

محاسبه دقیق بردارهای گرهی در تحلیل آیزوژئومتری سازه‌های پوسته‌ای با استفاده از نقاط گریویل

زهره قدیمی، بهروز حسنی*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۱۱/۲۱

بازنگری: ۱۴۰۰/۰۵/۰۸

پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۰۹

ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۵/۲۷

کلمات کلیدی:

تحلیل آیزوژئومتری

بی اسپلین غیریکنواخت کسری

پوسته میندلین- رایزنر

نقاط گریویل

بردارهای جهت گرهی

خلاصه: در این مقاله تحلیل آیزوژئومتری سازه‌های پوسته‌ای همراه با پیشنهاد روشی بهینه برای محاسبه بردارهای گرهی ارائه شده است. هندسه پوسته با استفاده از توابع پایه غیریکنواخت کسری در سطح میانی و تعریف بردارهای گرهی دقیق در راستای ضخامت توصیف شده است. با توجه به استفاده از فرمول بندی میندلین رایزنر، برای درونیایی چرخش‌ها به بردارهای جهت در نقاط کنترلی نیاز است. این بردارها باید به نحوی محاسبه شوند تا بردارهای درونیایی شده در هر نقطه دلخواه روی سطح دقیق باشند. در این راستا، مولفه‌های بردارهای جهت در نقاط کنترلی با استفاده از حل دستگاه معادلات روی کل وصله بدست آمده‌اند که در آن دستگاه معادلات با استفاده از مقادیر معلوم بردارهای جهت در فواصل گریویل تعریف شده است. دقت روش استفاده شده با حل مسائل رایج در تحلیل پوسته بررسی شده است و نتایج بدست آمده برای جابجایی، کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. رفتار همگرایی با افزایش درجه توابع و تعداد نقاط کنترلی، مورد بررسی قرار گرفت و دیده شد که برخلاف روش‌های معمول تعریف بردارهای گرهی، مشکل کاهش دقت حل با افزایش درجه توابع در شبکه بندی درشت وجود ندارد، که امکان استفاده از شبکه بندی درشت را می‌دهد. با توجه به تناظر یک به یک بین نقاط کنترلی و گریویل، تعریف دستگاه معادلات روی این نقاط منجر به جواب یکتایی برای بردارهای گرهی می‌شود و با حذف معادلات اضافی، زمان محاسبه بردارها به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌یابد.

۱- مقدمه

تجزیه و تحلیل کاهش می‌یابد. ایده اصلی تحلیل آیزوژئومتری^۳ که توسط هیوز و همکاران [۲۱] پیشنهاد شد، استفاده از توابع پایه مدل هندسی برای تقریب تابع مجهول و تحلیل است. رایج‌ترین توصیف هندسی در نرم‌افزارهای طراحی صنعتی سطوح نریز هستند که برای ادغام بهتر طراحی و تحلیل، اغلب در تحلیل آیزوژئومتری استفاده شده‌اند [۳]. علاوه بر نریزها، تی اسپلین‌ها که توسط سدربرگ و همکاران [۵۴] معرفی شدند، سهم زیادی از تحقیقات در چارچوب آیزوژئومتری را شامل می‌شوند.

سازه‌های پوسته‌ای هم به‌طور طبیعی وجود داشته‌اند و هم اغلب بخاطر نسبت تحمل بار به وزن بالایشان، به‌صورت دست سازه‌های

به‌طور کلی نرم افزارهای رایج مهندسی از دو مدل جداگانه برای طراحی و تحلیل استفاده می‌کنند. فرآیند طراحی معمولاً بر اساس تکنیک‌های مدل‌سازی هندسی با کامپیوتر^۱، مانند تکنیک نریز^۲ است، در حالی که برای حل در تحلیل اجزای محدود، معمولاً از توابع پایه لاگرانژ خطی استفاده می‌کنند. بنابراین تغییرات هندسه یا تغییرات در شبکه بندی نیاز به تعامل بین این دو مدل دارد که منجر به بالا رفتن زمان حل می‌شود. استفاده از توصیف هندسه مشترک در صنایع می‌تواند پیوند نزدیک‌تری را بین این دو فرآیند ایجاد کند و زمان

- 1 CAD
- 2 NURBS

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: b_hassani@um.ac.ir

3 Isogeometric analysis

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



بشر به وجود آمده‌اند. کاهش بعد یک جسم سه‌بعدی به دوبعدی، اگر یک بعد نسبت به دو بعد دیگر به اندازه کافی کوچک باشد، امکان توصیف هندسه توسط یک سطح دوبعدی همراه با تعریفی در راستای ضخامت را فراهم می‌کند. در علم مهندسی به چنین مدل‌هایی با ابعاد کاهش یافته پوسته گفته می‌شود. امروزه سازه‌های پوسته‌ای در صنایع هوافضا و خودروسازی اهمیت زیادی دارند.

دو فرمول‌بندی اصلی برای تحلیل پوسته‌ها، بر مبنای فرضیات کیرشهف-لاو^۱ و میندلین-رایزنر^۲ استوار هستند. رفتار تغییر شکل پوسته‌های نازک تحت تأثیر فشارهای خمشی و غشایی قرار دارد، در حالیکه رفتار پوسته‌های ضخیم تحت تأثیر کرنش‌های برشی عرضی است. معیار تمایز بین پوسته‌های ضخیم و نازک ضریب لاغری پوسته است که به صورت نسبت شعاع انحنا به ضخامت پوسته تعریف می‌شود. رابطه‌سازی مبتنی بر فرضیات کیرشهف-لاو به خاطر مشتقات مرتبه دوم نیازمند پیوستگی حداقل C^1 است. رابطه‌سازی مبتنی بر فرضیات میندلین-رایزنر، در محدوده صفحات نازک، به دلیل سفتی بیش از حد سازه مشکل قفل‌شدگی برشی^۳ را ایجاد می‌کند. در این راستا روش‌های مختلفی با در نظر گرفتن پارامترهای اضافه برای تصحیح میدان جابجایی، تنش و کرنش برای حل این مشکل در چارچوب آیزوژنومتری پیشنهاد شده‌اند [۱۶-۱۵]. آدامز و همکاران [۱۳-۱۵]، انتگرال‌گیری کاهشی غیریکنواختی را برای رفع مشکل قفل‌شدگی در درجات پایین توابع نرَبز بدون ظهور مودهای ساعت شنی ارائه کردند.

اولین فرمول‌بندی پوسته در چارچوب آیزوژنومتریک توسط کیندل و همکاران [۱۶] ارائه شد که مبتنی بر تئوری کیرشهف-لاو بدون درجات آزادی چرخشی بود. نگوین و همکاران [۱۷] یک مدل هندسی با استفاده از توابع اسپیلاین پی‌اچ‌تی^۴ با پیوستگی C^1 را برای فرمول‌بندی پوسته کیرشهف-لاو ارائه کردند. همچنین فرمول‌بندی پوسته بدون درجات آزادی چرخشی توسط بنسون و همکاران [۱۸] ارائه شد. پیوستگی بین المانی مرتبه بالا در تحلیل آیزوژنومتریک، استفاده از تئوری کیرشهف-لاو را آسان می‌کند. با این حال، به دلیل فرضیات حاکم، این فرمول‌بندی نتایج واقعی را برای کرنش‌های برشی بزرگ ارائه نمی‌کند. علاوه بر این، اعمال شرایط مرزی چرخشی و

1 Kirchhoff-Love
2 Reissner-Mindlin
3 Shear locking
4 PHT-splines

اتصال وصله‌ها بسیار دشوار است. فرمول‌بندی پوسته‌ی آیزوژنومتریک مبتنی بر فرضیات میندلین-رایزنر، اولین بار توسط بنسون و همکاران [۱۹] استفاده شد. همچنین بنسون و همکاران [۲۰] فرمول‌بندی پوسته را به صورت ترکیبی از دو تئوری حاکم ارائه کردند، به طوری که در لبه‌های تیز فرمول‌بندی مبتنی بر میندلین-رایزنر و در بقیه جاها از فرمول‌بندی کیرشهف-لاو استفاده کردند. در فرمول‌بندی پوسته ارائه شده توسط اکثر و همکاران [۲۱]، سه فرضیه مختلف حرکتی در نظر گرفته شده‌است، که با توجه به وضعیت هندسه انتخاب و ترکیب می‌شوند. آن‌ها علاوه بر دو فرمول‌بندی مذکور، فرمول‌بندی هفت پارامتری را با در نظر گرفتن پارامترهای اضافه برای تغییرات ضخامت در نظر گرفتند که از کوپلینگ بین انحناها و کرنش‌های برشی عرضی و قفل برشی جلوگیری می‌کند.

در کاربردهای مهندسی تمرکز اصلی بر ارائه‌ی هندسه دقیق سازه پوسته با انحنا دلخواه است. از اینرو فرض اساسی تئوری‌های پوسته تبدیل المان‌های سه‌بعدی به دوبعدی، به دلیل کم بودن بعد ضخامت نسبت به ابعاد دیگر است که قابلیت مدل‌سازی انحنا با دقت مناسب را داشته باشد. هدف این مقاله ارائه یک فرمول‌بندی قوی و کارآمد برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای با استفاده از امکانات تحلیل آیزوژنومتری مانند تکنیک نرَبز است. از اینرو سطوح نرَبز، رایج‌ترین ابزار توصیف هندسه در نرم افزارهای طراحی صنعتی، برای تعریف سطح مرجع پوسته میندلین-رایزنر استفاده شده است، که نیاز به تبدیل به سایر مدل‌های هندسی ندارد. استفاده از نرَبز یا دیگر تکنیک‌های مبتنی بر اسپیلاین برای مدل‌سازی سطح میانی، به دلیل پیوستگی مرتبه بالای ایجاد شده، امکان تعیین دقیق انحنا در هر نقطه فیزیکی را فراهم می‌کند. با توجه به فرمول‌بندی پوسته میندلین-رایزنر، برای درونیابی درجات آزادی چرخشی به تعریف بردارهای جهت‌گرهی نیاز است. در فرمول‌بندی مبتنی بر نرَبز، این بردارها روی نقاط کنترلی که معادل همان گره‌ها در المان محدود استاندارد هستند تعریف می‌شوند و توسط توابع شکل روی سطح تصویر می‌شوند. از آنجاییکه در تحلیل آیزوژنومتری شبکه فیزیکی و شبکه نقاط کنترلی جدا هستند، بردارها یا در نقاط تقریبی معادل کنترلی‌ها و یا در نزدیک‌ترین نقطه تصویر شده روی سطح تعریف می‌شوند. پیدا کردن نزدیک‌ترین نقطه نیازمند یک روش حل تکراری مانند نیوتن است که با ریزش‌دهن شبکه منجر به محاسبات سنگینی می‌شود. اوهم و یون از

این روش منجر به وجود جواب یکتا برای دستگاه معادلات می‌شود که نیاز به استفاده از روش‌های حل تقریبی حداقل مربعات نیست. به منظور بررسی رفتار همگرایی و مقایسه نتایج بدست آمده، درجه توابع و تعداد نقاط کنترلی با استفاده از تکنیک پالایش شبکه k^2 افزایش می‌یابند و رفتار همگرایی جابجایی نقاط تحت بار، برای پوسته‌ها با انحنا و شرایط مرزی مختلف بررسی شده‌است.

