Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(10) (2022) 1219-1222
DOI: 10.22060/mej.2021.19614.7070

Accurate Calculation Of Nodal Vectors In Isogeometric Analysis Of Shell Structures, Using Greville Points

Z. Ghadimi, B. Hassani*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

ABSTRACT: In this paper, the isogeometric analysis of shell structures along with the optimal method for accurate calculation of nodal vectors is proposed. The Non-uniform rational B-spline is used for shell mid-surface description. According to the Reisner- Mindlin hypothesis, the director vectors at control points are needed for the interpolation of the rotations. The calculated nodal direct vectors must lead to exact interpolated director vectors on the shell surface. Hence, a method has been proposed in which the components of director vectors at control points are obtained by solving a system of equations on the whole patch. The system of equations is formed using known values of direction vectors at the Greville points. The accuracy of the proposed method has been investigated by using the results of the most common problem in shell analysis. Convergence behavior for displacement at the loading points has been studied in all solved problems for different orders of basis functions and nets of control points. The deformation results show better convergence behavior with increasing the order of basis functions. The Greville points are in a one-to-one correspondence with control points. Thus, the system of equations on these points leads to a unique solution for the nodal direction vectors, and the time to solve equations is significantly reduced.

Review History:

Received: Feb. 09, 2021
Revised: Jul. 30, 2021
Accepted: Jul. 31, 2021
Available Online: Aug. 18,2021

Keywords:

Isogeometric analysis
Non-uniform rational B-spline
Reissner-Mindlin shells
Greville points
nodal vectors

1. INTRODUCTION

Generally, common engineering software uses two separate models for design and analysis. The design process is usually based on Computer-Aided Design (CAD) techniques, such as the NURBS technique, while linear Lagrangian functions are usually used to analyze for finite element analysis. Therefore, changes in geometry or mesh require interaction between these two models, which leads to an increase in solution time. Using common geometry descriptions in industry can create a closer link between the two processes and reduce analysis time. The main idea of Isogeometric Analysis proposed by Hughes et al. [1, 2] is to use the basic functions of the geometric model to approximate the unknown variables and analysis. The most common geometry descriptions are NURBS, which are often used in isogeometric analysis for better integration of design and analysis [3]. The aim of this paper is to provide a robust and efficient formulation for the analysis of shell structures using isogeometric analysis such as the NURBS technique.

According to the Mindlin-Reisner shell formulation, the local coordinate system must be defined at any point on the physical surface. Since in the NURBS- based formulation the control points are not located on the physical surface, an adapted techniques must be used to define a director vector at the control points. Therefore, in conventional methods, each control point is mapped into a geometric point on the surface and the vectors are defined at this point [4,5]. Kang and Youn calculated the exact surface normal vectors and their analytic derivatives in gauss points [6]. Numerous maps have been presented by Adams et al. [7]. This mapping leads to an error that only is covered by using a sufficiently fine mesh. Recently, the isogeometric shell analysis with exactly calculated direction vectors was researched by Dornisch et al [8].

In this paper, like to the proposed method by Dornich et al, the direction vectors are obtained by solving the system of equations on patch with a difference that the director vectors at the Greville points are considered as known values of the system of equations. Due to the one-to-one correspondence between the control points and the Greville points, this method leads to a unique solution. The order of NURBS and the number of control points are increased using the k-refinement technique and the convergence behavior has been investigated for common shell problems in literature.

2. ISOGEOMETRIC SHELL FORMULATION

The employed shell formulation is based on the degenerated shell approach. The degeneration process is based on Reissner-Mindlin assumption and reducing the 3D field approach to a 2D one in mid-surface. The director vectors should be defined at points on the geometric surface but in spline-based approach, control points may not be located on the geometric surface. Therefore, the control

*Corresponding author's email: b_hassani@um.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

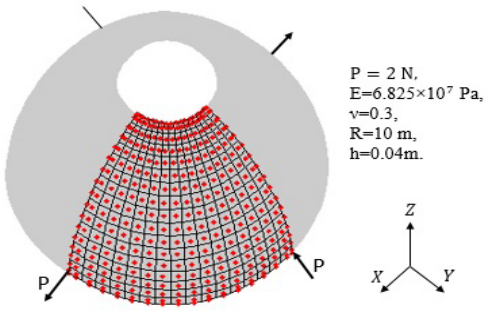


Fig 1. A quarter model of hemispherical shell subjected to radial forces

points cannot directly be used to define the local coordinate system and consequently the rotational degrees of freedom. Hence, for each control point it is necessary to somehow find a corresponding point on the mid-surface of the shell and mount the aforementioned orthogonal vectors on it. There are different ways to find this point, a simple way is to map each control point into the nearest point on the geometric surface.

