Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(10) (2022) 1199-1202
DOI: 10.22060/mej.2021.19801.7117

Semi-Analytical Study of Fluid-Induced Nonlinear Vibrations in Viscoelastic Beams with Standard Linear Solid Model Using Multiple Time Scales Method

G. Zarepour[a*] , I. Javanshir[a]

Department of Mechanical engineering, Guilan University, Rasht, Iran

ABSTRACT: In this research, the behavior of nonlinear vibrations of the viscoelastic Euler-Bernoulli beam under the influence of external fluid flow has been studied. The governing equations of motion are obtained by assuming Von-Karman nonlinear strain-displacement relations and considering the interaction between structure and fluid. To consider more realistic hypotheses, contrary to previous researches, the effect of viscoelastic behavior has been evaluated using a more complete and practical model called the Standard linear solid model. After non-dimensionalizing the motion equations, the governing nonlinear differential equations are discretized using the Galerkin method. Then, the system's analytical response is acquired through the method of multiple time scales. After verifying the results and confirming the semi-analytical method's accuracy with the numerical solution results, different parameters' effect on the system's dynamic behavior has been analyzed. The results indicate that the viscoelastic behavior and the nonlinear model significantly affect the lock-in area and the maximum amplitude of the viscoelastic beam vibrations. In most studies on viscoelastic beams' vibrations, the damping effect in nonlinear terms has been neglected. However, this study demonstrates that the effect of damping on terms related to the nonlinearity of strain fields is substantial.

Review History:

Received: Mar. 29, 2021
Revised: Jun. 05, 2021
Accepted: Jul. 16, 2021
Available Online: Jul. 30, 2021

Keywords:

Fluid-induced vibration
fluid flow
multiple time scales
standard linear solid
viscoelastic beam

1. INTRODUCTION

Flow-Induced vibration is a phenomenon that often occurs in tall and narrow structures that are exposed to transverse current. And it is one of the most substantial issues that can be seen in many industrial applications such as oil pipelines and risers, transmission lines, offshore platform bases, offshore turbine towers, etc. Therefore, it has been considered by many researchers. According to extensive scientific research in this field, these systems' vibrational and dynamic behavior has not yet been fully and ultimately revealed, and research in this field is still ongoing [1]. In recent years, the behavior of transverse vibrations of beams and their stability, from various aspects such as linear behavior [2], nonlinear [3], control [4], has been considered by many researchers. Using the Kelvin-Voigt model, Ghayesh et al. [5] investigated the dynamic nonlinear behavior of viscoelastic beams with simple supports at both ends. Their studies show that the system's dynamic response depends on parameters such as mass position, dimensionless mass ratio, and viscoelasticity parameters.

A review of previous studies demonstrates that so far, no study has been fully conducted on the behavior of fluid-induced vibrations in viscoelastic beams. In addition, most studies in this field have been confined to using numerical or elemental methods.

METHODOLOGY

In the present study, utilizing the semi-analytical method and considering the nonlinear coupled model of structure-fluid interaction with Van der pol Nonlinear Differential Equation, the behavior of fluid-induced vibrations in viscoelastic beams with simple supports at both ends will be studied. In order to consider more realistic and practical conditions, the viscoelastic behavior of the materials is modeled employing a more accurate model (Standard linear solid model). By extracting the nonlinear equations governing such systems, the nonlinear behavior and the effects of the parameters affecting the vibrational characteristics of these systems will be studied. After discretizing the governing nonlinear differential equations using the Galerkin method, the equations are then solved using the multiple time scale method, and the results are extracted.

The Standard Linear Solid model is a three-parameter model (E_1, E_2, η) that predicts the behavior of many viscoelastic materials such as polymers and metals at high temperatures with great accuracy (Fig. 1) [6]:

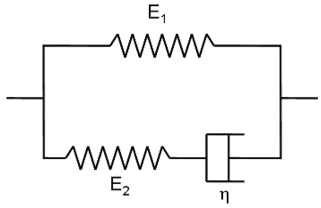


Fig. 1. Standard Linear Solid model

*Corresponding author's email: zarepour@guilan.ac.ir

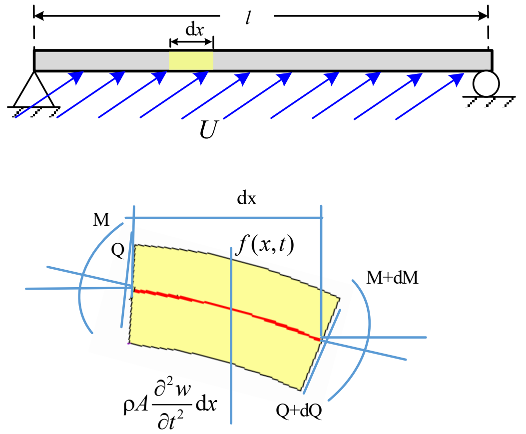


Fig. 2. Simply supported viscoelastic beam under the influence of external fluid and a section of the beam

In the present study, as shown in Fig. 2, the Euler-Bernoulli beam with a circular cross-section with simple supports at both ends and under the influence of external fluid flow at a constant speed is investigated.

Concerning the transverse vibrations of the beam and the negation of the longitudinal and transverse motion of the beam, Von-Karman nonlinear strain-displacement relations are as follows:

$$\mathring{a}_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{1}$$

where $w = w(x,t)$ is the deflection of any point on the beam and z is the distance from the neutral axis.

2. RESULTS AND DISCUSSION

In this section, the analytical solution results presented to study the behavior of nonlinear vibrations of viscoelastic beams under the flow of external fluid are presented. According to Fig. 3, it can be seen that at low fluid velocities, the system response is vibrating with a constant amplitude. As the fluid velocity increases, the fluid flow around the beam is very slow or creepy. As the fluid around the beam flows, the Von-Karmen vortices are created symmetrically by negative pressure behind the beam, causing lift and drag forces on the beam, resulting in beam vibrations.

Fig. 4 illustrates the wavelet transform curves of the time responses shown in Fig. 3. Another interesting result that can be seen is that fluid velocity also affects the frequency of system vibrations. Due to the effects of added mass due to the presence of external fluid flow, at low fluid velocities, the vibration frequencies of the system decrease, and then at higher velocities due to the formation of vortices, the vibration frequency increases.

As can be seen from the results shown in Fig. 5, the amplitude of steady-state vibrations in the lock-in zone is greater than for the other two regions.

3. CONCLUSION

Based on the results of the present study, a summary of the important results can be expressed as follows:

At low fluid velocities, the only effect is the added mass due to the fluid, which reduces the beam's natural frequency.

- For low values of viscoelastic coefficients, the amplitude of vibrations increases with time first and then decreases and converges to a certain value, and the system response is vibrating, but the beam with high viscoelastic coefficients shows different behavior.

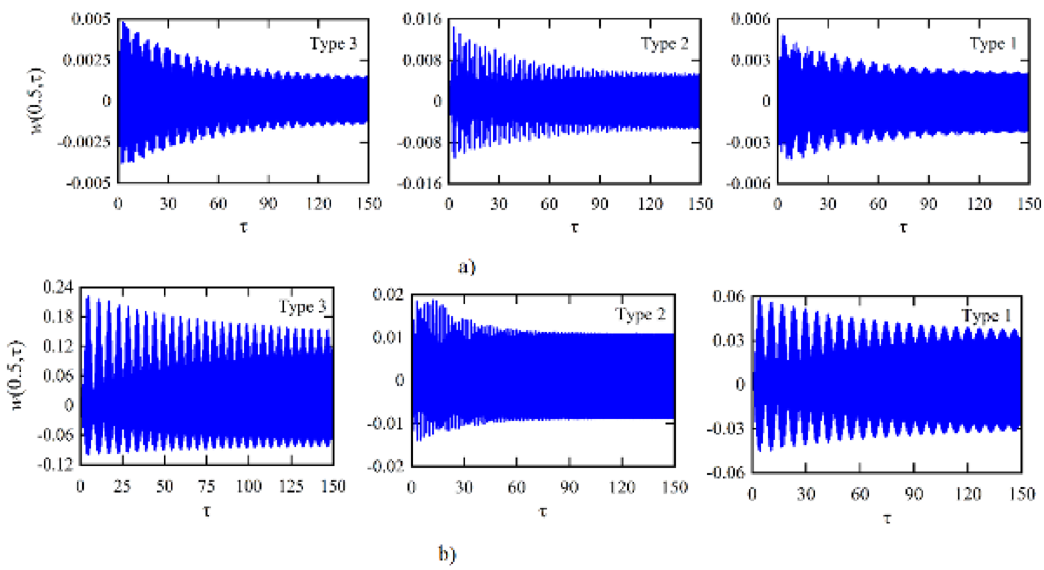


Fig. 3. Time-response curves of viscoelastic beams for different fluid flow velocities a) $u = 0.5$ **b)** $u = 1$

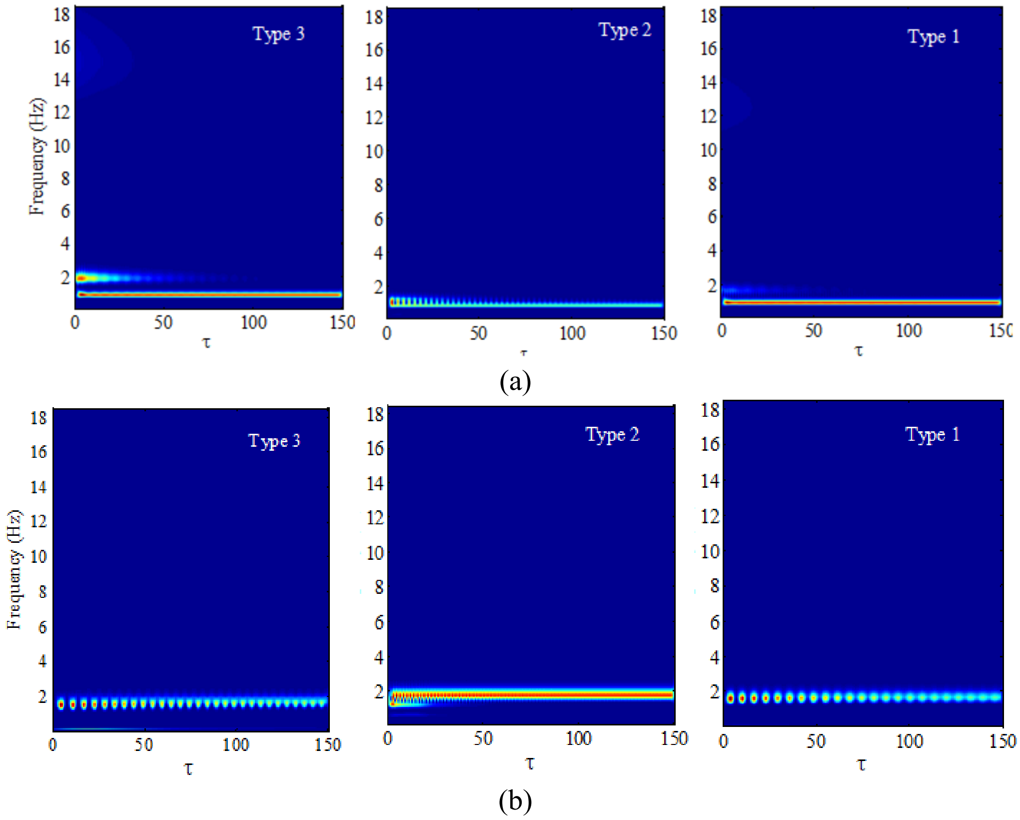


Fig. 4. Wavelet transform of viscoelastic beam for different fluid flow velocity a) $u = 0.5$ **b)** $u = 1$

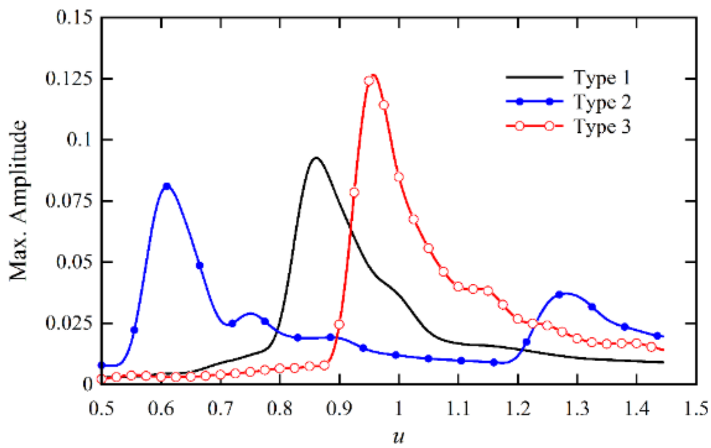


Fig. 5. The maximum amplitude of vibration of a viscoelastic beam's midpoint in terms of external fluid flow velocity

- The viscoelastic behavior and the nonlinear model have a significant effect on the lock-in area as well as the maximum amplitude of the viscoelastic beam vibrations.

