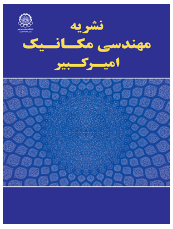


Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(10) (2022) 1223-1226
DOI: 10.22060/mej.2021.19655.7083

Approximate Torsional Analysis Of Arbitrary Trapezoidal Bars By Kantorovich Method

A. Mahdavi[1], M. Yazdani[1*] , Z. Khosravi Enjedani[1]

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Arak University, Arak. Iran

ABSTRACT: A variety of structural members are expected to safely tolerate torsional moments. These include irregularly-shaped cross sections (e.g., trapezoidal or triangular sections) in some industries which deserve special considerations for the analysis and design under torsional loading. Therefore, the development of novel methods as alternative approaches seems very necessary, partially because of the deficiency of analytical solution in treating asymmetric solution domains. Semi-analytical and numerical methods appear as desirable alternatives in most cases. One of the proper tools for dealing with the boundary value problems encountered in torsional analysis is the vibrational method. The Kantorovich semi-analytical method, known as an extension of the Rayleigh-Ritz method, has been proven advantageous among the others, mainly because of relaxing the conventional limitations in selecting the primary function for satisfying the boundary conditions. Therefore, the purpose of the present study is to extend the applicability of Kantorovich method to estimate the warping and stress field of arbitrary trapezoidal sections directly. Finally, the efficiency and accuracy of the present solution is verified against a number of existing analytical and numerical methods. The results indicate high precision and rapid convergence of this semi-analytical method.

Review History:

Received: Feb. 20, 2021
Revised: May, 31, 2021
Accepted: Jul. 16, 2021
Available Online: Aug. 13, 2021

Keywords:

Torsion problem
Kantorovich method
Trapezoidal sections
Warping function
Prandtl's stress distribution

1. INTRODUCTION

Many engineering members, such as beams, shafts, and wings, are subjected to torsional moments, so understanding the torsional behavior of these members is critical to analyzing and designing them. The solution to the first torsion problem for circular sections was proposed by Coulomb in 1784. Accordingly, the circular cross section remains planar after torsional moment is applied. However, describing the torsional behavior was far more difficult for non-circular sections and remained unsolved for a long time. This difficulty is due to the fact that non-circular sections will no longer remain planar in response to a torque and a complex phenomenon called warping of the cross section occurs in such cases. Saint-Venant was the first to propose the exact formulation for the torsion of prismatic beams of arbitrary cross section on the basis of a semi-inverse approach. Later on, Prandtl introduced the concept of stress function which is governed by the Poisson equation.

In addition to the analytical and numerical methods adopted for the torsional analysis, there are other methods called semi-analytical methods. These enables solving boundary value problems defined in arbitrarily-shaped domains. In the context of variational approach, some approximate or semi-analytical methods have been proposed for solving various types of differential equations involving those related to elasticity. Historically, the credit goes back to the work of Ritz followed by Galerkin and Kantorovich [1]. The method of Kantorovich [1-3] is adopted here, simply because the original partial differential equation is decomposed into one or more ordinary differential equations, resulting in an improved prediction of the solution.

2. METHODOLOGY

The following boundary value problem governs the spatial distribution of stress function in the Cartesian coordinates:

$$\nabla^2 \chi = -2 \tag{1}$$

subjected to $\chi = 0$ along the boundary of cross section. The trapezoidal geometry of cross-section (Ω) is defined by $\{a \le x_1 \le b, -m_1 x_1 \le x_2 \le m_2 x_1\}$. Such geometrical entities render conventional solution techniques powerless in dealing with intended boundary-value problem. To overcome this difficulty, the variational approach becomes more effective in dealing with domains confined by irregular boundaries. First, the associated penalty function is formed as:

$$I(\phi) = \iint [(\frac{\partial \phi}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial x_2})^2 - 4\chi]\, dx_1\, dx_2 \tag{2}$$

*Corresponding author's email: m-yazdani@araku.ac.ir

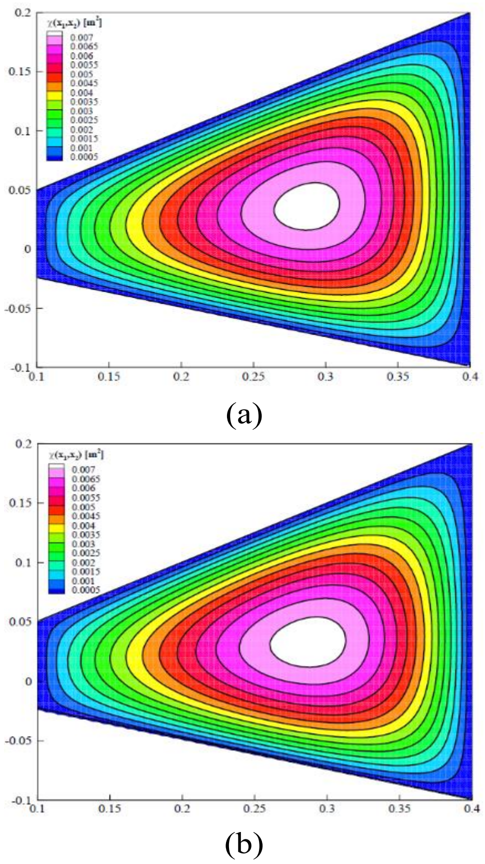


Fig.1. Cross-sectional distribution of stress function as computed by (a) present study and (b) finite element method

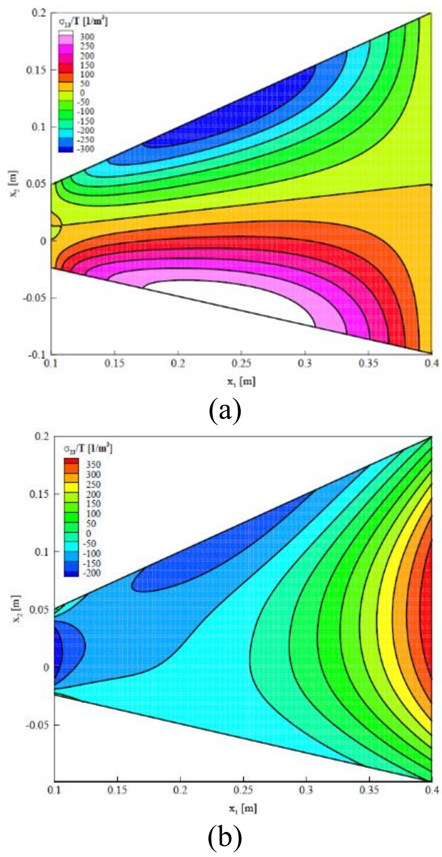


Fig. 2. Cross-sectional distribution of shear stress (a) σ_{13}/T and (b) σ_{23}/T

It can be shown that minimizing Eq. (2) is mathematically equivalent to obtaining the solution of Eq. (1). For the present applications, an admissible two-term solution (Eq. (4)) is adopted to set up Euler-Lagrange differential equations in terms of unknown functions f_i , $i=1,2$ [3]

$$\begin{aligned}\bar{\chi} &= \sin\left(\pi\frac{(x_2+m_1x_1)}{(m_1+m_2)x_1}\right)f_1(x_1)\\&+\sin\left(3\pi\frac{(x_2+m_1x_1)}{(m_1+m_2)x_1}\right)f_2(x_1)\end{aligned} \tag{3}$$

It is clear that the trigonometric functions in (3) meet the requirement of $\chi=0$ along the inclined boundaries of the cross section. The remaining boundary conditions are expected to be satisfied by the functions f_1 and f_2. This is regarded as a major advantage of the Kantorovich method in achieving an improved solution to the problem.

3. RESULTS AND DISCUSSION

First, the stress function $\chi(x_1,x_2)$ is depicted in Fig. 1 and the results show a very good agreement between the finite element method and the Kantorovich method. It should be noted that the solution of finite elements has been achieved by calling the pdetool tool in the Matlab environment, whose efficiency in solving similar problems has been proven in previous studies [4]. It is also observed that the maximum values occur in the central areas of the cross section while their lowest values are concentrated near the trapezoidal sides (boundaries of the solution domain). Fig. 2 shows the shear components of the stress tensor normalized with respect to the applied torque T .

The stress field σ_{13}/T reveals odd-symmetry, except that the axis of symmetry is no longer the principal axis x_1 and the contour lines are symmetric with respect to the midline of the vertical sides of the trapezoid. The maximum values of σ_{13} with positive and negative signs also occur in the middle of the lower and upper sides of the trapezoid, respectively (Fig. 2a). Also, the contour line $\sigma_{13}=0$ coincides with the midline of the vertical sides of the trapezoid. However, the stress field σ_{23}/T shows even-symmetry so that σ_{23} attains its positive maximum value midway on the right face of the cross section (Fig. 2b). The negative maximum value occurs on the opposite side.

4. CONCLUSION

In the present study, a semi analytical method based on variational calculus was proposed to fully investigate the complex behavior of arbitrary trapezoidal-shaped bars under torsion. The solution was approximated as a linear combination of two harmonic terms, satisfying the boundary conditions on inclined faces of the cross section. The stress function and the warping field were obtained in the trapezoidal section. Further, the present solution encompasses the case of triangular bars as a subset, demonstrating well agreement with available analytical and numerical solutions in the cases studied. Extension to the case orthotropic materials is currently underway.

5. REFERENCES

[1] L.V.e. Kantorovich, Approximate methods of higher analysis, Interscience, (1958).

[2] S.P. Timoshenko, J. Goodier, Theory of elasticity, (2011).

[3] A. Mahdavi, H. Seyyedian, Steady-state groundwater recharge in trapezoidal-shaped aquifers: A semi-analytical approach based on variational calculus, Journal of Hydrology, 512 (2014) 457-462.

[4] A. Mahdavi, M. Yazdani, A novel analytical solution for warping analysis of arbitrary annular wedge-shaped bars, Archive of Applied Mechanics, (2021).

HOW TO CITE THIS ARTICLE

A. Mahdavi, M. Yazdani, Z. Khosravi Enjedani, Approximate torsional analysis of arbitrary trapezoidal bars by Kantorovich method, Amirkabir J. Mech Eng., 53(10) (2022) 1223-1226.

DOI: 10.22060/mej.2021.19655.7083

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ۱۰، سال ۱۴۰۰، صفحات ۵۲۰۳ تا ۵۲۲۰
DOI: 10.22060/mej.2021.19655.7083

تحلیل تقریبی پیچش مقاطع ذوزنقه‌ای دلخواه با استفاده از روش کانتورویچ

علی مهدوی، مهدی یزدانی*، زهرا خسروی انجدانی

دانشکده مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۰۲
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۳/۱۰
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۲۵
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۵/۲۲

کلمات کلیدی:
مسئله پیچش
روش کانتورویچ
مقاطع ذوزنقه‌ای
تابع اعوجاج
میدان تنش پراندتل

خلاصه: بسیاری از اعضای موجود در سازه‌ها تحت اثر لنگر پیچشی قرار دارند، بنابراین شناخت رفتار پیچشی این اعضا از اهمیت بسیاری برخوردار است. بررسی رفتار پیچشی مقاطع جدار نازک و مقاطعی با شکل هندسی ساده با استفاده از روش‌های تحلیلی و رایج امکان‌پذیر است. در صنعت‌های خاص ممکن است در تحلیل و طراحی سازه‌ها مقاطعی نیاز باشند که هندسه‌ی آنها خارج از چارچوب مقاطع مرسوم طبقه‌بندی شود و از آنجایی که محاسبه پاسخ این مقاطع با روش‌های رایج امکان‌ناپذیر یا دشوار است، بنابراین توسعه روش‌های جدیدتر بسیار ضروری به نظر می‌رسد. از جمله این مقاطع می‌توان به مقطع ذوزنقه‌ای اشاره نمود. به علت دشواری تحلیل دقیق مسائل با دامنه‌های نامتقارن، روش‌های نیمه‌تحلیلی و عددی بهترین جایگزین برای حل این دسته از مسائل است. یکی از روش‌های مناسب برای حل مسائل مقدار مرزی، روش حساب تغییرات است که از میان این روش‌ها روش نیمه‌تحلیلی کانتورویچ که تعمیم‌یافته روش رایلی-ریتز است به دلیل عدم محدودیت انتخاب تابع اولیه جهت برآورد شرایط مرزی یک روش قدرتمند جهت حل مسائل است. هدف از پژوهش حاضر توسعه روش کانتورویچ برای حل معادله حاکم بر مسئله پیچش، محاسبه اعوجاج و میدان تنش مقطع دلخواه ذوزنقه به صورت مستقیم است. به منظور ارزیابی دقت روش کانتورویچ، حل حاصل از این روش با سایر روش‌های موجود مقایسه شده است. نتایج حاکی از دقت بالا و همگرایی سریع روش مذکور است.