۲- سطوح نرَبز

برای تولید سطوح و احجام از توابع شکل باید فضای پارامتری مناسب با ضرب تانسوری توابع یک پارامتری ساخته شود. برای ایجاد سطوح نرَبز، فضای پارامتری دارای دو بعد است و توابع شکل دو بعدی از ضرب تانسوری توابع شکل یک بعدی بدست می‌آیند. به طور مثال تابع شکل دوبعدی نرَبز برای سطح میانی پوسته، به صورت زیر است [۲۵]:

$$R_{i,j}(r,s) = \frac{N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l}} \quad (1)$$

که توسط دو بردار گرهی R, S در دو جهت و مجموع نقاط کنترلی $R_{i,j}$ متناظر با توابع پایه $N_{i,p}(r)$ و $N_{j,q}(s)$ بیان می‌شود. بی-اسپلاین $N_{i,p}(r)$ ترکیب خطی از یک سری توابع پایه است که بر اساس الگوریتم دی-بور^۴ طی یک رابطه بازگشتی بیان می‌شوند.

$$N_{i,0}(r) = \begin{cases} 1 & r_i \leq r \leq r_{i+1} \\ \text{otherwise} & \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(r) = \frac{r-r_i}{r_{i+p}-r_i} N_{i,p-1}(r) + \frac{r_{i+p+1}-r}{r_{i+p+1}-r_{i+1}} N_{i+1,p-1}(r)$$

در نهایت سطح نرَبز با استفاده از تابع شکل دوبعدی $R_{i,j}$ به شکل زیر بیان می‌شود که در آن $P_{i,j}$ مختصات نقاط کنترلی است.

$$S(r,s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(r,s) p_{i,j} \quad (3)$$

۳- فرمول بندی آیزوژئومتریک پوسته

در این بخش فرمول بندی پوسته دارای انحنا مبتنی بر نظریه المان‌های خمیده و توابع پایه نرَبز ارائه می‌شود. تقریب در سطح میانی پوسته با استفاده از توابع پایه نرَبز و در جهت عمود بر صفحه

نگاشتی ساده استفاده کردند که در آن هر نقطه کنترلی با نقطه‌ای در فضای گرهی متناظر می‌شود و بردارهای متعامد روی آن تعریف می‌شوند [۲۲]. نگاشت‌های متعددی توسط آدامز و همکاران [۱۴] برای متناظر کردن نقاط کنترلی با نقاطی در فضای گرهی ارائه شده است که در این مقاله به‌طور خلاصه به آنها اشاره شده‌است.

در تحلیل آیزوژئومتریک با بالا رفتن درجه توابع، تعداد نقاط کنترلی که روی یک المان تأثیر می‌گذارند و همین‌طور فاصله آنها از المان افزایش می‌یابد، که برای سطوح انحنادار افزایش تعداد بردارها با جهت‌های مختلف، خطای درونیابی بردارها در نقاط گوس را افزایش می‌دهد. با توجه به نتایج ارائه شده توسط بنسون و همکاران [۱۹] و دارنیچ و همکاران [۲۳] و [۲۴]، در تحلیل آیزوژئومتریک پوسته با توجه به روش انتخاب نقاط متناظر کنترلی و میزان انحنا هندسه خطای درونیابی در بردارها وجود دارد و هنگامی که پیوستگی بین المانی بیشینه است، با بالا رفتن درجه توابع خطای درونیابی بالا می‌رود. بنابراین بنسون و همکاران [۱۸]، فرمول بندی پوسته‌ی کلاسیک آیزوژئومتریک را با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ ارائه کردند و سعی کردند با محاسبه پارامترهایی در مقیاس المان، روشی برای بهبود دقت درونیابی بردارهای عمود ارائه کنند. دارنیچ و همکاران [۲۳]، فرمول بندی پوسته میندیلین-رایزنر را در چارچوب آیزوژئومتریک به کار بردند، با توجه به نتایج ارائه شده توسط آنها، بردارهای درونیابی شده در نقاط گوسی نه عمود بر سطح‌اند و نه اندازه درستی دارند. از اینرو روش جدیدی برای محاسبه دقیق بردارها و سیستم‌های پایه گرهی معرفی کردند، که در آن با افزایش درجه نرَبزها و پیوستگی بین المانی خطای درونیابی بالا نمی‌رود. آن‌ها نشان دادند که بردارهای گرهی دقیق با استفاده از حل دستگاه معادلات روی کل وصله بدست می‌آیند و با انتخاب نقاط گوسی برای تشکیل دستگاه معادلات و استفاده از روش‌های حل حداقل مربعات، بردارهای گرهی دقیقی را محاسبه کردند.

در این مقاله مشابه روش ارائه شده توسط دارنیچ و همکاران، بردارهای جهت با استفاده از حل دستگاه معادلات روی کل وصله بدست آمده‌اند، با این تفاوت که مقادیر بردارها در فواصل بهینه گریویل^۱ به عنوان بردارهای معلوم دستگاه معادلات در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به تناظر یک‌به‌یک بین نقاط کنترلی و نقاط گریویل^۲،

3 k-refinement
4 De Boor's algorithm

1 Greville abscissae
2 Greville points

نقطه کنترلی با یک نقطه در فضای فیزیکی نگاشته می‌شود و درجات آزادی چرخشی روی آن تعریف می‌شود. برای این منظور، روش‌های مختلفی پیشنهاد شدند که در ادامه با جزئیات بیشتر بیان می‌شوند.

۳-۲- محاسبه بردارها

به طور کلی در فرمول‌بندی پوسته‌ی میندلین بردارها یا مستقیم در نقاط گوسی محاسبه می‌شوند [۲۷]، و یا توسط توابع نربز از مقادیر کنترلی‌ها درونیابی می‌شوند. با توجه به نتایج ارائه‌شده توسط آدامز و همکاران، محاسبه مستقیم بردارها در نقاط گوسی فرمول‌بندی پیچیده‌تری دارد و با انتگرال‌گیری کاهشی سازگار نیست [۱۴]. به‌منظور درونیابی بردارهای جهت به دستگاه مختصات گرهی در هر نقطه کنترلی واقع بر هندسه نیاز است که مستلزم یک روش تطبیقی یا نگاشت برای نقاط کنترلی خارج از سطح است. در این قسمت روش‌های مختلف استفاده شده در مراجع به‌طور خلاصه بیان می‌شوند.

۳-۲-۱- تعریف بردار در تصویر متناظر هر نقطه کنترلی روی سطح میانی

در این روش در واقع برای هر نقطه کنترلی، نقطه‌ای از سطح میانی که کمترین فاصله را با آن دارد در نظر گرفته می‌شود. برای پیدا کردن چنین نقطه‌ای باید یک روش تکراری مانند جستجوی نیوتن به کار گرفته شود که هزینه محاسباتی بالایی در بردارد. تئوری و الگوریتم بهینه برای پیدا کردن تصویر نقاط کنترلی روی هندسه، در مرجع [۲۵] بیان شده‌است.

۳-۲-۲- تعریف بردار در نقاط بیشینه‌ی هر تابع

در اینجا بردارها در نقطه‌ای روی سطح که در آن نقطه تابع شکل مربوط به هر نقطه کنترلی بیشترین مقدار را دارد تعریف می‌شوند. با توجه به اینکه هر نربز یک مقدار بیشینه دارد، یک موقعیت واحد برای هر بردار نرمال به دست می‌آید. در همین راستا نقاط دمکو^۱، بیشینه‌ی اسپیلاین‌های چپیشف^۲، نقاط مناسبی هستند. این روش نیز مستلزم استفاده از روش نیوتن است و در نتیجه محاسبات زیادی را به همراه دارد [۱۴].

میانی به صورت خطی انجام می‌شود. برای تعریف هندسه پوسته به تعریف دو دستگاه مختصات کلی و محلی سازه نیاز داریم. دستگاه مختصات محلی در هر نقطه کنترلی تعریف می‌شود و در نقاط مورد نیاز با استفاده از نقاط کنترلی و نربزها درونیابی می‌شود.

۳-۱- هندسه و جابجایی

در این بخش مدل‌سازی هندسی و تحلیل پوسته دارای انحنا با استفاده از توابع پایه نربز تشریح می‌شود. استفاده از سطوح نربز در مدل‌سازی سطح میانی سازه بسیار مرسوم است که دقیقاً نوعی تعریف هندسه مبتنی بر فرمول بندی پوسته است. هندسه دقیق پوسته با استفاده از تعریف سطح میانی و بردار عمود بر میان سطح پوسته به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲۶]:

$$P = \sum_{i=0}^N R_i(r, s) p_i + \sum_{i=0}^N R_i(r, s) \zeta \frac{\alpha_i}{2} V_{3i} \quad (4)$$

که در آن تابع $R_i(r, s)$ بی-اسپلین متناظر با نقطه کنترلی p_i است. α_i ضخامت پوسته و ζ پارامتری برای تعریف بعد ضخامت در راستای عمود بر سطح پوسته است. V_{3i} بردار عمود بر سطح تعریف شده در نقطه کنترلی و در راستای ضخامت است. در واقع رابطه بالا نگاشتی از فضای پارامتری به فضای فیزیکی برای یک نقطه روی پوسته است. رابطه (۵) تغییر مکان پوسته را با توجه به فرضیه میندلین-رایزنر بیان می‌کند. هر نقطه کنترلی شامل سه درجه آزادی جابجایی و دو درجه آزادی دورانی حول دو محور فرضی هستند و این محورها بر محور عمود بر میان سطح، در نقطه مورد نظر عمود هستند.

$$U = \sum_{i=0}^N R_i(r, s) U_i + \sum_{i=0}^N R_i(r, s) \zeta \frac{\alpha_i}{2} \begin{bmatrix} -V_{2i} & V_{1i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (5)$$

در رابطه ذکر شده، بردارهای متعامد دستگاه مختصات محلی در هر گره را تشکیل می‌دهند. بردار نرمال V_r ، در راستای ضخامت است و امتداد بردارهای V_1 و V_2 روی سطح میانی اختیاری است. برای تعریف هندسه و تغییر مکان‌ها در پوسته به این بردارها نیاز است. این بردارها باید در نقاط واقع بر سطح میانی پوسته تعریف شوند. از آنجایی که نقاط کنترلی روی سطح پوسته قرار نمی‌گیرند، نمی‌توان بردارهای متعامد را در این نقاط تعریف کرد و درجات آزادی چرخشی را مستقیماً به آنها نسبت داد. از اینرو باید یک نقطه متناظر برای هر نقطه کنترلی روی سطح میانی پوسته تعریف کرد [۲۲]. در واقع هر