The results of this study show that the effect of damping on terms stemmed from the nonlinearity of strain fields is significant and these effects must be considered in deriving the equations of motion governing the vibrational behavior of viscoelastic structures.

REFERENCES

[1] M. Minaei, M. Rezaee, V. Arab Maleki, Vibration Analysis of Viscoelastic Carbon Nanotube under Electromagnetic Fields based on the Nonlocal Timoshenko Beam Theory, Iranian Journal of Mechanical Engineering, 22(3) (2020) 54-76.

[2] E. Carrera, M. Filippi, P. Mahato, A. Pagani, Free-vibration tailoring of single-and multi-bay laminated box structures by refined beam theories, Thin-Walled

Structures, 109 (2016) 40-49.

[3] H. Asadi, M. Aghdam, Large amplitude vibration and post-buckling analysis of variable cross-section composite beams on nonlinear elastic foundation, International Journal of Mechanical Sciences, 79 (2014) 47-55.

[4] S.H. Mirafzal, A.M. Khorasani, A.H. Ghasemi, Optimizing time delay feedback for active vibration control of a cantilever beam using a genetic algorithm, Journal of Vibration and Control, 22(19) (2016) 4047-4061.

[5] M.H. Ghayesh, F. Alijani, M.A. Darabi, An analytical solution for nonlinear dynamics of a viscoelastic beam-heavy mass system, Journal of mechanical Science and Technology, 25(8) (2011) 1915-1923.

[6] N. Heymans, J.-C. Bauwens, Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior, Rheologica acta, 33(3) (1994) 210-219.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

G. Zarepour, I. Javanshir, Semi-Analytical Study of Fluid-Induced Nonlinear Vibrations In Viscoelastic Beams with Standard Linear Solid Model Using Multiple Time Scales Method, Amirkabir J. Mech Eng., 53(10) (2022) 1199-1202.

DOI: 10.22060/mej.2021.19801.7117

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ۱۰، سال ۱۴۰۰، صفحات ۵۱۰۵ تا ۵۱۲۲
DOI: 10.22060/mej.2021.19801.7117

بررسی نیمه تحلیلی ارتعاشات غیرخطی القائی ناشی از سیال در تیرهای ویسکوالاستیک با مدل جامد استاندارد با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه

غلامرضا زارع‌پور* ، ایلقار جوانشیر

دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

خلاصه: در این تحقیق رفتار ارتعاشات غیرخطی تیر اویلر-برنولی ویسکوالاستیک تحت تأثیر جریان سیال خارجی مطالعه شده است. معادلات حاکم بر حرکت با فرض روابط کرنش-جابجایی غیرخطی ون کارمن و در نظر گرفتن اندرکنش بین سازه و سیال به دست آمده است. به منظور در نظر گرفتن فرضیات واقع‌بینانه‌تر، اثر رفتار ویسکوالاستیک با استفاده از مدل کامل‌تر و واقع‌بینانه‌تر جامد استاندارد در نظر گرفته شده است. پس از بی‌بعدسازی معادلات حرکت، معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم توسط روش گالرکین گسسته‌سازی شده و پاسخ تحلیلی سیستم با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه به دست آمده است. پس از صحت‌سنجی نتایج و تأیید دقت روش نیمه‌تحلیلی با نتایج حاصل از حل عددی، تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار دینامیکی سیستم مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد رفتار ویسکوالاستیک و مدل غیرخطی تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر ناحیه قفل‌شدگی و همچنین حداکثر دامنه نوسانات تیر ویسکوالاستیک دارد. با توجه به اینکه در اکثر مطالعات انجام شده در زمینه ارتعاشات تیرهای ویسکوالاستیک، اثر میرایی در جملات غیرخطی صرف‌نظر شده است، نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که تأثیر میرایی بر جملات ناشی از غیرخطی بودن میدان‌های کرنش قابل ملاحظه بوده و این اثرات بایستی در استخراج معادلات حرکت حاکم بر رفتار ارتعاشاتی سازه‌های ویسکوالاستیک در نظر گرفته شود.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۰۹
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۳/۱۵
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۲۵
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۵/۰۸

کلمات کلیدی:
ارتعاشات القائی
جریان سیال
تیر ویسکوالاستیک
مدل جامد استاندارد
مقیاس‌های زمانی چندگانه

۱- مقدمه

ارتعاشات القائی ناشی از سیال یک پدیده است که اغلب در سازه‌های بلند و باریک که در معرض جریان عرضی هستند، رخ می‌دهد و یکی از مهمترین مسائلی می‌باشد که در بسیاری از کاربردهای صنعتی مانند لوله‌های حامل نفت و رایزرها، خطوط انتقال قدرت، پایه‌های سکوهای فراساحلی، برج‌های توربین‌های فراساحلی و غیره مشاهده می‌شود و از این رو مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. با توجه به تحقیقات علمی وسیع در این زمینه، رفتار ارتعاشی و دینامیکی این سیستم‌ها هنوز به صورت جامع و کامل آشکار نشده و تحقیقات در این زمینه همچنان ادامه دارد [۱].

در سال‌های اخیر رفتار ارتعاشات عرضی تیرها و پایداری آنها، از جنبه‌های مختلفی مانند رفتار خطی [۲]، غیرخطی [۳]، کنترل [۴] مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. اوزکای و پاکدمیرلی [۵] ارتعاشات غیرخطی تیر دو سر گیردار حامل جرم متمرکز را بررسی کردند. آن‌ها مقادیر دقیق شکل مودهای ارتعاشی و فرکانس‌های طبیعی سیستم خطی را استخراج نمودند و سپس با استفاده از روش اغتشاشات فرکانس‌های تشدید غیرخطی و پاسخ فرکانسی سیستم تحت تحریک اجباری را محاسبه نمودند. صالحی و انصاری [۶] کمانش تیرهای اویلر- برنولی و تیموشنکو ویسکوالاستیک را مطالعه کرده و فرمول‌بندی ریاضی برای تیر اویلر- برنولی ویسکوالاستیک تحت بار محوری و عرضی متغیر با زمان را ارائه داده‌اند. قایش و

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: zarepour@guilan.ac.ir

همکاران [۷] با استفاده از مدل کلوین- وویت به بررسی رفتار غیرخطی دینامیکی تیرهای ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها پرداختند. نتایج مطالعات آنها نشان می‌دهد که پاسخ دینامیکی سیستم به پارامترهایی همچون موقعیت جرم، نسبت جرم بی‌بعد و پارامترهای ویسکوالاستیسیته وابستگی بسیاری دارد. خیونگ و همکاران [۸] با استفاده از روش تحلیلی به بررسی رفتار ارتعاشی تیرهای ویسکوالاستیک تحت تحریک رزونانسی پرداختند. آن‌ها مدول الاستیک را با استفاده از فرم انتگرالی شبیه‌سازی کردند و با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی اثرات نیروی برشی را در نظر گرفتند.

ناداچر و راچول [۹] بر اساس منشأ تحریک ارتعاشات القائی، طبقه‌بندی از این نوع ارتعاشات را ارائه کرده‌اند. بر اساس نتیجه مطالعه آنها، زمینه‌های بسیاری وجود دارد که ارتعاشات القائی ناشی از سیال را می‌توان مشاهده نمود که می‌توان به لوله‌های حامل جریان سیال [۱۰ و ۱۱]، رایزرهای انتقال دهنده نفت خام از کف دریا به سطح خشکی، سازه‌های دریایی، پل‌ها، خطوط انتقال برق و ساختمان‌های مرتفع می‌توان اشاره نمود. این مثال‌ها نمونه‌های بسیار محدودی از سیستم‌های ارتعاشات القائی می‌باشد که بسیاری از این کاربردها در مطالعات مروری انجام شده توسط سارپکایا [۱۲]، وانگ و همکاران [۱۳]، هانگ و همکاران [۱۴] و خان [۱۵] بیان شده است. سؤالی که اینجا مطرح می‌شود آن است که برای یک سازه با مشخصات هندسی و مکانیکی مشخص، تحت چه شرایطی جریان سیال باعث ایجاد ارتعاشات نامطلوب و گاهی اوقات فاجعه‌بار می‌شود؟ محققان بسیار زیادی به بررسی عددی و آزمایشگاهی در مورد این پدیده در سازه‌های مختلف مانند پرداخته‌اند. در این زمینه مطالعات مروری توسط ویلیامسون و گواردان [۱۶]، هورویتچ و ویلیامسون [۱۷] و برامان [۱۸]، انجام شده است. بورقوت و همکاران [۱۹] به بررسی پدیده قفل‌شدگی و ارتعاشات القائی ناشی از گردابه در تیرهای بلند پرداختند. نتایج مطالعات آنها نشان می‌دهد که در تیرهای بلند ناحیه قفل‌شدگی وابستگی شدید به عدد رینولدز دارد. وی و همکاران [۲۰] به بررسی مطالعات انجام شده در زمینه ارتعاشات القائی ناشی از سیال در سازه‌ها پرداخته‌اند. مارا و همکاران [۲۱] با استفاده از تست‌های تجربی به اندازه‌گیری و بهبود دادن مدل تحلیلی ارتعاشات القائی ناشی از سیال در استوانه‌های با سطح مقطع مستطیلی پرداختند. هان و همکاران [۲۲] به بررسی نسبت فرکانسی بر روی ارتعاشات القائی ناشی از سیال در استوانه‌ها پرداختند. آن‌ها استوانه را با استفاده از روش المان محدود در محدوده رینولدزهای ۲۰۰ شبیه‌سازی کرده و پاسخ دینامیکی گذرای سیستم را استخراج و تحلیل کردند. دانیل و همکاران [۲۳] با استفاده از روش عددی به بررسی ارتعاشات ناشی از سیال در سیلندرهای سطح مقطع مستطیلی پرداختند. جیانگ و همکاران [۲۴] با استفاده از روش عددی به بررسی ارتعاشات القائی ناشی از سیال در استوانه‌های محرک با سطح مقطع مربعی شکل پرداختند. نتایج عددی نشان دهنده پاسخ هارمونیک و غیر هارمونیک در رفتار ارتعاشی این نوع استوانه‌ها می‌باشد. وانگ و همکاران [۲۵] با استفاده از روش عددی به مطالعه رفتار ارتعاشات القائی ناشی از جریان سیال در تیرهای بلند پرداختند. ساهو و چاترجی [۲۶] رفتار ارتعاشات غیرخطی تیرها تحت تأثیر جریان سیال و تحریک خارجی فرکانس بالا را به صورت عددی مطالعه کردند. نتایج مطالعه آنها نشان می‌دهد که در حضور جریان سیال خارجی، رفتار آشوبناک سیستم می‌تواند به حرکت نوسانی تبدیل شود.

بررسی مطالعات انجام شده نشان می‌دهد که تاکنون مطالعه‌ای در زمینه رفتار ارتعاشات القائی ناشی از سیال در تیرهای ویسکوالاستیک صورت نگرفته است. علاوه بر این، عمده مطالعات انجام شده در این زمینه با استفاده از روش‌های عددی و یا المان محدود بوده است. بر این اساس، در ادامه مطالعات انجام شده توسط دانیل و همکاران [۲۳] و مارا و همکاران [۲۱]، در تحقیق حاضر با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی و با در نظر گرفتن مدل کوپل‌شدگی غیرخطی اندرکنش سازه-سیال با معادله دیفرانسیل غیرخطی ون در پل، به مطالعه رفتار ارتعاشات القائی ناشی از سیال در تیرهای ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها پرداخته خواهد شد. به منظور در نظر گرفتن شرایط واقع‌بینانه‌تر، رفتار ویسکوالاستیک مواد با استفاده از مدل‌های دقیق‌تر مدل‌سازی شده و برخلاف مطالعات قبلی با استخراج معادلات غیرخطی حاکم بر چنین سیستم‌هایی به مطالعه رفتار غیرخطی و اثرات پارامترهای تأثیرگذار بر مشخصه‌های ارتعاشی این سیستم‌ها پرداخته خواهد شد. پس از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم با استفاده از روش گالرکین، در ادامه معادلات با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه حل شده و نتایج استخراج شده است.