۱- مقدمه

بسیاری از اعضای مهندسی مانند تیرها، شفت‌ها و بال‌های هواپیما تحت اثر لنگر پیچشی قرار می‌گیرند، بنابراین شناخت رفتار پیچشی این اعضا جهت تحلیل و طراحی آنها از اهمیت بسیاری برخوردار است. پاسخ مسئله‌ی پیچش نخست برای مقاطع دایره‌ای توسط کولمب در سال ۱۷۸۴ مطرح شد. طبق فرضیات کولمب مقطع دایره‌ای تحت اثر پیچش مسطح باقی می‌ماند. فرضیات او توسط ناویر در سال ۱۸۲۴ برای مقاطع غیردایره‌ای مورد استفاده قرار گرفت. با این وجود، دست‌یابی به پاسخ صحیح مسئله‌ی پیچش برای مقاطع غیردایره‌ای توپر به مراتب دشوارتر بود و تا مدت‌ها لاینحل باقی ماند. این دشواری از آن جهت است که مقاطع غیردایره‌ای توپر پس از اعمال لنگر پیچشی دیگر مسطح باقی نمی‌مانند و دچار اعوجاج می‌شوند. در سال ۱۸۵۳ سن ونان، فرمول‌بندی دقیق مسئله‌ی پیچش تیرهای منشوری با مقطع دلخواه را با استفاده از رویکرد نیمه‌معکوس ارائه نمود. در نهایت پراندتل میدان تنش حاصل از مسئله پیچش را با ارائه‌ی تابع تنش که حالت خاصی از تابع تنش موریرا بود را در سال ۱۹۰۳ ارائه نمود. بنابراین، در مسئله پیچش چنانچه هندسه مقطع به صورت دایره‌ای نباشد، در عضو تحت پیچش پدیده‌ای پیچیده به نام اعوجاج رخ می‌دهد که معادله حاکم بر فیزیک پدیده مذکور معادله پواسون است. مقاطع پیچیده و غیرمعمول به صورت گسترده در اعضای سازه‌ای در مهندسی سازه، مهندسی مکانیک، مهندسی کشتی‌سازی

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m-yazdani@araku.ac.ir

و مهندسی هوافضا به کار برده می‌شوند، بنابراین ارائه روش‌های نوین برای بررسی پدیده پیچش در این اعضا بسیار حائز اهمیت است. معادله پواسون به عنوان معادله حاکم بر مسئله پیچش برای مقاطع متقارن با شرایط مرزی ساده با استفاده از روش‌های تحلیلی قابل حل است، اما حل تحلیلی مسئله‌ی مذکور برای مقطع نامتقارن با شرایط مرزی پیچیده بسیار دشوار است و نیاز به تکنیک‌های خاصی در ریاضیات دارد، از این‌رو روش‌های نیمه‌تحلیلی و عددی برای حل این دسته از مسائل به صورت گسترده‌تری مورد استفاده قرار می‌گیرند.

از میان روش‌های تحلیلی می‌توان به مطالعه‌های باسالی اشاره نمود که در آن با استفاده از روش تحلیل توابع مختلط، مسئله پیچش را برای مقاطع منحنی‌شکل با استفاده از مفهوم نگاشت (تبدیل منحنی به دایره) به صورت تحلیلی حل نمود [۱]. هاسنفلانگ [۲] با استفاده از تبدیل انتگرال مرتبه سوم و تابع نگاشت همدیس شوارتز-کریستوفل، میدان تنش پراندتل را برای مقاطع ۵ ضلعی به صورت تحلیلی ارائه نمود. اکسدی [۳] با استفاده از تبدیل انتگرالی، میدان تنش پراندتل را برای مقاطع ناهمگن به صورت تحلیلی ارائه نمود. مسئله‌ی پیچش برای مقاطع لوزی، ذوزنقه، مثلث و هر مقطع دلخواه دیگری با کمک تبدیل دامنه‌ی حل به دامنه‌ی مستطیلی توسط چرنیشف حل شده است. چرنیشف [۴] برای تبدیل دامنه‌ی حل دلخواه به مقطع مستطیلی از تبدیل دستگاه مختصات به کمک توابع ویژه و مقادیر ویژه استفاده نمود. چرنیشف با در نظر گرفتن تابع پیچش به صورت سری فوریه نشان داد که تقریب مسئله‌ی پیچش با سری فوریه به جواب دقیق مسئله‌ی پیچش همگرا می‌شود. اخیراً نیز مهدوی و یزدانی [۵] با استفاده از بسط توابع ویژه‌ای در دستگاه مختصات قطبی، یک روش تحلیلی برای حل مسئله پیچش برای مقاطع قطاعی ارائه نموده‌اند.

علاوه بر روش‌های تحلیلی، روش‌های عددی بسیاری برای حل مسئله پیچش موجود هستند که برخی از آنها از لحاظ فرمول‌بندی پیچیده هستند و برخی دیگر از انعطاف‌پذیری بالایی برخوردار هستند. باتوجه به اهمیت مسئله اعوجاج در مقاطع جدار نازک در مهندسی سازه، چن [۶] با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی حل تابع اعوجاج را در مقاطع جدار نازک ارائه نمود. هیس [۷] توانست در دستگاه مختصات قطبی با استفاده از روش اجزای محدود و استفاده از توابع درون‌یابی هرمیتی، تابع تنش ناشی از پیچش را حل نماید. بارونه و همکاران [۸] با استفاده از تئوری پتانسیل در توابع مختلط که یک ابزار مناسب برای حل عددی مسائلی است که معادله حاکم آنها لاپلاس است، توانستند روش المان مرزی را جهت حل میدان تنش پراندتل برای مقاطع دلخواه توسعه دهند. استفاده از این ایده برای هندسه‌های پیچیده بسیار کارا است. بارونه و همکاران با استفاده از چندین تابع مختلط در روش المان مرزی و مقایسه نتایج آنها با یکدیگر متوجه شد که استفاده از سری لوران با چندجمله‌ای‌های هارمونیک نسبت به سایر توابع مختلط در روش المان مرزی کارایی بهتری دارد. داریلماز و همکاران [۹] با استفاده از روش اجزای محدود ترکیبی مسئله پیچش را برای مقاطع دلخواه با مواد مدرج تابعی، فرمول‌بندی نمودند. کارل و میلان [۱۰] با استفاده از روش اجزای محدود شیء گرا، مسئله‌ی اعوجاج را برای هر مقطع دلخواه حل نمودند. آن‌ها در پژوهش مذکور پس از تشریح روابط ریاضی و تعیین معادله حاکم بر مسئله (معادله‌ی لاپلاس) به همراه شرایط مرزی آن، تابع اعوجاج مقاطع دلخواه را به دست آوردند. بانیک و همکاران [۱۱] با کمک روش اجزای محدود، به تحلیل تنش خطی تیر، تحت توزیع غیریکنواخت پیچش پرداختند. آن‌ها در این مطالعه ماتریس سختی و بردار بارگذاری را با استفاده از تابع اعوجاج اولیه و ثانویه تعیین نمودند. تابع اعوجاج اولیه در اثر توزیع یکنواخت پیچش به دست می‌آید و تابع اعوجاج ثانویه مربوط به محدود شدن تنش برشی با اثرات اعوجاج است. این امر سبب طبقه‌بندی تنش برشی به دو دسته‌ی اولیه و ثانویه می‌شود. همچنین در این مطالعه تمرکز تنش حاصل از روش پیشنهادی با تمرکز تنش حاصل از روش‌های تحلیلی تفاوت دارد که طبق اظهار پژوهشگران با استفاده از صاف نمودن گوشه‌های مقطع، این مشکل برطرف خواهد شد. جهت کاهش هزینه‌های محاسباتی مسئله پیچش، گاناپادی و همکاران [۱۲] با استفاده از روش اجزای محدود با مرتبه‌ی پیوستگی یک، پیچش و خمش یک تیر کامپوزیت چند لایه‌ی پیزو-الکتریک با مقطع مستطیل تحت شرایط مرزی تعریف شده روی سطوح بالا و پایین تیر و شرایط مرزی برای پیوستگی لایه‌های داخلی را مورد بررسی قرار دادند.

علاوه بر تحلیل الاستیک مسئله پیچش، پژوهش‌های وسیعی در تحلیل پلاستیک پیچش ارائه شده است. نادای اولین کسی بود که تئوری سن ونان را برای حالت پلاستیک ارائه نمود. همچنین اسمیت و سایدباتوم با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکمل و روش رایلی-

ریتز، حل الاستو-پلاستیک مقاطع تحت پیچش را به صورت تحلیلی ارائه نمودند [۱۳]. بابا و کاجیتا [۱۴] برای اولین بار حل مسئله پیچش الاستوپلاستیک را با استفاده از روش اجزای محدود بدست آوردند. کارآیی روش اجزای محدود برای مسئله‌ی پیچش الاستو-پلاستیک توسط واگنر و گراتمن [۱۵] برای مقاطع مستطیل، مثلث، لوله‌ی توخالی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج حاکی از همگرایی سریع روش اجزای محدود در این دسته از مسائل است. نجرا و هررا [۱۶] صلبیت پیچشی مقاطع غیردایره‌ای را مورد بررسی قرار دادند. با توجه به موجود بودن حل تحلیلی مسئله‌ی پیچش برای مقاطع بیضی، مستطیل و مثلث، در این مطالعه یک روش تقریبی پیشنهاد شده است، که در آن مقاطع دلخواه به کمک یک ضریب (نسبت طول به عرض) به صورت یکی از مقاطع مذکور با سطح مقطع برابر شبیه‌سازی و نتایج به دست آمده از این تقریب با نتایج تحلیلی مقایسه شده است و نتایج حاکی از کارایی بالای روش پیشنهاد شده است.

