg)x\sin\alpha\,dxd\theta.
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

که در آن N_i، M_i ($i=xx,\theta\theta,x\theta$) و Q_j ($j=xz,\theta z$) منتجه‌های تنش و Υ_k و P_k ($k=xx,\theta\theta,zz,x\theta,xz,\theta z$) منتجه‌های تنش‌کوپل می‌باشند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&N_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}dz\,,M_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}zdz\,,\\
&Q_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}dz\,,\\
&\Upsilon_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}m_{ij}dz\,,\mathrm{P}_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}m_{ij}zdz\,.
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

انرژی جنبشی نیز برای پوسته مخروطی حاضر مطابق زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&T=\frac{1}{2}\int_\Omega\rho(x,z)\left(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2\right)d\Omega=\\
&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+L}\int_{-h/2}^{h/2}\rho(x,z)\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial t}+z\dfrac{\partial\psi_x}{\partial t}\right)^2+\\ \left(\dfrac{\partial v_0}{\partial t}+z\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial t}\right)^2+\\ \left(\dfrac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2\end{array}\right]x\sin\alpha\,dxdzd\theta
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

که در آن $\rho(x,z)$ چگالی سازه مدرج تابعی دو جهته پیش‌رو می‌باشد.

کار نیروهای خارجی نیز مطابق رابطه (۱۵) از دو بخش کار نیروهای حجمی (W_{ext}^b) و کارنیروهای سطحی (W_{ext}^s) تشکیل شده است.

$$W_{ext}=W_{ext}^b+W_{ext}^s \tag{۱۵}$$

که در آن کار نیروهای حجمی به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}
&W_{ext}^b=\int_0^{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+L}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\begin{array}{l}f_x u+\\ f_\theta v+\\ f_z w\end{array}\right)x\sin\alpha\,dzdxd\theta=\\
&\int_0^{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+L}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\begin{array}{l}f_x\left(u_0+z\psi_x\right)+\\ f_\theta\left(v_0+z\psi_\theta\right)+\\ f_z w_0\end{array}\right)x\sin\alpha\,dzdxd\theta
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

به‌طوری که f_x، f_θ و f_z به‌ترتیب نیروهای حجمی در راستای محورهای x، θ و z هستند. کارخارجی نیروهای سطحی نیز به‌صورت

جدول ۱. شرایط مرزی ضروری که می‌بایست در لبه‌های x ثابت در روش ریتز اقناع شوند.

Table 1. Essential boundary conditions at $x \equiv$ constant which should be satisfied during the Ritz method

شرایط مرزی	شرایط مرزی ضروری کلاسیک					شرایط مرزی ضروری مرتبه بالا			
	u_0	v_0	w_0	ψ_x	ψ_θ	$\frac{\partial v_0}{\partial x}$	$\frac{\partial w_0}{\partial x}$	ψ_θ	$\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x}$
لبه گیردار ثابت (CCI)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
لبه گیردار متحرک در راستای x (CCM)	–	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
لبه با تکیه‌گاه ساده ثابت (SSI)	✓	✓	✓	–	–	✓	–	✓	–
لبه با تکیه‌گاه ساده متحرک در راستای x (SSM)	–	✓	✓	–	–	✓	–	✓	–
لبه آزاد (CF)	–	–	–	–	–	–	–	–	–

زیر خواهد بود:

$$W_{ext}^{s}=\int_{\theta}\left\{\begin{array}{l}\bar{N}_x^u u_0+\bar{N}_x^v v_0+\bar{\Upsilon}_x^v\frac{\partial v_0}{\partial x}+\\ \bar{Q}_x w_0+\bar{\Upsilon}_x^w\frac{\partial w_0}{\partial x}+\bar{M}_x^{\psi_x}\psi_x+\\ \bar{M}_x^{\psi_\theta}\psi_\theta+\bar{\mathrm{P}}_x\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x}\end{array}\right\}x\sin\alpha\, d\theta\Bigg|_{x_0}^{x_0+L} \qquad (۱۷)$$

$$+\int_{x}\left\{\begin{array}{l}\bar{N}_\theta^u u_0+\bar{\Upsilon}_\theta^u\frac{\partial u_0}{\partial \theta}+\bar{N}_\theta^v v_0+\\ \bar{Q}_\theta w_0+\bar{\Upsilon}_\theta^w\frac{\partial w_0}{\partial \theta}+\bar{M}_\theta^{\psi_x}\psi_x+\\ \bar{M}_\theta^{\psi_\theta}\psi_\theta+\bar{\mathrm{P}}_\theta\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}\end{array}\right\}x\sin\alpha\, dx\Bigg|_{0}^{\theta_0}.$$

که در آن مطابق توضیحات ارائه شده در ضمیمه، u_0، v_0، $\frac{\partial v_0}{\partial x}$، w_0، $\frac{\partial w_0}{\partial x}$، ψ_x، ψ_θ و $\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x}$ متغیرهای اولیه[1] روی مرزهای x ثابت بوده و u_0، $\frac{\partial u_0}{\partial \theta}$، v_0، w_0، $\frac{\partial w_0}{\partial \theta}$، ψ_x، ψ_θ و $\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}$ متغیرهای اولیه روی مرزهای θ ثابت می‌باشند. ضرایب متغیرهای اولیه نیز نیروها، کوپل‌ها و گشتاور کوپل‌های کلاسیک و غیر کلاسیکی هستند که می‌توانند با توجه به نوع شرط مرزی ریزسازه در مرزها اعمال شوند. این ضرایب متغیرهای ثانویه[2] نامیده می‌شوند. در ادامه بدون نیاز به تعیین معادلات حاکم بر حرکت مسأله، ارتعاشات آزاد ریزپوسته حاضر از طریق روش ریتز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این پژوهش نتایج برای پنج ترکیب مختلف شرایط مرزی شامل دو طرف گیردار با لبه‌های ثابت[3]، دو طرف گیردار با لبه‌های متحرک در راستای x[4] دو طرف تکیه‌گاه ساده با لبه‌های ثابت[5]، دو طرف تکیه‌گاه ساده با لبه‌های متحرک در راستای x[6] و یک طرف گیردار[7] ارائه خواهد شد. بر این اساس شرایط مرزی ضروری کلاسیک و مرتبه بالایی که می‌بایست در هر لبه اقناع گردد در جدول ۱ ارائه شده است.

1 Primary variables
2 Secondary variables
3 Clamped-Clamped with Immovable edges (CCI)

۳-۲- روش ریتز

از آن‌جایی‌که در روش ریتز اقناع شرایط مرزی ضروری کفایت نموده و لزومی به ارضاء شرایط مرزی طبیعی نیست [۳۶]، توابع تقریب زننده جابجایی‌های u_0، v_0، w_0، ψ_x و ψ_θ برای هریک از پنج حالت ذکر شده شرایط مرزی در قسمت قبل، برای مسئله کلاسیک $(l=0)$ در جدول ۲ و برای مسئله غیرکلاسیک $(l\neq 0)$ در جدول ۳ ارائه می‌گردد. بدین ترتیب مؤلفه‌های میدان جابجایی به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شوند:

$$u_0(x,\theta,t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}^{u}(x,\theta)u_{ij}e^{i\omega t} \qquad (۱۸ \text{ الف})$$

$$v_0(x,\theta,t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}^{v}(x,\theta)v_{ij}e^{i\omega t} \qquad (۱۸ \text{ ب})$$

$$w_0(x,\theta,t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}^{w}(x,\theta)w_{ij}e^{i\omega t} \qquad (۱۸ \text{ ج})$$

$$\psi_x(x,\theta,t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}^{\psi_x}(x,\theta)\psi_{x-ij}e^{i\omega t} \qquad (۱۸ \text{ د})$$

4 Clamped-Clamped with Movable edges along the x-axis (CCM)
5 Simply Supported with Immovable edges (SSI)
6 Simply Supported with Movable edges along the x-axis (SSM)
7 Clamped-Free with immovable edge along the x-axis (CF)

جدول ۲ . توابع تقریب زننده مورد استفاده در روش ریتز در مسئله کلاسیک

Table 2. Classical approximation functions in the Ritz method

شرایط مرزی	$f_{ij}^{u}(x,\theta)$	$f_{ij}^{v}(x,\theta)$	$f_{ij}^{w}(x,\theta)$	$f_{ij}^{\psi_x}(x,\theta)$	$f_{ij}^{\psi_\theta}(x,\theta)$
CCI	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$
CCM	$\cos\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$
SSI	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\cos\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\cos\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$
SSM	$\cos\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\cos\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\cos\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$
CF	$\sin(j\pi(x-x_0))\cos(i\theta)$	$\sin(j\pi(x-x_0))\cos(i\theta)$	$\sin(j\pi(x-x_0))\cos(i\theta)$	$\sin(j\pi(x-x_0))\cos(i\theta)$	$\sin(j\pi(x-x_0))\cos(i\theta)$