۲- استخراج معادلات حاکم بر حرکت

۲-۱- رفتار ویسکوالاستیک

مواد ویسکوالاستیک از جمله موادی هستند که در آن‌ها رابطه میان تنش برشی و کرنش، وابستگی شدیدی نسبت به زمان دارد. به طور کلی تمامی مواد دارای مقداری پاسخ ویسکوالاستیک هستند. مواد پلیمری، پلیمرهای سنتز شده، پلاستیک‌ها و بافت‌های بدن نیز به مانند فلزات در دماهای بالا، از خود رفتارهای ویسکوالاستیک قابل توجهی نشان می‌دهند. برای مواد ویسکوالاستیک در حالت کلی رابطه بین تنش و کرنش را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۲۷]:

$$\sigma=\sigma\left(\varepsilon,\dot{\varepsilon}\right) \quad (۱)$$

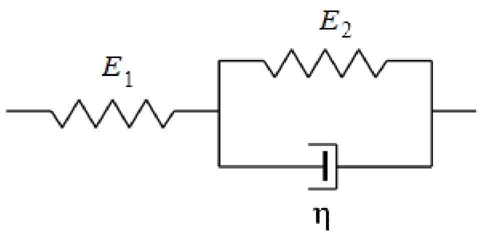
که در آن σ مؤلفه تنش، ε مؤلفه کرنش و $\dot{\varepsilon}$ نرخ تغییرات کرنش می‌باشد.

مدل جامد استاندارد خطی از مدل‌های دقیق رفتار ویسکوالاستیک مواد می‌باشند که مطابق شکل ۱ از ترکیب سری یک فنر با مدل کلوین-ویت ایجاد می‌شود. مدل جامد استاندارد یک مدل سه پارامتری (E_1، E_2 و η) است که رفتار بسیاری از مواد ویسکوالاستیک مانند پلیمرها و فلزات در دماهای بالا را با دقت بسیار مناسبی پیش‌بینی می‌کند. رابطه ریاضی مدل ویسکوالاستیک جامد استاندارد به صورت زیر می‌باشد [۲۸]:

$$\left(E_1+E_2\right)\sigma+\eta\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=E_1E_2\varepsilon+E_1\eta\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \quad (۲)$$

۲-۲- فرمول‌بندی تئوری

همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است در تحقیق حاضر، تیر اویلر- برنولی با سطح مقطع دایروی شکل و با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها و تحت تأثیر جریان سیال خارجی با سرعت ثابت U بررسی می‌شود. این مدل می‌تواند مدل ریاضی از رایزر، لوله انتقال سیال و یا پایه‌های سکوهای فراساحلی باشد. مطابق شکل طول تیر برابر l بوده و تکیه‌گاه‌های به صورت تکیه‌گاه ساده در دو انتها مدل شده است. برای استخراج معادله حرکت حاکم بر سیستم، مطابق شکل ۲ب دیاگرام نیرویی المانی از تیر به طول dx در نظر گرفته می‌شود که در آن $M(x,t)$ گشتاور خمشی، $V(x,t)$ نیروی برشی، $F(x,t)$ برآیند نیروی خارجی و نیروی اندرکنش بین تیر و جریان سیال خارجی است.



شکل ۱. مدل ویسکوالاستیک جامد استاندارد خطی
Fig. 1. Standard Linear Solid model

با توجه به ارتعاشات عرضی تیر و صرفنظر کردن از حرکت طولی و عرضی تیر، رابطه غیرخطی کرنش-جابجایی ون- کارمن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_x=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad (۳)$$

که در آن $w=w(x,t)$ خیز عرضی هر نقطه از تیر بوده و z فاصله از تار خنثی می‌باشد.

نیروی محوری اعمال شده بر سطح مقطع تیر، $N(x,t)$، با انتگرال‌گیری از تنش محوری در سطح تیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N(x,t)=\int_A\sigma_x(x,z,t)\mathrm{d}A \quad (۴)$$

همچنین، با در نظر گرفتن تنش خمشی σ_x، گشتاور خمشی ایجاد شده در تیر ویسکوالاستیک برابر است با:

$$M(x,t)=\int_A z\sigma_x(\mathrm{x},\mathrm{z},\mathrm{t})\mathrm{d}A \quad (۵)$$

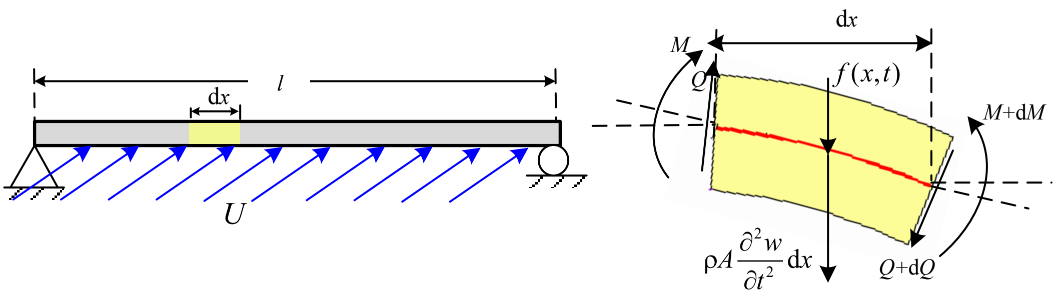
با توجه به دیاگرام نیرویی المانی از تیر به طول $\mathrm{d}x$ که در شکل ۲ نشان داده شده است، نیروی اینرسی المان تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho A\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (۶)$$

که در آن ρ چگالی تیر و A مساحت سطح مقطع آن می‌باشد.

با نوشتن قانون دوم نیوتن در راستای محور قائم، معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+f(x,t)=\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (۷)$$



(الف) (ب)

شکل ۲. (الف) تیر ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها تحت تأثیر سیال خارجی و (ب) المانی از تیر

Fig. 2. (a) Simply supported viscoelastic beam under the influence of external fluid and (b) an element of the beam

با گشتاور گیری حول نقطه P در شکل ۲ خواهیم داشت:

$$\left(Q+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)dx-\left(N+\frac{\partial N}{\partial x}dx\right)\frac{\partial w}{\partial x}dx-\frac{\partial M}{\partial x}dx+fdx\frac{dx}{2}=0 \quad (۸)$$

با صرف‌نظر کردن از توان‌های بالاتر dx، رابطه اخیر به صورت زیر ساده‌سازی می‌شود:

$$Q=+\frac{\partial M}{\partial x}+N\frac{\partial w}{\partial x} \quad (۹)$$

با جایگذاری رابطه اخیر در معادله (۷)، معادله حاکم بر حسب گشتاور خمشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right)+f(x,t)=\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (۱۰)$$

با استفاده از مدل جامد استاندارد خطی، ویژگی‌های ویسکوالاستیک را می‌توان با استفاده از رابطه تنش- کرنش زیر بیان می‌شود:

$$g_0\sigma+g_1\dot{\sigma}=b_0\varepsilon+b_1\dot{\varepsilon} \quad (۱۱)$$

که در آن برای مدل ویسکوالاستیک جامد استاندارد، g_0، g_1، b_0 و b_1 ثوابت مادی می‌باشند و بر اساس معادله (۲) می‌باشند. با جایگذاری مؤلفه کرنش غیر صفر ارائه شده در رابطه (۳) در رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$g_0\sigma+g_1\dot{\sigma}=\frac{1}{2}b_0\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+b_1\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}-zb_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-zb_1\frac{\partial^3 w}{\partial t\partial x^2} \quad (۱۲)$$

با انتگرال‌گیری نسبت به y و z از رابطه اخیر و با استفاده از روابط (۴) و (۵)، خواهیم داشت:

$$g_0N+g_1\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{1}{2}b_0A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+b_1A\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x} \quad (۱۳)$$

$$g_0M+g_1\frac{\partial M}{\partial t}=-Ib_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-Ib_1\frac{\partial^3 w}{\partial t\,\partial x^2} \quad (۱۴)$$

که در آن I گشتاور دوم سطح مقطع تیر می‌باشد. با استفاده از رابطه (۱۰) و مشتق دوم رابطه (۱۴) نسبت به متغیر x می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2}=\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right)-f(x,t) \quad (\text{۱۵-الف})$$

$$g_0\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2}+g_1\frac{\partial^3 M}{\partial t\,\partial x^2}=-Ib_0\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-Ib_1\frac{\partial^5 w}{\partial t\,\partial x^4} \quad (\text{۱۵-ب})$$

در نهایت، با جایگذاری $\partial^2 M(x,t)/\partial x^2$ از رابطه (۱۵-الف) در معادله (۱۵-ب) و حذف متغیر $M(x,t)$ از معادلات و با در نظر گرفتن این نکته که متغیرهای ویسکوالاستیک فقط به متغیر خیز تیر اعمال می‌شوند، معادله حرکت حاکم بر رفتار ارتعاشات غیرخطی عرضی تیر ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن مدل رفتار جامد استاندارد خطی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho A\left[g_0\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+g_1\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t^3}\right]+ I\left[b_0\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+b_1\frac{\partial^5 w}{\partial t\partial x^4}\right]-\frac{3b_0A}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}- Ab_1\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right]=f(x,t) \qquad (۱۶)$$

که در آن $f(x,t)$ نیروی خارجی اعمالی به تیر می‌باشد که به دو قسمت نیروی اعمالی از طرف سیال و نیروی خارجی اعمالی به تیر تقسیم می‌شود.

با تعریف متغیرهای بی‌بعد به صورت زیر

$$\hat{w}=\frac{w}{l},\quad \xi=\frac{x}{l},\quad \tau=\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}t,\quad \Omega=\omega\sqrt{\frac{\rho Al^4}{EI}},\quad \lambda_0=\frac{b_0}{g_0E}, \quad \lambda_1=\frac{1}{l^2}\frac{b_1}{g_0E}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}},\quad \lambda_2=\frac{1}{l^2}\frac{g_1}{g_0}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \lambda_3=\frac{3}{2}\frac{Al^2}{EI}\frac{b_0}{g_0},\quad \lambda_4=\frac{Ab_1}{g_0}\sqrt{\frac{1}{EI\rho A}} \qquad (۱۷)$$

که در آن Ω نشان دهنده فرکانس طبیعی بی‌بعد است، معادله دیفرانسیل حاکم را می‌توان به فرم بی‌بعد زیر بیان نمود:

$$\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\tau^2}+\lambda_0\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\xi^4}+\lambda_1\frac{\partial^5\hat{w}}{\partial\tau\partial\xi^4}+\lambda_2\frac{\partial^3\hat{w}}{\partial\tau^3}= \lambda_3\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\xi^2}+\lambda_4\left[\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^3\hat{w}}{\partial\xi^2\partial\tau}+ 2\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\xi^2}\frac{\partial\hat{w}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\xi\partial\tau}\right]+f(\xi,\tau) \qquad (۱۸)$$

با در نظر گرفتن ارتعاشات القائی ناشی از سیال، نیروی خارجی اعمالی به تیر از طرف سیال که در معادله (۱۸) بیان شده است از دو قسمت نیروی لیفت، f_L، و نیروی ناشی از میرایی هیدرودینامیک، f_D، که در راستای عرضی به تیر اعمال می‌شود، تشکیل می‌شود. با توجه به مطالعات انجام شده توسط فاچینتی و همکاران [۲۹] و کبر و ویرکیگورچ [۳۰] این نیروها به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$f_D(x,t)=-\frac{1}{2}C_D\rho_f DU\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \qquad (۱۹)$$

$$f_L(x,t)=\frac{1}{4}C_L\rho_f DU^2\overline{q}(x,t) \qquad (۲۰)$$

که در آن ρ_f چگالی سیال، U سرعت جریان سیال خارجی و C_D ضریب میرایی می‌باشد و مقدار آن وابسته به عدد رینولدز می‌باشد. در تحقیق حاضر مقدار C_D برابر ۱/۲ و مقدار C_L که ضریب لیفت بوده برابر ۰/۳ فرض می‌شود [۲۹]. اگر $\overline{q}(x,t)$ تابع ضریب کاهش یافته لیفت[1] باشد، در این صورت رفتار ناحیه ویک را به صورت معادله ون در پل و با استفاده از رابطه زیر می‌توان بیان نمود [۲۹]:

$$\frac{\partial^2\overline{q}(x,t)}{\partial t^2}+\delta\omega_s\left[\overline{q}(x,t)^2-1\right]\frac{\partial\overline{q}(x,t)}{\partial t}+ \omega_s^2\overline{q}(x,t)=F_d \qquad (۲۱)$$

که در آن F_d نیروی اعمالی ناشی از طرف سیال بر روی سازه است و δ ضریب دمپینگ جریان سیال اضافه شده است که وابسته به ضریب درگ متوسط بوده و مقدار آن معمولاً برابر۰/۳می‌باشد [۲۹]. ω_s فرکانس گردابه‌ها[2] می‌باشد که با رابطه زیر به سرعت سیال و عددی بی‌بعد استروهال وابسته می‌باشد:

$$\omega_s=2\pi S_t\frac{U}{D} \qquad (۲۲)$$

که در آن S_t عدد بی‌بعد استروهال می‌باشد و مقدار آن با توجه به هندسه سطح مقطع جسم تعیین می‌شود [۳۱]. در این مدل، اندرکنش بین سیال و سازه با استفاده از مؤلفه نیرو اعمال می‌شود. با توجه به تئوری ارائه شده توسط فاچینیتی و همکاران [۲۹] بهترین رابطه‌ای که معرف این نیروهاست و با نتایج تجربی نیز سازگاری قابل قبولی دارد به صورت زیر می‌باشد:

$$F_d=\frac{P}{D}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \qquad (۲۳)$$

که D قطر هیدرولیکی معادله بوده و پس از برازش داده‌های تجربی $P=12$ به دست می‌آید.