Here the direction vectors are obtained by solving the system of equations on patch with a difference that the director vectors at the Greville points, are considered as known values of the equations system. The system of equations is defined as:

$$A_{ij}^{Gr} = \sum_{I=1}^{n_{Gr}} R_I A_{ijI}^{cp} \quad i,j = 1,2,3 \tag{1}$$

In which A_{ij} denotes the component j of basis vector i.

3. RESULTS AND DISCUSSION

The pinched hemisphere shell with an 18◦ circular cutout is analyzed. The spherical shell is subjected to four radial point loads P, at 90◦ intervals.

Due to symmetry conditions the one quarter of the shell is modeled, as shown in Figure 1. The convergence behavior of displacement at loading point for all orders of NURBS is presented in Figure 2. It can be seen that presented method leads to improved convergence behavior. Such that for coarse mesh, rising the orders of NURBS leads to better accuracy whereas In a way the director vectors are calculated at so-named anchor points that consider as collocated method in Figure 2.

The deflection of loading point and time to compute of director vectors for two different methods are compared in Table 1. It should be noted for presented data in Table 1, that the definition of equations at Guass points is considered as method 1 and definition of equations at Greville points is considered as method 2. The comparison of time to compute for two methods show that the Greville points are more suitable for definition of system of equations. Whereas the time to compute is decreased, the accuracy of results is preserved.

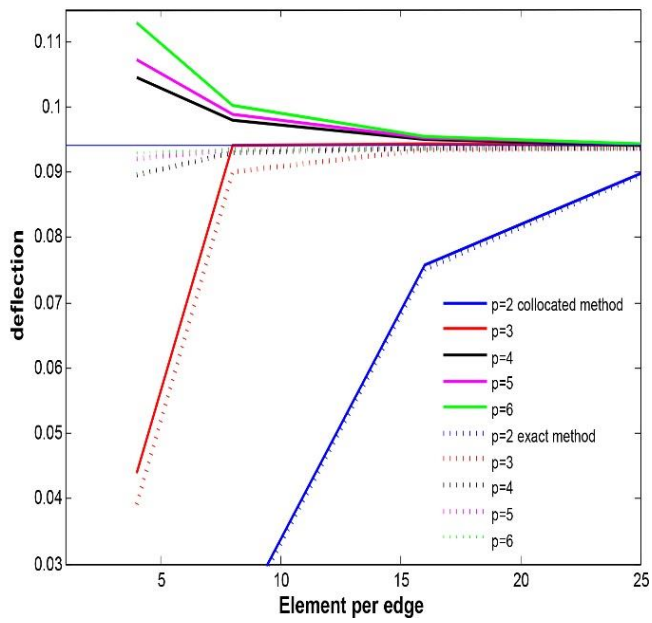


Fig 2. Comparison of deformation convergence behavior of hemispherical shell for various order of the NURBS

Table 1. Comparison of deflections and time to calculate vectors for two mentioned methods

Pinched hemispherical shell				
P	Method 1		Method2	
	Deflection	Time(s)	Deflection	Time(s)
3	0/0925	3/87	0/0925	0/4
4	0/0934	5/41	0/0934	0/4
5	0/0936	7/59	0/0936	0/5

4. CONCLUSIONS

The shell formulation based on Reisner-Mindlin theory is expressed in IGA framework for the analysis of shell structures. The NURBS and K-method are used for exact geometry description and discretization of shell mid-surface. In shell formulation the local coordinate system must be defined at any point on the physical surface. Since in the NURBS- based formulation the control points are not located on the physical surface, an adapted techniques must be used to define a director vector at the control points. Therefore, in conventional methods, each control point is mapped into a geometric point on the surface and the vectors are defined at this point. This mapping leads to an error that only is covered by using a sufficiently fine mesh. Here, the director vector are obtained by solving the system of equations defined on the Greville points. These points are one-to-one correspondence with control points that lead to a unique solution and reduces the solution time. On the other hand, the interpolation error don't increase for coarse mesh and high orders of NURBS. The study of convergence behavior for critical shell problems confirm this conclusion In order to validate the results

and the accuracy of this method, the displacements for the hemisphere and cylinder problems were compared with other references that are in high agreement. By comparing the computation time of vectors, it can be concluded that the Greville points for defining of the system of equations are a good choice especially for problems with large computational efforts such as nonlinear solutions.