علاوه بر روش‌های تحلیلی و عددی، روش‌های دیگری تحت عنوان روش‌های نیمه تحلیلی موجود هستند. یکی از روش‌های نیمه تحلیلی کارآمد در حل مسائل مقدار مرزی با دامنه‌ی نامتقارن، روش حساب تغییرات است که توسط ریتز پیشنهاد شده است. تیموشنکو و گودیر [۱۷] با استفاده از حساب تغییرات، میدان تنش در مقطع مستطیلی تحت پیچش را مورد بررسی قرار دادند. نتایج بدست آمده توسط تیموشنکو و گودیر حاکی از همگرایی روش حساب تغییرات با جواب دقیق است. در ادامه روش حساب تغییرات توسط گالرکین و کانتوروویچ [۱۸] توسعه یافت و به صورت گسترده‌تری مورد استفاده قرار گرفت. روش کانتوروویچ به عنوان زیر شاخه‌ای از روش حساب تغییرات، تعمیمی کارآمد از روش رایلی-ریتز است، که به حل معادلات دیفرانسیل در قالب دستگاهی از معادلات جبری بر حسب ضرایب ثابت نامعین می‌پردازد. برخلاف روش رایلی-ریتز و گالرکین، در روش کانتوروویچ وابستگی پاسخ مسئله به توابع تقریب به صورت چشمگیری کاهش می‌یابد و نتایج با سرعت بیشتری به سمت پاسخ دقیق همگرا می‌شوند. همچنین با توسعه روش کانتوروویچ، روش کانتوروویچ توسعه‌یافته توسط کر [۱۹] که در آن ضرایب به صورت متغیر هستند جهت حل مسئله پیچش در مقطع مستطیلی توسعه پیدا کرده است. در این روش ضرایب متغیر با استفاده از یک فرایند تکراری در هر مرحله از حل به‌هنگام می‌شوند. روش کانتوروویچ و کانتوروویچ توسعه‌یافته تاکنون برای مسائل مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است که از میان آنها می‌توان به مطالعات کر و الکساندر اشاره نمود. آن‌ها با در نظر گرفتن یک ورق مستطیلی، تنش‌های خمشی و برشی را با دقت بسیار بالایی محاسبه نمودند. از مهمترین دست‌آوردهای پژوهش آنها همگرایی سریع و مستقل بودن پاسخ‌های بدست آمده از ضرایب متغیر اولیه بوده است [۲۰]. شوفرین و همکاران [۲۱] به بررسی ورق ذوزنقه‌ای تحت بارهای خارج از صفحه پرداخته‌اند و نتایج آنها حاکی از همگرایی سریع روش کانتوروویچ به پاسخ دقیق است. در مطالعه مذکور حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله با کمک روش کانتوروویچ تعمیم‌یافته به حل پی در پی معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. همچنین پس از تبدیل دامنه‌ی حل ذوزنقه‌ای شکل به دامنه‌ی مستطیلی، روش کانتوروویچ پیاده‌سازی شده است. یوان و جینز با استفاده از توابع چند متغیره کمانش الاستیک ورق نازک مستطیلی را با استفاده از روش کانتوروویچ مورد بررسی قرار دادند. همچنین روش کانتوروویچ در مسائل غیرخطی و سایر علوم نیز به صورت گسترده مورد استفاده قرار گرفته است که از میان آنها می‌توان به مراجع [۲۲-۲۴] اشاره نمود.

معادله پواسون یکی از مهمترین معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر بسیاری از مسائل مهندسی از جمله انتقال حرارت، الکترواستاتیک، جریان سیال، میدان گرانشی مغناطیسی، دفیوژن، و پیچش است. برای حل معادله پواسون روش‌های تحلیلی و عددی زیادی توسعه یافته است، اما تاکنون حل این معادله با استفاده از روش کانتوروویچ برای دامنه‌ی نامتقارن در هیچ منبعی گزارش نشده است. استفاده از مقاطع نامتقارن و دلخواه با هندسه‌های نامتعارف در صنعت و سازه‌های هوافضایی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد، بنابراین هدف از پژوهش حاضر حل نیمه تحلیلی معادله حاکم بر مسئله پیچش برای مقاطع ذوزنقه دلخواه با استفاده از روش کانتوروویچ یا روش رایلی-ریتز تعمیم‌یافته است. برای این منظور ابتدا معادله حاکم بر مسئله پیچش در بخش دو ارائه می‌شود. سپس در بخش سوم روش کانتوروویچ ارائه می‌شود. در بخش چهارم پاسخ کامل مقطع ذوزنقه‌ای از جمله میدان تنش و میدان اعوجاج تحت پیچش ارائه می‌شود. بخش پنجم ضمن بررسی مثال‌های عددی به صحت‌سنجی نتایج

می‌پردازد.

۲. معادله حاکم مسئله پیچش

مطابق شکل ۱ چنانچه یک میله‌ی منشوری با مقطع دلخواه تحت اثر لنگر پیچشی $M_{۳۳}$ قرار گیرد، مطابق با فرضیات سن ونان هر مقطع به اندازه‌ی زاویه α، متناسب با فاصله‌ی آن از مقطع $x_{۳}=۰$ براساس رابطه (۱) دوران می‌نماید [۱۷].

$$M_{33}=G\,J\,\alpha \qquad (۱)$$

که در آن G مدول برشی و J ویژگی هندسی مقطع در برابر پیچش است. برای مقاطع غیردایره‌ای مقطع مسطح باقی نمی‌ماند و دچار اعوجاج $(\psi(x_{۱},x_{۲}))$ می‌شود، بنابراین J به تابع اعوجاج و سطح مقطع میله بستگی خواهد داشت.

با در نظر گرفتن تغییر متغیر نشان داده شده در روابط (۲) و (۳) می‌توان معادله حاکم مسئله پیچش را برحسب χ و به فرم معادله پواسون (رابطه (۴)) نوشت، بنابراین [۱۷]:

$$\frac{\partial\chi}{\partial x_1}=-\frac{\partial\psi}{\partial x_2}-x_1 \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial x_2}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-x_2 \qquad (۳)$$

$$\nabla^2\chi=-2 \qquad in\ \ \Omega \qquad (۴)$$

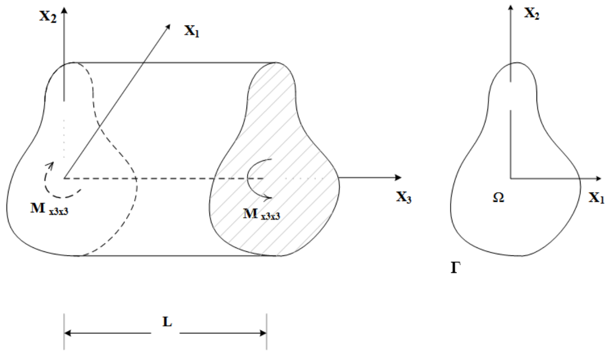
$$\chi=k \qquad on\ \ \Gamma \qquad (۵)$$

لازم به ذکر است باتوجه به اینکه $\frac{d\chi}{ds}=۰$ لذا $\chi=k$ به ازای هر مقدار دلخواه k برقرار است (پارامتر s بیان‌کننده مختصه مکانی روی مرز مقطع است). در نهایت نیز J به صورت رابطه (۶) برحسب تابع χ قابل تعریف است [۱۷]:

$$J=\int_{\Omega}[(\frac{\partial\chi}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial\chi}{\partial x_2})^2]\,dx_1\,dx_2 \qquad (۶)$$

مطابق روش نیمه‌معکوس سن ونان میدان تنش‌های برشی ناشی از لنگر پیچشی به صورت روابط (۷) و (۸) بدست می‌آید [۱۷]:

$$\sigma_{13}=G\,\alpha\,(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}) \qquad (۷)$$



شکل ۱. میله‌ی منشوری با مقطع دلخواه تحت اثر لنگر پیچشی

Fig. 1. Prismatic bar with arbitrary cross section

$$\sigma_{23}=-G\,\alpha\,(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}) \qquad (۸)$$

همچنین میدان جابجایی به صورت روابط (۹) تا (۱۱) محاسبه می‌شود [۱۷].

$$u_1=-\alpha\,x_2\,x_3 \qquad (۹)$$

$$u_2=\alpha\,x_1\,x_3 \qquad (۱۰)$$

$$u_3=\alpha\,\psi(x_1,x_2) \qquad (۱۱)$$

با محاسبه تابع χ از حل معادله پواسون (روابط (۴) و (۵)) و استفاده از روابط (۲) و (۳) تابع اعوجاج $\psi(x_{۱},x_{۲})$ به صورت مستقیم مطابق رابطه (۱۲) بدست می‌آید:

$$\psi(x_1,x_2)=-\int[\frac{\partial\chi}{\partial x_1}+x_1]\,dx_2+O_1(x_1) \qquad (۱۲)$$

در رابطه (۱۲) ثابت انتگرال‌گیری $O_{۱}(x_{۱})$ تابعی مجهول صرفاً بر حسب $x_{۱}$ است و به صورت رابطه (۱۳) بدست می‌آید:

$$O_1(x_1)=\int[\frac{\partial\chi}{\partial x_2}+x_2-\xi(x_1,x_2)]dx_1 \qquad (۱۳)$$

که در آن $\xi(x_{۱},x_{۲})$ برابر است با:

$$\xi(x_1,x_2)=-\int[\frac{\partial\chi}{\partial x_1}+x_1]\,dx_2 \qquad (۱۴)$$

پس از محاسبه تابع اعوجاج $\psi(x_{۱},x_{۲})$ می‌توان تابع تنش پراندتل $\chi(x_{۱},x_{۲})$ را مطابق روابط (۱۵) و (۱۶) بدست آورد [۱۷].

$$\sigma_{13}=\frac{\partial \gamma}{\partial x_2}=G\,\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}-x_2\right) \tag{۱۵}$$

$$\sigma_{23}=-\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}=G\,\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}+x_1\right) \tag{۱۶}$$

بنابراین مطابق روابط تعادل بایستی روابط (۱۷) و (۱۸) برای تابع تنش پراندتل برقرار باشد [۱۷].

$$\nabla^2\gamma=\frac{\partial^2 \gamma}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2 \gamma}{\partial {x_2}^2}=-2G\alpha \qquad in \quad \Omega \tag{۱۷}$$

$$\frac{d\gamma}{ds}=0 \qquad on \quad \Gamma \tag{۱۸}$$

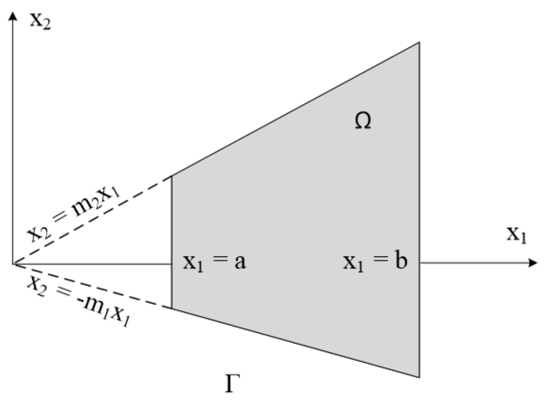
رابطه (۱۸) تابع تنش پراندتل روی مرز Γ را بیان می‌نماید که در مطالعه حاضر این مقدار ثابت دلخواه برابر با صفر در نظر گرفته شده است. همچنین با تعریف تابع تنش پراندتل، رابطه (۱) به صورت رابطه $M_{۳۳}=۲\int_{\Omega}\gamma\, dx_{۱}\, dx_{۲}$ قابل بازنویسی است.

۳. مسئله تغییراتی

از آنجا که معادله‌ی حاکم بر مسئله‌ی پیچش عضو منشوری با مقطع دلخواه، معادله‌ی پواسون است، در این بخش اصل تغییراتی برای معادله پواسون با تشکیل تابعک $I(\phi)=\int_{\Omega}F(x_{۱},x_{۲},\phi,\phi_{x_۱},\phi_{x_۲})\, d\Omega$ و کمینه نمودن آن با استفاده از روش کانتوروویچ به دست می‌آید. به منظور دست‌یابی به اصل تغییراتی یک معادله به فرم کلی $L\phi=Q$ ، ابتدا طرفین معادله در تغییرات $\delta\phi$ که در آن ϕ متغیری وابسته است، ضرب می‌شود و سپس از این عبارت روی دامنه‌ی مسئله انتگرال‌گیری می‌شود. در مرحله‌ی بعد با بکارگیری قضایای دیورژانس و گرین مشتق‌های موجود در مسئله به شکل $\delta\phi$ مبدل می‌شوند. حاصل این فرایند، یکسان‌سازی مرتبه‌ی مشتق‌پذیری تابع مجهول و تابع وزن است و در آخر شرایط مرزی روی انتگرال حاصله اعمال می‌شود. صورت کلی معادله‌ی پواسون فرم $\nabla^{۲}\phi=-f\,(x_{۱},x_{۲})$ است. مطابق مطالب بیان‌شده اگر طرفین آن در عبارت $\delta\phi$ ضرب شود، رابطه (۱۹) استخراج می‌شود.

$$\delta I=\iint_{\Omega}(-\nabla^2\phi-f\,)\;\delta\phi\, dx_1\, dx_2 \tag{۱۹}$$

چنانچه از قصیه گرین استفاده شود رابطه (۱۹) به رابطه (۲۰) تبدیل می‌شود.