با در نظر گرفتن روابط (۱۹) و (۲۰) نیروی کل خارجی اعمال شده به تیر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(x,t)=f_D(x,t)+f_L(x,t) \qquad (۲۴)$$

1 Reduced Lift Coefficient
2 Vortex Shedding

در نتیجه معادلات حرکت حاکم بر ارتعاشات القائی ناشی از سیال در تیرهای ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن اثر کرنش‌های غیرخطی و فرم ساختاری ویسکوالاستیک جامد استاندارد را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\tau^2}+\lambda_0\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\xi^4}+\lambda_1\frac{\partial^5\hat{w}}{\partial\tau\,\partial\xi^4}+\lambda_2\frac{\partial^3\hat{w}}{\partial\tau^3}\\&-\lambda_3\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\xi^2}-\lambda_4\left[\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^3\hat{w}}{\partial\xi^2\partial\tau}+2\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\xi^2}\frac{\partial\hat{w}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\xi\,\partial\tau}\right]=\\&-c_Lu^2\bar{q}+c_Du\frac{\partial\hat{w}}{\partial\tau}\\&\frac{\partial^2\bar{q}}{\partial\tau^2}+\lambda\Omega_su(\bar{q}^2-1)\frac{\partial\bar{q}}{\partial\tau}+\Omega_s^2u^2\bar{q}=P\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\tau^2}\end{aligned}\qquad(۲۵)$$

$$\hat{w}\big|_{\hat{\iota}=0}=\frac{d^2\hat{w}}{d\hat{\iota}^2}\bigg|_{\hat{\iota}=0}=0,\;\;\hat{w}\big|_{\hat{\iota}=1}=\frac{d^2\hat{w}}{d\hat{\iota}^2}\bigg|_{\hat{\iota}=1}=0\qquad(۲۶)$$

که در آن $\Omega_s=\omega_s\sqrt{\rho A l^4/EI}$ می‌باشد.

به منظور محاسبه پاسخ، دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی ارائه شده در رابطه (۲۵) با استفاده از روش گالرکین گسسته‌سازی می‌شود. بر این اساس پاسخ فرضی معادله دیفرانسیل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat{w}(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(\xi)\eta_n(\tau)\qquad(۲۷)$$

$$\bar{q}(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(\xi)q_n(\tau)\qquad(۲۸)$$

که در آن $\eta_n(\tau)$ و $q_n(\tau)$ مختصه‌های تعمیم‌یافته بوده و مجهولات مسأله می‌باشند. با توجه به شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها، این توابع به صورت $\ddot{o}_n(\hat{\iota})=\sqrt{2}\sin(n\eth\hat{\iota})$ مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به خاصیت تعامد توابع ویژه، شرایط زیر برقرار می‌باشد:

$$\int_0^1\varphi_r(\xi)\varphi''''_s(\xi)d\xi=\Omega_r^2\delta_{rs},\quad r,s=1,2,\ldots\qquad(۲۹)$$

که در آن δ_{rs} تابع دلتای کرونکر و $\Omega_r^2=r\pi$ می‌باشد. با جایگذاری روابط (۲۷) و (۲۸) در معادلات (۲۵) و با استفاده از خاصیت تعامد شکل مودهای ارتعاشی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}\left[\Omega_n^2\;\;\lambda_1\dot{\eta}_n(\tau)+\lambda_0\eta_n(\tau)\;\;\varphi_n^{(4)}(\xi)+\varphi_n(\xi)\ddot{\eta}_n(\tau)\right]+\\&\lambda_2\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(\xi)\dddot{\eta}_n(\tau)+c_Lu^2q-c_Du\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(\xi)\dot{\eta}_n(\tau)-\\&\lambda_3\left(\sum_{n=1}^{N}\varphi_n'(\xi)\eta_n(\tau)\right)^2\sum_{n=1}^{N}\varphi_n''(\xi)\eta_n(\tau)\\&-\lambda_4\left[2\sum_{n=1}^{N}\varphi_n''(\xi)\eta_n(\tau)\sum_{n=1}^{N}\varphi_n'(\xi)\eta_n(\tau)\sum_{n=1}^{N}\varphi_n'(\xi)\dot{\eta}_n(\tau)+\right.\\&\left.\left(\sum_{n=1}^{N}\varphi_n'(\xi)\eta_n(\tau)\right)^2\sum_{n=1}^{N}\varphi_n'''(\xi)\dot{\eta}_n(\tau)\right]=0\end{aligned}\qquad(۳۰)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(\xi)\ddot{q}_n(\tau)+\lambda\Omega_su\Big(\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(\xi)q_n(\tau)\\&\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(\xi)q_n(\tau)-1\Big)\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(\xi)\dot{q}_n(\tau)\\&+\Omega_s^2u^2\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(\xi)q_n(\tau)=p\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(\xi)\ddot{\eta}_n(\tau)\end{aligned}\qquad(۳۱)$$

۲-۳- حل عددی با استفاده از روش رانگ-کوتا

با توجه به پیچیدگی و کوپل بودن معادلات ناشی از اندرکنش سازه و سیال، امکان استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه برای این معادلات وجود نداشته و بنابراین، این معادلات با استفاده از روش گالرکین گسسته‌سازی می‌شوند. با اعمال روش گالرکین به معادلات (۳۰) و (۳۱)، دستگاه معادلات با مشتقات معمولی زیر حاصل می‌شود:

$$\lambda_2\dddot{\eta}_n+\ddot{\eta}_n+\sum_{i=1}^{\cdot\cdot}(B_{ni}\dot{\eta}_i+C_{ni}\eta_i)=\sum_{i=1}^{\cdot\cdot}F_iq+R_n(\eta_i,\dot{\eta}_i,\tau)\qquad(۳۲)$$

$$\frac{\partial^2q_n}{\partial\tau^2}+\lambda\Omega_su(F_nq_n{}^2-1)\frac{\partial q_n}{\partial\tau}+\Omega_s^2u^2q_n=P\ddot{\eta}_n(\tau)\qquad(۳۳)$$

با تعریف بردار متغیرهای تعمیم‌یافته $\varsigma=[\varsigma_1,\varsigma_2,\ldots,\varsigma_N]^{\mathrm{T}}$، معادلات (۳۲) و (۳۳) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بیان کرد:

$$\lambda_2\dddot{\eta}+\ddot{\eta}+\mathbf{B}\dot{\eta}+\mathbf{C}\eta=\mathbf{F}q+\mathbf{R}(\eta,\dot{\eta},\tau)\qquad(۳۴)$$

$$\ddot{q}+\lambda\Omega_su(\mathrm{F}q^2-1)\dot{q}+\Omega_s^2u^2q=P\ddot{\eta}(\tau)\qquad(۳۵)$$

ضرایب معادله (۳۴)، یعنی اعضای ماتریس‌های ظاهر شده در رابطه (۳۴) با استفاده از روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$B_{ni}=\int_0^1 \lambda_1 \Omega_n^2 \varphi_i^{(4)} \varphi_n d\xi - c_D u,\; C_{ni}=\int_0^1 \lambda_0 \Omega_n^2 \varphi_i^{(4)} \varphi_n d\xi,$$

$$F_i = c_L u^2 \int_0^1 \varphi_i \varphi_n d\xi$$

$$R_n=\lambda_3 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{N}\varphi_i' \eta_i \sum_{j=1}^{N}\varphi_j' \eta_j\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\varphi_i'' \eta_i\right)\varphi_n \mathrm{d}\xi$$
$$+\lambda_4 \int_0^1 \left(2\sum_{i=1}^{N}\varphi_i'' \eta_i \sum_{j=1}^{N}\varphi_j' \eta_j \sum_{k=1}^{N}\varphi_k' \eta_k + \right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{N}\varphi_i' \eta_i \sum_{j=1}^{N}\varphi_j' \eta_j \sum_{k=1}^{N}\varphi_k'' \eta_k\right)\varphi_n \mathrm{d}\xi \tag{36}$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی به دست آمده در روابط (۳۴) و (۳۵)، به صورت معادلات دیفرانسیل غیرخطی کوپل ظاهر می‌شوند. برای حل این معادلات از روش حل عددی رانگ- کوتا استفاده می‌شود و در بخش بعدی به بررسی نتایج حاصل از حل عددی آن پرداخته خواهد شد.

۴-۲- حل تحلیلی با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه

به منظور امکان‌پذیر بودن حل تحلیلی معادلات غیرخطی حاکم بر رفتار ارتعاشات القائی ناشی از سیال در تیرهای ویسکوالاستیک، معادلات حرکت ابتدا با استفاده از در نظر گرفتن یک جمله در روش گالرکین کاهش مرتبه داده می‌شود. بر این اساس، با در نظر گرفتن $N=1$، معادلات حاکم بر سیستم با توجه به روابط (۳۴) و (۳۵) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\ddot{\eta}+\lambda_2 \dddot{\eta}+B_1\dot{\eta}+C_1\eta=F_1 q+F_2\dot{q} \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}+\lambda \Omega_s u\left(F_1 q^2-1\right)\frac{\partial q}{\partial \tau}+\Omega_s^2 u^2 q=P\ddot{\eta}(\tau) \tag{38}$$

با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه و متغیرهای زمانی $T_0=t$ و $T_1=\varepsilon t$، مشتق کامل نسبت به زمان بی‌بعد به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d}{d\tau}=\frac{\partial}{\partial T_0}\frac{\partial T_0}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial T_1}\frac{\partial T_1}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial T_2}\frac{\partial T_2}{\partial \tau}+\cdots=$$
$$\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}+\cdots \quad \frac{d^2}{d\tau^2}=$$
$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_2}+\frac{\partial^2}{\partial T_1^2}\right)+\cdots \quad \frac{d^3}{d\tau^3}=$$
$$\frac{\partial^3}{\partial T_0^3}+3\varepsilon\frac{\partial^3}{\partial T_0^2\partial T_1}+3\varepsilon^2\left(\frac{\partial^3}{\partial T_0\partial T_1^2}+\frac{\partial^3}{\partial T_0\partial T_2}\right)+\cdots \tag{39}$$

بر این اساس، پاسخ فرضی معادلات دیفرانسیل (۳۷) و (۳۸) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}\eta(\varepsilon,T_0,T_1)&=\eta_0(T_0,T_1)+\varepsilon\eta_1(T_0,T_1)\\ q(\varepsilon,T_0,T_1)&=q_0(T_0,T_1)+\varepsilon q_1(T_0,T_1)\end{aligned} \tag{40}$$

که در آن $\varepsilon=1/EI<<1$ می‌باشد. با جایگذاری روابط (۳۹) و (۴۰) در معادلات (۳۷) و (۳۸) و مرتب‌سازی برحسب توان‌های ε، ضرایب ترم‌های ε^0 و ε^1 به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon^0:\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2\eta_0(T_0,T_1)}{\partial T_0^2}+C_1\eta_0(T_0,T_1)-F_1 q_0(T_0,T_1)=0\\[2mm] \dfrac{\partial^2 q_0(T_0,T_1)}{\partial T_0^2}+\Omega_s^2 u^2 q_0(T_0,T_1)-P\dfrac{\partial^2\eta_0(T_0,T_1)}{\partial T_0^2}=0\end{cases} \tag{41}$$

$$\varepsilon^1:\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2\eta_1(T_0,T_1)}{\partial T_0^2}+C_1\eta_1(T_0,T_1)-F_1 q_1(T_0,T_1)\\ \qquad =-B_1\dfrac{\partial\eta_0(T_0,T_1)}{\partial T_0}-\lambda_2\dfrac{\partial^3\eta_0(T_0,T_1)}{\partial T_0^3}+2\dfrac{\partial^2\eta_0(T_0,T_1)}{\partial T_0\,\partial T_1}\\ \dfrac{\partial^2 q_1(T_0,T_1)}{\partial T_0^2}+\Omega_s^2 u^2 q_1(T_0,T_1)-P\dfrac{\partial^2\eta_1(T_0,T_1)}{\partial T_0^2}\\ \qquad =-\lambda\Omega_s u F_1 q_0^2(T_0,T_1)\dfrac{\partial q_0(T_0,T_1)}{\partial T_0}+\lambda\Omega_s u F_1\dfrac{\partial q_0(T_0,T_1)}{\partial T_0}\\ \qquad\quad -2P\dfrac{\partial^2\eta_0(T_0,T_1)}{\partial T_0\,\partial T_1}-2\dfrac{\partial^2 q_0(T_0,T_1)}{\partial T_0\,\partial T_1}\end{cases} \tag{42}$$