1 Demko abscissae
2 Chebyshev splines

۳-۲-۳- تعریف بردار در نقاط مهار^۱

نظر گرفتند. نقاط با کمترین فاصله از کنترلی‌ها روی سطح، نقاط فواصل مساوی روی بردار گرهی و نقاط گریویل. با توجه به نتایج ارائه شده توسط آدامز و همکاران، بردارهای تعریف شده در تصویر نقاط کنترلی روی سطح، نقاط گریویل و نقاط با فاصله یکنواخت نزدیک‌اند و نمودار بدست آمده برای خطای طول و جهت بردارها در هر سه مورد رفتار تقریباً یکسانی را داشته است. به‌طوریکه برای شبکه‌بندی یکسان با بالا رفتن درجه توابع، خطای درونیابی افزایش یافته است. این مسئله، توسط محققان دیگر برای روش اول تأیید شده است [۲۳ و ۱۸].. با توجه به نتایج ارائه شده توسط آدامز و همکاران [۲۳ و ۲۴]. زمان حل در حالتی که تصویر نقاط در مختصات پارامتری با استفاده از الگوریتم حل تکراری محاسبه می‌شوند، ۹/۳ ثانیه و در حالتی که مختصات پارامتری معادل کنترلی‌ها انتخاب می‌شوند، ۰/۱ ثانیه است. از طرفی با مقایسه دقت سه روش، دقت زاویه بردارها در نقاط گریویل بیشتر است. در حالی که با انتخاب فواصل مساوی پارامتری در پالایش K دقت درونیابی به علت قرار گرفتن غیر یکنواخت نقاط، پایین‌تر است. از اینرو آن‌ها با در نظر گرفتن دو فاکتور زمان حل و دقت نتایج، نشان دادند استفاده از نقاط گریویل انتخاب بهینه‌تری برای تعریف بردارهای معادل نقاط کنترلی است اما مشکل افزایش خطای درونیابی با بالا رفتن درجه توابع همچنان پابرجاست. لازم به ذکر است که استفاده از نقاط مهار هم به عنوان روش دیگر اشاره شده در مقالات، در ادامه مورد بررسی قرار گرفته و در نتایجی که در ادامه ارائه خواهند شد، دیده می‌شود که مشکل افزایش خطای درونیابی با بالا رفتن درجه در مورد نقاط مهار مانند گریویل همچنان پابرجاست.

در روش‌های مذکور بعد از انتخاب مختصات پارامتری t_{ir} ، مختصات معادل نقاط کنترلی برای محاسبه بردارها، از حاصل ضرب تانسوری t_{ir} در دو بعد، بدست می‌آیند. و بردارهای متعامد معادل نقاط کنترلی به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۲۷].

$$V_{3i} = \frac{S_{,r}(t_{ir}, t_{is}) \times S_{,s}(t_{ir}, t_{is})}{\|S_{,r}(t_{ir}, t_{is}) \times S_{,s}(t_{ir}, t_{is})\|}, \quad (8)$$

$$V_1 = \frac{e_2 \times V_3}{\|e_2 \times V_3\|}, \quad V_2 = V_3 \times V_1$$

۳-۲-۵- محاسبه‌ی دقیق بردارها با استفاده از حل دستگاه معادلات روی کل دامنه

این نگاشت در واقع روش ساده‌تری است که در برخی منابع استفاده شده است [۲۲] و در آن با توجه به زوج و فرد بودن درجه توابع نرئز، هر نقطه کنترلی با یک نقطه در فضای پارامتری متناظر می‌شود، که نقطه مهار نامیده می‌شود. رابطه (۶) موقعیت هر نقطه مهار را روی بردار گرهی در یک بعد را برای توابع زوج و فرد بیان می‌کند، که مختصات پارامتری نقاط مهار روی سطح میانی پوسته از ضرب تانسوری دو بردار مختصات پارامتری t_r, t_s در دو راستا بدست می‌آیند.

$$t_{ir} = \begin{cases} r_{i+(p+1)/2} & \text{if } p \text{ is odd} \\ \frac{1}{2}(r_{i+(p/2)} + r_{i+(p/2)+1}) & \text{if } p \text{ is even} \end{cases} \quad (6)$$

لازم به ذکر است که این نقاط در یک تناظر یک به یک قرار ندارند و نقاط متناظر ممکن است در مرزها تکراری باشند. از اینرو بردارهای یکسانی برای چند نقطه کنترلی بدست می‌آید، که دقت را کاهش می‌دهد و نیاز به اصلاح نقاط در مرزها می‌باشد که با توجه به درجه توابع نرئز، ضرایب مختلفی برای اصلاح نقاط در مرزها به دست می‌آیند [۲۲].

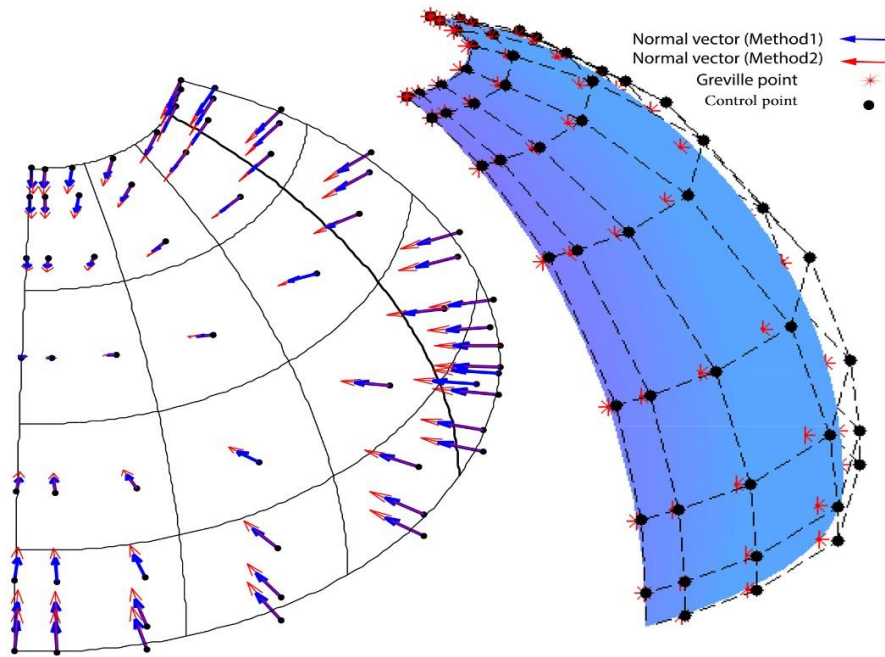
۳-۲-۴- تعریف بردار در نقاط گریویل

انتخاب دیگر برای مختصات پارامتری معادل نقاط کنترلی، فواصل گریویل هستند، که در واقع میانگین گره‌های هر اسپیلاین هستند و با استفاده از تعریف ساده در رابطه (۷) به دست می‌آیند [۱۴].

$$t_{ir} = \frac{r_{i+1} + \dots + r_{i+p}}{p} \quad (7)$$

این فواصل برای صفحه‌ها منطبق بر مختصات پارامتری نقاط کنترلی هستند و برای هندسه‌های دارای انحنا، این نقاط منطبق بر پیشینه‌ی توابع پایه هستند.

آدامز و همکاران، به منظور مقایسه روش‌های مذکور، سه انتخاب مختلف برای مختصات پارامتریک نقاط کنترلی روی سطح، را در



شکل ۱. الف: سطح نرَبز، نقاط کنترلی و گریویل. ب: بردارهای عمود در نقاط کنترلی
Fig. 1. (a): The NURBS surface, Greville and control points. (b): The normal vector at the control points

دستگاه معادلات روی نقاط میانگین گرهی (گریویل) نوشته می‌شوند. از آنجائیکه انتخاب نقاط گریویل برای محاسبه بردارها در نتایج آدامز دقت قابل قبولی داشته‌اند و در تناظر یک به یک با نقاط کنترلی قرار دارند، در این مقاله، مقادیر بردارها در این نقاط به عنوان بردارهای معلوم دستگاه معادلات در نظر گرفته شده‌اند تا با استفاده از حل دستگاه روی کل دامنه مقادیر مجهول بردارها برای نقاط کنترلی محاسبه شوند. دستگاه معادلات روی دامنه به صورت زیر تعریف شده‌است:

$$A_{ij}^{Gr} = \sum_{l=1}^{n_{Gr}} R_l A_{ijl}^{cp} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (9)$$

که در آن توابع شکل نرَبز، A_{ij}^{Gr} ، j امین مؤلفه i امین بردار پایه دستگاه بردارهای پایه در فواصل گریویل و A_{ijl}^{cp} مولفه‌های مجهول دستگاه بردارهای پایه گرهی هستند. که برای هر ترکیب i, j رابطه (۹) منجر به یک دستگاه معادلات می‌شود. مزیت دیگر استفاده از این نقاط، وجود تناظر یک به یک با نقاط کنترلی برای همه درجات توابع نرَبز است که تعداد معادلات مستقل خطی با تعداد نقاط کنترلی که در واقع تعداد مجهولات به حساب می‌آیند برابر خواهند بود. این مسئله منجر به وجود جواب یکتا برای دستگاه معادلات می‌شود و نیاز

در راستای حل مشکل روش‌های مذکور، دارنیچ و همکاران روش دقیقی برای محاسبه سیستم‌های پایه گرهی معرفی کردند که بردارهای جهت درونیایی شده تا حد امکان به مقادیر دقیق بردارهای جهت نرمال نزدیک باشند. آن‌ها با استفاده از حل یک دستگاه معادلات روی کل دامنه، مقادیر گرهی بردارها را محاسبه کردند و نشان دادند که فقط با محاسبه بردارها بر اساس روش ارائه شده توسط آنها، نتایج دقیق هستند و با افزایش درجه نرَبزها و پیوستگی بین المانی خطای درونیایی بالا نمی‌رود. به منظور تشکیل دستگاه معادلات حاکم، تعداد نقاط گوسی باید به نحوی انتخاب شود که دستگاه معادلات معین یا فرامعین باشد. برای اینکه دستگاه معادلات نوشته شده روی دامنه جواب یکتا داشته باشد، باید تعداد معادلات مستقل خطی با تعداد نقاط کنترلی برابر باشد. در حالتی که تعداد معادلات بیشتر باشد نیاز به روش‌های کمترین مربعات برای حل دستگاه معادلات است.