جدول ۳ . توابع تقریب زننده مورد استفاده در روش ریتز در مسئله غیرکلاسیک

Table 3. Modified couple stress approximation functions in the Ritz method

شرایط مرزی	$f_{ij}^{u}(x,\theta)$	$f_{ij}^{v}(x,\theta)$	$f_{ij}^{w}(x,\theta)$	$f_{ij}^{\psi_x}(x,\theta)$	$f_{ij}^{\psi_\theta}(x,\theta)$
CCI	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin^2\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin^2\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin^2\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$
CCM	$\cos\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin^2\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin^2\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin^2\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$
SSI	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin^2\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\cos\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$
SSM	$\cos\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin^2\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\cos\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$
CF	$\sin(j\pi(x-x_0))\cos(i\theta)$	$\sin^2(j\pi(x-x_0))\cos(i\theta)$	$\sin^2(j\pi(x-x_0))\cos(i\theta)$	$\sin(j\pi(x-x_0))\cos(i\theta)$	$\sin^2(j\pi(x-x_0))\cos(i\theta)$

$$\psi_\theta(x,\theta,t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{\psi_\theta}(x,\theta)\psi_{\theta-ij}e^{i\omega t} \qquad (۱۸ ه)$$

که در اینجا m و n به‌ترتیب تعداد توابع تقریب زننده (شکل‌مود) در جهات محیطی و طولی است.

۲-۴- روش حل

با جایگذاری معادلات (۱۸) در روابط (۱۲) و (۱۴) و مشتق‌گیری نسبت به مختصات تعمیم‌یافته، معادلات حاکم بر تعادل به‌شکل ماتریسی، مطابق زیر گسسته‌سازی می‌شوند:

$$\left([\mathbf{K}]-\omega^2[\mathbf{M}]\right)\{d\}=0 \qquad (۱۹)$$

که در آن بردار $\{d\}$ بردار مختصات تعمیم‌یافته بوده و برابر است با $\{u_{ij}\ v_{ij}\ w_{ij}\ \psi_{x-ij}\ \psi_{\theta-ij}\}^T$. همچنین ω نیز فرکانس طبیعی است که برای بدست آوردن آن باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر با صفر قرار داده شود.

۳- نتایج و بحث

۳-۱- اعتبارسنجی نتایج

در گام نخست به‌منظور درستی‌سنجی نتایج، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعدشده ($\bar{\omega}=\omega R_۲\sqrt{\rho\left(۱-\nu^۲\right)/E}$) یک مخروط ناقص از جنس آلومینیوم با خواص مکانیکی $E_m=۷۰\mathrm{GPa}$، $\nu_m=۰/۲۴$، $\rho_m=۲۷۰۰\,\mathrm{kg/m^۳}$ و ابعاد هندسی $h=۰/۰۰۴\mathrm{m}$، $h/R_۲=۰/۰۱$ و $(L-x_۰)\sin\alpha=۰/۲۵$ با شرایط مرزی

جدول ۴ . فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده مخروط ناقص آلومینیومی با شرایط مرزی دو طرف تکیه‌گاه ساده $(m=1)$

Table 4. Dimensionless natural frequencies of aluminum truncated conical shell with simply supported boundary conditions at both ends (*m*=1)

n	$\alpha=30^{\circ}$					$\alpha=45^{\circ}$				
	مطالعه حاضر	مرجع [۳۹]	مرجع [۳۸]	مرجع [۳۷]	مرجع [۳۳]	مطالعه حاضر	مرجع [۳۹]	مرجع [۳۸]	مرجع [۳۷]	مرجع [۳۳]
۱	۰/۹۲۲۱	–	–	–	–	۰/۷۹۵۲	–	–	–	–
۲	۰/۸۴۲۶	۰/۸۴۳۱	۰/۷۹۱۰	۰/۸۴۲۰	۰/۸۳۵۵	۰/۷۶۶۱	۰/۷۶۴۲	۰/۶۸۷۹	۰/۷۶۵۵	–
۳	۰/۷۴۲۹	۰/۷۴۱۶	۰/۷۲۸۴	۰/۷۳۷۶	۰/۷۳۷۰	۰/۷۲۶۱	۰/۷۲۱۱	۰/۶۹۷۳	۰/۷۲۱۲	–
۴	۰/۶۴۹۵	۰/۶۴۱۹	۰/۶۳۵۲	۰/۶۳۶۲	۰/۶۳۴۷	۰/۶۸۴۹	۰/۶۷۴۷	۰/۶۶۶۴	۰/۶۷۳۹	–
۵	۰/۵۵۴۴	۰/۵۵۹۰	۰/۵۵۳۱	۰/۵۵۲۸	۰/۵۵۲۴	۰/۶۵۱۳	۰/۶۳۳۶	۰/۶۳۰۴	۰/۶۳۲۳	–

دوطرف تکیه‌گاه ساده در جدول ۴ با یافته‌های گزارش شده در مراجع [۳۳ و ۳۹-۳۷] مقایسه شده است. همان‌طور که دیده می‌شود همخوانی خوبی بین نتایج حاضر و سایر مراجع وجود دارد.

در گام دوم برای صحت‌سنجی نتایج وابسته به بُعد، با فرض $x\sin(\alpha)=R$ و $\alpha=\pi/2$ و جایگذاری از آن‌ها در روابط (۹) و (۱۰)، معادلات حاضر به روابط حاکم بر ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای به طول L و شعاع R ساده شده و سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعدشده برای یک پوسته استوانه‌ای با خواص مکانیکی $E=1/06\,\mathrm{TPa}$، $\nu=0/3$، $\rho=2300\,\mathrm{kg/m^3}$ و ابعاد هندسی $R=2\,\mathrm{nm}$، $L/R=1$ و $l=h$ در جدول ۵ با یافته‌های گزارش شده در مرجع [۱۲] مقایسه شده‌اند.

شایان ذکر است که توابع تقریب‌زننده در مرجع [۱۲]، با توجه به ضرورت اقناع توامان معادله و شرایط مرزی هندسی و نیرویی در روش ناویر، مطابق جدول ۶ انتخاب شده بودند. لذا به‌منظور مقایسه نتایج با این مرجع، توابع تقریب‌زننده روش ریتز بکار رفته در مطالعه حاضر نیز، همانند این جدول انتخاب شده‌اند. همان‌گونه که از جدول ۵ مشاهده می‌شود، نتایج حاضر در تطابق کامل با یافته‌های گزارش شده در مرجع [۱۲] هستند که البته با توجه به یکسان بودن توابع تقریب‌زننده کاملاً مورد انتظار نیز می‌باشد.

۲-۳- مطالعه پارامتری

به‌منظور بررسی اثر ابعاد کوچک بر فرکانس‌های طبیعی، ریزپوسته‌ای مخروطی همگن با خواص مکانیکی $E=1/06\ \mathrm{TPa}$

جدول ۵ . فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی دو طرف تکیه‌گاه ساده $(m=1)$

Table 5. Dimensionless natural frequencies of cylindrical shell with simply supported boundary conditions at both ends (*m*=1)

h/R	n	مطالعه حاضر	مرجع [۱۲]
۰/۱	۱	۱/۱۲۶۱	۱/۱۲۶
	۲	۱/۰۶۸۸	۱/۰۶۸۸
	۳	۱/۲۰۷۴	۱/۲۰۷
۰/۲	۱	۱/۵۳۷۱	۱/۵۳۷
	۲	۱/۵۹۰۱	۱/۵۹۰
	۳	۱/۹۲۸۱	۱/۹۲۸
۰/۳	۱	۱/۸۷۸۵	۱/۸۷۸
	۲	۱/۹۷۴۲	۱/۹۷۴
	۳	۲/۴۱۵۴	۲/۴۱۵

، $\nu=0/3$، $\rho=2300\,\mathrm{kg/m^3}$، $l=h$ و مشخصات هندسی $\alpha=30^{\circ}$، $h/R_1=0/1$ و $L/h=50$ در نظر گرفته می‌شود. جدول ۷ چهار فرکانس طبیعی اول وابسته به بعد ریزسازه را با اقناع شرایط مرزی مرتبه بالا و بدون اقناع آن‌ها با مقادیر کلاسیک متناظرشان مقایسه می‌کند. بر اساس نتایج ارائه شده در این جدول مشاهده می‌شود، اقناع شرایط مرزی مرتبه بالا بیشترین تأثیر را بر شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده خصوصاً در حالت با لبه‌های متحرک در راستای x دارد. برای بررسی علت این مسأله باید دقت نمود که چهار فرکانس طبیعی اول گزارش شده در جدول ۷ مربوط به شکل‌مودهای عرضی ریزپوسته می‌باشند (این مسأله در ادامه با رسم چهار شکل‌مود