از حل معادلات (۴۱)، پاسخ سیستم خطی متناظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\eta_0(T_0,T_1)&=a_1(T_1)\cos\left[\Omega_1 T_0+\beta_1(T_1)\right]+\\ &a_2(T_1)\cos\left[\Omega_2 T_0+\beta_2(T_1)\right]\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}q_0(T_0,T_1)&=b_1(T_1)\cos\left[\Omega_1 T_0+\gamma_1(T_1)\right]+\\ &b_2(T_1)\cos\left[\Omega_2 T_0+\gamma_2(T_1)\right]\end{aligned} \tag{44}$$

که در آن $a(T_1)$، $\beta(T_1)$، $b(T_1)$ و $\gamma(T_1)$ توابع مجهول هستند. با جایگذاری روابط اخیر در معادلات (۴۱) و (۴۲) و پس از انجام عملیات ریاضی، و به منظور حذف ضرایب جملات سکولار که ضرایب $\cos\left[\Omega_2 T_0+\beta_2(T_1)\right]$، $\cos\left[\Omega_1 T_0+\beta_1(T_1)\right]$، $\cos\left[\Omega_1 T_0+\gamma_1(T_1)\right]$ و $\cos\left[\Omega_2 T_0+\gamma_2(T_1)\right]$ هستند، برای محاسبه ۸ مجهول روابط (۴۳) و (۴۴) خواهیم داشت:

$$2\Omega_1\frac{\mathrm{d}a_1(T_1)}{\mathrm{d}T_1}+\left(\pi^4\lambda_1-B_1\Omega_1\right)a_1(T_1)-\frac{3}{8}\lambda_2\Omega_1^3 a_1(T_1)=0 \tag{45}$$

$$2\Omega_1 a_1(T_1)\frac{\mathrm{d}\beta_1(T_1)}{\mathrm{d}T_1}+\left(\pi^4\lambda_1-B_1\Omega_1\right)=0 \tag{46}$$

جدول ۱ . مشخصات هندسی و مکانیکی تیر

Table 1. Geometrical and mechanical properties of the beam

طول	سطح مقطع	چگالی تیر	مدول یانگ تیر
۱۰ m	$\pi\left(0/1^2-0/08^2\right)\ \mathrm{m}^2$	۷۸۵۰ $\mathrm{kg/m^3}$	۲۱۰ GPa

$$2\Omega_2\frac{\mathrm{d}a_2(T_1)}{\mathrm{d}T_1}+\left(\pi^4\lambda_1-B_1\Omega_2\right)a_2(T_1)-\frac{3}{8}\lambda_2\Omega_2^3a_2(T_1)=0 \tag{47}$$

$$2a_2(T_1)\Omega_2\frac{\mathrm{d}\beta_2(T_1)}{\mathrm{d}T_1}-\frac{3}{8}\lambda_3a_2^2(T_1)=0 \tag{48}$$

$$2b_1(T_1)\Omega_1\frac{\mathrm{d}\gamma_1(T_1)}{\mathrm{d}T_1}-\lambda_3a_1^2(T_1)=0 \tag{49}$$

$$2b_2(T_1)\Omega_2\frac{\mathrm{d}\gamma_2(T_1)}{\mathrm{d}T_1}-\lambda_3a_2^2(T_1)=0 \tag{50}$$

$$\begin{aligned}&3uF_1\Omega_1\lambda\Omega_s a_1(T_1)b_2^2(T_1)+2\Omega_1\frac{\mathrm{d}b_1(T_1)}{\mathrm{d}T_1}-\\&b_1(T_1)\Omega_1\lambda u\Omega_s+\frac{3}{8}uF_1\lambda\Omega_1\Omega_s a_1^3(T_1)=0\end{aligned} \tag{51}$$

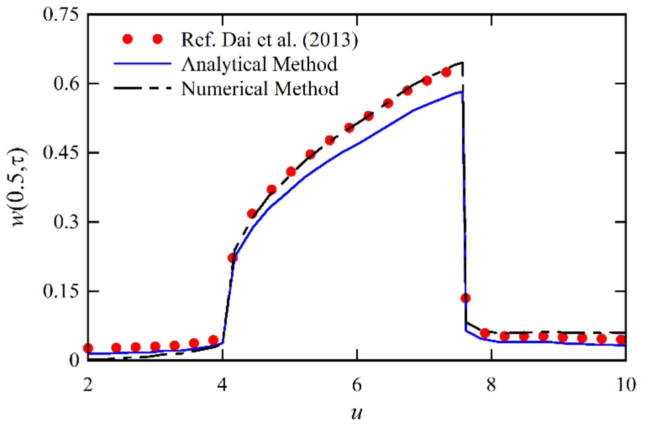
$$\begin{aligned}&2\Omega_2\frac{\mathrm{d}b_2(T_1)}{\mathrm{d}T_1}+\frac{3}{4}uF_1\lambda\Omega_2\Omega_s b_2(T_1)-\\&b_2(T_1)\Omega_1\lambda u\Omega_s+\frac{3}{8}uF_1\lambda\Omega_2\Omega_s b_2^3(T_1)=0\end{aligned} \tag{52}$$

با توجه به اینکه معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی (۴۵) تا (۵۲) دارای هشت مجهول می‌باشند که عملاً تعیین جواب‌های آن به صورت تحلیلی امکان‌پذیر نیست. بنابراین، با صفر در نظر گرفتن شرایط اولیه و با حل عددی این معادلات، مجهولات $a_i(T_1)$، $\beta_i(T_1)$، $b_i(T_1)$ و $\gamma_i(T_1)$ ($i=1,2$) محاسبه شده و با جایگذاری آن در معادلات (۴۳) و (۴۴) جواب معادله حرکت به دست می‌آید.

۳- بررسی نتایج

در این قسمت به ارائه نتایج حل تحلیلی ارائه شده برای مطالعه رفتار ارتعاشات غیرخطی تیرهای ویسکوالاستیک تحت جریان سیال خارجی پرداخته می‌شود. سیال خارجی آب انتخاب شده و چگالی آن $\rho_f=1050\ \mathrm{kg/m^3}$ در نظر گرفته شده است. نتایج این بخش با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه که جزئیات آن در بخش ۴-۲ ارائه شده، استخراج گردیده است. در جدول ۱ مشخصات هندسی و مکانیکی مورد استفاده در استخراج نتایج ارائه شده است.

به منظور صحت‌سنجی دقت روش، نتایج حل تحلیلی و عددی

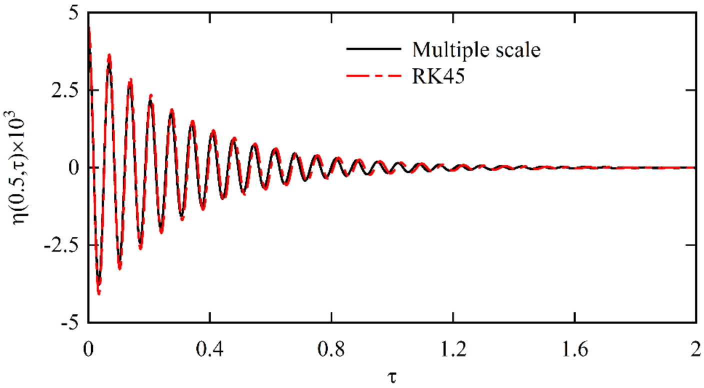


شکل ۳. حداکثر دامنه نوسانات نقطه میانی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها برحسب سرعت سیال خارجی

Fig. 3. Maximum amplitude of vibration of a simply supported beam in terms of external fluid velocity

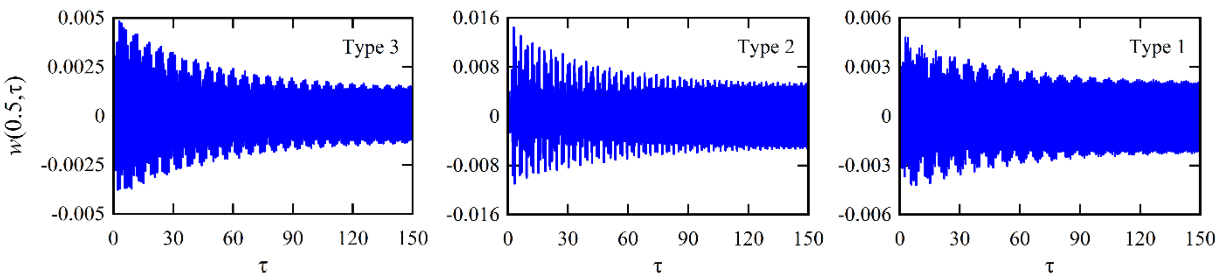
ذکر شده در بخش ۲-۳ برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها واقع در معرض جریان سیال و با صرف‌نظر کردن از رفتار غیرخطی با نتایج دای و همکاران [۳۲] در شکل ۳ مقایسه و مشاهده می‌شود که تطابق بسیار قابل قبولی بین نتایج تحلیلی وجود دارد. لازم به ذکر است که این نتایج با در نظر گرفتن شکل مود ارتعاشی اول در روش گالرکین جهت حل تحلیلی و در نظر گرفتن چهار شکل مود ارتعاشی در حل عددی استخراج شده که نشان دهنده کافی بودن تعداد جملات در روش حل تحلیلی می‌باشد. همانطور که نتایج نشان می‌دهد حل تحلیلی و نتایج مرجع [۳۲] در سرعت‌های پایین سیال خارجی تطابق قابل قبولی دارند، ولی با بیشتر شدن سرعت سیال و به خصوص در ناحیه قفل‌شدگی این خطا افزایش می‌یابد. با توجه به اینکه در سرعت‌های بالاتر جریان سیال تأثیر رفتار غیرخطی بر پاسخ سیستم قابل ملاحظه می‌باشد و از آنجایی که روش حل تحلیلی دارای محدودیت بوده و با در نظر گرفتن تعداد جملات بیشتر روش گالرکین و یا تعیین جملات تصحیح مرتبه بالای پاسخ عملاً امکان‌پذیر نیست، بنابراین این خطا توجیه‌پذیر می‌باشد.

در ادامه به منظور اطمینان از صحت روش حل مقیاس‌های زمانی چندگانه، پاسخ به دست آمده از این روش با پاسخ حاصل از حل

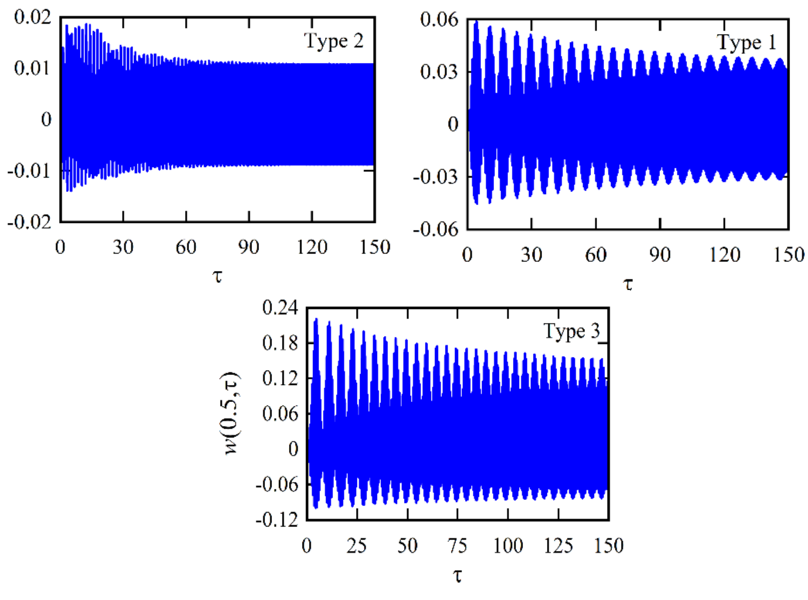


شکل ۴. پاسخ زمانی به دست آمده از دو روش مقیاس‌های زمانی چندگانه و حل عددی رانگ کوتا

Fig. 4. Time response obtained from the two methods of multiple time scales and Runge-Kutta numerical solution



(الف)



(ب)

شکل ۵. منحنی‌های پاسخ زمانی تیر ویسکوالاستیک به ازای سرعت‌های مختلف جریان سیال (الف) $u=۰/۵$ و (ب) $u=۱$

Fig. 5. Time-response curves of viscoelastic beams for different fluid flow velocities a) $u=0.5$ b) $u=1$

عددی رانگ-کوتا به ازای $N=۴$ مورد مقایسه قرار می‌گیرد. در شکل ۴ این دو پاسخ به ازای مقادیر $\lambda_0=۰/۰۰۱$، $\lambda_1=۱/۶\times۱۰^{-۴}$، $\lambda_2=۰$، $\lambda_3=۴/۵\times۱۰^{-۳}$ و $\lambda_4=۳/۷\times۱۰^{-۲}$ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج تقریب مرتبه اول روش مقیاس‌های زمانی چندگانه با نتایج حل عددی تقریباً یکسان بوده و خطای جزئی و بسیار کمی بین این دو نتایج وجود دارد.