۳-۲-۶- محاسبه بردارهای گرهی با استفاده از تعریف دستگاه معادلات در فواصل گریویل

در این مقاله به منظور بالا بردن دقت درونیایی بردارها روی سطوح با انحنای قابل توجه، مشابه روش دارنیچ [۲۳]. بردارها از طریق حل یک دستگاه معادلات روی کل دامنه بدست می‌آیند با این تفاوت که

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ \dots \\ w_{,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,r} \\ u_{,s} \\ \dots \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} u_{,r} \\ u_{,s} \\ \dots \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (12)$$

که در آن مشتقات میدان جابجایی نسبت به متغیرهای فضای پارامتری نیز، به شکل زیر تعریف می‌شوند [۲۷]:

$$\begin{bmatrix} u_{,r} \\ u_{,s} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,r} \\ v_{,s} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,r} \\ w_{,s} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} R_{i,r} & 0 & 0 & -\zeta R_{i,r} l_{2i} & \zeta R_{i,r} l_{1i} \\ R_{i,s} & 0 & 0 & -\zeta R_{i,s} l_{2i} & \zeta R_{i,s} l_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -R_i l_{2i} & R_i l_{1i} \\ 0 & R_{i,r} & 0 & -\zeta R_{i,r} m_{2i} & \zeta R_{i,r} m_{1i} \\ 0 & R_{i,s} & 0 & -\zeta R_{i,s} m_{2i} & \zeta R_{i,s} m_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -R_i m_{2i} & R_i m_{1i} \\ 0 & 0 & R_{i,r} & -\zeta R_{i,r} n_{2i} & \zeta R_{i,r} n_{1i} \\ 0 & 0 & R_{i,s} & -\zeta R_{i,s} n_{2i} & \zeta R_{i,s} n_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -R_i n_{2i} & R_i n_{1i} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \frac{a_i}{2} \alpha_i \\ \frac{a_i}{2} \beta_i \end{bmatrix} = \sum \Pi_i d_i$$

با جایگزینی مشتقات در رابطه (۱۱) و در نظر گرفتن بردار درجات آزادی $d_i = \{u_i \ v_i \ w_i \ \alpha_i \ \beta_i\}^T$ ، ماتریس کرنش-جابجایی در دستگاه مختصات کلی، $B_i = \Delta \Pi_i$ بدست می‌آید. برای محاسبه ماتریس سختی باید ماتریس خصوصیات مواد از مختصات محلی به کلی منتقل شود. ماتریس انتقال با استفاده از مؤلفه‌های برداری دستگاه مختصات محلی $V_i = (l_i, m_i, n_i)^T$ که در نقاط گوسی بدست آمده‌اند، به شکل زیر تعریف می‌شود [۲۶]:

به روش‌های حل کمترین مربعات نیست. از طرفی با توجه به حذف معادلات اضافه، زمان حل کاهش پیدا می‌کند که در شبکه‌بندی ریزتر اهمیت پیدا می‌کند. در شکل ۱ بردارهای عمود بر میان سطح در هر نقطه کنترلی برای مدل یک چهارم نیمکره ترسیم شده‌اند. بردارها در نقاط کنترلی با استفاده از حل دستگاه معادلات تشکیل شده روی ۱. نقاط گریویل و ۲. نقاط گوسی بدست آمده‌اند که برای مقایسه بهتر با دو رنگ و اندازه مختلف ترسیم شده‌اند. نقاط کنترلی در شکل در واقع تشکیل چندضلعی محدبی را می‌دهند که سطح نریز را احاطه کرده‌است و روی آن قرار نگرفته‌اند. نقاط گریویل روی سطح با استفاده از ضرب تانسوری بردارهای گرهی حاوی فواصل گریویل در دویعد و توابع نریز بدست آمده‌اند. به منظور مقایسه‌ی نتایج این دو روش زمان تقریبی حل و جابجایی در نقطه اعمال بار برای مسائل حل شده در انتها در جدول ۲ مقایسه شده‌اند.

۳-۳- معادلات حاکم

در فرمول‌بندی مبتنی بر المان محدود، معادلات تعادل حاصل از حل مسئله کار مجازی، فرم کلی زیر را دارند:

$$KU = F \quad (10)$$

که ماتریس سختی K و بردار نیرویی F با انتگرال روی وصله بدست می‌آیند. برای محاسبه ماتریس سختی در دستگاه کلی سازه باید کرنش‌ها در دستگاه کلی محاسبه شوند. میدان کرنش، با استفاده از مشتق توابع به کمک رابطه (۱۱) به شکل زیر بیان می‌شود [۲۷]:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{,j} + u_{,i}) = \Delta \{u_{,x} \ u_{,y} \ u_{,z} \ v_{,x} \ v_{,y} \ v_{,z} \ w_{,x} \ w_{,y} \ w_{,z}\}^T = Bd$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

برای محاسبه کرنش‌ها در دستگاه کلی سازه، مشتقات جابجایی در دستگاه کلی با استفاده از ژاکوبین J_1 بدست می‌آیند [۲۷]:

اعتبار سنجی روش‌های تحلیل خطی هستند، اخیراً توسط محققانی که در زمینه تحلیل سازه‌های پوسته کار کرده‌اند مانند بنسون و همکاران [۱۸]، دارنیچ و همکاران [۲۳] و آدامز و همکاران [۱۴]. مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مثال‌های بررسی شده در این بخش شامل پوسته‌ی بام اسکوردلیس- لو، پوسته استوانه‌ای با دیافراگم صلب و نیمکره تحت بارهای متمرکز عمود برهم هستند. همه‌ی مثال‌ها با استفاده از پالایش K، شبکه‌بندی شده‌اند که دارای بیشترین پیوستگی بین المانی هستند. در تحلیل آیزوژئومتری با توجه به قرارنگرفتن نقاط کنترلی روی سطح فیزیکی، تعریف چرخش‌ها و دستگاه مختصات محلی در نقاط کنترلی باید در نقاط متناظر آنها از طریق یک نگاشت صورت گیرد که به روش‌های هم‌مکانی^۱ موسوم‌اند. همانطور که قبلاً گفته شد این کار منجر به خطا می‌شود که با انتخاب شبکه نقاط کنترلی به اندازه کافی ریز کاهش می‌یابد. با توجه به نتایج ارائه شده توسط آدامز، رفتار همگرایی برای انتخاب‌های مختلف نقاط هم‌مکانی یکسان است [۱۴]. از اینرو در اینجا به منظور مقایسه نتایج کار حاضر با روش هم‌مکانی فقط به ارائه نتایج مرتبط با بردارها در نقاط مهار اکتفا شده‌است. در همه مسائل حل شده نتایج حاصل از دو روش محاسبه بردارها، برای درجات مختلف توابع نریز ارائه شده‌است. لازم به ذکر است، روشی که در آن بردارها از طریق حل دستگاه معادلات روی نقاط گریویل بدست می‌آیند، روش دقیق^۲ نام‌گذاری شده‌است. و روشی که در آن نقاط مهار برای مختصات پارامتری کنترلی‌ها در نظر گرفته شده‌است، روش هم‌مکانی نام‌گذاری شده‌است. برای مشاهده تأثیر درجه توابع بر مشکل قفل شدگی در هر سه مثال حل شده از انتگرال‌گیری کامل استفاده شده است. جدول ۱ شامل مشخصات مواد مسائل بررسی شده است.

۴-۱- نیمکره سوراخ‌دار تحت نیروهای متمرکز متعامد

سازه‌ی پوسته نیمکره تحت نیروهای متمرکز متعامد در چهار نقطه مطابق شکل ۲ قرار دارد. لبه انتهایی نیمکره بدون تنش و نسبت لاغری پوسته $R/h = 250$ ست.

این مسئله از مسائل شناخته شده مودهای خمشی بدون تغییر حجم و چرخش‌های بزرگ صلب‌گونه است. در واقع انرژی غشایی در آن صفر است و هیچ کرنش غشایی در آن ایجاد نمی‌شود. برای

$$C = T^T C' T \quad (14)$$

که در آن

$$T = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & l_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & l_1 n_3 + l_3 n_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & l_2 n_3 + l_3 n_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

در نهایت رابطه ماتریس سختی با انتگرال روی وصله بدست می‌آید [۲۶]:

$$K_{patch} = \iiint B^T C B |J_1| dr ds d\zeta \quad (16)$$

با توجه به اینکه انتگرال‌گیری و وزن‌های مربوط به آنها در روش گوس در فضای نرمال گوسی انجام می‌شود باید توسط یک نگاشت دیگر فضای پارامتری نریز و فضای انتگرال‌گیری به هم مرتبط شوند. این نگاشت به شکل زیر تعریف می‌شود [۲۷]:

$$r = \frac{1}{2} \left((r_{i+1} - r_i) \xi + (r_{i+1} + r_i) \right), \quad (17)$$

$$s = \frac{1}{2} \left((s_{i+1} - s_i) \eta + (s_{i+1} + s_i) \right)$$

که در آن ξ, η متغیرهای تعریف شده در فضای انتگرال‌گیری می‌باشند. این نگاشت نیز منجر به ایجاد ژاکوبین J_r می‌شود [۲۷].

$$J_2 = \begin{bmatrix} r_{,\xi} & s_{,\xi} & 0 \\ r_{,\eta} & s_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

در نهایت ماتریس سختی در فضای انتگرال‌گیری به صورت زیر بیان می‌شود [۲۷]:

$$K_{patch} = \iiint B^T C B |J_1| |J_2| d\xi d\eta d\zeta \quad (19)$$

۴- نتایج و بحث

در این قسمت برای نشان دادن کارایی فرمول‌بندی مورد استفاده در تحلیل پوسته انحنا دار، مسائل رایج پوسته که بیشتر مورد توجه محققان بوده‌است بررسی می‌شوند. این مسائل که معیار مناسبی برای

1 Collocated method
2 Exact method

تغییر شکل در راستای اعمال بار به مقدار 0.0936 همگرا شده است که به پاسخ تحلیلی 0.094 با تقریب خوبی نزدیک است [۲۸]، کانتور تغییر مکان شعاعی حاصل از فرمول‌بندی ارائه شده در شکل ۴ نشان داده شده است. همانطور که در کانتور ارائه شده دیده می‌شود، مقدار جابجایی شعاعی برای نقطه اعمال بار تقریباً به مقدار 0.1 همگرا شده است.

۴-۲- پوسته بام اسکوردلیس- لو

مسئله‌ی بام اسکوردلیس- لو یک صفحه استوانه‌ای است تحت اثر وزن خودش که دو مرز خمیده آن تحت تکیه گاه دیافراگم صلب قرار دارند و دو مرز دیگر آن بدون تنش هستند.

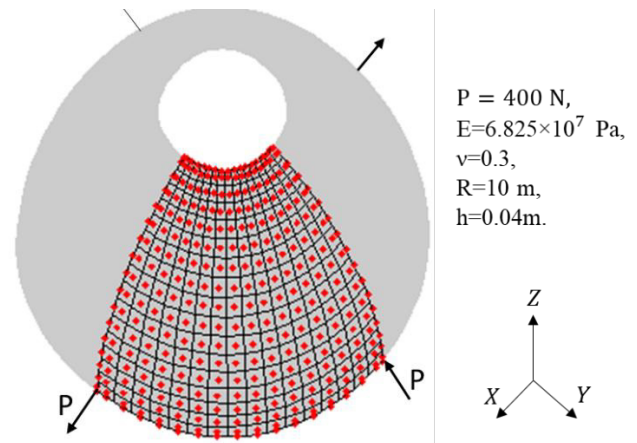
مشخصات هندسی و خواص مکانیکی مصالح در شکل ۵ نشان داده شده است. شبکه‌بندی نقاط کنترلی روی مدل یک چهارم نشان داده شده است. نسبت‌های هندسی $R/h=100$ و $L/h=200$ ، منجر به سازه نازکی می‌شود که تحت تأثیر پدیده‌ی قفل شدگی غشایی است. در این مسئله برش عرضی قابل چشم‌پوشی است و نیروهای غشایی و خمشی غالب هستند. با توجه به شکل ۵، به‌خاطر تقارن مسئله، تنها یک چهارم سازه‌ی بام با استفاده از اعمال شرایط مرزی مرتبط مدل‌سازی می‌شود. برای بررسی رفتار همگرایی نتایج، تغییر مکان نقطه‌ی میانی لبه آزاد، همانند مثال نیمکره برای درجات مختلف توابع نریز با حل تحلیلی در شکل ۶ مقایسه شده‌اند.