جدول ۶ . توابع تقریب زننده مورد استفاده در روش ناویر در مرجع [12]

Table 6. Approximation functions in Navier solution used in Ref. [12]

شرایط مرزی	$f_{ij}^{u}(x,\theta)$	$f_{ij}^{v}(x,\theta)$	$f_{ij}^{w}(x,\theta)$	$f_{ij}^{\psi_x}(x,\theta)$	$f_{ij}^{\psi_\theta}(x,\theta)$
SSM	$\cos\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\sin(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\cos\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\cos(i\theta)$	$\sin\left(\frac{j\pi(x-x_0)}{L}\right)\sin(i\theta)$

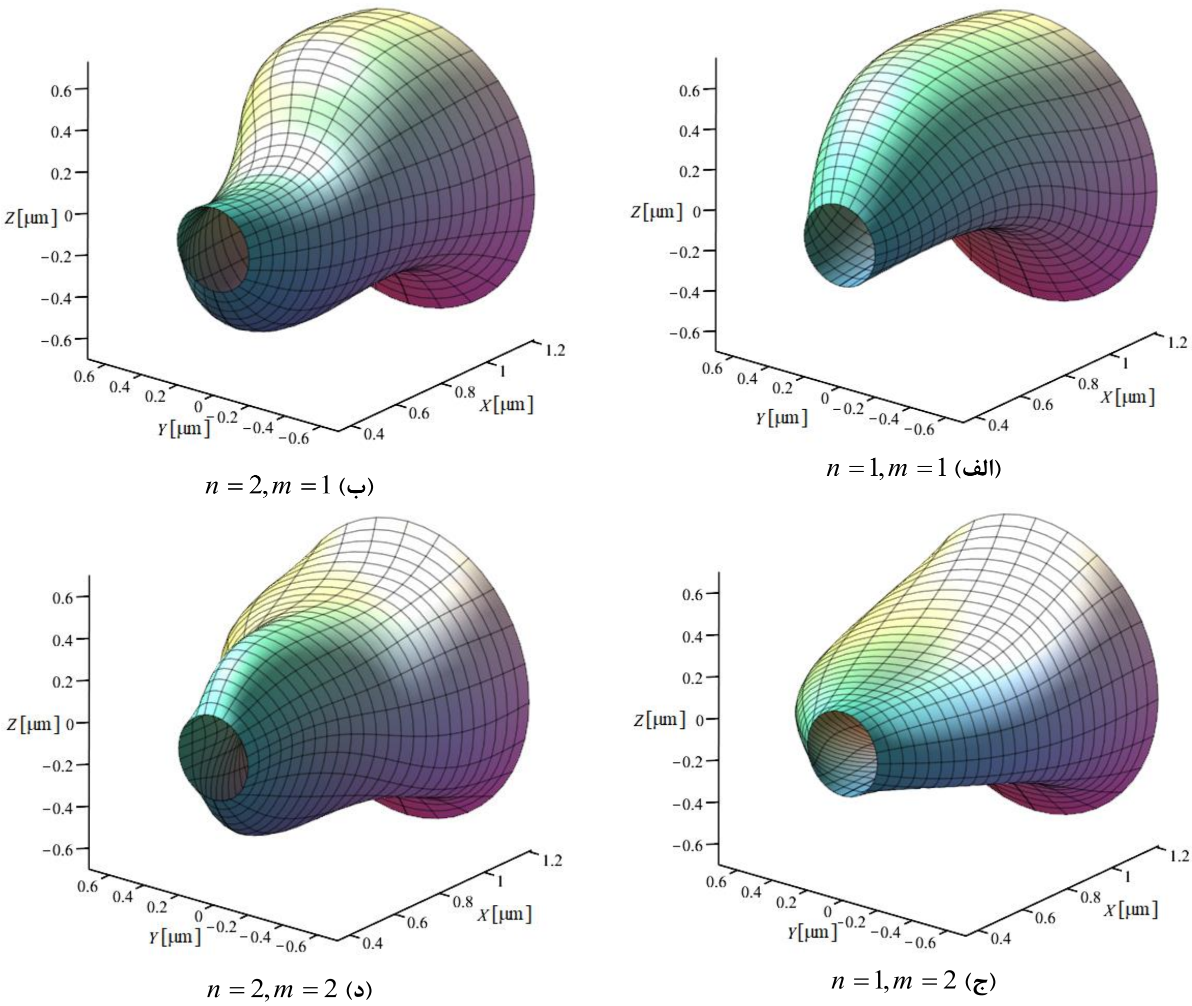
جدول ۷ . بررسی تأثیر اقناع شرایط مرزی مرتبه بالا بر چهار فرکانس طبیعی اول ریزپوسته حاضر

Table 7. Influence of satisfying higher-order boundary conditions on the first four natural frequencies of the present micro-shell

	$\bar{\omega}_{11}$			$\bar{\omega}_{12}$		
شرایط مرزی	کلاسیک	وابسته به بعد بدون اقناع شرایط مرزی مرتبه بالا	وابسته به بعد با اقناع شرایط مرزی مرتبه بالا	کلاسیک	وابسته به بعد بدون اقناع شرایط مرزی مرتبه بالا	وابسته به بعد با اقناع شرایط مرزی مرتبه بالا
SSM	۰/۸۴۰۲	۰/۸۸۰۰	۱/۱۵۱۱	۰/۵۲۳۸	۰/۵۵۷۶	۰/۶۹۲۷
SSI	۰/۸۶۶۴	۰/۹۱۰۸	۱/۱۸۲۹	۰/۵۴۴۲	۰/۵۷۶۵	۰/۷۰۶۷
CCM	۱/۲۱۰۸	۱/۲۲۵۳	۱/۳۷۳۴	۱/۱۷۴۱	۱/۱۸۸۲	۱/۳۲۱۶
CCI	۱/۲۴۲۷	۱/۲۵۷۷	۱/۴۰۱۰	۱/۲۰۹۲	۱/۲۲۲۹	۱/۳۵۴۲
CF	۰/۲۵۲۴	۰/۲۵۲۶	۰/۲۶۳۵	۰/۳۰۷۴	۰/۳۲۱۰	۰/۳۳۶۲
	$\bar{\omega}_{21}$			$\bar{\omega}_{22}$		
SSM	۱/۳۱۹۵	۱/۳۷۸۷	۱/۸۶۷۲	۱/۶۴۰۸	۱/۶۹۵۶	۱/۲۴۸۱
SSI	۱/۳۲۳۹	۱/۳۸۳۲	۱/۸۴۰۳	۱/۶۸۰۸	۱/۷۳۸۳	۱/۲۶۵۷
CCM	۲/۳۶۳۴	۲/۴۶۲۰	۲/۸۷۷۲	۲/۲۸۵۹	۲/۴۲۰۶	۲/۸۵۸۸
CCI	۲/۳۷۲۱	۲/۴۷۸۵	۲/۸۸۷۲	۲/۳۲۱۷	۲/۴۶۴۹	۲/۸۵۸۷
CF	۰/۲۵۲۴	۰/۲۵۲۶	۰/۲۶۳۵	۰/۳۰۷۴	۰/۳۲۱۰	۰/۳۳۶۲

خطی متناظر با فرکانس‌های داده شده در جدول ۷ نشان داده خواهد شد). از طرفی در نظر گرفتن تأثیر مؤلفه‌های تنش‌کوپل طبق توضیحات ارائه شده در جدول ۱ موجب بسته شدن ψ_θ می‌شود که تأثیر بسزایی در سفتی عرضی سازه دارد. بنابراین قابل انتظار است بیشترین تأثیر در این شرایط تکیه‌گاهی مشاهده شود. چراکه در سایر شرایط مرزی تغییر بزرگی در متغیرهای اولیه‌ی تأثیرگذار بر سفتی عرضی سازه رخ نمی‌دهد. لذا بر اساس نتایج گزارش شده در این جدول می‌توان گفت اقناع نکردن شرایط مرزی تأثیرگذار بر شکل‌مودهای مؤثر بر دینامیک سازه منجر به بروز خطاهایی غیر قابل چشم‌پوشی می‌گردد.