REFERENCES

[1] . Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 194(2) (2005) 4135-4195.

[2] J. Cottrell, T.J.R. Hughes, A. Reali, Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis, Comput.Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 4160–4183

[3] Y. Bazilevs, L. Beir˜ao da Veiga, J. Cottrell, T.J.R. Hughes., G. Sangalli, Isogeometric analysis: Approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. Math. Mod. Methods Appl. Sci. 161-60 ,(2006) .

[4] L. Piegl, W. Tiller, The NURBS book: Monographs in visual communications, Springer Publisher, Berlin, second edition, ISBN: 1997, 1431-6897.

[5] T. K. Uhm, S. K. Youn, T-spline finite element method for the analysis of shell structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering,80(4) (2009)507-536.

[6] P. Kang, S. K. Youn, Isogeometric analysis of topologically complex shell structures, Finite Elements in Analysis and Design, 99 (2015) 68-81.

[7] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug, H. Maitournam, Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements. Part II: Plates and shells, Computer Methods in Applied Mechanics and

[8] W. Dornisch, S. Klinkel, B. Simeon, Isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 253 (2013) 491-504.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

Z. Ghadimi, B. Hassani, Accurate calculation of nodal vectors in isogeometric analysis of shell structures, using Greville points, Amirkabir J. Mech Eng., 53(10) (2022) 1219-1222.

DOI: 10.22060/mej.2021.19614.7070

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ۱۰، سال ۱۴۰۰، صفحات ۵۱۸۵ تا ۵۲۰۲
DOI: 10.22060/mej.2021.19614.7070

محاسبه دقیق بردارهای گرهی در تحلیل آیزوژئومتری سازه‌های پوسته‌ای با استفاده از نقاط گریویل

زهرا قدیمی، بهروز حسنی*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران.

خلاصه: در این مقاله تحلیل آیزوژئومتری سازه‌های پوسته‌ای همراه با پیشنهاد روشی بهینه برای محاسبه بردارهای گرهی ارائه شده‌است. هندسه پوسته با استفاده از توابع پایه غیریکنواخت کسری در سطح میانی و تعریف بردارهای گرهی دقیق در راستای ضخامت توصیف شده‌است. با توجه به استفاده از فرمول‌بندی میندلین رایزنر، برای درونیابی چرخش‌ها به بردارهای جهت در نقاط کنترلی نیاز است. این بردارها باید به نحوی محاسبه شوند تا بردارهای درونیابی شده در هر نقطه دلخواه روی سطح دقیق باشند. در این راستا، مولفه‌های بردارهای جهت در نقاط کنترلی با استفاده از حل دستگاه معادلات روی کل وصله بدست آمده‌اند که در آن دستگاه معادلات با استفاده از مقادیر معلوم بردارهای جهت در فواصل گریویل تعریف شده‌است. دقت روش استفاده شده با حل مسائل رایج در تحلیل پوسته بررسی شده‌است و نتایج بدست آمده برای جابجایی، کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. رفتار همگرایی با افزایش درجه توابع و تعداد نقاط کنترلی، مورد بررسی قرار گرفت و دیده شد که برخلاف روش‌های معمول تعریف بردارهای گرهی، مشکل کاهش دقت حل با افزایش درجه توابع در شبکه‌بندی درشت وجود ندارد، که امکان استفاده از شبکه‌بندی درشت را می‌دهد. با توجه به تناظر یک به یک بین نقاط کنترلی و گریویل، تعریف دستگاه معادلات روی این نقاط منجر به جواب یکتایی برای بردارهای گرهی می‌شود و با حذف معادلات اضافی، زمان محاسبه بردارها به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌یابد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۹/۱۱/۲۱
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۵/۰۸
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۰۹
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۵/۲۷

کلمات کلیدی:
تحلیل آیزوژئومتری
بی اسپلاین غیریکنواخت کسری
پوسته میندلین- رایزنر
نقاط گریویل
بردارهای جهت گرهی