شکل ۲. مقطع ذوزنقه‌ای دلخواه یک تیر منشوری

Fig. 2. Prismatic bar with trapezoid cross section

$$\delta I=\int\!\!\int\Big[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\delta\phi+\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\delta\phi-\delta f\phi\Big]dx_1\,dx_2-\int\delta\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_1}dx_2-\int\delta\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_2}dx_1 \tag{۲۰}$$

یا به عبارت دیگر

$$\delta I=\delta\iint\Big[\Big(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\Big)^2-f\,\phi\Big]\,dx_1\,dx_2-\delta\int\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_1}dx_2-\delta\int\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_2}dx_1 \tag{۲۱}$$

با برقراری شرایط مرزی همگن نیومن و دیریکله رابطه (۲۱) به صورت رابطه (۲۲) ساده می‌شود:

$$I(\phi)=\int\!\!\int\Big[\Big(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\Big)^2+2f\,\phi\Big]\,dx_1\,dx_2 \tag{۲۲}$$

با استفاده از تکنیک بسط تابعی، پاسخ تقریبی مسئله مطابق روش کانتوروویچ به صورت رابطه (۲۳) لحاظ می‌شود:

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{N}a_n(x)\,\phi_n(x)+\phi_0 \tag{۲۳}$$

توابع $a_n(x)\phi_n(x)$ به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که اولاً از یکدیگر مستقل خطی باشند و ثانیاً در شرایط مرزی همگن برقرار باشند، در حالی که ϕ_0 صرفاً شرط مرزی ناهمگن را ارضا می‌نماید. در ادامه توابع $a_n(x)$ بایستی به نحوی محاسبه شوند، که علاوه بر ارضای شرایط مرزی مسئله، رابطه (۲۲) را نیز کمینه نماید.

۴. حل مسئله پیچش

مطابق شکل ۲ یک مقطع ذوزنقه‌ای دلخواه در نظر گرفته شده است. با تعریف پارامترهای a ، b، $m_۱$ و $m_۲$ مرزهای سطح مقطع ذوزنقه‌ی Ω مطابق رابطه (۲۴) مشخص می‌شود:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2) \,|\, (x_1, x_2) \in \\ (a \le x_1 \le b, -m_1\, x_1 \le x_2 \le m_2\, x_1) \end{array} \right\} \tag{۲۴}$$

به منظور حل این مسئله مطابق با روش کانتروویچ، ابتدا تابع هدف مطابق رابطه (۲۵) تعریف می‌شود:

$$I = \iint_{\Omega} F(x_1, x_2, \chi, \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \frac{\partial \chi}{\partial x_2})\, dx_1\, dx_2 \tag{۲۵}$$

با اعمال رابطه (۴) در رابطه (۲۲) و استفاده از تابع لاگرانژین مطابق $\phi = (\partial\chi/\partial x_۱)^۲ + (\partial\chi/\partial x_۲)^۲ - ۴\chi$، رابطه (۲۶) بدست می‌آید:

$$I = \iint [(\frac{\partial \chi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \chi}{\partial y})^2 - 4\chi]\, dx_1\, dx_2 \tag{۲۶}$$

بر اساس روش حساب تغییرات کمینه کردن رابطه‌ی (۲۵) معادل حل معادله دیفرانسیلی $\nabla^۲\chi = -۲$ بر روی دامنه‌ی مسئله است. مطابق روش کانتوروویچ تابع تقریب اولیه از نوع هارمونیکی $\bar{\chi}$ و به صورت (۲۷) در نظر گرفته شده است، بنابراین:

$$\bar{\chi} = \sin\left(\pi \frac{(x_2 + m_1 x_1)}{(m_1 + m_2) x_1}\right) f_1(x_1) + \sin\left(3\pi \frac{(x_2 + m_1 x_1)}{(m_1 + m_2) x_1}\right) f_2(x_1) \tag{۲۷}$$

تقریب اولیه $\bar{\chi}$ در شرایط مرزی $x_۲ = -m_۱ x_۱$ و $x_۲ = m_۲ x_۱$ صدق می‌نماید و دو شرط مرزی $x_۱ = a$ و $x_۱ = b$ بایستی توسط توابع نامعلوم اویلری $f_۱$ و $f_۲$ بر آورده شوند، که این ویژگی یکی از مزایای روش کانتوروویچ نسبت به روش رایلی-ریتز برای حل معادلات دیفرانسیل است. به منظور کمینه کردن رابطه (۲۵) مطابق با روش کانتوروویچ بایستی معادلات اویلر-لاگرانژ براساس رابطه (۲۸) حل شوند [۱۸]:

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial I}{\partial f'_{i,x_1}}\right) - \frac{\partial I}{\partial f_i} = 0 \tag{۲۸}$$

با اعمال رابطه (۲۶) در رابطه (۲۸) به ازای $i = ۱,۲$، جفت معادلات (۲۹) حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} x_1^2 f''_{1,x_1} + x_1 f'_{1,x_1} - \frac{3}{2} x_1 f'_{2,x_1} + \\ \lambda_1 f_1 - \frac{15}{8} f_2 + \frac{8}{\pi} x_1^2 = 0 \\ x_1^2 f''_{2,x_1} + x_1 f'_{2,x_1} + \frac{3}{2} x_1 f'_{1,x_1} + \\ \lambda_2 f_2 - \frac{15}{8} f_1 + \frac{8}{\pi} x_1^2 = 0 \end{cases} \tag{۲۹}$$

با توجه به کوپله بودن معادلات در دستگاه فوق، دست‌یابی به توابع مجهول $f_۱$ و $f_۲$ به آسانی امکان‌پذیر نیست. برای رفع این مشکل، نخست با معرفی متغیر مستقل کمکی $t = \ln x_۱$، دستگاه معادلات رابطه (۲۹) به دستگاهی با ضرایب ثابت مطابق رابطه (۳۰) تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} f''_{1,t} - \frac{3}{2} f'_{2,t} + \lambda_1 f_1 - \frac{15}{8} f_2 + \frac{8}{\pi} e^{2t} = 0 \\ f''_{2,t} + \frac{3}{2} f'_{1,t} + \lambda_2 f_2 - \frac{15}{8} f_1 + \frac{8}{3\pi} e^{2t} = 0 \end{cases} \tag{۳۰}$$

با توجه به مجزا شدن دستگاه معادلات، رابطه (۳۰) را می‌توان به فرم ماتریسی بازنویسی نمود، بنابراین:

$$\begin{bmatrix} D^2 + \lambda_1 & -\frac{3}{2} D - \frac{15}{8} \\ \frac{3}{2} D - \frac{15}{8} & D^2 + \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{\pi} e^{2t} \\ -\frac{8}{3\pi} e^{2t} \end{bmatrix} \tag{۳۱}$$

که در آن D و D^2 عملگر مشتق مرتبه‌ی اول و دوم تابع f_i نسبت به t هستند. رابطه (۳۱) با استفاده از دستور کرامر به شکل مستقل از یکدیگر در می‌آیند، بنابراین:

$$(D^4 + \alpha D^2 + \beta) f_i = \omega_i e^{2t} \tag{۳۲}$$

با حل رابطه (۳۲) که از نوع معادلات دیفرانسیل اویلری هستند، تابع f_i مطابق رابطه (۳۳) بدست می‌آید:

جدول ۱. مشخصات هندسی و مکانیکی تیر با مقطع ذوزنقه

Table 1. Geometric and mechanical properties of trapezoid cross section

طول میله (m)	ضریب پواسون	مدول برشی (GPa)	b (m)	a (m)	m_1	m_2
۴	۰/۲	۸/۳	۰/۴	۰/۱	۰/۲۵	۰/۵

$$f_i=\frac{\omega_i e^{2t}}{\beta+4\alpha+16}+c_{1i}e^{-r_1 t}+c_{2i}e^{-r_1 t}+c_{3i}e^{-r_2 t}+c_{4i}e^{r_2 t} \qquad (۳۳)$$

که در آن ضرایب ثابت c_{ji} به ازای $(j=۱,۲,۳,۴)$ است. با توجه به شرایط مرزی مسئله، رابطه (۳۳) یک دستگاه هشت معادله‌ای خطی مستقل است. با جای‌گذاری توابع اویلر در رابطه‌ی (۲۷) پاسخ مسئله‌ی پیچش مقطع دلخواه به صورت رابطه (۳۴) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\bar{\chi}= &\sin\left[\pi\frac{(x_2+m_1x_1)}{(m_1+m_2)x_1}\right]\times\\ &\left(\frac{\omega_1 x_1^{\,2}}{4\alpha+\beta+16}+c_{11}e^{-r_1}+c_{21}e^{-r_1}+c_{31}e^{-r_2}+c_{41}e^{r_2}\right)\\ &+\sin\left[3\pi\frac{(x_2+m_1x_1)}{(m_1+m_2)x_1}\right]\times\\ &\left(\frac{\omega_2 x_1^{\,2}}{4\alpha+\beta+16}+c_{12}e^{-r_1}+c_{22}e^{-r_1}+c_{32}e^{-r_2}+c_{42}e^{r_2}\right)\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

لازم به ذکر است که در روابط (۲۹) تا (۴۳) پارامترهای بیان‌شده به صورت روابط (۳۵) تا (۴۳) تعریف شده است:

$$\alpha=\lambda_1+\lambda_2+\frac{9}{4} \qquad (۳۵)$$

$$\beta=\lambda_1\lambda_2-\frac{225}{64} \qquad (۳۶)$$

$$\omega_1=\frac{-(45+8\lambda_2)}{\pi} \qquad (۳۷)$$

$$\omega_2=\frac{-(5+8\lambda_1)}{3\pi} \qquad (۳۸)$$

$$\theta=\frac{3(1-m_1m_2)}{(m_1+m_2)^2}+1 \qquad (۳۹)$$

$$\lambda_1=-\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{3}\theta \qquad (۴۰)$$

$$\lambda_2=-\frac{1}{2}-3\pi^2\theta \qquad (۴۱)$$

$$r_1=\frac{1}{2}\sqrt{-2(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta})} \qquad (۴۲)$$

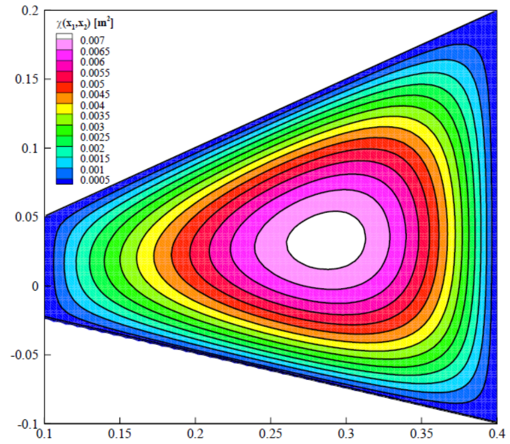
$$r_2=\frac{1}{2}\sqrt{-2(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta})} \qquad (۴۳)$$

۵. نتایج و بحث

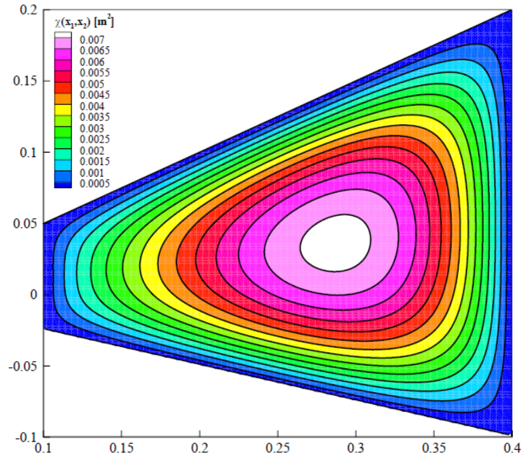
۵-۱ پیچش مقطع ذوزنقه‌ای

جهت محاسبه میدان تنش و اعوجاج مقطع ذوزنقه با استفاده از روش کانتوروویچ، فرض شده است که مشخصات هندسی و مکانیکی مقطع مطابق جدول ۱ است. ابتدا در شکل ۳ تابع تنش پراندتل ارائه شده است و نتایج حاکی از انطباق بسیار خوب روش اجزای محدود و روش کانتوروویچ دارد. لازم به ذکر است که حل اجزای محدود با فراخوانی جعبه ابزار حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در محیط نرم‌افزار متلب بدست آمده که کارایی آن در حل مسائل مشابه در مطالعه‌های پیشین به اثبات رسیده است [۲۵ و ۲۶]. همچنین مشاهده می‌شود که مقادیر بیشینه‌ی تابع $\chi(x_۱,x_۲)$ در نواحی مرکزی سطح مقطع رخ می‌دهند و کمترین مقدار آنها در نزدیکی اضلاع ذوزنقه (مرزهای دامنه‌ی حل) متمرکز هستند. قابل توجه است که در شکل ۴الف خطوط میدان تابع اعوجاج نسبت به خط واصل اواسط اضلاع قایم ذوزنقه تقارن زوج دارند. این ویژگی در سایر مقاطع نیز مشاهده شد که برای اختصار در اینجا ارائه نشده است.