همان‌طور که پیش‌تر نیز ذکر شد، شرایط مرزی مرتبه بالا نقش مهمی در دینامیک ریزسازه بازی می‌کنند. خصوصاً هنگامی‌که موجب تغییر در شکل‌مودهای مؤثر در دینامیک آن شوند. برای بررسی این موضوع، شکل ۳ چهار شکل‌مود خطی اول مخروط حاضر را بر اساس تئوری تنش‌کوپل بهبود یافته در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با لبه‌های متحرک در راستای x، که بیشترین تأثیر را از اقناع شرایط مرزی مرتبه بالا می‌پذیرند، به‌تصویر می‌کشد. لازم بذکر است این شکل‌مودها در دستگاه دکارتی رسم شده و مطابق رابطه $\|d\| = ۱$ نیز نرمال شده‌اند. به‌منظور مقایسه بهتر شکل‌مودهای غیرکلاسیک و کلاسیک، شکل‌های ۴ و ۵ نمایی دو بعدی از شکل‌مودها به‌ترتیب به‌ازای $\theta = 0^\circ$ و $x = x_0 + L/2$ ارائه می‌دهند. بر اساس نتایج ارائه شده در این دو شکل، مشاهده می‌شود اثر ابعاد کوچک بر شکل‌مودهای ریزسازه با افزایش شماره مود، ازدیاد می‌یابد. بنابراین با توجه به تأثیر جدی شرایط مرزی مرتبه بالا بر سفتی سازه در این شرایط تکیه‌گاهی، می‌توان نتیجه گرفت برای تحلیل دینامیک وابسته به بعد ریزسازه‌ها خصوصاً در حالاتی که در نظر گرفتن تأثیر



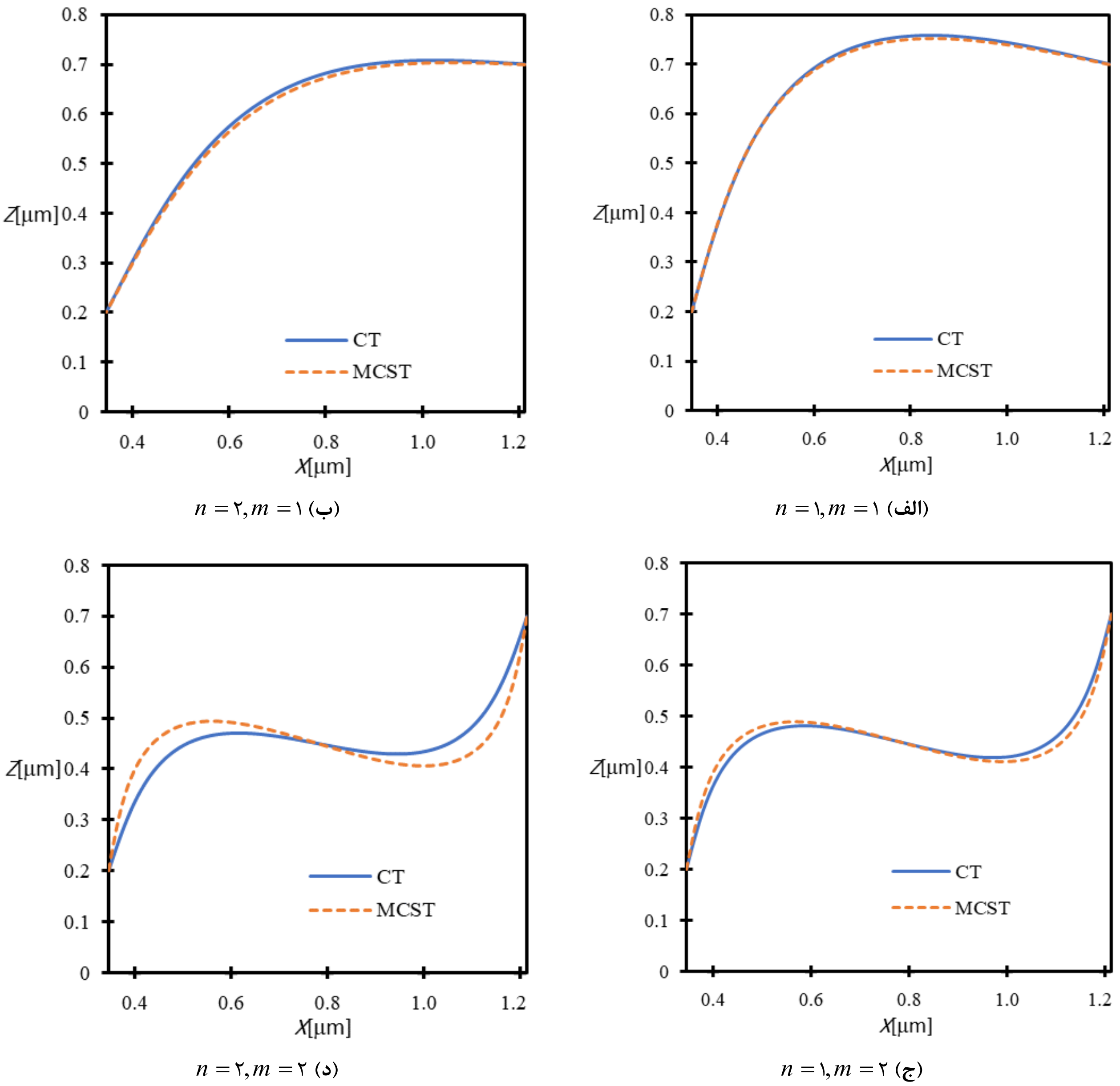
شکل ۳ . شکل‌مودهای مخروط ناقص بر اساس تئوری تنش کوپل بهبودیافته

Fig. 3. Mode shapes of the truncated conical shell based on the modified couple stress theory

مؤلفه‌های تنش‌کوپل موجب تغییر متغیرهای اولیه‌ی تأثیرگذار بر مودهای غالب در دینامیک سازه می‌شوند، می‌بایست از شکل‌مودهای غیرکلاسیک حاضر استفاده شود.

شکل ۶ تغییرات نسبت کوچکترین فرکانس طبیعی وابسته به بُعد (متناظر با مود $m=۱$ و $n=۲$) ریزمخروط حاضر را به مقدار کلاسیک آن (یعنی $\omega_{۱۲-\mathrm{MCST}}/\omega_{۱۲-\mathrm{CT}}$) بر حسب نسبت اندازه (یعنی h/l) در شرایط تکیه‌گاهی متفاوت معرفی شده در جدول ۱ ارائه می‌دهد. همان‌طور که از این شکل مشاهده می‌شود، با کاهش نسبت h/l، تأثیر مؤلفه‌های تنش‌کوپل بر نسبت فرکانس طبیعی وابسته به بعد به مقدار کلاسیک آن و در نتیجه سفتی سازه، برای همه حالات شرایط مرزی افزایش یافته است. به‌عبارتی دیگر، برای نسبت‌های بزرگ h/l تأثیر مولفه‌های تنش کوپل ناچیز است و اختلاف نتایج تئوری کلاسیک و تئوری تنش کوپل بهبود یافته از بین می‌رود. از طرفی دیگر با توجه به مفهوم تنش کوپل، این تنش‌ها در محل تکیه‌گاه تمایل به سفت‌تر کردن شرایط تکیه‌گاهی و تبدیل شرایط مرزی ساده به گیردار دارند. اما از آنجایی که شرایط مرزی گیردار از این نظر اشباع‌شده‌تر از تکیه‌گاه ساده است، تنش‌های کوپل موجب سفت‌تر شدن بیشتر تکیه‌گاه ساده نسبت به گیردار می‌شوند. درنتیجه همان‌طور که انتظارش می‌رفت، این افزایش برای شرایط مرزی دوطرف ساده با لبه‌های متحرک در راستای x بیشترین و برای شرایط مرزی دو طرف گیردار با لبه‌های ثابت در راستای x کمترین مقدار بوده است.