در شکل ۵ پاسخ نقطه میانی تیر ویسکوالاستیک به ازای سه مقدار مختلف ضرایب ویسکوالاستیک و در سرعت‌های بی‌بعد سیال

$u = ۰/۵$ و $u = ۱$ نشان داده شده است. این سه حالت عبارت‌اند از:

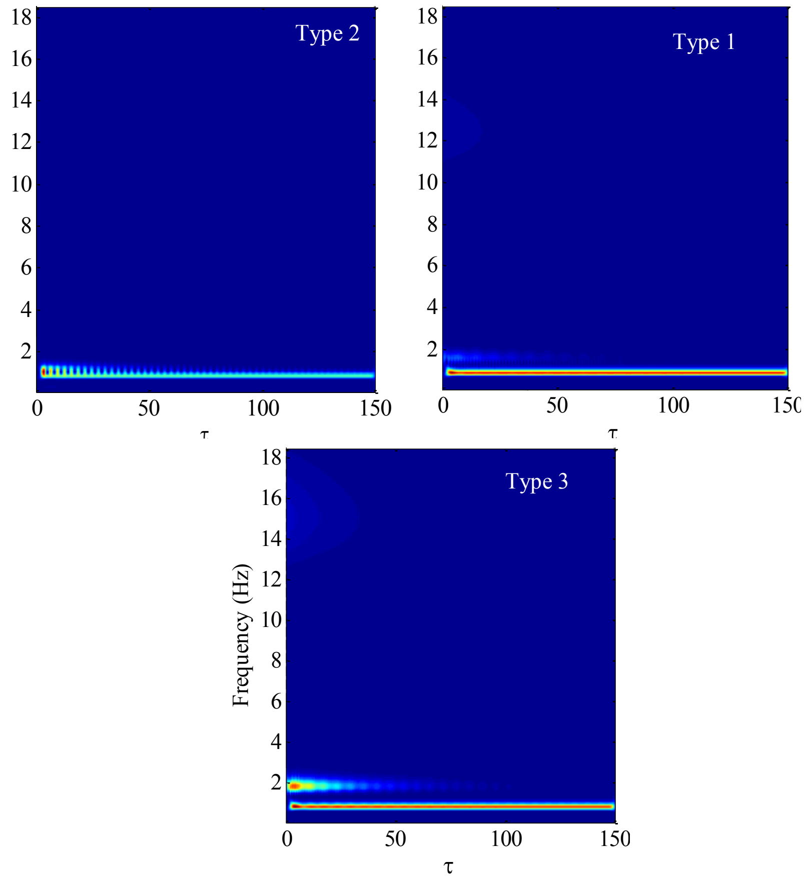
$$\text{Type 1}: \lambda_{۰} = ۰/۰۰۲۵,\ \lambda_{۱} = ۱/۰\times ۱۰^{-۲},\ \lambda_{۲} = ۰/۵\times ۱۰^{-۲},\ \lambda_{۳} = ۱/۵\times ۱۰^{-۲},\ \lambda_{۴} = ۱/۴\times ۱۰^{-۳}$$

$$\text{Type 2}: \lambda_{۰} = ۰/۰۰۵,\ \lambda_{۱} = ۱/۰\times ۱۰^{-۲},\ \lambda_{۲} = ۰/۵\times ۱۰^{-۲},\ \lambda_{۳} = ۰/۵\times ۱۰^{-۲},\ \lambda_{۴} = ۲/۴\times ۱۰^{-۳}$$

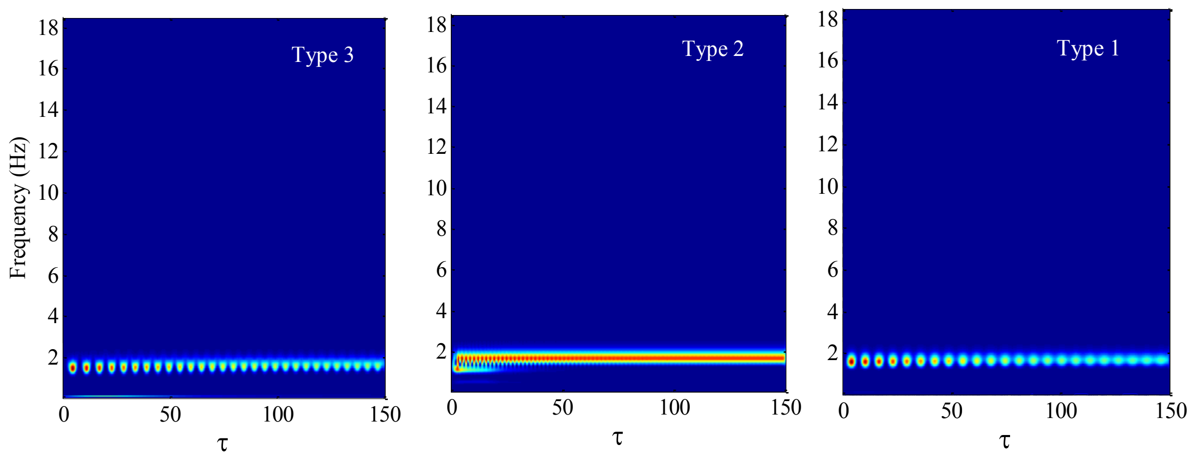
$$\text{Type 3}: \lambda_{۰} = ۰/۰۱,\ \lambda_{۱} = ۱/۰\times ۱۰^{-۳},\ \lambda_{۲} = ۱/۵\times ۱۰^{-۲},\ \lambda_{۳} = ۱/۵\times ۱۰^{-۳},\ \lambda_{۴} = ۱/۴\times ۱۰^{-۳}$$

با توجه به شکل ۵الف مشاهده می‌شود که در سرعتهای پایین سیال، پاسخ سیستم به صورت نوسانی با دامنه ثابت می‌باشد. در این حالت تنها اثر جرم افزوده ناشی از سیال تأثیر گذاشته که این امر باعث کاهش فرکانس طبیعی تیر می‌شود. با افزایش سرعت سیال، جریان سیال اطراف تیر از نوع بسیار آهسته و یا خزشی می‌باشد. با جریان پیدا کردن سیال اطراف تیر، گردابه‌های ون‌کارمن بر اثر فشار منفی در پشت تیر به صورت متقارن ایجاد شده و سبب وارد کردن نیروهای لیفت و درگ بر تیر شده و در نتیجه باعث ارتعاشات تیر می‌شوند. همانطور که در شکل ۵ب نشان داده شده است در سرعت $u = ۱$ سیال اطراف تیر باعث ایجاد رفتاری متفاوت در پاسخ زمانی تیرهای ویسکوالاستیک می‌شود. برای مقادیر کم ضرایب ویسکوالاستیک، دامنه نوسانات با زمان ابتدا افزایش و سپس کاهش یافته و به مقدار مشخصی همگرا شده و پاسخ سیستم به صورت نوسانی می‌باشد، اما تیر با ضرایب بالای ویسکوالاستیک رفتاری متفاوت از خود نشان می‌دهد. در این حالت، این نوع تیر در اثر جریان سیال خیز استاتیکی پیدا کرده و حول موقعیت تعادل جدید شروع به نوسانات پایدار می‌کند و در این سرعت، حداکثر دامنه نوسانات این نوع تیر بیشتر از حالت‌های دیگر می‌باشد. بر این اساس، می‌توان بیان نمود که رفتار ویسکوالاستیک تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر پاسخ زمانی و همچنین حداکثر دامنه تیرهای ویسکوالاستیک در معرض جریان سیال خارجی داشته و می‌تواند رفتار دینامیکی این نوع تیرها را تحت تأثیر قرار دهند. در شکل ۶ منحنی‌های تبدیل موجک مورلت پاسخ‌های زمانی نشان داده شده در شکل ۵ ارائه شده است. نتیجه جالب توجه دیگری که می‌توان مشاهده نمود این است که سرعت سیال بر فرکانس نوسانات سیستم نیز تأثیرگذار می‌باشد. به واسطه وجود اثرات جرم افزوده ناشی از حضور جریان سیال خارجی، در سرعت‌های پایین سیال فرکانس‌های نوسانات سیستم کاهش می‌یابد و سپس در سرعت‌های بالاتر به علت تشکیل گردابه‌ها، فرکانس نوسانات افزایش می‌یابد. تبدیل موجک مورلت نشان می‌دهد که در $u = ۰/۵$ فرکانس غالب نوسانات ۰/۹۴ هرتز بوده و به سبب اثرگذاری بیشتر جملات غیرخطی در سیستم نوع اول و نوع سوم، فرکانس‌های بزرگتری نیز در پاسخ سیستم ظاهر می‌شوند که با گذشت زمان اثر این فرکانس‌ها از پاسخ سیستم حذف می‌شوند. در مقابل، مشاهده می‌شود با افزایش سرعت سیال و به ازای $u = ۱$ فرکانس غالب نوسانات برای هر سه حالت در حدود ۱/۹۴ هرتز می‌باشد.

در ارتعاشات القائی ناشی از سیال، نیروی مقاوم سیال ترکیبی از نیروهای برشی و فشاری است. با افزایش سرعت جریان و در نتیجه عدد رینولدز، ناحیه گردابه‌ای پشت تیر گسترده شده و نیروی درگ اثر غالب در نیروی مقاوم کل و ارتعاشات تیر دارد. بدین جهت در نواحی سرعت‌های پایین این نیرو باعث میرا شدن دامنه ارتعاشات می‌شود. با افزایش بیشتر سرعت سیال، نیروهای اینرسی زیادتر شده و دیگر قابل صرف‌نظر کردن نمی‌باشند. این امر باعث می‌شود تا در سرعت‌های بالاتر دامنه ارتعاشات سیستم به صورت ناگهانی افزایش یافته و دوباره نوسانات سیستم پایدار شود. این محدوده از سرعت سیال، ناحیه قفل‌شدگی نامیده می‌شود. در ناحیه بعد از ناحیه قفل‌شدگی، افزایش بیشتر سرعت سیال باعث کاهش دامنه نوسانات شده و دامنه حالت پایدار سیستم برخلاف حالت‌های قبل به صفر می‌رسد. در این محدوده نیروهای مقاوم ناشی از سیال بر نیروهای اینرسی و بازگرداننده تیر غالب شده و باعث ساکن شدن تیر می‌شود. همانطور که از نتایج نشان داده شده در شکل ۷ مشاهده می‌شود دامنه ارتعاشات حالت پایدار برای ناحیه قفل‌شدگی بیشتر از دو ناحیه دیگر است. این رفتار سیستم را می‌توان با توجه به شکل ۷ که حداکثر دامنه نوسانات نقطه میانی تیر برحسب سرعت جریان سیال خارجی را نشان می‌دهد، مشاهده نمود. علاوه بر این، نتایج نشان می‌دهد که رفتار ویسکوالاستیک و مدل غیرخطی تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر ناحیه قفل‌شدگی و همچنین حداکثر دامنه نوسانات تیر ویسکوالاستیک دارد. حداکثر دامنه ارتعاشی برای ضرایب ویسکوالاستیک نوع سوم و در محدود سرعت $u = ۱$ اتفاق می‌افتد که مقدار آن برابر ۰/۱۲۷ می‌باشد. همچنین، ناحیه قفل‌شدگی برای تیر با ضرایب ویسکوالاستیک نوع اول در محدوده سرعت $u = ۰/۸۵$ و برای ضرایب ویسکوالاستیک نوع دوم در محدوده سرعت $u = ۰/۶۲$ ایجاد می‌شود.