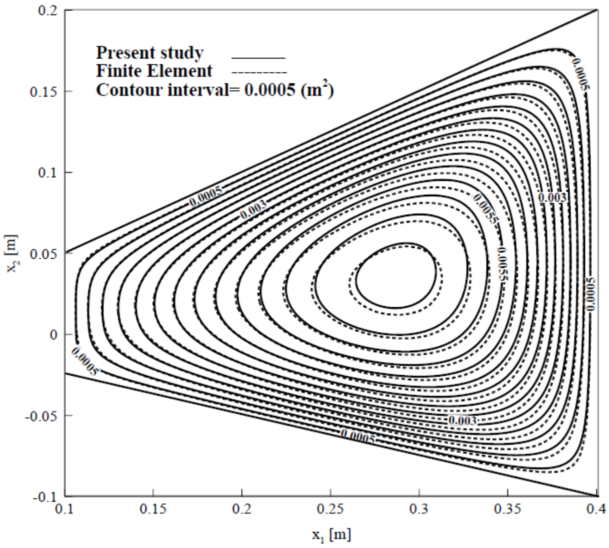
برای جامعیت بخشیدن به نتایج پژوهش، ابتدا تنش‌ها نسبت به لنگر پیچشی نرمال شده و سپس میدان‌های σ_{ij}/T رسم شده‌اند. مزیت چنین رویکردی آن است که برای یک پیچش دلخواه $T=T_۰$ (بر حسب نیوتن-متر)، کافی است نتایج شکل‌های یاد شده در مقدار $T_۰$ ضرب شود. مطابق روابط (۸) و (۹)، مولفه‌های



(ب)



(الف)

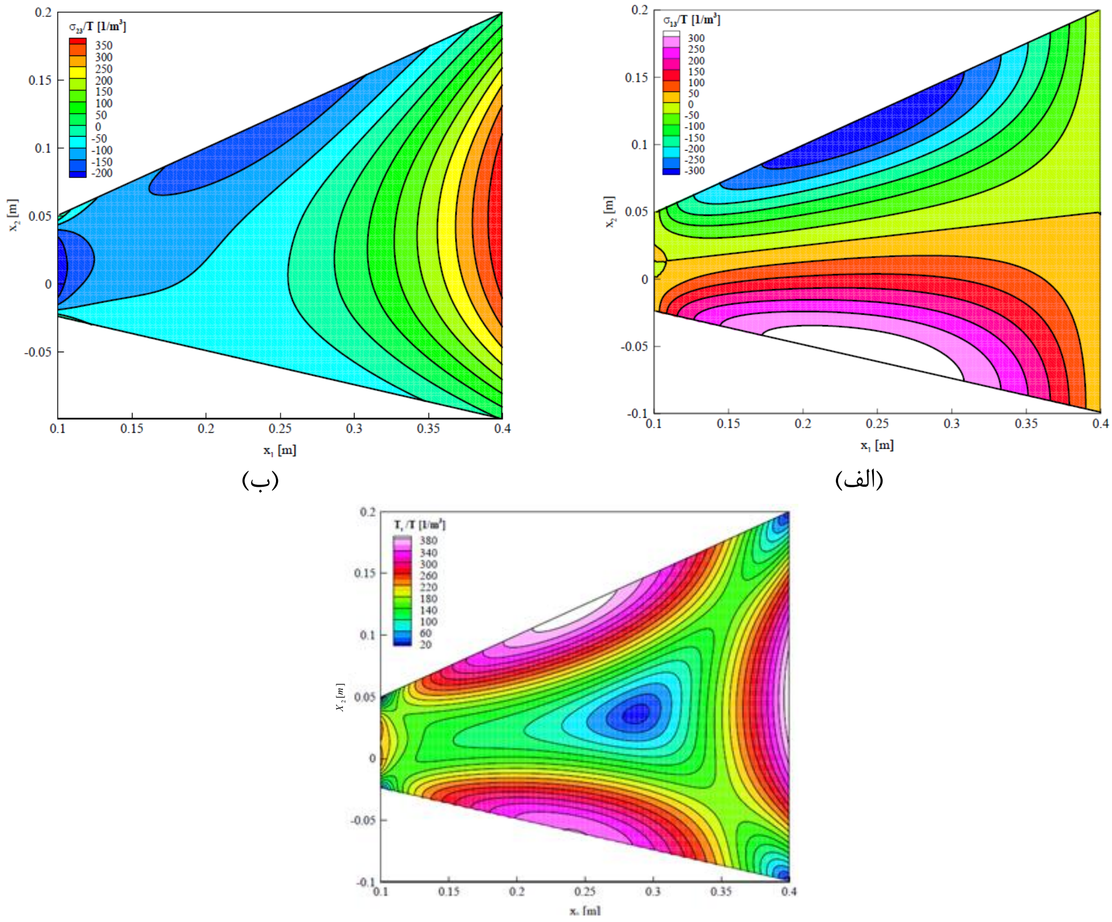


(ج)

شکل ۳. میدان $\chi(x_1,x_2)$ مقطع ذوزنقه حاصل از: (الف) روش کانتوروویچ، (ب) اجزای محدود، (ج) مقایسه کانتورها

Fig. 3. Cross-sectional distribution of stress function as computed by (a) Kantorovich method, (b) finite element method and (c) comparison of results

برشی تانسور تنش و همچنین اندازه‌ی تنش مماسی مطابق $T_t=\sqrt{\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2}$ محاسبه می‌شوند و کانتور آن‌ها در شکل ۴ ارائه شده‌اند. همان‌طور که در شکل ۴الف مشاهده می‌شود خطوط میدان تنش σ_{13}/T دارای تقارن فرد هستند، با این تفاوت که محور تقارن دیگر محور اصلی x_1 بوده و این خطوط نسبت به خط واصل اواسط اضلاع قایم ذوزنقه تقارن دارند. بیشینه‌ی σ_{13} با علامت مثبت و منفی نیز به ترتیب در اواسط وجوه پایین و بالای ذوزنقه رخ می‌دهند. همچنین منحنی هم‌مقدار $\sigma_{13}=0$ روی خطی قرار می‌گیرد که اواسط اضلاع ذوزنقه را به یکدیگر وصل می‌نماید. در شکل ۴ب تقارن زوج خطوط میدان نسبت به خط واصل اواسط اضلاع قایم ذوزنقه، منجر به ایجاد بیشینه‌ی تنش σ_{23} روی ضلع قایم سمت راست شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به دلیل نامتقارن بودن هندسه‌ی مقطع ذوزنقه، تقارن خطوط میدان تنش نسبت به محور افقی x_1 حفظ نشده است. بیشینه‌ی σ_{23} با علامت منفی نیز در وسط وجه مایل بالا و ضلع قایم سمت چپ مقطع قرار دارد. بنابراین نامتقارن بودن سطح مقطع منجر به توزیع غیریکنواخت بیشینه‌ی تنش σ_{23} با علامت منفی در مقطع ذوزنقه می‌شود. خط هم‌مقدار $\sigma_{23}=0$ نیز

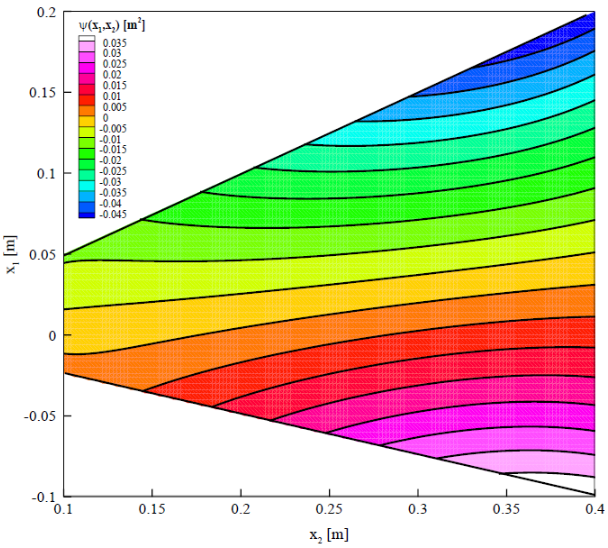


شکل ۴. میدان مؤلفه‌های تنش در مقطع ذوزنقه نامتقارن حاصل از روش کانتوروویچ: (الف) σ_{13}/T، (ب) σ_{23}/T، (ج) T_t/T

Fig. 4. Cross-sectional distribution of shear stress (a) σ_{13}/T , (b) σ_{23}/T and (c) T_t/T

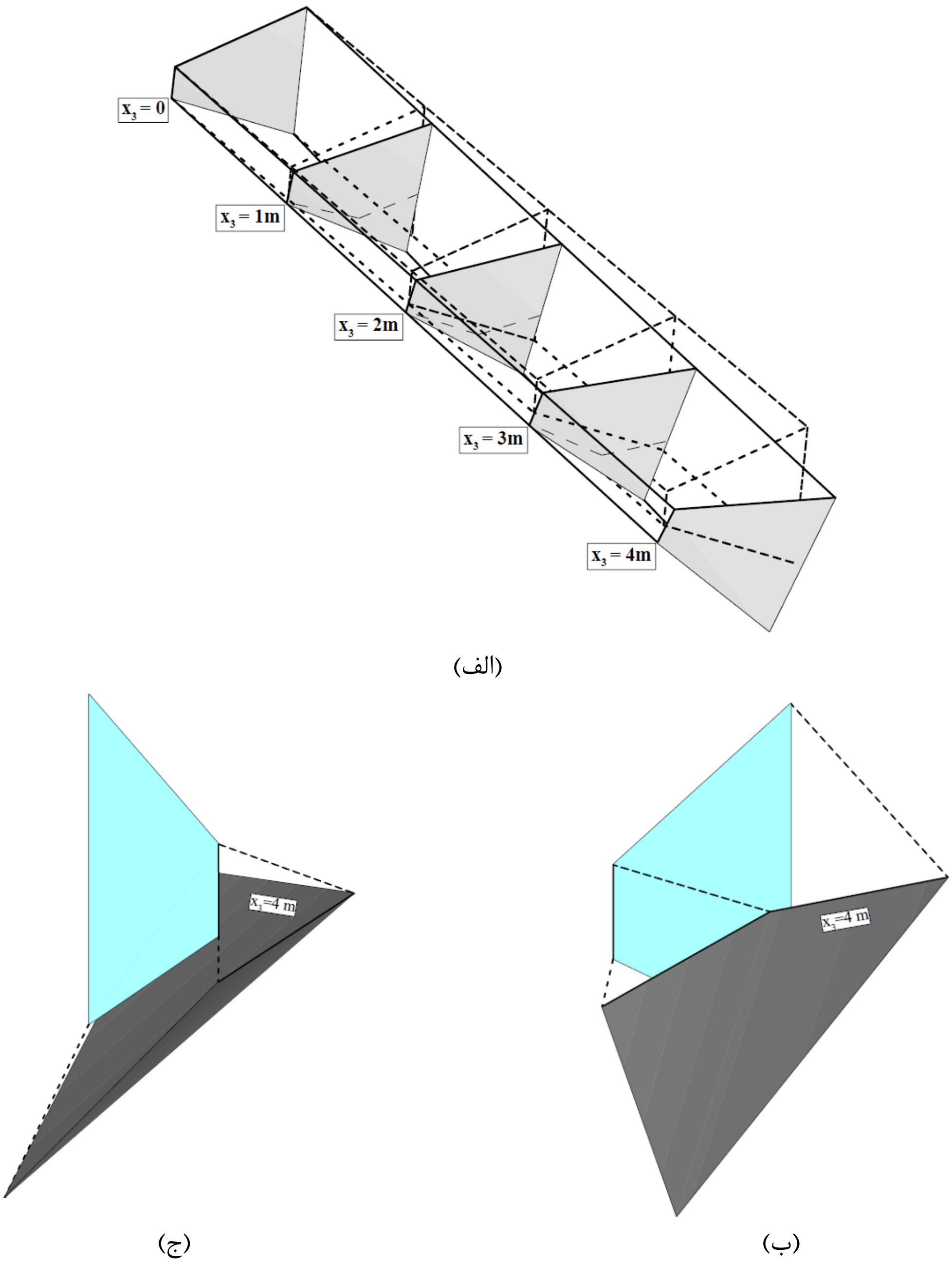
تقریباً از مرکز مقطع عبور می‌نماید. میدان اندازه‌ی تنش مماسی T_t در شکل ۳ج نشان داده شده است. با توجه به این شکل بیشترین مقدار T_t در اواسط اضلاع ذوزنقه و کمترین مقدار آن در نواحی گوشه‌های مقطع و وسط آن رخ می‌دهد. این خطوط نسبت به دو خط واصل مرکز مقطع به رئوس سمت راست و وسط ضلع قایم سمت چپ تقارن دارند.