در ادامه برای بررسی اثر تغییر خواص مکانیکی در راستای ضخامت، تغییرات دو فرکانس طبیعی اول بی‌بعد برای یک پوسته مخروطی

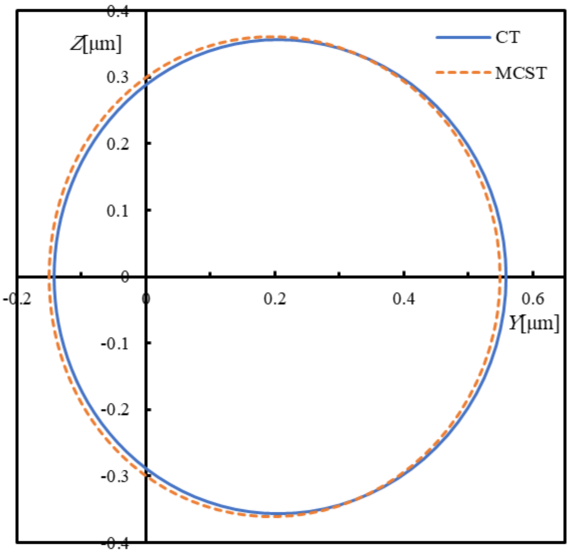


شکل ۴. نمای دوبُعدی شکل‌مودهای وابسته به بُعد مخروط ناقص در $\theta=۰^\circ$

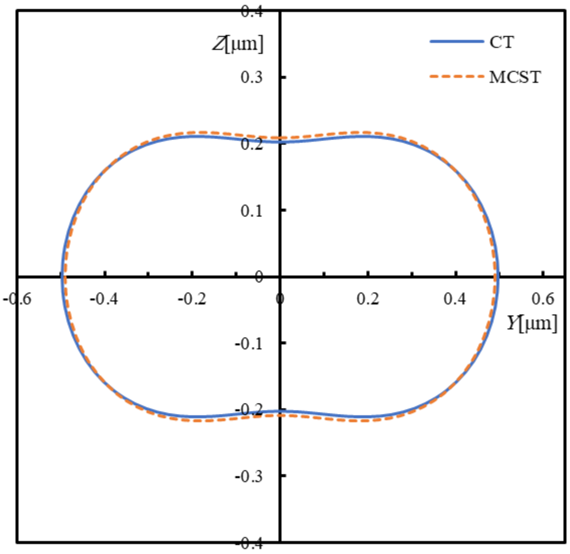
Fig. 4. 2D view of the size-dependent mode shapes of the truncated conical shell at $\theta=0^\circ$

با مشخصات هندسی $\alpha=۳۰^\circ$، $h/R_۱=۰/۱$، $L/h=۵۰$ و $h=۱\mu m$ از جنس ماده مدرج تابعی که فاز فلز آن مس با خصوصیات $E_{Cu}=۱۰۸ GPa$، $\nu_{Cu}=۰/۳۲$، $\rho_{Cu}=۸۹۶۰ kg/m^۳$ و $l_{Cu}=۱/۴۲۲\mu m$ [۳] و فاز سرامیک آن سیلیکون با خصوصیات $E_{Si}=۱۶۹ GPa$، $\nu_{Si}=۰/۳$، $\rho_{Si}=۲۳۳۲ kg/m^۳$ و $l_{Si}=۰/۵۹۲\mu m$ [۴۰] است، با فرض $n_x=۰$ بر حسب تغییرات n_z برای حالت‌های مختلف تکیه‌گاهی معرفی شده در جدول ۱ در شکل ۷ به تصویر کشیده شده است. بر اساس نتایج ارائه شده در این شکل، با زیاد شدن n_z جنس ماده در راستای ضخامت از فلز (یعنی مس) به سرامیک (یعنی سیلیکون) میل می‌کند. لذا با توجه به بزرگتر بودن مدول الاستیسیته و کوچکتر بودن چگالی سرامیک از فلز، فرکانس‌های طبیعی بزرگتر می‌شوند. لازم بذکر است متحرک نبودن تکیه‌گاه‌ها در امتداد x در حالت کلی موجب ازدیاد فرکانس‌های طبیعی سازه می‌شود؛ چراکه با کاهش درجات آزادی سازه باعث افزایش سفتی آن می‌شود.

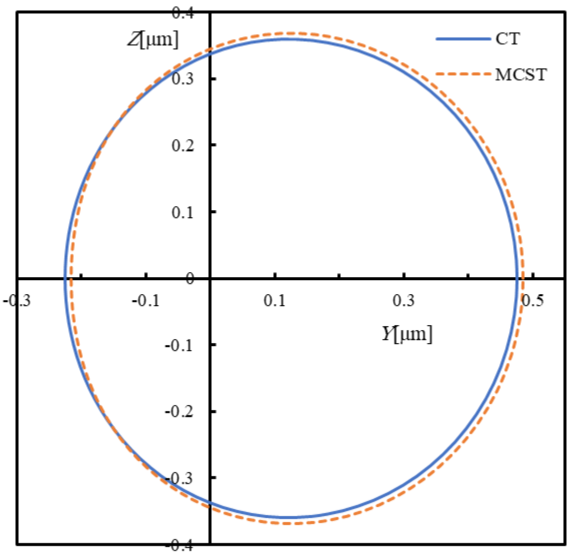
شکل ۸ اثر تغییر خواص مکانیکی ریزپوسته حاضر را در امتداد



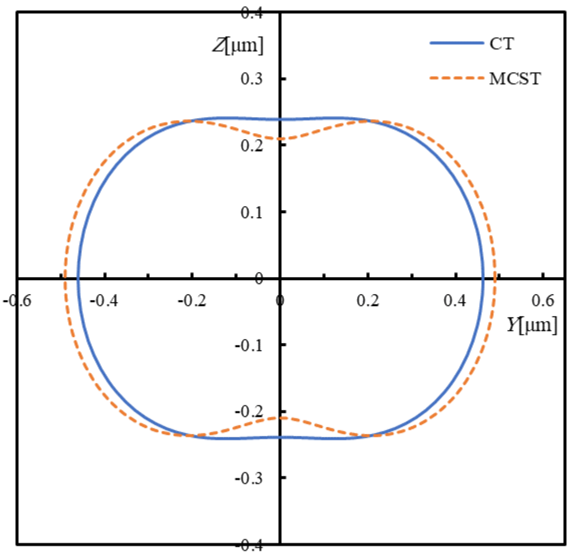
(الف) $n=1, m=1$



(ب) $n=2, m=1$



(ج) $n=1, m=2$

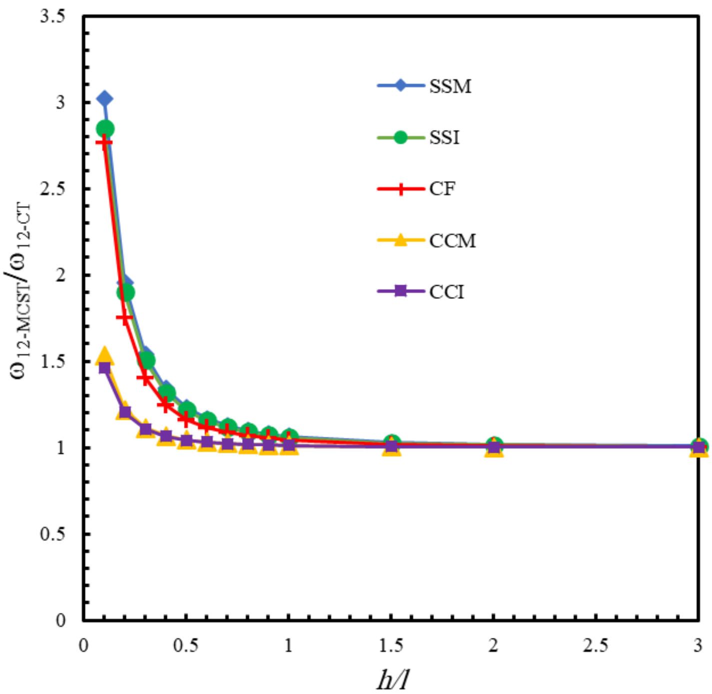


(د) $n=2, m=2$

شکل ۵ . نمای دوبُعدی شکل‌مودهای وابسته به بُعد مخروط ناقص در $x=x_0+L/2$

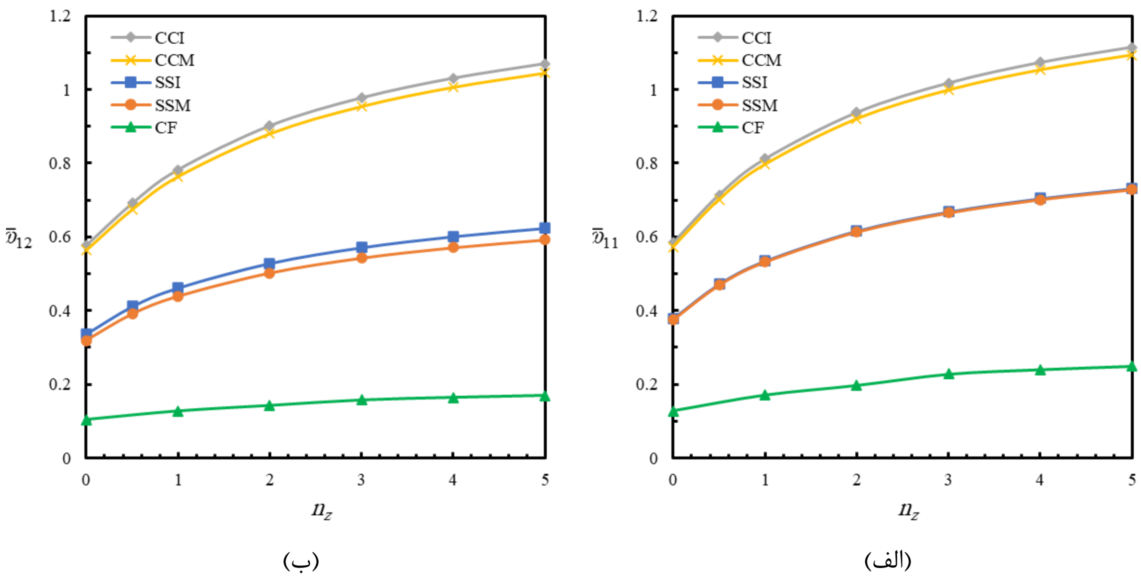
Fig. 5. 2D view of the size-dependent mode shapes of the truncated conical shell at $x=x_0+L/2$