همانطور که در نمودارهای رسم شده دیده می‌شود، برای $p=2$ نمودارهای حاصل منطبق بر هم هستند در حالیکه با بالا رفتن درجه توابع خطای درونیابی در روش هم مکانی منجر به افزایش خطا برای شبکه‌بندی درشت می‌شود در حالیکه نتایج بدست آمده از روش حاضر، رفتار همگرایی بهتری را دارند و افزایش درجه توابع خطای حل را کاهش می‌دهد. این اختلاف در نتایج برای درجات بالای نریز، در نمودار ارائه شده توسط دارنیچ و همکاران [۲۳] نیز دیده می‌شود، آن‌ها رفتار همگرایی جابجایی بدست آمده از تعریف بردارها در نزدیک‌ترین نقاط روی سطح فیزیکی را با نتایج کار خود مقایسه کردند. با توجه به نتایج شکل ۶، مقادیر بدست آمده از دو روش مختلف برای تغییر مکان قائم نقطه میانی لبه آزاد، برای همه درجات توابع نریز به مقدار 0.3015 همگرا شده‌اند که با توجه به پاسخ تحلیلی 0.3024 قابل قبول است [۲۳]. با توجه به نمودارهای

جدول ۱. مشخصات مواد

Table 1. Material properties

مدل	مدول الاستیک (E)×۱۰ ^۷	نسبت پواسون (ν)
نیمکره [۱۴]	۶/۸۲۵	۰/۳
استوانه [۱۴]	۳۰۰	۰/۳
بام اسکوردلیس- لو [۲۳]	۴۳/۲	۰/۰
پوسته با انحنای متغیر [۲۹]	۲/۵	۰/۲۹

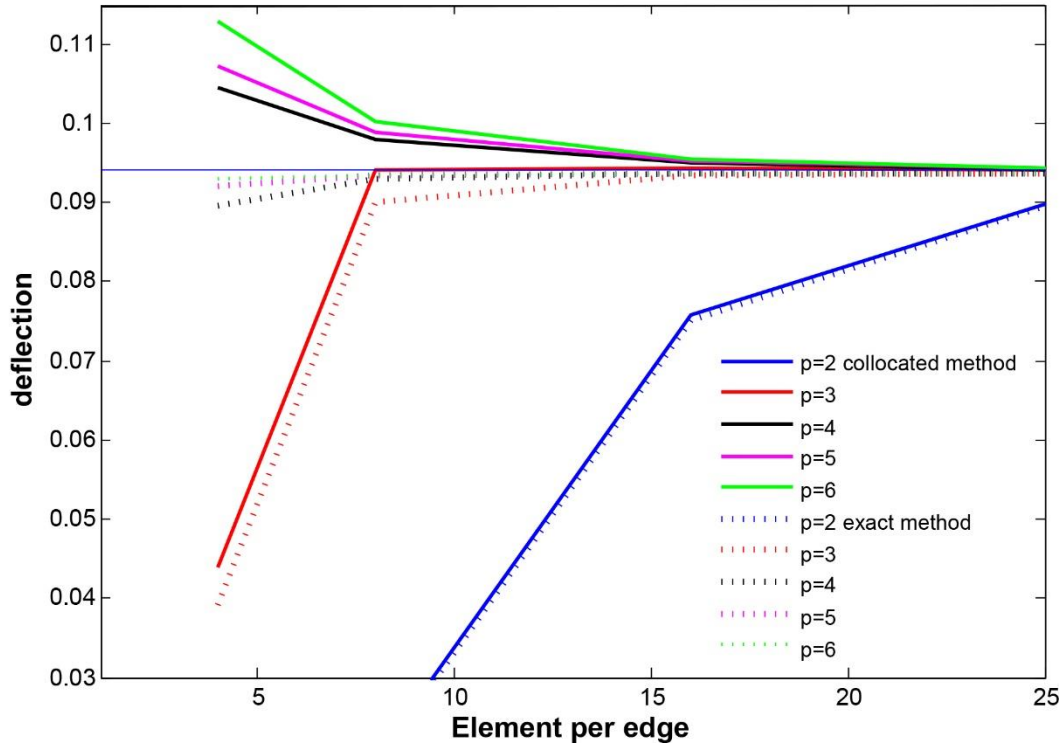


شکل ۲. مدل یک چهارم نیمکره تحت بارهای متمرکز شعاعی

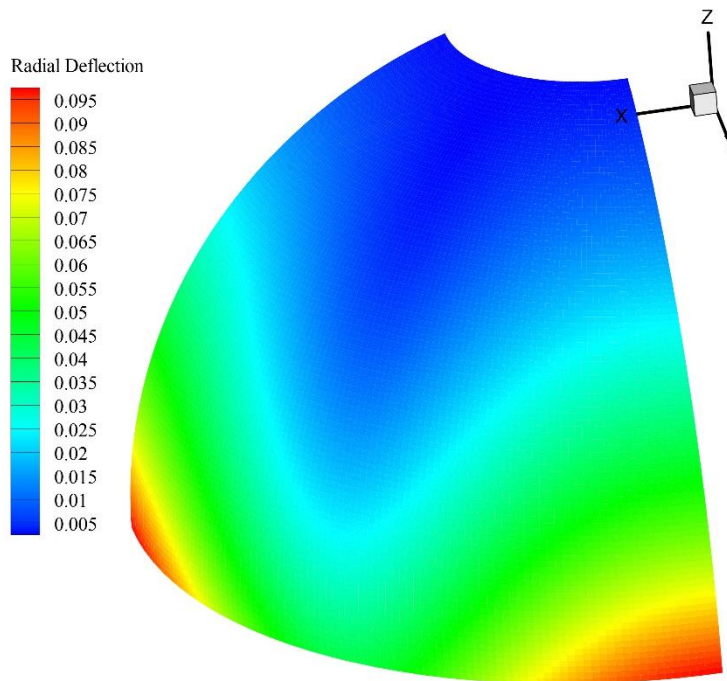
Fig. 2. A quarter model of hemispherical shell subjected to radial forces

جلوگیری از حرکت صلب‌گونه، نقطه وسط لبه بالایی در راستای Z مقید شده است تا تقارن مسئله حفظ شود. به خاطر تقارن، یک چهارم هندسه سازه جهت تحلیل مدل‌سازی شده است.

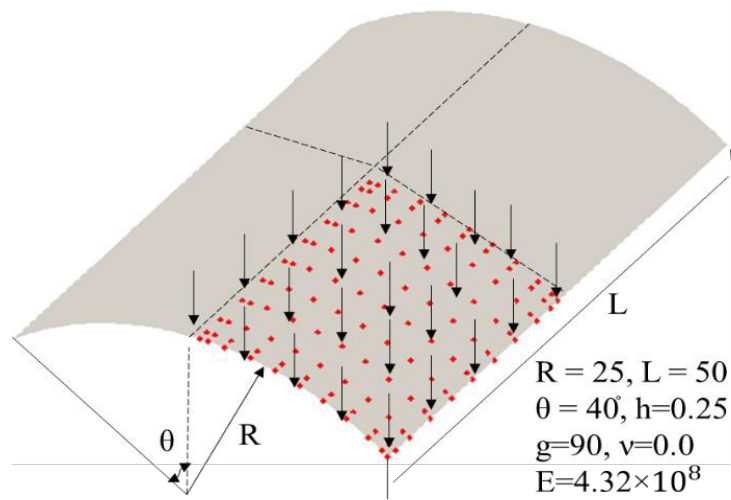
رفتار همگرایی تغییر مکان نقطه اعمال بار، در شکل ۳، بررسی شده است. نتایج مربوط به تغییر شکل نقطه اعمال بار برای درجات مختلف نریز و با استفاده از دو روش مختلف ارائه شده‌اند. همانطور که در نمودارها دیده می‌شود، برای $p=2$ قفل شدگی منجر به خطا و تأخیر در همگرایی شده است و برای $p>3$ اثر قفل شدگی تقریباً حذف شده است. با توجه به نتایج بدست برای درجات بالاتر توابع نریز خطای درونیابی در روش هم مکانی، منجر به کاهش دقت حل در شبکه‌بندی درشت شده است که با انتخاب شبکه نقاط ریزتر این خطا پوشش داده شده است. این افزایش خطا در نتایج بدست آمده از روش جدید محاسبه بردارها دیده نمی‌شود و رفتار همگرایی بهتری برای درجات بالای نریزها و شبکه‌بندی درشت را نشان می‌دهند. نتایج بدست آمده برای



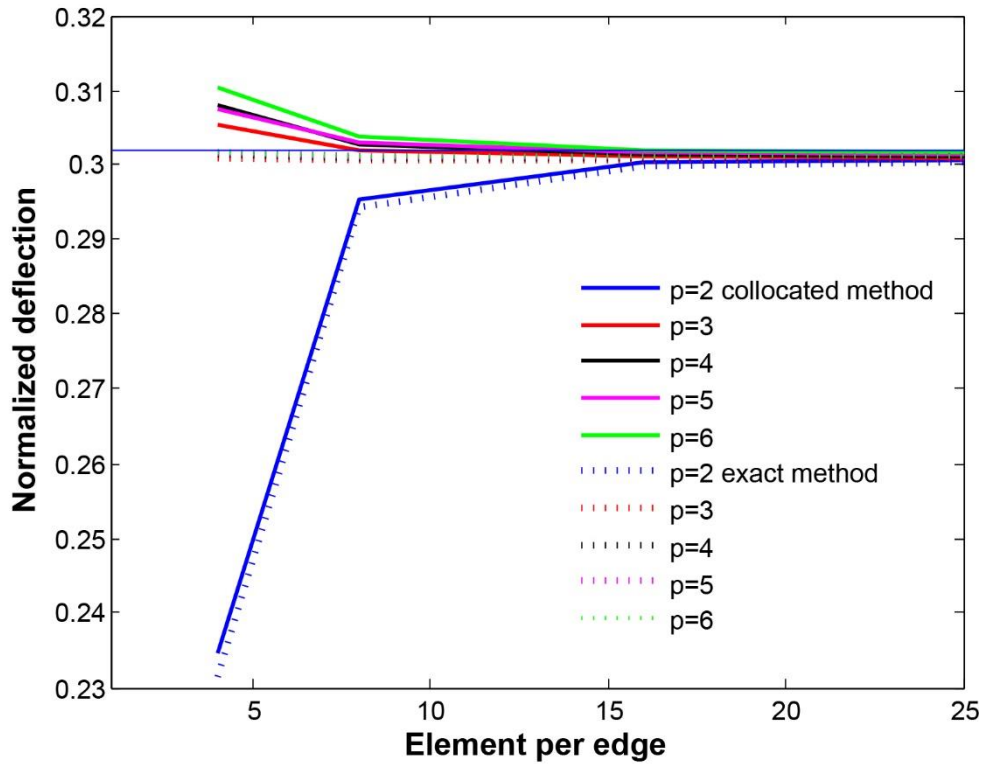
شکل ۳. مقایسه رفتار همگرایی جابجایی پوسته نیمکره برای درجات مختلف توابع نریز
 Fig. 3. Comparison of deformation convergence behavior of hemispherical shell for various order of the NURBS