در اغلب روش‌های عددی و تحلیلی، محاسبه‌ی تابع اعوجاج امری دشوار و یا بعضاً غیرممکن است. بنابراین در ادامه تابع اعوجاج $\psi(x_1,x_2)$ مطابق رابطه (۱۳) با استفاده از روش کانتوروویچ محاسبه و در شکل ۵ نمایش داده شده است. میدان تابع اعوجاج مقطع ذوزنقه مانند میدان تنش σ_{13}، دارای تقارن فرد است، با این تفاوت که تقارن میدان نسبت به خط واصل



شکل ۵. میدان تابع اعوجاج مقطع ذوزنقه دلخواه

Fig. 5. Distribution of warping function of arbitrary trapezoid cross section



شکل ۶. تغییرشکل تیر. (الف) دوران تیر با مقطع ذوزنقه در مقاطع عرضی، (ب) نمای جلو و (ج) نمای عقب

Fig. 6. Deformation of bar: (a) rotation of bar, (b) front view and (c) rear view

اواسط اضلاع قایم مقطع است.

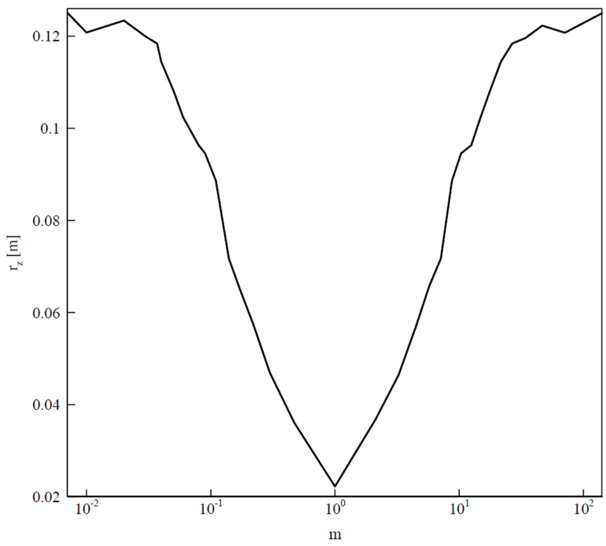
پس از تعیین تابع اعوجاج، جابجایی در طول تیر به ازای پیچش ۱۰ کیلونیوتن بر متر در شکل ۵ رسم شده است. در شکل ۶ تیر تغییرشکل نیافته با خط چین و تیر تغییرشکل یافته پس از اعمال لنگر پیچشی با خطوط ممتد نشان داده شده است. از آنجایی مقاطع غیرمتقارن تحت پیچش مسطح باقی نمی‌مانند، به منظور درک بهتر نحوه‌ی بیرون‌زدگی مقطع، دوران و اعوجاج مقطع عرضی $x_۳ = ۴\text{m}$ در دو نمای جلو و عقب به ترتیب در شکل ۶ب و ۶ج با مقیاس ۳۰ برابر رسم شده است.

۵-۱-۱ تحلیل حساسیت میزان شیب اضلاع مقطع ذوزنقه

با توجه به اینکه محاسبه‌ی ویژگی هندسی (J) مقاطع نامتقارن در برابر پیچش بسیار دشوار است، یکی از مزیت‌های روش ارائه شده، محاسبه نسبتاً آسان J برای مقاطع ذوزنقه مطابق رابطه (۷) است. برای این منظور، تأثیر میزان شیب اضلاع بالا و پایین ذوزنقه $m = m_1 / m_2$ بر مقدار J مقطع شکل (۷) ارائه شده است. در شکل ۷ برای مستقل نمودن J از مساحت مقاطع از مفهوم پارامتر شعاع ژیراسیون $r_Z = \sqrt{J/A}$ استفاده شده است. لازم به ذکر است در شکل (۷) ابتدا در اولین مقطع شیب وجه مایل پایین برابر با ۵- درجه و شیب وجه مایل بالایی برابر با ۸۵ درجه در نظر گرفته شده و J مقطع به دست آمده است. سپس در مقطع بعدی بدون تغییر شیب وجه پایین، شیب وجه بالایی به میزان پنج درجه کمتر (۸۰ درجه) اختیار شده و J مقطع به دست آمده است. بدین ترتیب در هر مقطع شیب وجه پایین برابر با ۵- درجه و شیب وجه بالا نسبت به مقطع قبلی پنج درجه کمتر خواهد بود. این روند تا مقطعی که شیب اضلاع بالا و پایین آن به ترتیب برابر با ۵ و ۵- درجه شود (ذوزنقه‌ی متقارن)، ادامه یافته است. پس از آن در مقطع بعدی شیب وجه بالایی ۵ درجه و شیب وجه پایینی برابر با ۱۰- درجه اتخاذ شده و J به دست آمده است. این روند تا محاسبه‌ی J مقطع ذوزنقه‌ای شکل با شیب اضلاع مایل بالا و پایین به ترتیب برابر با ۵ و ۸۵- درجه ادامه یافته است. بنابراین جمعاً ۳۴ ذوزنقه با شیب‌های متفاوت در شکل ۷ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج شکل ۷ نشان می‌دهد، از آنجایی که J به هندسه‌ی مقطع و تابع اعوجاج بستگی دارد، شکل ۷ متقارن است. همچنین با افزایش شیب وجه بالایی مقطع به میزان ۸۰ درجه، شعاع ژیراسیون در حدود ۵ برابر شده است.

۵-۲ پیچش مقطع مثلثی

هرگاه برای مقطع ذوزنقه‌ای مقدار a بسیار کوچک و نزدیک به مبدأ مختصات در شکل ۲ اختیار شود، سطح مقطع میله‌ی منشوری با تقریبی بسیار دقیق به یک مثلث میل خواهد نمود. بنابراین کلیه‌ی فرایند حل مسئله‌ی پیچش میله‌ی منشوری با مقطع ذوزنقه‌ای شکل برای حل مسئله‌ی پیچش میله‌ی منشوری با مقطع مثلث نیز تکرار می‌شود. این امر بیانگر جامعیت روش



شکل ۷. تحلیل حساسیت اثر شیب اضلاع مقطع ذوزنقه بر میزان شعاع ژیراسیون مقطع

Fig. 7. Sensitive analysis of side Slope in trapezoidal bar

پیشنهادی در برخورد با هندسه‌های کاملاً متفاوت در قالبی یکسان در بیان ریاضی مسئله است.

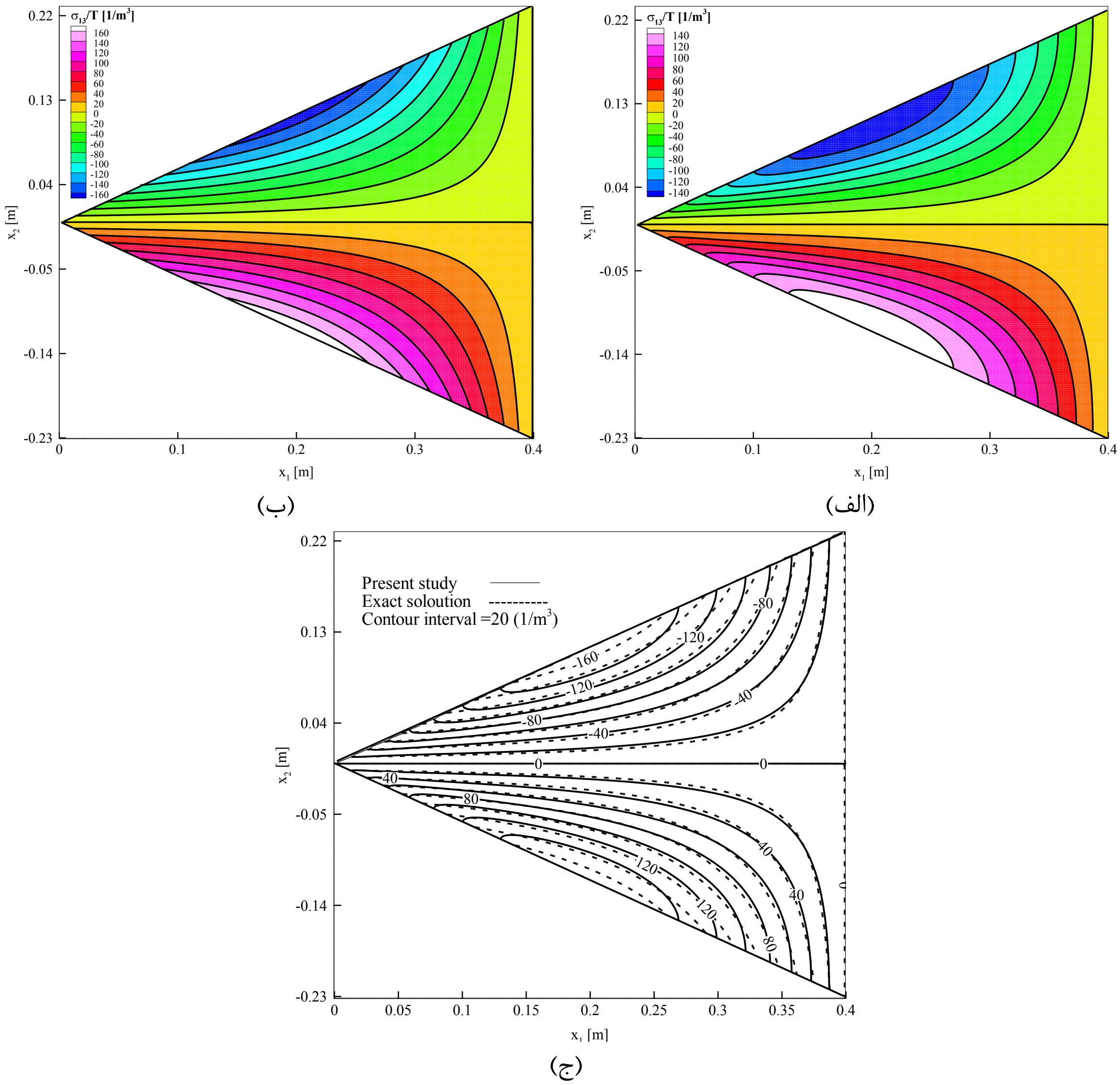
از آنجایی که در مطالعه‌های پیشین مسئله‌ی پیچش مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع به صورت تحلیلی حل شده است، در این بخش دقت روش ارائه شده از طریق مقایسه‌ی نتایج پژوهش حاضر با نتایج روش تحلیلی برای این مقطع مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. حل تحلیلی به کار رفته جهت مقایسه، مبتنی بر روش تابع تنش پراندتل است. به منظور اعتبارسنجی حل ارائه شده، پیچش یک تیر طره‌ای با سطح مقطع مثلث متساوی الاضلاع تحت اثر لنگر پیچشی در انتهای آزاد آن حل شده است. سایر مشخصات هندسی سطح مقطع به همراه خصوصیات مکانیکی مصالح این تیر در جدول ۲ خلاصه شده است.