یال بر دو فرکانس طبیعی اول بی‌بعد آن مورد بررسی قرار می‌دهد. بدین منظور با فرض $n_z=1$، تغییرات این دو فرکانس بر حسب n_x برای حالت‌های تکیه‌گاهی مختلف داده شده در جدول ۱ در شکل ۸ رسم شده است. همان‌گونه که از این شکل نیز مشاهده می‌شود، افزایش n_x نیز به‌طور مشابه موجب افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌گردد. البته با مقایسه نتایج شکل‌های ۶ و ۷، مشخص می‌شود تأثیر تغییرات n_z از n_x بیشتر بوده است؛ به‌طوری‌که n_x تقریباً تأثیری بر فرکانس‌های طبیعی سازه با شرایط مرزی یک‌طرف گیردار نداشته است. دلیل این مسأله این است که مقدار کرنش در راستای طول سازه یکسان نبوده و در نزدیکی تکیه‌گاه‌ها حداکثر است. لذا تغییر خواص مکانیکی در امتداد طول فقط در برخی مناطق تأثیر بسزایی بر رفتار مکانیکی سازه گذاشته و در سایر مناطق (به‌عنوان مثال طرف آزاد سازه در شرایط مرزی یک طرف گیردار) چندان مؤثر نیست. در حالی‌که تغییرات n_z موجب تغییر خواص در تمام نواحی سازه اعم از مناطق مؤثر و یا غیرمؤثر می‌شود.



شکل ۶ . تغییرات نسبت کوچکترین فرکانس طبیعی متناظر با مود $(m=۱, n=۲)$ محاسبه شده بر اساس تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته به مقدار کلاسیک آن بر حسب تغییرات نسبت اندازه

Fig. 6. Variation of the smallest MCST to CT natural frequencies ratio corresponding to the mode (*m*=1, *n*=2) versus the size effect parameter

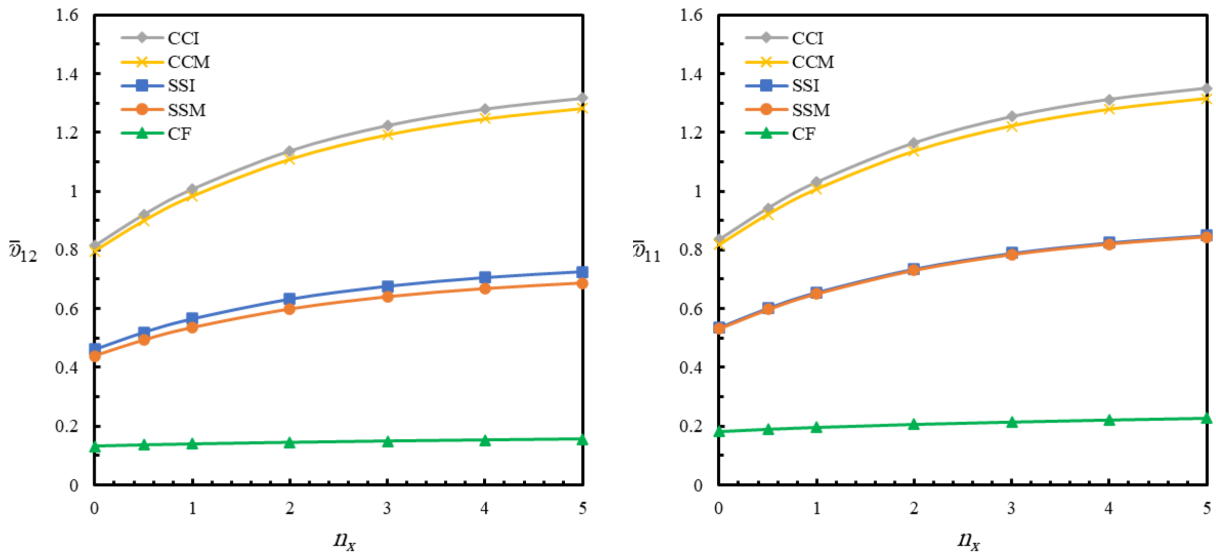


شکل ۷. دو فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده برای مخروط ناقصی از جنس ماده مدرج تابعی بر حسب تغییرات n_z

Fig. 7. Variation of the first two dimensionless natural frequencies of FGM truncated conical shell versus the power law indices n_z

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله تأثیر شرایط مرزی مرتبه بالای ناشی از در نظر گرفتن اثر مؤلفه‌های تنش‌کوپل بر ارتعاشات آزاد ریزپوسته‌های ضخیم مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی دوجهته با در نظر



(ب) (الف)

شکل ۸ . دو فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده برای مخروط ناقصی از جنس ماده مدرج تابعی بر حسب تغییرات n_x

Fig. 8. Variation of the first two dimensionless natural frequencies of FGM truncated conical shell versus the power law indices n_x

گرفتن تغییرات خواص مکانیکی در دو راستای ضخامت و طول مورد بررسی قرار گرفت. شایان ذکر است در مدل ارائه شده در پژوهش پیش‌رو تغییرات پارامتر مقیاس طول مادی به‌عنوان یک خاصیت مکانیکی ریزسازه نیز برخلاف اکثر مدل‌های موجود، مد نظر گرفته شده است. معادلات مقدار ویژه حاکم بر ارتعاشات آزاد ریزپوسته با استفاده از اصل همیلتون استخراج و با اقناع تمام شرایط مرزی ضروری اعم از کلاسیک و مرتبه بالای ناشی از در نظر گرفتن اثر ابعاد کوچک، توسط روش ریتز حل گردید. یافته‌های حاضر با صرف نظر از اثر ابعاد کوچک با نتایج موجود در مقالات مرتبط برای پوسته‌های مخروطی بزرگ مقیاس اعتبارسنجی شدند. همچنین نتایج وابسته به بعد حاضر نیز با ساده سازی مدل پیش‌رو با نتایج موجود برای ریزپوسته‌های استوانه‌ای ضخیم مقایسه و صحه‌گذاری شدند. نتایج حاکی از آن بودند که اقناع شرایط مرزی مرتبه بالای ناشی از در نظر گرفتن اثر ابعاد کوچک با تأثیر بر فرکانس‌های طبیعی و شکل‌مودهای متناظر با آن‌ها نقش مهمی در دینامیک سازه بازی می‌کند. خصوصاً اگر به‌حساب آوردن اثرات ابعاد کوچک موجب تغییر جدی در متغیرهای اولیه‌ی مؤثر بر سفتی عرضی سازه گردد. در ادامه با بررسی تآثیر تغییر نسبت اندازه بر سفتی سازه، دیده شد در نظرگرفتن مؤلفه‌های تنش‌کوپل موجب افزایش سفتی سازه و درنتیجه فرکانس‌های طبیعی آن در تمام شرایط تکیه‌گاهی می‌شود و این تغییرات با کاهش نسبت اندازه افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده گردید این تغییرات برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بیشترین و برای شرایط مرزی گیردار با لبه‌های ثابت کمترین مقدار است.در ادامه با بررسی تغییرات فرکانس‌های طبیعی بر حسب تغییرات اندیس قانون توزیع توانی مشاهده شد که با افزایش اندیس در هر دو جهت ضخامت و طولی، فرکانس‌های طبیعی بزرگ‌تر می‌شوند. اگرچه این تغییرات نسبت به اندیس توانی در جهت ضخامت حساسیت بیشتری دارد.