(الف)

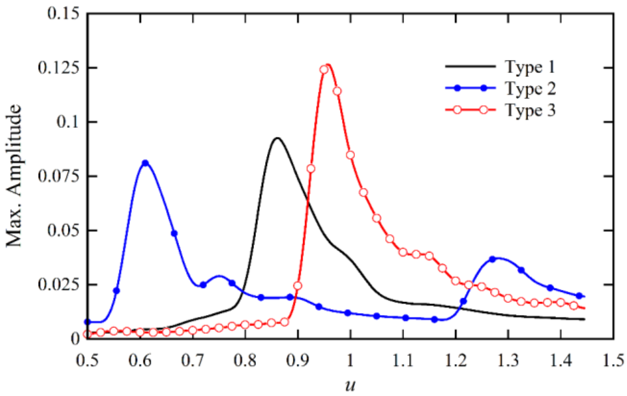


(ب)

شکل ۶. تبدیل مورلت تیر ویسکوالاستیک به ازای سرعت‌های مختلف جریان سیال (الف) $u=0/5$ و (ب) $u=1$

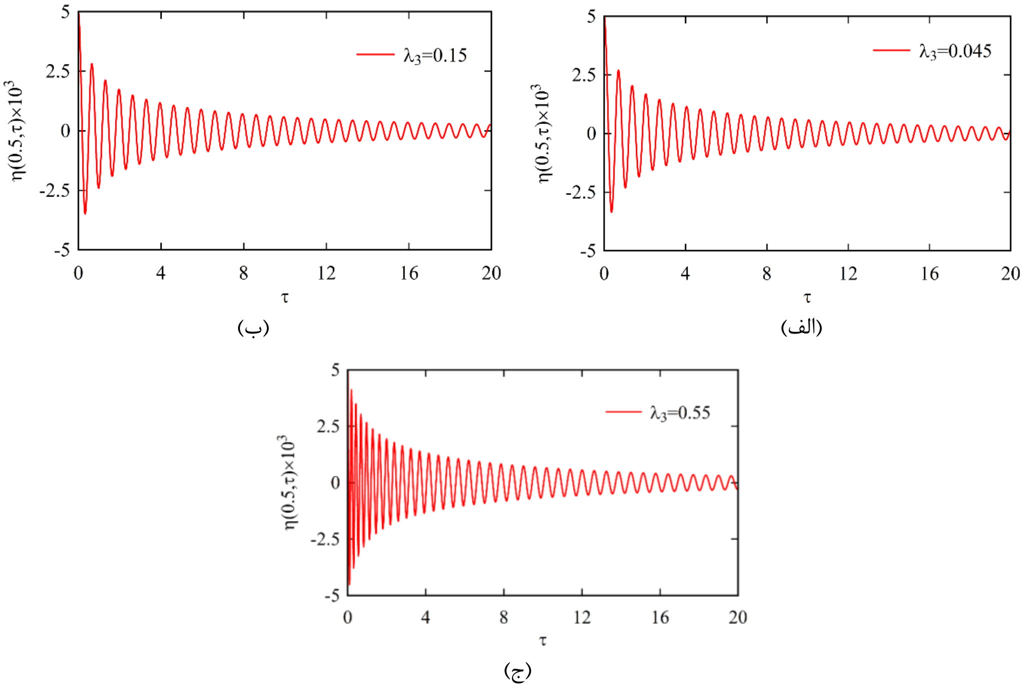
Fig. 6. Wavelet transform of a viscoelastic beam for different fluid flow velocities (a) $u=0.5$ and (b) $u=1$

یکی دیگر از پارامترهای تأثیرگذار بر رفتار ارتعاشی غیرخطی تیرهای ویسکوالاستیک، پارامتر λ_4 می‌باشد که نشان دهنده غیرخطینگی ناشی از اثر کرنش‌های بزرگ می‌باشد. در شکل ۸ پاسخ زمانی به ازای سه مقدار λ_4 برابر $\lambda_4=4/5\times10^{-2}$، $\lambda_4=1/5\times10^{-1}$ و $\lambda_4=5/5\times10^{-1}$ نشان داده شده است. با توجه به این نتایج مشاهده می‌شود که این پارامتر تنها بر روی فرکانس نوسانات سیستم تأثیرگذار بوده و با افزایش این پارامتر سفتی معادل تیر افزایش در نتیجه اثر غیرخطی ناشی از کرنش‌های بزرگ افزایش



شکل ۷. حداکثر دامنه نوسانات نقطه میانی تیر ویسکوالاستیک برحسب سرعت جریان سیال خارجی

Fig. 7. Maximum amplitude of vibration of a viscoelastic beam's midpoint in terms of external fluid flow velocity

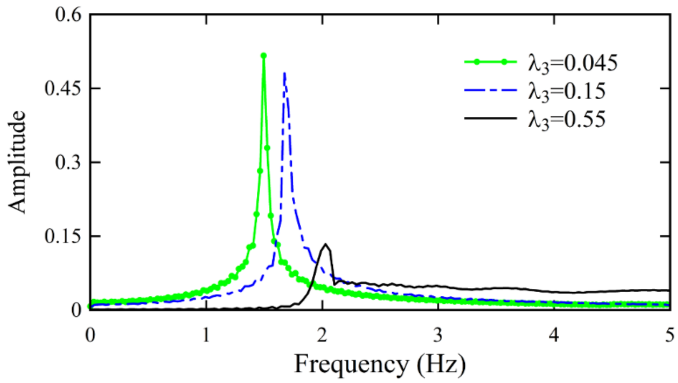


شکل ۸. پاسخ زمانی سیستم به ازای سه مقدار مختلف پارامتر $\lambda_۳$ (الف) $\lambda_۳ = ۴/۵\times۱۰^{-۲}$، (ب) $\lambda_۳ = ۱/۵\times۱۰^{-۱}$ و (ج) $\lambda_۳ = ۵/۵\times۱۰^{-۱}$

Fig. 8. System time-response curve for three different parameter values of $\lambda_3 = 4.5\times10^{-2}$ b) $\lambda_3 = 1.5\times10^{-1}$ c) $\lambda_3 = 5.5\times10^{-1}$

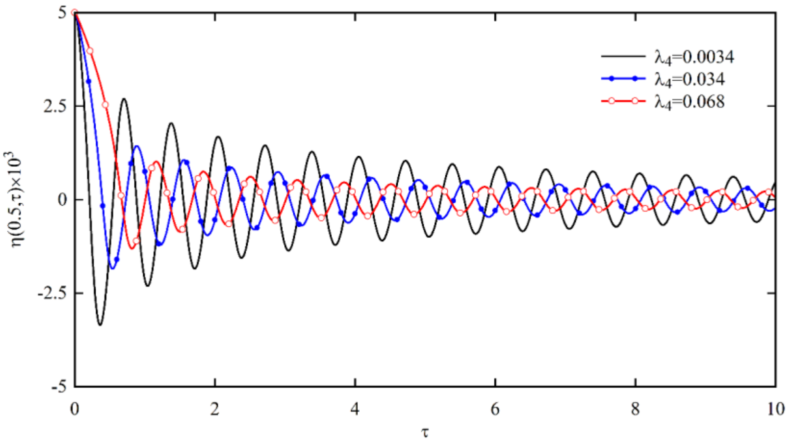
یافته و فرکانس نوسانات بیشتر می‌شود. این نتیجه با توجه به شکل ۹ که در آن تابع پاسخ فرکانسی به ازای مقادیر مختلف پارامتر $\lambda_۳$ نشان داده شده است، قابل مشاهده می‌باشد. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که فرکانس نوسانات تیر ویسکوالاستیک به ازای مقادیر $\lambda_۳ = ۴/۵\times۱۰^{-۲}$، $\lambda_۳ = ۱/۵\times۱۰^{-۱}$ و $\lambda_۳ = ۵/۵\times۱۰^{-۱}$ به ترتیب برابر ۱/۵، ۱/۶۷ و ۲/۰۲ هرتز به دست می‌آید. بنابراین می‌توان بیان نمود که با افزایش مقدار $\lambda_۳$ از ۰/۰۴۵ به ۰/۵۵، فرکانس نوسانات در حدود ۲۵ درصد افزایش می‌یابد. این نتایج نشان می‌دهد که در صورتی که دامنه ارتعاشات تیرها بیشتر باشد، بایستی به طور حتم اثرات ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ را در نظر گرفت، در غیر این صورت نتایج به دست آمده دارای خطای بیشتری بوده و فاقد اعتبار خواهند بود.

یکی دیگر از پارامترهای تأثیرگذار بر رفتار سیستم پارامتر $\lambda_۴$ می‌باشد که این پارامتر در نتیجه رفتار ویسکوالاستیک بر مؤلفه



شکل ۹. تابع پاسخ فرکانسی به ازای مقادیر مختلف پارامتر λ_3

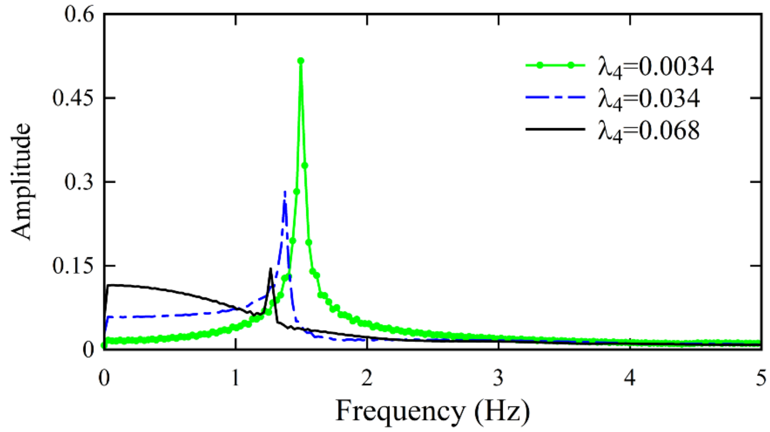
Fig. 9. Frequency response function for different parameter values of λ_3



شکل ۱۰. تأثیر پارامتر λ_4 بر رفتار ارتعاشات آزاد تیرهای ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های بزرگ و مدل رفتاری ویسکوالاستیک جامد استاندارد

Fig. 10. Effect of the parameter λ_4 on the free vibration behavior of viscoelastic beams considering the effect of large deformations and Standard Linear Solid model

غیرخطی میدان‌های کرنش در معادلات ظاهر شده است. در شکل ۱۰ تأثیر λ_4 بر ارتعاشات آزاد تیرهای ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های بزرگ نشان داده شده است. این نتایج به ازای سه مقدار مختلف پارامتر بی‌بعد λ_4 برابر ۰/۰۰۳۴، ۰/۰۳۴ و ۰/۰۶۸ نشان داده شده است. با توجه به نتایج نشان می‌دهد که این پارامتر تأثیری دوگانه بر روی پاسخ سیستم می‌شود. یعنی علاوه بر تغییر در فرکانس نوسانات سیستم باعث تغییر در میرایی معادل سیستم شده و با افزایش این پارامتر میرایی معادل سیستم افزایش یافته و دامنه نوسانات با سرعت بیشتری به سمت صفر میل می‌کند. علاوه بر این، با توجه به شکل ۱۱ مشاهده می‌شود که مقدار این پارامتر تأثیری معکوس بر فرکانس نوسانات تیرهای ویسکوالاستیک دارد و با افزایش آن فرکانس نوسانات کاهش می‌یابد. به عنوان نمونه به ازای سه مقدار ۰/۰۰۳۴، ۰/۰۳۴ و ۰/۰۶۸ فرکانس نوسانات به ترتیب برابر ۱/۵، ۱/۳۷ و ۱/۲۶ هرتز به دست می‌آید. بر اساس این نتایج مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار پارامتر λ_4 از مقدار ۰/۰۰۳۴ به ۰/۰۶۸، فرکانس نوسانات تیر ویسکوالاستیک تحت بررسی در حدود ۱۶ درصد کاهش می‌یابد. بنابراین می‌توان بیان نمود که تأثیر این پارامتر بر میزان کاهش فرکانس نوسانات قابل ملاحظه بوده و در محاسبات بایستی تأثیر این عوامل در نظر گرفته شود. البته لازم به ذکر است که مقادیر این پارامترها به نحوی در نظر گرفته شده‌اند که به ازای آنها ضرایب جملات غیرخطی معادله حرکت کمتر از واحد بوده و در نتیجه پاسخ به دست آمده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه دارای



شکل ۱۱. تابع پاسخ فرکانسی به ازای مقادیر مختلف پارامتر λ_4

Fig. 11. Frequency response function for different parameter values of λ_4

جدول ۲ . تأثیر پارامترهای غیرخطی و سرعت جریان سیال بر فرکانس‌های بی‌بعد تیر

Table 2. The effect of nonlinear parameters and fluid flow velocity on non-dimensional frequencies

λ_3	λ_4	سرعت بی‌بعد جریان				
		۰	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱
	۰/۰۰۱	۳/۴۱	۲/۸۷	۱/۵۰	۱/۴۲	۱/۳۵
۰/۰۵	۰/۰۱	۳/۲۸	۲/۱۴	۱/۴۳	۱/۳۶	۱/۲۴
	۰/۰۵	۳/۱۲	۱/۷۹	۱/۲۹	۱/۰۶	۰/۸۴
	۰/۰۰۱	۳/۶۵	۳/۱۲	۱/۶۷	۱/۵۴	۱/۴۱
۰/۵	۰/۰۱	۳/۴۴	۲/۶۴	۱/۵۶	۱/۴۸	۱/۳۷
	۰/۰۵	۳/۳۲	۲/۰۸	۱/۴۱	۱/۳۵	۱/۱۴

اعتبار باشد. بنابراین، در صورت بررسی ارتعاشات با دامنه‌های بسیار بزرگ اثر این پارامترها شدید و بسیار تأثیرگذار خواهد بود. هر چند در اکثر مطالعات انجام شده در زمینه ارتعاشات تیرهای ویسکوالاستیک، معمولاً میرایی سازه‌ای فقط به صورت ترم سوم معادله (۱۸) اعمال شده و سایر ترم‌های ناشی از رفتار ویسکوالاستیک در معادله حرکت وجود ندارد، ولی نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که تأثیر میرایی بر جملات ناشی از غیرخطی بودن میدان‌های کرنش قابل ملاحظه بوده و این اثرات بایستی در استخراج معادلات حرکت حاکم بر رفتار ارتعاشاتی سازه‌های ویسکوالاستیک به طور حتم در نظر گرفته شود.