همچنین این مسئله با کمک روش تابع تنش پراندتل حل شده و تابع اعوجاج و مولفه‌های تانسور تنش به دست آمده‌اند. در شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰ نتایج حاصل از دو روش با یکدیگر مقایسه شده‌اند، که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد. شکل‌های ۸ و ۹ مولفه‌های ناصفر تانسور تنش به دست آمده از روش‌های کانتوروویچ و مقایسه آن با تابع تنش پراندتل را نشان می‌دهند. مطابق با شکل ۸ الف و ۸ ب با فاصله گرفتن از محور تقارن افقی مقطع (محور اصلی x_1)، مشاهده می‌شود که

جدول ۲. مشخصات هندسی و مکانیکی تیر با مقطع مثلث متساوی الاضلاع

Table 2. Geometric and mechanical properties of equilateral triangle cross section

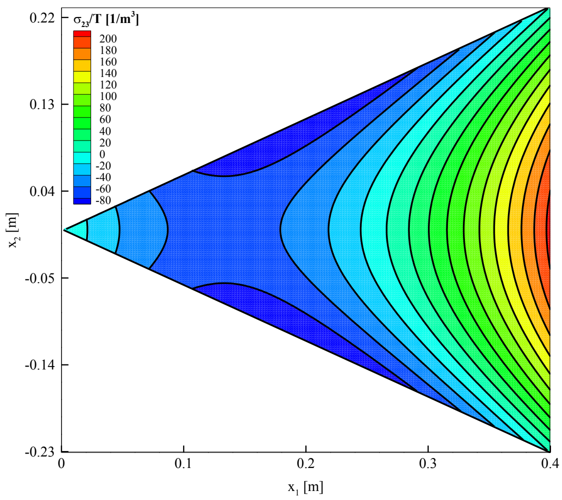
طول میله (m)	ضریب پواسون	مدول برشی (GPa)	b (m)	a (m)	$m_۱$	$m_۲$
۴	۰/۲	۸/۳	۰/۴	$۱۰^{-۶}$	۰/۵۷۷	۰/۵۷۷



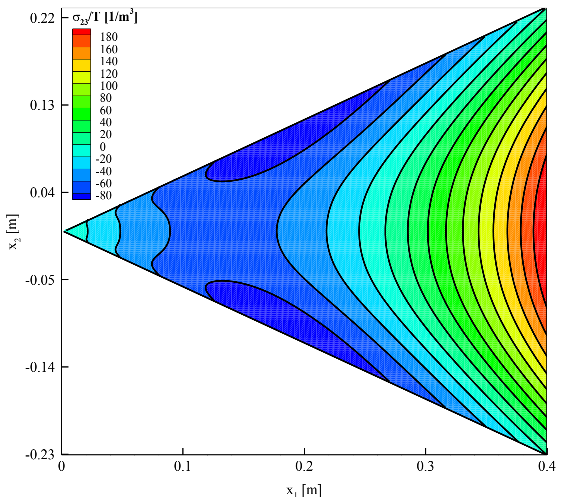
شکل ۸. میدان تنش $\sigma_{۱۳}/T$ مقطع مثلث متساوی الاضلاع حاصل از: (الف) روش کانتوروویچ ، (ب) روش تابع تنش پراندتل و (ج) مقایسه‌ی روش‌های (الف) و (ب)

Fig. 8. Distribution of $\sigma_{۱۳}/T$ for equilateral triangle cross section as computed by (a) Kantorovich method, (b) finite element method and (c) comparison of results

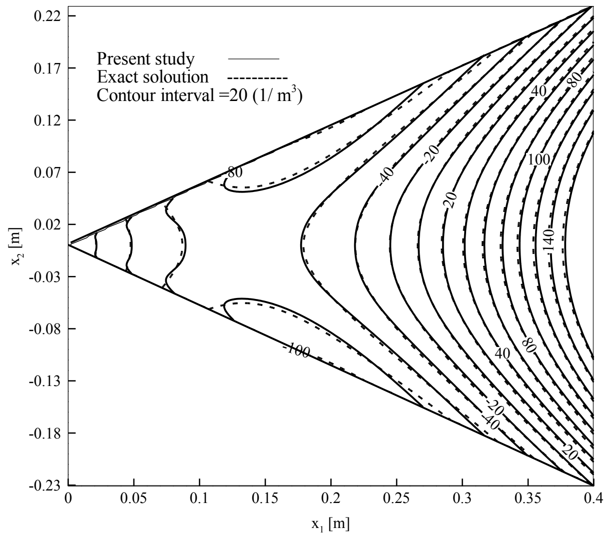
مقدار تنش (قدرمطلق) $\sigma_{۱۳}$ به صورت یکنواخت از صفر افزایش یافته، به گونه‌ای که در نواحی مرکزی وجوه مایل سطح مقطع به مقدار بیشینه‌ی خود می‌رسد. تقارن فرد خطوط میدان $\sigma_{۱۳}$ نسبت به محور $x_۱$ سبب می‌شود تا وجوه بالا و پایین سطح مقطع به ترتیب تحت تنش‌های برشی منفی و مثبت قرار گیرند. تقارن زوج میدان تنش $\sigma_{۲۳}$ نسبت به محور $x_۱$ در شکل ۹ به ایجاد بیشترین مقدار تنش برشی با علامت منفی درنواحی میانی وجوه بالا و پایین منجر می‌شود. وجه قائم سطح مقطع در



(ب)



(الف)



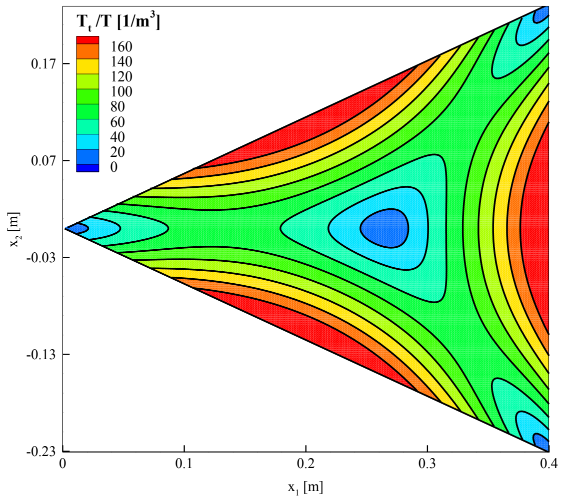
(ج)

شکل ۹. میدان تنش σ_{23}/T مقطع مثلث متساوی الاضلاع حاصل از: (الف) روش کانتوروویچ ، (ب) روش تابع تنش پراندتل و (ج) مقایسه‌ی روش‌های (الف) و (ب)

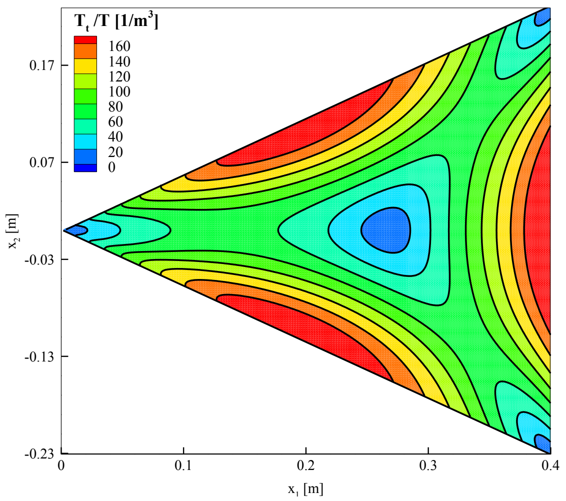
Fig. 9. Distribution of σ_{23}/T for equilateral triangle cross section as computed by (a) Kantorovich method, (b) finite element method and (c) comparison of results

معرض تنش‌های بیشینه مثبت قرار دارد. خط هم‌مقدار $\sigma_{23}=0$ تقریباً از مرکز هندسی مثلث عبور می‌نماید. همچنین مقایسه‌ی شکل‌های ۹الف و ۹ب حاکی از آن است که مقدار بیشینه σ_{13} با علامت منفی تقریباً دو برابر مقدار بیشینه‌ی σ_{23} است. میدان اندازه‌ی تنش مماسی T_t در شکل ۱۰ نشان داده شده است. خطوط این میدان نسبت به سه خط واصل مرکز هندسی به رئوس مثلث تقارن دارند. تنش مماسی T_t در نواحی میانی وجوه مثلث دارای مقدار بیشینه بوده و در راس‌ها و نواحی اطراف مرکز هندسی سطح مقطع به صفر می‌رسد. با توجه به شکل‌های مذکور، مشاهده می‌شود که مولفه‌های تانسور تنش حاصل از دو روش کانتوروویچ و پراندتل انطباق قابل قبولی با یکدیگر دارند.

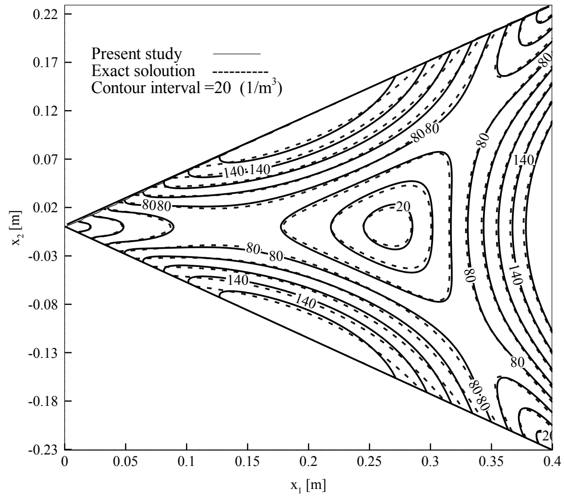
شکل ۱۱ خطوط میدان تابع اعوجاج حاصل از روش‌های کانتوروویچ و تابع تنش پراندتل را نشان می‌دهد. در شکل ۱۱ج میزان اختلاف دو روش بر حسب درصد بیان شده است. ملاحظه می‌شود که در بیشتر قسمت‌های دامنه حل مسئله، اختلاف مقادیر تابع اعوجاج به دست آمده از دو روش کمتر از ۰/۵ درصد



(ب)



(الف)



(ج)