پیوست

فرض کنید F فانکشنالی با دو متغیر مستقل x و θ شامل متغیرهای وابسته u_0، v_0، w_0، ψ_x، ψ_θ، $u_{0,x}$، $u_{0,\theta}$، $v_{0,x}$، $v_{0,\theta}$، $w_{0,x}$، $w_{0,\theta}$، $\psi_{x,x}$، $\psi_{x,\theta}$، $\psi_{\theta,x}$، $\psi_{\theta,\theta}$، $u_{0,\theta\theta}$، $u_{0,x\theta}$، $v_{0,xx}$، $v_{0,x\theta}$، $w_{0,xx}$، $w_{0,\theta\theta}$، $w_{0,x\theta}$، $\psi_{x,\theta\theta}$، $\psi_{x,x\theta}$، $\psi_{\theta,xx}$ و $\psi_{\theta,x\theta}$ باشد؛ که در آن زیروند کاما که با یک یا چند متغیر مستقل همراه است، مشتق جزئی نسبت به آن متغیر(ها) را نشان می‌دهد. اگر $\Pi = \iint_\Omega F\,dxd\theta$ باشد، برای تعیین شرایط مرزی از قضیه گرین جهت تبدیل انتگرال دوگانه به انتگرال خط استفاده می‌شود [۳۶].

واضح است که جملات از مرتبه صفر (یعنی u، v، w، ψ_x، ψ_θ) در تشکیل شرایط مرزی شرکت نمی‌کنند. شرایط مرزی مستخرج از سایر جملات نیز به قرار زیر تعیین می‌گردند:

$$u_{0,x}:\left(\frac{\partial F}{\partial u_{0,x}}\right)\delta u_0 \quad \text{at } x\equiv \text{constant}$$ (پ ۱)

$$u_{0,\theta}:-\left(\frac{\partial F}{\partial u_{0,\theta}}\right)\delta u_0 \quad \text{at } \theta\equiv \text{constant}$$ (پ ۲)

$$v_{0,x}:\left(\frac{\partial F}{\partial v_{0,x}}\right)\delta v_0 \quad \text{at } x\equiv \text{constant}$$ (پ ۳)

$$v_{0,\theta}:-\left(\frac{\partial F}{\partial v_{0,\theta}}\right)\delta v_0 \quad \text{at } \theta\equiv \text{constant}$$ (پ ۴)

$$w_{0,x}:\left(\frac{\partial F}{\partial w_{0,x}}\right)\delta w_0 \quad \text{at } x\equiv \text{constant}$$ (پ ۵)

$$w_{0,\theta}:-\left(\frac{\partial F}{\partial w_{0,\theta}}\right)\delta w_0 \quad \text{at } \theta\equiv \text{constant}$$ (پ ۶)

$$\psi_{x,x}:\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_{x,x}}\right)\delta \psi_x \quad \text{at } x\equiv \text{constant}$$ (پ ۷)

$$\psi_{x,\theta}:-\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_{x,\theta}}\right)\delta \psi_x \quad \text{at } \theta\equiv \text{constant}$$ (پ ۸)

$$\psi_{\theta,x}:\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_{\theta,x}}\right)\delta \psi_\theta \quad \text{at } x\equiv \text{constant}$$ (پ ۹)

$$\psi_{\theta,\theta}:-\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_{\theta,\theta}}\right)\delta \psi_\theta \quad \text{at } \theta\equiv \text{constant}$$ (پ ۱۰)

$$u_{0,\theta\theta}:-\left(\frac{\partial F}{\partial u_{0,\theta\theta}}\right)\delta u_{0,\theta}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{0,\theta\theta}}\right)\delta u_0$$
$$\text{at } \theta\equiv \text{constant}$$ (پ ۱۱)

$$u_{0,x\theta}:-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u_{0,x\theta}}\delta u_{0,x}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x\theta}}\right)\delta u_0$$
$$\text{at } \theta\equiv \text{constant}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{0,x\theta}}\right)\delta u_{0,\theta}+\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u_{0,x\theta}}\delta u_0$$
$$\text{at } x\equiv \text{constant}$$ (پ ۱۲)

$$v_{0,xx}:\left(\frac{\partial F}{\partial v_{0,xx}}\right)\delta v_{0,x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial v_{0,xx}}\right)\delta v_0 \quad \text{at } x\equiv \text{constant}$$ (پ ۱۳)

$$v_{0,x\theta}:-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial v_{0,x\theta}}\delta v_{0,x}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial v_{0,x\theta}}\right)\delta v_0$$
$$\text{at } \theta\equiv \text{constant}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial v_{0,x\theta}}\right)\delta v_{0,\theta}+\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial v_{0,x\theta}}\delta v_0$$
$$\text{at } x\equiv \text{constant}$$ (پ ۱۴)

$$w_{0,xx}:\left(\frac{\partial F}{\partial w_{0,xx}}\right)\delta w_{0,x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{0,xx}}\right)\delta w_0$$
$$\text{at } x\equiv \text{constant}$$ (پ ۱۵)

$$w_{0,\theta\theta}:-\left(\frac{\partial F}{\partial w_{0,\theta\theta}}\right)\delta w_{0,\theta}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{0,\theta\theta}}\right)\delta w_0$$
$$\text{at } \theta\equiv \text{constant}$$ (پ ۱۶)

$$w_{0,x\theta}:-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial w_{0,x\theta}}\delta w_{0,x}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{0,x\theta}}\right)\delta w_0$$
$$\text{at } \theta\equiv \text{constant}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{0,x\theta}}\right)\delta w_{0,\theta}+\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial w_{0,x\theta}}\delta w_0$$
$$\text{at } x\equiv \text{constant}$$ (پ ۱۷)

$$\psi_{x,\theta\theta}:-\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_{x,\theta\theta}}\right)\delta \psi_{x,\theta}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_{x,\theta\theta}}\right)\delta \psi_x$$
$$\text{at } \theta\equiv \text{constant}$$ (پ ۱۸)

$$\psi_{x,x\theta}:-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \psi_{x,x\theta}}\delta \psi_{x,x}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_{x,x\theta}}\right)\delta \psi_x$$
$$\text{at } \theta\equiv \text{constant}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_{x,x\theta}}\right)\delta \psi_{x,\theta}+\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \psi_{x,x\theta}}\delta \psi_x$$
$$\text{at } x\equiv \text{constant}$$ (پ ۱۹)

$$\psi_{\theta,xx}:\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_{\theta,xx}}\right)\delta \psi_{\theta,x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_{\theta,xx}}\right)\delta \psi_\theta$$
$$\text{at } x\equiv \text{constant}$$ (پ ۲۰)

$$\psi_{\theta,x\theta}: -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \psi_{\theta,x\theta}}\delta\psi_{\theta,x} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_{\theta,x\theta}}\right)\delta\psi_{\theta}$$
$$\text{at } \theta \equiv \text{constant}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi_{\theta,x\theta}}\right)\delta\psi_{\theta,\theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \psi_{\theta,x\theta}}\delta\psi_{\theta}$$
$$\text{at } x \equiv \text{constant}$$ (پ ۲۱)

با توجه به معادلات (پ ۱) تا (پ ۲۱)، بدیهی است که شرایط مرزی ضروری روی مرز x ثابت به قرار زیر می‌باشند:

$$\delta u_0, \delta v_0, \delta v_{0,x}, \delta w_0, \delta w_{0,x}, \delta\psi_x, \delta\psi_\theta, \delta\psi_{\theta,x}$$ (پ ۲۲)

چراکه صفر بودن متغیرهای u، v، w، ψ_x و ψ_θ روی مرز x ثابت منجر به صفر شدن مشتقات آن‌ها نسبت به ϑ روی آن مرز می‌شود. همچنین شرایط مرزی ضروری روی مرز ϑ ثابت نیز به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\delta u_0, \delta u_{0,\theta}, \delta v_0, \delta w_0, \delta w_{0,\theta}, \delta\psi_x, \delta\psi_\theta, \delta\psi_{x,\theta}$$ (پ ۲۳)

چراکه صفر بودن متغیرهای u، v، w، ψ_x و ψ_θ روی مرز θ ثابت نیز منجر به صفر گردیدن مشتقات آن‌ها نسبت به x روی آن مرز می‌گردد.

۵- مراجع

[1] J. Awrejcewicz, A.V. Krysko, M.V. Zhigalov, V.A. Krysko, Size-Dependent Theories of Beams, Plates and Shells, in: J. Awrejcewicz, A.V. Krysko, M.V. Zhigalov, V.A. Krysko (Eds.) Mathematical Modelling and Numerical Analysis of Size-Dependent Structural Members in Temperature Fields: Regular and Chaotic Dynamics of Micro/Nano Beams, and Cylindrical Panels, Springer International Publishing, Cham, 2021, pp. 25-78.