شکل ۴. کانطور تغییر مکان شعاعی برای نیمکره مدل سازی شده تحت بارهای شعاعی نقطه‌ای
 Fig. 4. Contour plot of the radial deflection for modelled hemisphere subjected to radial forces



شکل ۵. مدل ۱/۴ بام اسکوردلیس - لو تحت وزن خودش
 Fig. 5. A quarter model of Scordelis-Lo roof subjected to vertical gravity

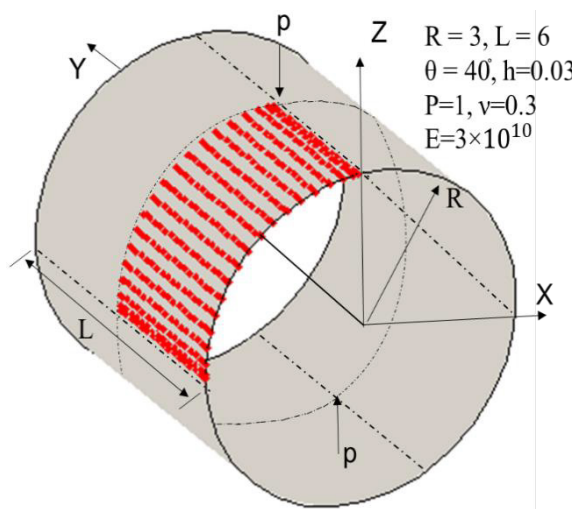


شکل ۶. مقایسه رفتار همگرایی جابجایی بام اسکوردلیس - لو برای درجات مختلف توابع نریز
 Fig. 6. Comparison of deformation convergence behavior of Scordelis-Lo roof for various order of the NURBS

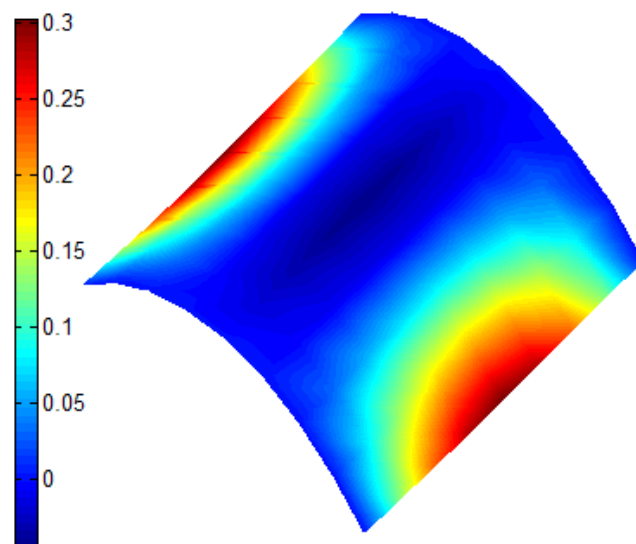
۳-۴- استوانه تحت فشار با تکیه‌گاه صلب

استوانه تحت دو بار متمرکز در راستای شعاعی و مخالف یکدیگر در وسط بالا و پایین قرار گرفته است. دو انتهای آن با تکیه‌گاه صلب مقید شده‌اند، به طوری که درجات آزادی چرخشی محور مماس بر لبه‌ها

بدست آمد، برای $p > 2$ اثر قفل شدگی حذف شده است. کانتور تغییر مکان عمودی برای پوسته بام اسکوردلیس - لو تحت وزن خودش حاصل از فرمول‌بندی ارائه شده، در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل ۸. هندسه استوانه تحت فشار با تکیه‌گاه صلب و شبکه نقاط کنترلی برای مدل ۱/۸
Fig. 8. An eighth model of pinched cylinder subjected to point load



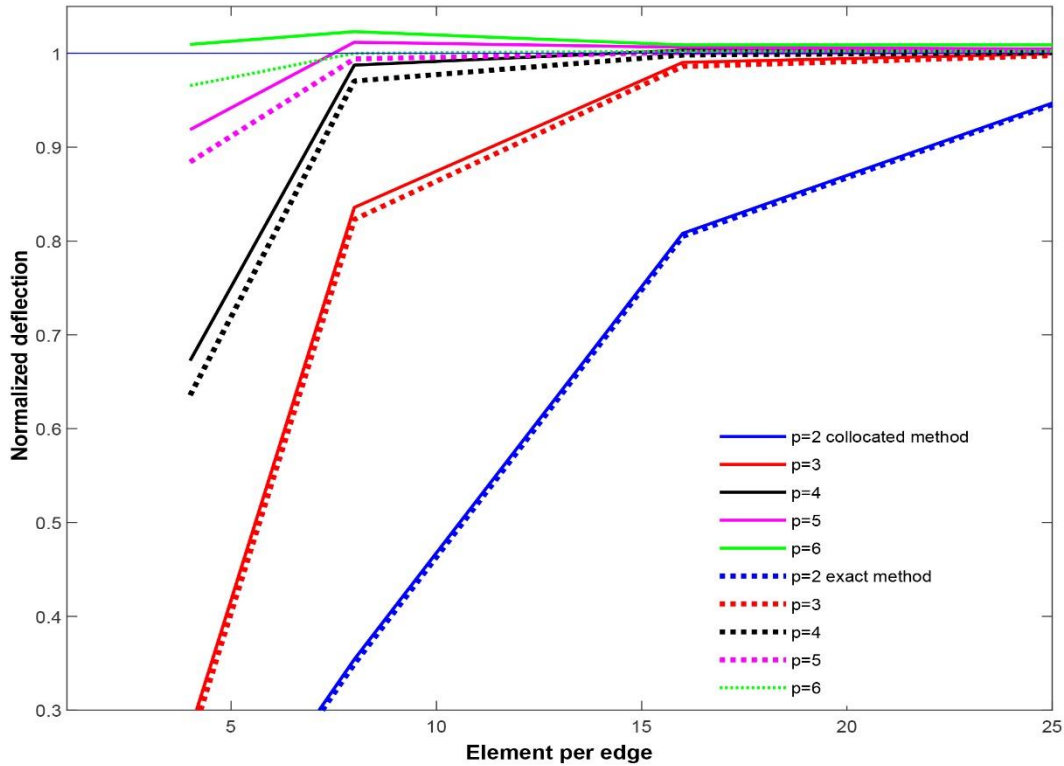
شکل ۷. کانتور تغییر مکان عمودی برای پوسته بام اسکوردلیس-لو تحت وزن خودش
Fig. 7. Contour plot of the vertical deflection for modelled Scordelis-Lo roof subjected to vertical gravity

۴-۴- پوسته با انحنای متغیر

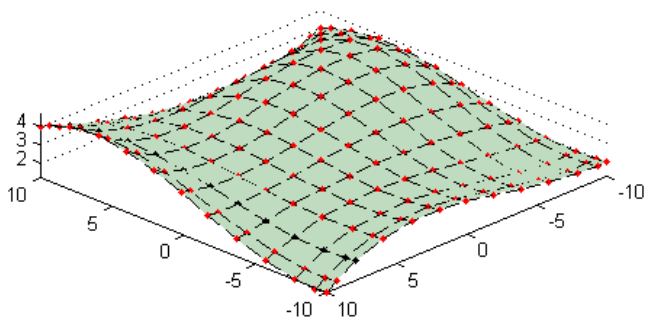
به منظور بررسی کارایی روش ارائه شده، به عنوان آخرین مثال پوسته با انحنای متغیر در نظر گرفته شده است. هندسه پوسته مدل سازی شده به همراه نقاط کنترلی در شکل ۱۱ ارائه شده است. مختصات نقاط کنترلی و مقادیر وزن‌ها در مرجع [۲۹] ذکر شده است. سازه تحت اثر بار یکنواخت ۱۰۰ عرضی در راستای قائم قرار گرفته است و در چهار گوشه خود توسط تکیه‌گاه ساده مقید شده است. ضخامت پوسته در همه نقاط پوسته برابر $t = 0.3$ در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون و مدول الاستیسیته در جدول مشخصات مواد ذکر شده‌اند. به منظور بررسی رفتار همگرایی، شبکه‌بندی با تعداد المان‌های ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ در هر جهت در نظر گرفته شده است. مقدار بیشینه جابجایی در راستای قائم برای درجات مختلف توابع نریز با مرجع [۲۹] مقایسه شده است. لازم به ذکر است که در مرجع مذکور از فرمول‌بندی ارائه شده توسط کنگ و یون [۲۷] استفاده شده است که در آن بردارهای گرهی مستقیماً در نقاط گوسی محاسبه شده‌اند. شکل ۱۲ رفتار همگرایی برای جابجایی بیشینه در راستای قائم را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، مقدار بیشینه جابجایی برای درجات مختلف نریز مشابه مرجع [۲۹] به مقدار 0.98

و درجات آزادی جابجایی محوری روی مرز آزاد هستند. این مورد یک مسئله بحرانی برای سنجش قابلیت المان پوسته در تغییر شکل‌های خمشی و غشایی بویژه در نزدیکی نقاط اعمال بار است. نتایج آن یک رفتار غالب خمشی را همراه قفل شدگی غشایی و برشی نشان داده است. به خاطر تقارن در هندسه و بارگذاری، تنها یک هشتم سازه با اعمال شرایط مرزی مناسب مدل سازی شده است که در شکل ۸ شبکه نقاط کنترلی مدل یک هشتم روی کل سازه نشان داده شده است. نمودار همگرایی تغییر مکان عمودی نقطه زیر بار که با مقدار حل تحلیلی آن بی‌بعد شده است، در شکل ۹ برای درجات مختلف p ارائه شده است. برای درجات پایین توابع نریز مشکل قفل شدگی دقت نتایج را به شدت تحت تأثیر قرار داده است که برای درجات بالاتر اثر قفل شدگی کمتر است. رفتار همگرایی برای نتایج بدست آمده از روش دقیق محاسبه بردارها، روند منظمی را با افزایش درجه توابع نشان می‌دهد و مقادیر برای همه درجات از پایین به جواب دقیق همگرا شده‌اند.