۱- مقدمه

به‌طور کلی نرم افزارهای رایج مهندسی از دو مدل جداگانه برای طراحی و تحلیل استفاده می‌کنند. فرآیند طراحی معمولاً بر اساس تکنیک‌های مدلسازی هندسی با کامپیوتر[1]، مانند تکنیک نربز[2] است، در حالی که برای حل در تحلیل اجزای محدود، معمولاً از توابع پایه لاگرانژ خطی استفاده می‌کنند. بنابراین تغییرات هندسه یا تغییرات در شبکه بندی نیاز به تعامل بین این دو مدل دارد که منجر به بالا رفتن زمان حل می‌شود. استفاده از توصیف هندسه مشترک در صنایع می‌تواند پیوند نزدیک‌تری را بین این دو فرایند ایجاد کند و زمان تجزیه و تحلیل کاهش می‌یابد. ایده اصلی تحلیل آیزوژئومتریک[3] که توسط هیوز و همکاران [۱و۲] پیشنهاد شد، استفاده از توابع پایه مدل هندسی برای تقریب تابع مجهول و تحلیل است. رایج‌ترین توصیف هندسی در نرم‌افزارهای طراحی صنعتی سطوح نربز هستند که برای ادغام بهتر طراحی و تحلیل، اغلب در تحلیل آیزوژئومتری استفاده شده‌اند [۳]. علاوه بر نربزها، تی اسپلاین‌ها که توسط سدربرگ و همکاران [۴و۵] معرفی شدند، سهم زیادی از تحقیقات در چارچوب آیزوژئومتری را شامل می‌شوند.

سازه‌های پوسته‌ای هم به‌طور طبیعی وجود داشته‌اند و هم اغلب بخاطر نسبت تحمل بار به وزن بالایشان، به‌صورت دست سازه‌های

1 CAD
2 NURBS
3 Isogeometric analysis

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: b_hassani@um.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

بشر به‌وجود آمده‌اند. کاهش بعد یک جسم سه‌بعدی به دوبعدی، اگر یک بعد نسبت به دو بعد دیگر به اندازه کافی کوچک باشد، امکان توصیف هندسه توسط یک سطح دوبعدی همراه با تعریفی در راستای ضخامت را فراهم می‌کند. در علم مهندسی به چنین مدل‌هایی با ابعاد کاهش یافته پوسته گفته می‌شود. امروزه سازه‌های پوسته‌ای در صنایع هوافضا و خودروسازی اهمیت زیادی دارند.

دو فرمول‌بندی اصلی برای تحلیل پوسته‌ها، بر مبنای فرضیات کیرشهف- لاو[1] و میندلین- رایزنر[2] استوار هستند. رفتار تغییر شکل پوسته‌های نازک تحت تأثیر فشارهای خمشی و غشایی قرار دارد، در حالیکه رفتار پوسته‌های ضخیم تحت تأثیر کرنش‌های برشی عرضی است. معیار تمایز بین پوسته‌های ضخیم و نازک ضریب لاغری پوسته است که به‌صورت نسبت شعاع انحنا به ضخامت پوسته تعریف می‌شود. رابطه‌سازی مبتنی بر فرضیات کیرشهف- لاو به خاطر مشتقات مرتبه دوم نیازمند پیوستگی حداقل C^1 است. رابطه‌سازی مبتنی بر فرضیات میندلین- رایزنر، در محدوده صفحات نازک، به دلیل سفتی بیش از حد سازه مشکل قفل‌شدگی برشی[3] را ایجاد می‌کند. در این راستا روش‌های مختلفی با در نظر گرفتن پارامترهای اضافه برای تصحیح میدان جابجایی، تنش و کرنش برای حل این مشکل در چارچوب آیزوژئومتری پیشنهاد شده‌اند [۱۶-۱۵]. آدامز و همکاران [۱۵-۱۳].انتگرال‌گیری کاهشی غیریکنواختی را برای رفع مشکل قفل‌شدگی در درجات پایین توابع نربز بدون ظهور مودهای ساعت شنی ارائه کردند.