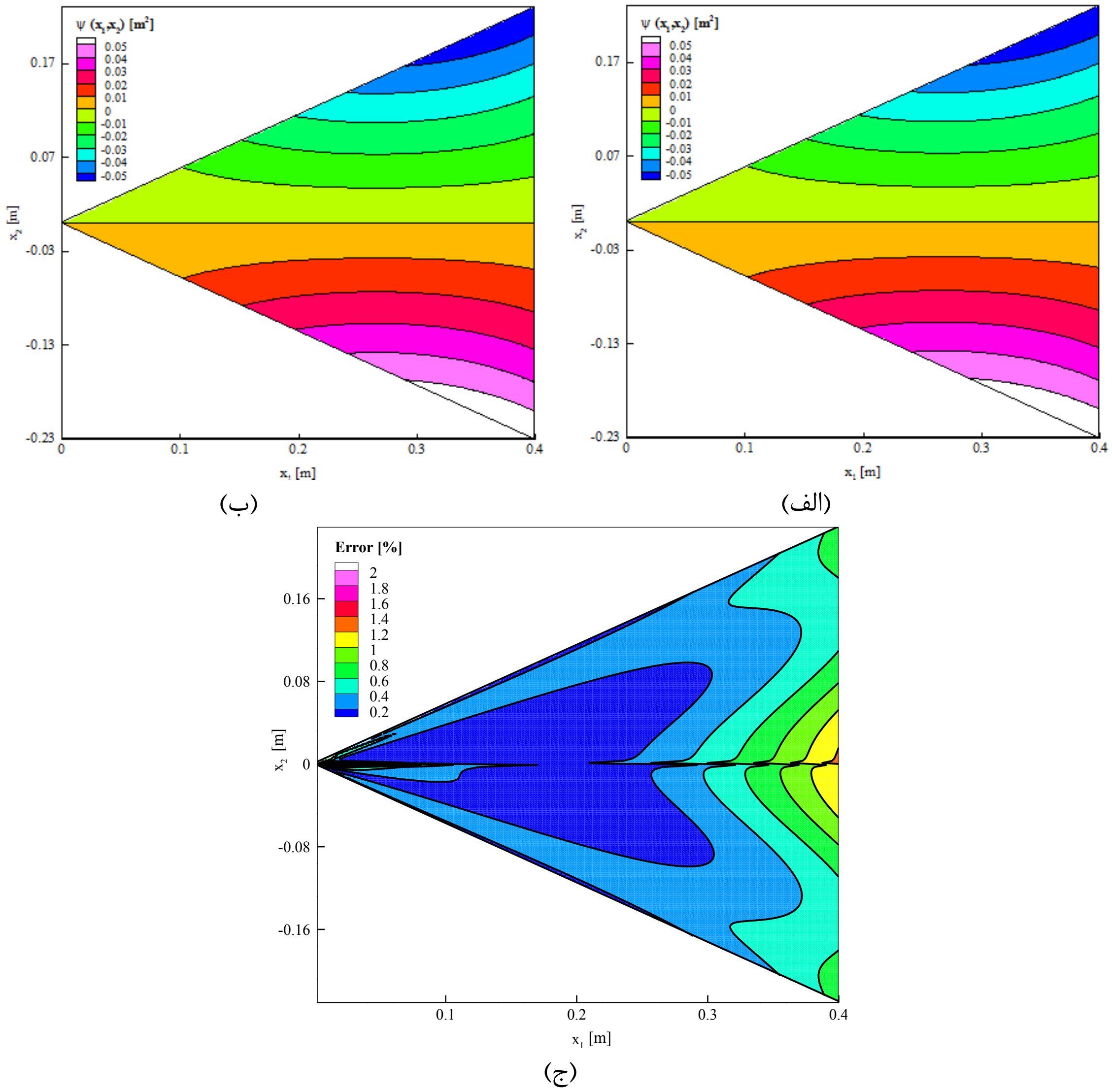
شکل ۱۰. میدان تنش مماسی مقطع مثلث متساوی الاضلاع حاصل از: (الف) روش کانتوروویچ ، (ب) روش تابع تنش پراندتل و (ج) مقایسه‌ی روش‌های (الف) و (ب)

Fig. 10. Distribution of T_t/T for equilateral triangle cross section as computed by (a) Kantorovich method, (b) finite element method and (c) comparison of results

و در نواحی بسیار کوچکی حداکثر میزان خطا برابر با ۲ درصد است (که این خطا به دلیل تبدیل هندسه‌ی ذوزنقه به مقطع مثلث است). چون خطوط میدان مستقیم و موازی نیستند، مقطع پیچش‌یافته غیرمستوی است. با این وجود جابجایی $u_۲$ بر روی محور $x_۱$ برابر با صفر است. این در حالی است که برای $x_۲<۰$ مقداری مثبت (برجستگی) و برای $x_۲>۰$ مقداری منفی (تورفتگی) به خود می‌گیرد. به عبارت دیگر، خطوط میدان تابع $\psi(x_۱,x_۲)$ نسبت به محور $x_۱$ تقارن فرد دارند. نظیر این رفتار هنگامی رخ می‌دهد که، مقطع تحت لنگر خمشی منفی حول محور $x_۱$ قرار گرفته است. با این تفاوت که تحت خمش طبق تئوری تیرهای نازک برنولی، سطح مقطع تغییر شکل یافته به صورت مستوی باقی می‌ماند.

۶. نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر یک روش نیمه‌تحلیلی مبتنی بر حساب تغییرات تحت عنوان روش کانتوروویچ برای بررسی کامل مسئله‌ی پیچش مقاطع ذوزنقه‌ای دلخواه ارائه شده است. با توجه به اینکه در روش کانتوروویچ برقراری تمامی شرایط مرزی در



شکل ۱۱. میدان تابع اعوجاج مقطع مثلث متساوی الاضلاع حاصل از: (الف) روش کانتوروویچ ، (ب) روش تابع تنش پراندتل و (ج) درصد خطای روش حاضر

Fig. 11. Distribution of warping function of equilateral triangle: (a) Kantorovich method, (b) analytical method and (c) comparison of results cross section

تعیین تابع تقریب اولیه لازم نیست و همچنین برخی از شرطها در خلال روش ارضا می‌شوند، حدس تابع اولیه برای تقریب زدن پاسخ مسئله‌ی پیچش مقاطع نامتقارن، نسبت به سایر روش‌های حساب تغییرات آسان‌تر است. بنابراین در پژوهش حاضر با پیشنهاد فرم هارمونیکی برای توابع تقریب اولیه؛ تابع تنش، تابع تنش پراندتل و میدان اعوجاج در مقطع ذورنقه بدست آمد. انطباق قابل قبول نتایج روش پیشنهادی با نتایج حاصل از روش اجزای محدود تابع تنش پراندتل، حاکی از دقت بالای روش پیشنهادی دارد. همچنین لازم به ذکر است که در اغلب روش‌های عددی و تحلیلی، محاسبه‌ی تابع اعوجاج امری دشوار و یا غیرممکن است، بنابراین یکی از مزیت‌های مهم دیگر در به کارگیری روش کانتوروویچ برای حل مسئله‌ی پیچش اعضای منشوری با مقطع دلخواه، به دست آوردن تابع اعوجاج در مقطع است. علاوه بر آن یکی دیگر از مزیت‌های مهم مطالعه حاضر محاسبه پاسخ مقطع مثلی دلخواه از روی مقطع ذوزنقه است، که می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی حاضر برای همه مقاطع مثلثی و ذوزنقه‌ای با دقت و همگرایی بالایی قابل استفاده است. در نهایت با توجه به پیچیدگی‌های محاسبه تابع اعوجاج و همچنین ویژگی هندسی مقاطع ذوزنقه و مثلث دلخواه، استفاده از روش کانتوروویچ به عنوان یک روش کارا، انعطاف‌پذیر و سریع

برای حل مسائل مربوط به پیچش توصیه می‌شود.

علائم انگلیسی

u	جابجایی، m
J	ویژگی هندسی، m^4
G	مدول برشی، N/m^2
L	طول، m
A	سطح مقطع، m^2
E	مدول الاستیسیته، N/m^2
b	قاعده ذوزنقه، m
m_1, m_2	شیب اضلاع ذوزنقه

علائم یونانی

α	زاویه پیچش، $^{\circ\circ}$
ψ	اعوجاج، m
σ	تنش، N/m^2
ν	ضریب پواسون

مراجع

[1] W.A. Bassali, The classical torsion problem for sections with curvilinear boundaries, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 8(2) (1960) 87-99.

[2] W.C. Hassenpflug, Torsion of Uniform Bars with Polygon Cross-Section, Computers and Mathematics with Applications, 46(2-3) (2003) 313-392.

[3] I. Ecsedi, Some analytical solutions for Saint-Venant torsion of non-homogeneous cylindrical bars, European Journal of Mechanics, A/Solids, 28(5) (2009) 985-990.

[4] A. Chernyshov, Torsion of an elastic rod whose cross-section is a parallelogram, trapezoid, or triangle, or has an arbitrary shape by the method of transformation to a rectangular domain, Mechanics of Solids, 49(2) (2014) 225-236.

[5] A. Mahdavi, M. Yazdani, A novel analytical solution for warping analysis of arbitrary annular wedge-shaped bars, Archive of Applied Mechanics, (2021).

[6] C.N. Chen, The warping torsion bar model of the differential quadrature element method, Computers and Structures, 66(2-3) (1998) 249-257.

[7] U. Heise, A finite element analysis in polar co-ordinates of the Saint Venant torsion problem, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8(4) (1974) 713-729.

[8] G. Barone, A. Pirrotta, R. Santoro, Comparison among three boundary element methods for torsion problems: CPM, CVBEM, LEM, Engineering Analysis with Boundary Elements, 35(7) (2011) 895-907.

[9] K. Darılmaz, E. Orakdöğen, K. Girgin, Saint-Venant torsion of arbitrarily shaped orthotropic composite or FGM sections by a hybrid finite element approach, Acta Mechanica, 229(3) (2018) 1387-1398.

[10] K. Mikeš, M. Jirásek, Free warping analysis and numerical implementation, in: Applied Mechanics and Materials, Trans Tech Publ, 2016, pp. 141-148.

[11] D. Banić, G. Turkalj, J. Brnić, Finite element stress analysis of elastic beams under non-uniform torsion, Transactions of FAMENA, 40(2) (2016) 71-82.

[12] M. Ganapathi, B.P. Patel, M. Touratier, A C1 finite element for flexural and torsional analysis of rectangular piezoelectric laminated/sandwich composite beams, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 61(4) (2004) 584-610.

[13] J.A. KoŁodziej, P. Gorzelańczyk, Application of method of fundamental solutions for elasto-plastic torsion of prismatic rods, Engineering Analysis with Boundary Elements, 36(2) (2012) 81-86.

[14] S. Baba, T. Kajita, Plastic analysis of torsion of a prismatic beam, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 18(6) (1982) 927-944.

[15] W. Wagner, F. Gruttmann, Finite element analysis of Saint–Venant torsion problem with exact integration of the elastic–plastic constitutive equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(29) (2001) 3831-3848.

[16] A. Najera, J.M. Herrera, Torsional rigidity of non-circular bars in mechanisms and machines, Mechanism and Machine Theory, 40(5) (2005) 638-643.

[17] S.P. Timoshenko, J. Goodier, Theory of elasticity, (2011).

[18] L.V.e. Kantorovich, Approximate methods of higher

analysis, Interscience, (1958).

[19] A.D. Kerr, An extended Kantorovich method for the solution of eigenvalue problems, International Journal of Solids and Structures, 5(6) (1969) 559-572.

[20] A.D. Kerr, H. Alexander, An application of the extended Kantorovich method to the stress analysis of a clamped rectangular plate, Acta Mechanica, 6(2) (1968) 180-196.

[21] I. Shufrin, O. Rabinoviredrtch, M. Eisenberger, A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates, International Journal of Mechanical Sciences, 52(12) (2010) 1588-1596.

[22] A. Mahdavi, H. Seyyedian, Steady-state groundwater recharge in trapezoidal-shaped aquifers: A semi-analytical approach based on variational calculus, Journal of Hydrology, 512 (2014) 457-462.

[23] S. Dastjerdi, M. Abbasi, L. Yazdanparast, A new modified higher-order shear deformation theory for nonlinear analysis of macro-and nano-annular sector plates using the extended Kantorovich method in conjunction with SAPM, Acta Mechanica, 228(10) (2017) 3381-3401.

[24] P. Singhatanadgid, T. Singhanart, The Kantorovich method applied to bending, buckling, vibration, and 3D stress analyses of plates: A literature review, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 26(2) (2019) 170-188.

[25] A. Mahdavi, Steady-state response of annular wedge-shaped aquifers to arbitrarily-located multiwells with regional flow, Journal of Hydrology, 586 (2020) 124906.

[26] A. Mahdavi, Response of dual-zone heterogeneous wedge-shaped aquifers under steady-state pumping and regional flow, Advances in Water Resources, 147 (2021) 103823.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Mahdavi, M. Yazdani, Z. Khosravi Enjedani, Approximate torsional analysis of arbitrary trapezoidal bars by Kantorovich method, Amirkabir J. Mech Eng., 53(10) (2022) 5203-5220.

DOI: 10.22060/mej.2021.19655.7083