کانتور تغییر مکان شعاعی برای پوسته استوانه‌ای تحت فشار بدست آمده از حل آیزوژئومتریک حاصل از فرمول‌بندی ارائه شده در شکل ۱۰ نشان داده شده است.



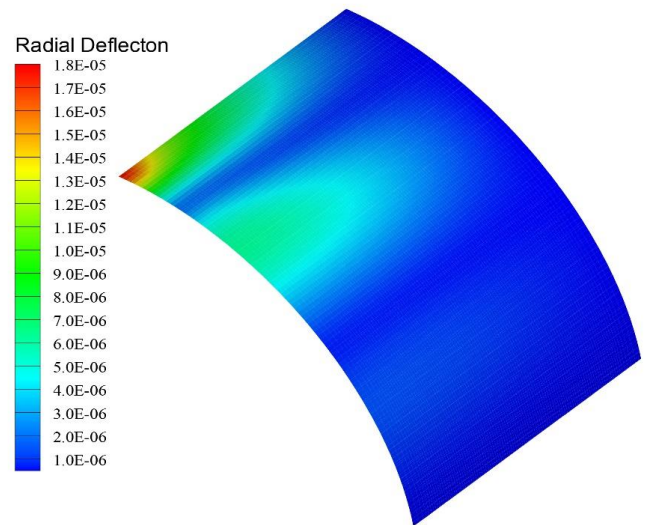
شکل ۹. مقایسه رفتار همگرایی جابجایی پوسته استوانه‌ای برای درجات مختلف توابع نریز
Fig. 9. Comparison of deformation convergence behavior of cylinder shell for various order of the NURBS



شکل ۱۱. مدل پوسته با شکل دلخواه و شبکه نقاط کنترلی
Fig. 11. The free form shell model and net of control points

آزاد در شکل ۱۳ ارائه شده است.

در انتها به منظور مقایسه زمان حل دستگاه معادلات تعریف شده در نقاط گریویل و گوسی، برای همه مثال‌های حل شده، شبکه نقاط کنترلی (۱۴×۱۴) و درجات توابع پایه ۳ و ۴ و ۵ و ۳ در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به جابجایی‌ها و زمان حل در جدول ۲ ارائه شده است. همان طور که مشاهده می‌شود پاسخ بدست آمده برای جابجایی نقاط تحت بار، با استفاده از دو روش مذکور و برای همه درجات کاملاً یکسان است در حالیکه نسبت زمان حل در روش دوم

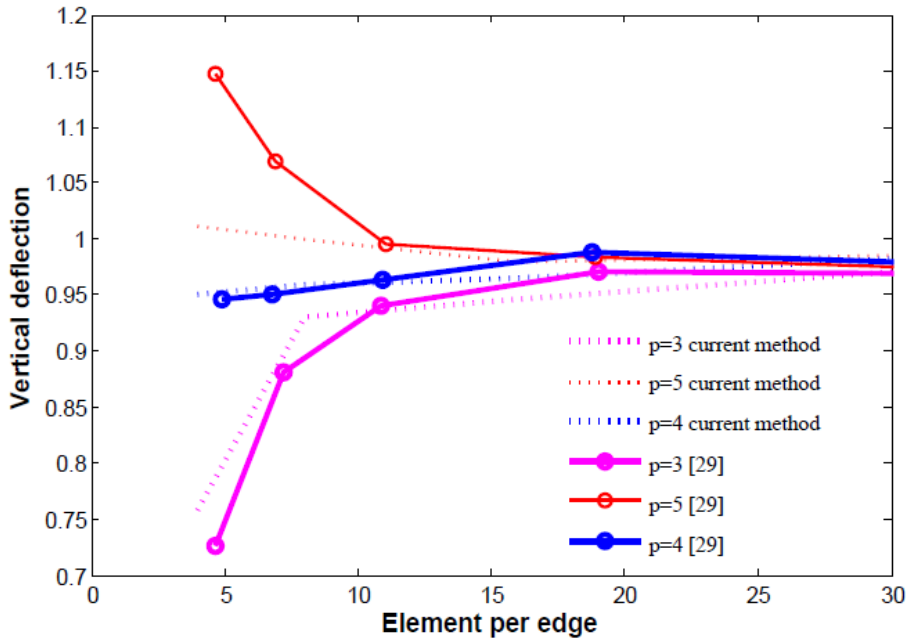


شکل ۱۰. کانتور تغییر مکان شعاعی برای مدل پوسته استوانه‌ای تحت بار نقطه‌ای

Fig. 10. Contour plot of the radial deflection for modelled cylinder shell subjected to point load

همگرا شده است. دقت بالای همگرایی در شبکه‌بندی درشت همانند مثال‌های قبلی کارایی روش ارائه شده را نشان می‌دهد.

در ادامه، کانتور جابجایی در راستای قائم، برای پوسته با شکل



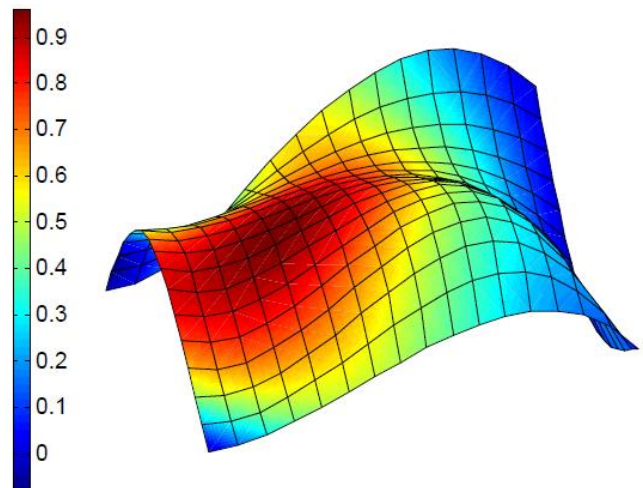
شکل ۱۲. مقایسه رفتار همگرایی جابجایی پوسته با شکل آزاد برای درجات مختلف نربز

Fig. 12. Comparison of deformation convergence behavior of free form shell for various order of the NURBS

بهینه گریویل جهت تعریف دستگاه معادلات در این پژوهش، انتخاب مناسبی به‌ویژه برای مسائل با حجم محاسبات زیاد است. به‌منظور صحت‌سنجی و مقایسه نتایج در مثال‌های حل شده، مقادیر جابجایی برای نقطه اعمال بار در شبکه‌بندی مختلف و برای درجات مختلف توابع نربز، مشابه جداول ارائه‌شده در مرجع [۱۴]، ارائه شده است. لازم به ذکر است که جداول ارائه شده در مرجع مذکور حاوی مقادیر جابجایی نقاط اعمال بار برای درجات توابع $p=2,3$ با پیوستگی بین‌المانی c^0, c^1 و c^2 و همچنین برای انتگرال‌گیری کامل و انتخابی هستند. با توجه به اینکه در این پژوهش از توابع نربز با بیشینه پیوستگی در سطح میانی پوسته استفاده شده، نتایج مرتبط با بیشینه پیوستگی (پیوستگی c^1 برای توابع درجه ۲ و پیوستگی c^2 برای توابع درجه ۳) و همچنین انتگرال‌گیری کامل، با نتایج کار حاضر در جداول ۳ و ۴ مقایسه شده‌اند. نتایج بدست آمده در پژوهش حاضر تطابق خوبی با نتایج کار آدامز و همکاران [۱۴] دارند که برای شبکه‌بندی ریزتر نقاط کنترلی کاملاً به یک مقدار همگرا شده‌اند.

۵- نتیجه‌گیری

فرمول‌بندی پوسته مبتنی بر تئوری میندلین- رایزنر برای



شکل ۱۳. کانتور تغییر مکان عمودی برای پوسته با شکل آزاد تحت بار یکنواخت عرضی

Fig. 13. Contour plot of the vertical deflection for free form shell subjected to transversal uniform load

به زمان حل در روش اول کمتر از ۰/۱ است. همانگونه که در مرجع [۲۳] دارنیچ نتیجه‌گیری کرده‌است، اصولاً هنگامی که بردارها از طریق حل دستگاه روی کل وصله محاسبه می‌شوند دقیق هستند که به نظر می‌رسد دلیل یکسان بودن نتایج جابجایی‌ها باشد. در واقع استفاده از نقاط گریویل، منجر به حذف معادلات اضافی می‌شود. با مقایسه زمان محاسبه بردارها، می‌توان نتیجه گرفت که پیشنهاد استفاده از نقاط

جدول ۲. مقایسه جابجایی‌ها و زمان محاسبه بردارها در دو روش مذکور

Table 2. Comparison of deflections and time to calculate vectors for 2 mentioned methods

استوانه تحت فشار با تکیه‌گاه صلب				
روش ۱		روش ۲		درجه توابع
جابجایی	زمان (ثانیه)	جابجایی	زمان (ثانیه)	
$-1/756 \times 10^{-5}$	۳/۹۵	$-1/756 \times 10^{-5}$	۰/۳۸	۳
$-1/828 \times 10^{-5}$	۵/۴۱	$-1/828 \times 10^{-5}$	۰/۴۸	۴
$-1/834 \times 10^{-5}$	۷/۲۱	$-1/834 \times 10^{-5}$	۰/۵۱	۵
نیمکره سوراخ‌دار تحت نیروهای متمرکز متعامد				
روش ۱		روش ۲		درجه توابع
جابجایی	زمان (ثانیه)	جابجایی	زمان (ثانیه)	
۰/۹۲۵	۳/۸۷	۰/۰۹۲۵	۰/۴	۳
۰/۰۹۳۴	۵/۴۱	۰/۰۹۳۴	۰/۴۲۶	۴
۰/۰۹۳۶	۷/۵۹	۰/۰۹۳۶	۰/۵۱۶	۵
پوسته بام اسکوردلیس - لو				
روش ۱		روش ۲		درجه توابع
جابجایی	زمان (ثانیه)	جابجایی	زمان (ثانیه)	
۰/۳۰۱۱	۳/۷۸	۰/۳۰۱۱	۰/۴	۳
۰/۳۰۱۸	۶/۰۴	۰/۳۰۱۸	۰/۴۳	۴
۰/۳۰۲۰	۷/۱۶	۰/۳۰۲۰	۰/۴۵	۵
پوسته با انحنای متغیر				
روش ۱		روش ۲		درجه توابع
جابجایی	زمان (ثانیه)	جابجایی	زمان (ثانیه)	
۰/۹۳۷	۳/۵۶	۰/۹۳۷	۰/۳۹	۳
۰/۹۶۵۲	۵/۱۵	۰/۹۶۵۲	۰/۴۲	۴
۰/۹۸۶۵	۷/۲۴	۰/۹۸۶۵	۰/۴۶	۵

جدول ۳. مقایسه جابجایی عمودی نقطه اعمال بار برای پوسته نیمکره (cm)

Table 3. comparison of vertical deflection at the loading point for hemisphere shell