اولین فرمول‌بندی پوسته در چارچوب آیزوژئومتریک توسط کیندل و همکاران [۱۶] ارائه شد که مبتنی بر تئوری کیرشهف- لاو بدون درجات آزادی چرخشی بود. نگوین و همکاران [۱۷] یک مدل هندسی با استفاده از توابع اسپیلاین پی اچ تی[4] با پیوستگی C^1 را برای فرمول‌بندی پوسته کیرشهف- لاو ارائه کردند. همچنین فرمول‌بندی پوسته بدون درجات آزادی چرخشی توسط بنسون و همکاران [۱۸] ارائه شد. پیوستگی بین المانی مرتبه بالا در تحلیل آیزوژئومتریک، استفاده از تئوری کیرشهف- لاو را آسان می‌کند. با این حال، به دلیل فرضیات حاکم، این فرمول‌بندی نتایج واقعی را برای کرنش‌های برشی بزرگ ارائه نمی‌کند. علاوه بر این، اعمال شرایط مرزی چرخشی و اتصال وصله‌ها بسیار دشوار است. فرمول‌بندی پوسته‌ی آیزوژئومتریک مبتنی بر فرضیات میندلین- رایزنر، اولین بار توسط بنسون و همکاران [۱۹] استفاده شد. همچنین بنسون و همکاران [۲۰]فرمول‌بندی پوسته را به‌صورت ترکیبی از دو تئوری حاکم ارائه کردند، به‌طوریکه در لبه‌های تیز فرمول‌بندی مبتنی بر میندلین- رایزنر و در بقیه جاها از فرمول‌بندی کیرشهف- لاو استفاده کردند. در فرمول‌بندی پوسته ارائه شده توسط اکتر و همکاران [۲۱]، سه فرضیه مختلف حرکتی در نظر گرفته شده‌است، که با توجه به وضعیت هندسه انتخاب و ترکیب می‌شوند. آن‌ها علاوه بر دو فرمول‌بندی مذکور، فرمول‌بندی هفت پارامتری را با در نظر گرفتن پارامترهای اضافه برای تغییرات ضخامت در نظر گرفتند که از کوپلینگ بین انحناها و کرنش‌های برشی عرضی و قفل برشی جلوگیری می‌کند.

در کاربردهای مهندسی تمرکز اصلی بر ارائه‌ی هندسه دقیق سازه پوسته با انحنای دلخواه است. از اینرو فرض اساسی تئوری‌های پوسته تبدیل المان‌های سه‌بعدی به دوبعدی، به دلیل کم بودن بعد ضخامت نسبت به ابعاد دیگر است که قابلیت مدل‌سازی انحنا با دقت مناسب را داشته باشد. هدف این مقاله ارائه یک فرمول‌بندی قوی و کارآمد برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای با استفاده از امکانات تحلیل آیزوژئومتری مانند تکنیک نربز است. از اینرو سطوح نربز، رایج‌ترین ابزار توصیف هندسه در نرم افزارهای طراحی صنعتی، برای تعریف سطح مرجع پوسته میندلین- رایزنر استفاده شده است، که نیاز به تبدیل به سایر مدل‌های هندسی ندارد. استفاده از نربز یا دیگر تکنیک‌های مبتنی بر اسپیلاین برای مدل‌سازی سطح میانی، به دلیل پیوستگی مرتبه بالای ایجاد شده، امکان تعیین دقیق انحنا در هر نقطه فیزیکی را فراهم می‌کند. با توجه به فرمول‌بندی پوسته میندلین- رایزنر، برای درونیابی درجات آزادی چرخشی به تعریف بردارهای جهت گرهی نیاز است. در فرمول‌بندی مبتنی بر نربز، این بردارها روی نقاط کنترلی که معادل همان گره‌ها در المان محدود استاندارد هستند تعریف می‌شوند و توسط توابع شکل روی سطح تصویر می‌شوند. از آنجاییکه در تحلیل آیزوژئومتری شبکه فیزیکی و شبکه نقاط کنترلی جدا هستند، بردارها یا در نقاط تقریبی معادل کنترلی‌ها و یا در نزدیک‌ترین نقطه تصویر شده روی سطح تعریف می‌شوند. پیداکردن نزدیک‌ترین نقطه نیازمند یک روش حل تکراری مانند نیوتن است که با ریزشدن شبکه منجر به محاسبات سنگینی می‌شود. اوهم و یون از

1 Kirchhoff-Love
2 Reissner-Mindlin
3 Shear locking
4 PHT-splines

نگاشتی ساده استفاده کردند که در آن هر نقطه کنترلی با نقطه‌ای در فضای گرهی متناظر می‌شود و بردارهای متعامد روی آن تعریف می‌شوند[۲۲]. نگاشت‌های متعددی توسط آدامز و همکاران [۱۴] برای متناظر کردن نقاط کنترلی با نقاطی در فضای گرهی ارائه‌شده است که در این مقاله به‌طور خلاصه به آنها اشاره شده‌است.