[2] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, Int. J. Solids Struct., 39 (2002) 2731-2743.

[3] Z. Li, Y. He, J. Lei, S. Guo, D. Liu, L. Wang, A standard experimental method for determining the material length scale based on modified couple stress theory, Int. J. Mech. Sci., 141 (2018) 198-205.

[4] A.R. Askari, M. Tahani, Presenting a size-dependent electro-mechanical model for rectangular plates-based resonant micro-sensors based on modified couple stress theory, J. Modares Mechanical Engineering, 14(8) (2014) 121-130. (In persian)

[5] A. Bakhsheshy, K. Khorshidi, Free vibration of functionally graded rectangular nanoplates in thermal environment based on the modified couple stress theory, J. Modares Mechanical Engineering, 14(15) (2015) 323-330. (In persian)

[6] S.J.-T. OmidDezyani, R., M. Abedi, H. Afrasiab, Vibration analysis of a microplate in contact with a fluid based on the modified couple stress theory, J. Modares Mechanical Engineering, 17(2) (2017) 47-57. (In persian)

[7] s. salehi, O. Rahmani, S.A. Hoseini, Free and forced vibration analysis of Kelvin-Voigt viscoelastic rectangular nanoplate based on the modified couple stress theory, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 52(1) (2020) 173-186. (In persian)

[8] H. Zeighampour, Y.T. Beni, A shear deformable cylindrical shell model based on couple stress theory, Arch. Appl. Mech., 85(4) (2015) 539-553.

[9] Y. Tadi Beni, F. Mehralian, H. Zeighampour, The modified couple stress functionally graded cylindrical thin shell formulation, Mech. Adv. Mater. Struc., 23(7) (2016) 791-801.

[10] K.S. Al-Basyouni, A. Tounsi, S.R. Mahmoud, Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position, Compos. Struct., 125 (2015) 621-630.

[11] M. Tahani, R.C. Batra, A.R. Askari, Size-dependent free vibrations of electrostatically predeformed functionally graded micro-cantilevers, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 87(1) (2015) 012117.

[12] Y. Tadi Beni, F. Mehralian, H. Razavi, Free vibration analysis of size-dependent shear deformable functionally graded cylindrical shell on the basis of modified couple stress theory, Compos. Struct., 120 (2015) 65-78.

[13] H. Zeighampour, M. Shojaeian, Size-dependent vibration of sandwich cylindrical nanoshells with functionally

graded material based on the couple stress theory, J. Braz. Soc. Mech. Sci., 39(7) (2017) 2789-2800.

[14] M. Ghadiri, H. SafarPour, Free vibration analysis of size-dependent functionally graded porous cylindrical microshells in thermal environment, J. Therm. Stresses, 40(1) (2017) 55-71.

[15] M. Ghadiri, H. Safarpour, Free Vibration Analysis of a Functionally Graded Cylindrical Nanoshell Surrounded by Elastic Foundation Based on the Modified Couple Stress Theory, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 49(4) (2018) 721-730. (In persian)

[16] H. Razavi, A.F. Babadi, Y. Tadi Beni, Free vibration analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical nanoshell based on consistent couple stress theory, compos. Struct., 160 (2017) 1299-1309.

[17] S. Zeng, B.L. Wang, K.F. Wang, Analyses of natural frequency and electromechanical behavior of flexoelectric cylindrical nanoshells under modified couple stress theory, J. Vib. Control, 25(3) (2018) 559-570.

[18] Y. Wang, K. Xie, T. Fu, W. Zhang, A unified modified couple stress model for size-dependent free vibrations of FG cylindrical microshells based on high-order shear deformation theory, Eur. Phys. J. Plus, 135(1) (2020) 71.

[19] J. Ehyaei, H. Safarpour, E. Shahabinejad, Vibration analysis of a double layer microshell utilizing a modified couple stress theory, Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME, 21(1) (2020) 21-44.

[20] S.-S. Yu, W.-T. Zheng, Effect of N/B doping on the electronic and field emission properties for carbon nanotubes, carbon nanocones, and graphene nanoribbons, Nanoscale, 2(7) (2010) 1069-1082.

[21] R. Majidi, K.G. Tabrizi, Study of neon adsorption on carbon nanocones using molecular dynamics simulation, Physica B: Condensed Matter, 405(8) (2010) 2144-2148.

[22] Y.-G. Hu, K.M. Liew, X. He, Z. Li, J. Han, Free transverse vibration of single-walled carbon nanocones, Carbon, 50(12) (2012) 4418-4423.

[23] J. Yan, K.M. Liew, L. He, Ultra-sensitive analysis of a cantilevered single-walled carbon nanocone-based mass detector, Nanotechnology, 24(12) (2013) 125703.

[24] W.-J. Chang, T.-H. Fang, H.-L. Lee, Y.-C. Yang, Vibration sensitivity of the scanning near-field optical microscope with a tapered optical fiber probe, Ultramicroscopy, 102(2) (2005) 85-92.

[25] I.-C. Chen, L.-H. Chen, X.-R. Ye, C. Daraio, S. Jin, C.A. Orme, A. Quist, R. Lal, Extremely sharp carbon nanocone probes for atomic force microscopy imaging, Applied Physics Letters, 88(15) (2006) 153102.

[26] Q. Fan, Z. Wang, Y. Cui, Optimal design of an antireflection coating structure for enhancing the energy-conversion efficiency of a silicon nanostructure solar cell, RSC advances, 8(61) (2018) 34793-34807.

[27] M. Toma, A. Belu, D. Mayer, A. Offenhäusser, Flexible gold nanocone array surfaces as a tool for regulating neuronal behavior, Small, 13(24) (2017) 1700629.

[28] L. Qian, R. Batra, Design of bidirectional functionally graded plate for optimal natural frequencies, Journal of Sound and Vibration, 280(1-2) (2005) 415-424.

[29] B. Saleh, J. Jiang, R. Fathi, T. Al-hababi, Q. Xu, L. Wang, D. Song, A. Ma, 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges, Composites Part B: Engineering, (2020) 108376.

[30] H. Zeighampour, Y. Tadi Beni, Analysis of conical shells in the framework of coupled stresses theory, Int. J. Eng. Sci., 81 (2014) 107-122.

[31] H. Zeighampour, Y.T. Beni, F. Mehralian, A shear deformable conical shell formulation in the framework of couple stress theory, Acta Mech., 226(8) (2015) 2607-2629.

[32] Y. Tadi Beni, F. Mehralian, The effect of small scale on the free vibration of functionally graded truncated conical shells, J. Mech. Mater. Struct., 11(2) (2016) 91-112.

[33] Y. Yuan, K. Zhao, Y. Han, S. Sahmani, B. Safaei, Nonlinear oscillations of composite conical microshells with in-plane heterogeneity based upon a couple stress-based shell model, Thin-Walled Structures, 154 (2020) 106857.

[34] H. Yaghoobi, A. Fereidoon, R. Shahsiah, Thermal Buckling of Axially Functionally Graded Thin Cylindrical

Shell, J. Therm. Stresses, 34(12) (2011) 1250-1270.

[35] J.N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, 2nd ed., Taylor & Francis, Philadelphia, 2007.

[36] J.N. Reddy, Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics, John Wiley & Sons, New York, 2002.

[37] K. Lam, L. Hua, Influence of boundary conditions on the frequency characteristics of a rotating truncated circular conical shell, Journal of Sound and Vibration, 223(2) (1999) 171-195.

[38] T. Irie, G. Yamada, K. Tanaka, Natural frequencies of truncated conical shells, Journal of Sound and Vibration, 92(3) (1984) 447-453.

[39] F.-M. Li, K. Kishimoto, W.-H. Huang, The calculations of natural frequencies and forced vibration responses of conical shell using the Rayleigh–Ritz method, Mechanics Research Communications, 36(5) (2009) 595-602.

[40] M. Rahaeifard, M.H. Kahrobaiyan, M. Asghari, M.T. Ahmadian, Static pull-in analysis of microcantilevers based on the modified couple stress theory, Sensor Actuat. A-Phys. , 171 (2011) 370-374.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Taghizadeh, A.R. Askari, Investigating the influence of higher-order boundary conditions on free vibrations of bi-directional FG thick conical micro-shells, Amirkabir J. Mech Eng., 53(10) (2022) 5085-5104.

DOI: 10.22060/mej.2021.19796.7116