					تعداد المان	درجه توابع
۳۲	۱۶	۸	۴	۲		
۹/۱۹	۷/۵۱	۱/۹۴	۰/۰۱۴	۰/۰۸۶	پژوهش حاضر	۲
۹/۱۹۴	۷/۵۱	۱/۹۴۳۷	۰/۰۱۴۰۷	۰/۰۸۸	آدامز و همکاران [۱۴]	
۹/۳۶	۹/۳۳	۹/۰۱	۳/۹۱	۰/۱۹	پژوهش حاضر	۳
۹/۳۵	۹/۳۳	۹/۰۲۵	۳/۸۹	۰/۱۹۵۴	آدامز و همکاران [۱۴]	

که در فرمول‌بندی پوسته، به تعریف دستگاه مختصات محلی در هر نقطه روی سطح فیزیکی نیاز است و با توجه به اینکه در فرمول‌بندی مبتنی بر نریز، نقاط کنترلی روی سطح فیزیکی قرار نمی‌گیرند، لازم

تحلیل سازه‌های پوسته‌ای با شکل و انحنای دلخواه در چارچوب آیزوژئومتریکی بیان شده است. به منظور مدل‌سازی دقیق، از توابع نریز و تکنیک پالایش K ، در سطح میانی پوسته استفاده شده است. از آنجا

جدول ۴. مقایسه جابجایی عمودی نقطه اعمال بار برای پوسته‌ی استوانه‌ای (μm)
Table 4. Comparison of vertical deflection at the loading point for cylinder shell

تعداد المان						درجه توابع
۳۲	۱۶	۸	۴	۲		
۰/۱۸۰۴	۰/۱۴۸۹	۰/۰۶۴۶	۰/۰۱۷۸۳	۰/۰۰۶۵	پژوهش حاضر	۲
۰/۱۸	۰/۱۴۹	۰/۰۶۸۶	۰/۰۱۷۹	۰/۰۰۷۵	آدامز و همکاران [۱۴]	
۰/۱۸۴۹	۰/۱۸۲۴	۰/۱۵۲۲	۰/۰۴۸۸	۰/۰۱۲۳	پژوهش حاضر	۳
۰/۱۸۴۹	۰/۱۸۲۴	۰/۱۵۲۳	۰/۰۵۷۳	۰/۰۱۲۹	آدامز و همکاران [۱۴]	

مناسبی به ویژه برای مسائل با حجم محاسبات زیاد مانند حل‌های غیرخطی است.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

A	دستگاه توابع پایه
a	ضخامت پوسته در هر نقطه
C	ماتریس خواص مواد در دستگاه کلی
C^*	ماتریس خواص مواد در دستگاه محلی
F	ماتریس نیرو
J	ماتریس ژاکوبین
K	ماتریس سختی
l, m, n	مولفه‌های بردارهای جهتی
N	توابع پایه بی اسپیلاین
R	تابع نربز
r, s	مختصات فضای پارامتری نربز
T	ماتریس انتقال
u, v, w	درجات آزادی انتقالی
v_1, v_2, v_3	بردارهای جهت
w	مقادیر وزنی نقاط کنترلی

علائم یونانی

ξ, η, ζ	مختصات فضای انتگرال‌گیری
α	درجه آزادی چرخشی
β	درجه آزادی چرخشی

است بردارها به‌نحو مناسبی تعریف شوند. از این رو در روش‌های معمول هر نقطه کنترلی از طریق یک نگاشت با نقطه‌ای روی سطح فیزیکی نگاشته می‌شود و بردارها در این نقطه تعریف می‌شوند. این نگاشت منجر به خطا می‌شود و تنها با انتخاب شبکه نقاط کنترلی به اندازه کافی ریز این خطا پوشش داده می‌شود. در این مقاله بردارهای جهت در نقاط کنترلی با استفاده از حل دستگاه معادلات تعریف شده روی کل وصله و در فواصل گریویل بدست می‌آیند. با توجه به تناظر یک به یک موجود بین نقاط کنترلی و گریویل، تعریف دستگاه در نقاط گریویل منجر به یکتایی حل و کاهش زمان حل به دلیل حذف معادلات اضافی می‌شود. از طرفی در روش‌های معمول تعریف بردارها در نقاط متناظر نقاط کنترلی روی سطح فیزیکی پوسته، با انتخاب شبکه بندی درشت و درجات بالای توابع نربز، خطای حل به دلیل افزایش خطای بردارهای درونیابی شده افزایش می‌یابد. در حالیکه در نتایج بدست آمده در روش حاضر این مشکل دیده نمی‌شود و امکان استفاده از شبکه‌بندی درشت با توابع پایه درجه بالا را فراهم می‌کند. مطالعه رفتار همگرایی برای جابجایی‌های نقاط تحت بار در مسائل موسوم به مسائل بفرنج در پوسته این نتیجه را تأیید می‌کند. به‌منظور صحت‌سنجی نتایج و بررسی دقت روش استفاده شده، جابجایی‌ها برای مسئله نیمکره و استوانه با تکیه‌گاه صلب، با مراجع دیگر مقایسه شدند که از تطابق بالایی برخوردارند. همچنین با مقایسه زمان محاسبه بردارها، می‌توان نتیجه گرفت که پیشنهاد استفاده از نقاط بهینه گریویل جهت تعریف دستگاه معادلات در این پژوهش، انتخاب

بالانویس

نقاط گریویل Gr
نقاط کنترلی Cp

۶- مراجع

- geometrically nonlinear analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 101(10) 2015 777-808.
- [10] J. F. Caseiro, R. A. F. Valente, A. Reali, J. Kiend, F. Auricchio, R. J. Alves de Sousa. On the assumed natural strain method to alleviate locking in solid-shell NURBS-based finite elements, Computational Mechanics, 53 (2014) 1353–1341.
- [11] G. Kikis, W. Dornisch, S. Klinkel, Isogeometric Reissner-Mindlin shell analysis - employing different control meshes for displacements and rotations, Appl. Math. Mech. 16(1) (2016) 209 – 210.
- [12] Q. Hu, Y. Xia, S. Natarajan, A. Zilian, P. Hu, Stéphane P.A. Bordas, Isogeometric analysis of thin Reissner-Mindlin plates and shells: locking phenomena and B-bar method, Comput Mech. 65 (2020) 1341–1323.
- [13] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug, H. Maitournam, Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part I: Beams, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 279 (2014) 1- 28.
- [14] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug, H. Maitournam, Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements. Part II: Plates and shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 284(1) (2015) 106-137
- [15] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug, H. Maitournam, A Reduced Integration for Reissner-Mindlin Non-linear Shell Analysis Using T-Splines, in: Isogeometric Analysis and Applications, Springer, 125-103 2015.
- [16] J. Kiendl, K. U. Bletzinger, J. Linhard, R. Wüchner, Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198 (2009) 3914–3902.
- [17] N. Nguyen-Thanh, J. Kiendl, H. Nguyen-Xuan, R. Wüchner, K.-U. Bletzinger, Y. Bazilevs, T. Rabczuk, Rotation free isogeometric thin shell analysis using PHT-splines, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 200 (2011) 3424–3410.
- [18] D. J. Benson, Y. Bazilevs, M. C. Hsu, T. J. R. Hughes, A large
- [1] J. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 2)194) (2005) 4195-4135.
- [2] J. Cottrell, T.J.R. Hughes, A. Reali, Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis, Comput.Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) –4160 4183
- [3] Y. Bazilevs, L. Beirão da Veiga, J. Cottrell, T.J.R. Hughes., G. Sangalli, Isogeometric analysis: Approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. Math. Mod. Methods Appl. Sci. 16(2006), 60-1.
- [4] T. W. Sederberg, J. Zheng, A. Bakenov, A. Nasri, T-splines and T-NURCCs, ACM Transactions on Graphics, 3)22) (2003). 484–477.
- [5] Y. Bazilevs, V. M Calo. J. A Cottrell, J. A Evans, T. J. R Hughes, S. Lipton, T. W Sederberg., Isogeometric analysis using T-splines. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(5) (2010), 229-263.
- [6] R. Echter, M. Bischoff, Numerical efficiency, locking and unlocking of NURBS finite elements, Computer Method sin Applied Mechanics and Engineering, 1)199) 2010 382–374.
- [7] L. Beirão Da Veiga, T. J. R. Hughes, J. Kiendl, C. Lovadina, J. Niiranen, A. Reali and H. Speleers, A locking-free model for Reissner–Mindlin plates: Analysis and isogeometric implementation via NURBS and triangular NURPS, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 25(8) 2015 1519-1551.
- [8] R. Bouclier, T. Elguedj, A. Combescure, Efficient isogeometric NURBS-based solid-shell elements: Mixed formulation and B-bar method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1)267) 110-86 2013.
- [9] R. Bouclier, T. Elguedj, A. Combescure, An isogeometric locking-free NURBS-based solid-shell element for

- and Engineering, 253 (2013) 504-491.
- [24] W. Dornisch, S. Klinkel, Treatment of Reissner–Mindlin shells with kinks without the need for drilling rotation stabilization in an isogeometric frame-work, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 66–35(2014)276.
- [25] L. Piegl, W. Tiller, *The NURBS book: Monographs in visual communications*, Springer Publisher, Berlin, second edition, ISBN: 1997, 6897-1431.
- [26] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The finite element method for solid and structural mechanics*. Butterworth-heinemann., (2005).
- [27] P. Kang, S. K. Youn, Isogeometric analysis of topologically complex shell structures, *Finite Elements in Analysis and Design*, 99 (2015) 81-68.
- [28] R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1(1) (1985) 3–20.
- [29] S. Nikoei, B. Hassani, Isogeometric analysis of Free Form Shells and Accurate calculation of direction vectors using Kirchhoff-Love and Reissner-Mindlin theories, *JMEUT*, 218-209 (2020) (4)50 (in Persian).
- deformation, rotation-free, isogeometric shell, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200 (2011) 1378–1367.
- [19] D. J. Benson, Y. Bazilevs, M. C. Hsu, T. J. R. Hughes, Isogeometric shell analysis: The Reissner–Mindlin shell, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 (2010) 289–276.
- [20] D. J. Benson, S. Hartmann, Y. Bazilevs, M. C. Hsu, T. J. R. Hughes, Blended isogeometric shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, –133(2013)255 146.
- [21] R. Echter, B. Oesterle, M. Bischoff, A hierarchic family of isogeometric shell finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 180–170(2013)254.
- [22] T. K. Uhm, S. K. Youn, T-spline finite element method for the analysis of shell structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4(80) (2009)-507 536.
- [23] W. Dornisch, S. Klinkel, B. Simeon, Isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors, *Computer Methods in Applied Mechanics*

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

Z. Ghadimi, B. Hassani, *Accurate calculation of nodal vectors in isogeometric analysis of shell structures, using Greville points, Amirkabir J. Mech Eng., 53(10) (2022) 5185-5202.*

DOI: [10.22060/mej.2021.19614.7070](https://doi.org/10.22060/mej.2021.19614.7070)