به منظور مطالعه تأثیر پارامترهای غیرخطی و سرعت جریان سیال بر فرکانس‌های بی‌بعد تیر در جدول ۲ مقادیر فرکانس بی‌بعد اول تیر ویسکوالاستیک با ازای مقادیر مختلف پارامترهای λ_3 و λ_4 و U نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش سرعت سیال و به واسطه وجود اثرات جرم افزوده ناشی از حضور جریان سیال خارجی، با فرکانس طبیعی تیر کاهش می‌یابد و میزان کاهش فرکانس وابستگی زیادی به میزان رفتار غیرخطی سیستم دارد. به ازای مقادیر $\lambda_3=۰/۰۵$ و $\lambda_4=۰/۰۱$ با افزایش سرعت بی‌بعد جریان از صفر به یک، فرکانس طبیعی اول در حدود ۶۲ درصد کاهش می‌یابد. علاوه بر این، اثرات غیرخطی ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ نیز تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر فرکانس‌های طبیعی داشته و پارامتر λ_3 باعث افزایش فرکانس طبیعی شده و اثر پارامتر λ_4 بر خلاف آن می‌باشد، یعنی افزایش λ_4 باعث کاهش فرکانس طبیعی اول می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر رفتار ارتعاشات القائی ناشی از جریان سیال خارجی در تیرهای ویسکوالاستیک و مد نظر قرار دادن فرم کلی

رفتار ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور، در ابتدا معادلات غیرخطی تیرهای ویسکوالاستیک در حضور جریان سیال خارجی استخراج و سپس این معادلات با استفاده از روش گالرکین گسسته‌سازی شده و به صورت عددی همچنین تحلیلی حل شدند. در نهایت تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشی این سازه‌ها بررسی شد. بر اساس نتایج تحقیق حاضر، خلاصه‌ای از نتایج مهم را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

- در سرعت‌های پایین سیال، تنها اثر جرم افزوده ناشی از سیال تأثیر گذاشته که این امر باعث کاهش فرکانس طبیعی تیر می‌شود.

- برای مقادیر کم ضرایب ویسکوالاستیک، دامنه نوسانات با زمان ابتدا افزایش و سپس کاهش یافته و به مقدار مشخصی همگرا شده و پاسخ سیستم به صورت نوسانی می‌باشد، اما تیر با ضرایب بالای ویسکوالاستیک رفتاری متفاوت از خود نشان می‌دهد.

- به واسطه وجود اثرات جرم افزوده ناشی از حضور جریان سیال خارجی، در سرعت‌های پایین سیال فرکانس‌های نوسانات سیستم کاهش می‌یابد و سپس در سرعت‌های بالاتر به علت تشکیل گردابه‌ها، فرکانس نوسانات افزایش می‌یابد.

- تبدیل موجک مورلت نشان می‌دهد که در $u = ۰/۵$ فرکانس غالب نوسانات ۰/۹۴هرتز بوده و به سبب وجود تشدید داخلی در سیستم نوع اول و نوع سوم، فرکانس‌های بزرگتری نیز در پاسخ سیستم ظاهر می‌شوند که با گذشت زمان اثر این فرکانس‌ها از پاسخ سیستم حذف می‌شوند. در مقابل، مشاهده می‌شود با افزایش سرعت سیال و به ازای $u = ۱$ فرکانس غالب نوسانات برای هر سه حالت در حدود ۱/۹۴ هرتز می‌باشد.

- رفتار ویسکوالاستیک و مدل غیرخطی تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر ناحیه قفل‌شدگی و همچنین حداکثر دامنه نوسانات تیر ویسکوالاستیک دارد. حداکثر دامنه ارتعاشی برای ضرایب ویسکوالاستیک نوع سوم و در محدود سرعت $u = ۱$ اتفاق می‌افتد که مقدار آن برابر ۰/۱۲۷ می‌باشد. همچنین، ناحیه قفل‌شدگی برای تیر با ضرایب ویسکوالاستیک نوع اول در محدوده سرعت $u = ۰/۸۵$ و برای ضرایب ویسکوالاستیک نوع دوم در محدوده سرعت $u = ۰/۶۲$ ایجاد می‌شود.

- جملات غیرخطی ناشی از اثر در نظر گرفتن کرنش‌های بزرگ تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار سیستم داشته و با افزایش مقدار پارامتر بی‌بعد λ_p از مقدار ۰/۰۴۵ به مقدار ۰/۵۵، فرکانس نوسانات سیستم در حدود ۲۵ درصد افزایش می‌یابد که مقدار قابل توجهی می‌باشد. این نتایج نشان می‌دهد که در صورتی که دامنه ارتعاشات تیرها بیشتر باشد، بایستی به طور حتم اثرات ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ را در معادلات اعمال نمود، در غیر این صورت نتایج به دست آمده دارای خطای بیشتری بوده و نتایج پیش‌بینی شده فاقد اعتبار خواهند بود.

- در اکثر مطالعات انجام شده در زمینه ارتعاشات تیرهای ویسکوالاستیک، اثر میرایی در جملات غیرخطی صرف‌نظر شده است، ولی نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که تأثیر میرایی بر جملات ناشی از غیرخطی بودن میدان‌های کرنش قابل ملاحظه بوده و این اثرات بایستی در استخراج معادلات حرکت حاکم بر رفتار ارتعاشاتی سازه‌های ویسکوالاستیک به طور حتم در نظر گرفته شود.

مراجع

[1] M. Minaei, M. Rezaee, V. Arab Maleki, Vibration Analysis of Viscoelastic Carbon Nanotube under Electromagnetic Fields based on the Nonlocal Timoshenko Beam Theory, Iranian Journal of Mechanical Engineering, 22(3) (2020) 54-76.

[2] E. Carrera, M. Filippi, P. Mahato, A. Pagani, Free-vibration tailoring of single-and multi-bay laminated box structures by refined beam theories, Thin-Walled Structures, 109 (2016) 40-49.

[3] H. Asadi, M. Aghdam, Large amplitude vibration and post-buckling analysis of variable cross-section composite beams on nonlinear elastic foundation, International Journal of Mechanical Sciences, 79 (2014) 47-55.

[4] S.H. Mirafzal, A.M. Khorasani, A.H. Ghasemi, Optimizing time delay feedback for active vibration control of a cantilever beam using a genetic algorithm, Journal of Vibration and Control, 22(19) (2016) 4047-4061.

[5] E. Özkaya, M. Pakdemirli, Non-linear vibrations of a beam–mass system with both ends clamped, Journal of Sound and Vibration, 221(3) (1999) 491-503.

[6] M. Salehi, F. Ansari, Viscoelastic buckling of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams under time variant general loading conditions, Iranian Polymer Journal, 15(3) (2006) 183-193.

[7] M.H. Ghayesh, F. Alijani, M.A. Darabi, An analytical solution for nonlinear dynamics of a viscoelastic beam-heavy mass system, Journal of Mechanical Science and Technology, 25(8) (2011) 1915-1923.

[8] L.-Y. Xiong, G.-C. Zhang, H. Ding, L.-Q. Chen, Nonlinear forced vibration of a viscoelastic buckled beam with 2: 1 internal resonance, Mathematical Problems in Engineering, 2014 (2014).

[9] E. Naudascher, D. Rockwell, Flow-induced vibrations: an engineering guide, Courier Corporation, 2012.

[10] M. Rezaee, V. Arab maleki, Passive Vibration Control of Fluid Conveying Pipes using Dynamic Vibration Absorber, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 51(3) (2019) 111-120.

[11] M. Rezaee, V. Arab Maleki, A new analytical method to investigate the vibrational behavior of fluid embedded pipe, Iranian Journal of Mechanical Engineering 15(1) (2013) 6-20.

[12] T. Sarpkaya, A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations, Journal of Fluids and Structures, 19(4) (2004) 389-447.

[13] J.-s. Wang, D. Fan, K. Lin, A review on flow-induced vibration of offshore circular cylinders, Journal of Hydrodynamics, 32(3) (2020) 415-440.

[14] K.-S. Hong, U.H. Shah, Vortex-induced vibrations and control of marine risers: A review, Ocean Engineering, 152 (2018) 300-315.

[15] A. Khan, Numerical simulation of vortex induced vibration and related parameters in cross flow shell and tubes heat exchanger: a review, Tech J Univ Eng Technol Taxila, 34 (2014) 45-67.

[16] C. Williamson, R. Govardhan, Vortex-induced vibrations, Annu. Rev. Fluid Mech., 36 (2004) 413-455.

[17] M. Horowitz, C. Williamson, Vortex-induced vibration of a rising and falling cylinder, Journal of Fluid Mechanics, 662 (2010) 35-46.

[18] P. Bearman, Circular cylinder wakes and vortex-induced vibrations, Journal of Fluids and Structures, 27(5) (2011) 648-658.

[19] R. Bourguet, G.E. Karniadakis, M.S. Triantafyllou, Phasing mechanisms between the in-line and cross-flow vortex-induced vibrations of a long tensioned beam in shear flow, Computers & Structures, 122 (2013) 155-163.

[20] X. Wu, F. Ge, Y. Hong, A review of recent studies on vortex-induced vibrations of long slender cylinders, Journal of Fluids and Structures, 28 (2012) 292-308.

[21] A.M. Marra, C. Mannini, G. Bartoli, Measurements and improved model of vortex-induced vibration for an elongated rectangular cylinder, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 147 (2015) 358-367.

[22] X. Han, W. Lin, Y. Tang, C. Zhao, K. Sammut, Effects of natural frequency ratio on vortex-induced vibration of a cylindrical structure, Computers & Fluids, 110 (2015) 62-76.

[23] S.J. Daniels, I.P. Castro, Z.-T. Xie, Numerical analysis of freestream turbulence effects on the vortex-induced vibrations of a rectangular cylinder, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 153 (2016) 13-25.

[24] X. Jiang, Y. Andreopoulos, T. Lee, Z. Wang, Numerical investigations on the vortex-induced vibration of moving square cylinder by using incompressible lattice Boltzmann method, Computers & Fluids, 124 (2016) 270-277.

[25] W. Wang, B. Song, Z. Mao, W. Tian, T. Zhang, P. Han, Numerical investigation on vortex-induced vibration of bluff bodies with different rear edges, Ocean Engineering, 197 (2020) 23-45.

[26] P.K. Sahoo, S. Chatterjee, Nonlinear dynamics of vortex-induced vibration of a nonlinear beam under high-frequency excitation, International Journal of Non-Linear Mechanics, 129 (2021) 123-143.

[27] R.S. Lakes, Viscoelastic materials, Cambridge University Press, 2009.

[28] N. Heymans, J.-C. Bauwens, Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior, Rheologica Acta, 33(3) (1994) 210-219.

[29] M.L. Facchinetti, E. De Langre, F. Biolley, Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations, Journal of Fluids and structures, 19(2) (2004)

123-140.

[30] M. Keber, M. Wiercigroch, Dynamics of a vertical riser with weak structural nonlinearity excited by wakes, Journal of Sound and Vibration, 315(3) (2008) 685-699.

[31] E. Ciappi, S. De Rosa, F. Franco, J.-L. Guyader, S.A. Hambric, Flinovia-Flow Induced Noise and Vibration Issues and Aspects, Springer, 2015.

[32] H. Dai, L. Wang, Q. Qian, Q. Ni, Vortex-induced vibrations of pipes conveying fluid in the subcritical and supercritical regimes, Journal of Fluids and Structures, 39 (2013) 322-334.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

GH. Zarepour, I. Javanshir, Semi-Analytical Study of Fluid-Induced Nonlinear Vibrations In Viscoelastic Beams with Standard Linear Solid Model Using Multiple Time Scales Method, Amirkabir J. Mech Eng., 53(10) (2022) 5105-5122.

DOI: 10.22060/mej.2021.19801.7117

این صفحه عمداً خالی است