در تحلیل آیزوژئومتریک با بالا رفتن درجه توابع، تعداد نقاط کنترلی که روی یک المان تأثیر می‌گذارند و همین‌طور فاصله آنها از المان افزایش می‌یابد، که برای سطوح انحنادار افزایش تعداد بردارها با جهت‌های مختلف، خطای درونیابی بردارها در نقاط گوس را افزایش می‌دهد. با توجه به نتایج ارائه شده توسط بنسون و همکاران [۱۹] و دارنیچ و همکاران ۲۳[و]۲۴، در تحلیل آیزوژئومتریک پوسته با توجه به روش انتخاب نقاط متناظر کنترلی و میزان انحنای هندسه خطای درونیابی در بردارها وجود دارد و هنگامی‌که پیوستگی بین المانی بیشینه است، با بالا رفتن درجه توابع خطای درونیابی بالا می‌رود. بنابراین بنسون و همکاران [۱۸]، فرمول‌بندی پوسته‌ی کلاسیک آیزوژئومتریک را با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ ارائه کردند و سعی کردند با محاسبه پارامترهایی در مقیاس المان، روشی برای بهبود دقت درونیابی بردارهای عمود ارائه کنند. دارنیچ و همکاران [۲۳]، فرمول‌بندی پوسته میندلین- رایزنر را در چارچوب آیزوژئومتریک به کاربردند، با توجه به نتایج ارائه‌شده توسط آنها، بردارهای درونیابی شده در نقاط گوسی نه عمود بر سطح‌اند و نه اندازه درستی دارند. از اینرو روش جدیدی برای محاسبه دقیق بردارها و سیستم‌های پایه گرهی معرفی کردند، که در آن با افزایش درجه نربزها و پیوستگی بین المانی خطای درونیابی بالا نمی‌رود. آن‌ها نشان دادند که بردارهای گرهی دقیق با استفاده از حل دستگاه معادلات روی کل وصله بدست می‌آیند و با انتخاب نقاط گوسی برای تشکیل دستگاه معادلات و استفاده از روش‌های حل حداقل مربعات، بردارهای گرهی دقیقی را محاسبه کردند.

در این مقاله مشابه روش ارائه‌شده توسط دارنیچ و همکاران، بردارهای جهت با استفاده از حل دستگاه معادلات روی کل وصله بدست آمده‌اند، با این تفاوت که مقادیر بردارها در فواصل بهینه گریویل[1] به عنوان بردارهای معلوم دستگاه معادلات در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به تناظر یک‌به‌یک بین نقاط کنترلی و نقاط گریویل[2]، این روش منجر به وجود جواب یکتا برای دستگاه معادلات می‌شود که نیاز به استفاده از روش‌های حل تقریبی حداقل مربعات نیست. به منظور بررسی رفتار همگرایی و مقایسه نتایج بدست آمده، درجه توابع و تعداد نقاط کنترلی با استفاده از تکنیک پالایش شبکه k[3] افزایش می‌یابند و رفتار همگرایی جابجایی نقاط تحت بار، برای پوسته‌ها با انحنا و شرایط مرزی مختلف بررسی شده‌است.

۲- سطوح نربز

برای تولیدِ سطوح و احجام از توابعِ شکل باید فضای پارامتری مناسب با ضرب تانسوری توابع یک پارامتری ساخته شود. برای ایجاد سطوح نربز، فضای پارامتری دارای دو بعد است و توابعِ شکل دو بعدی از ضرب تانسوریِ توابعِ شکل یک‌بعدی بدست می‌آیند. به‌طور مثال تابع شکل دوبعدی نربز برای سطح میانی پوسته، به‌صورت زیر است [۲۵]:

$$R_{i,j}(r,s)=\frac{N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(r)N_{l,q}(s)w_{k,l}} \quad (۱)$$

که توسط دو بردار گرهی R,S در دو جهت و مجموع نقاط کنترلی $R_{i,j}$ متناظر با توابع پایه $N_{i,p}(r)$ و $N_{j,q}(s)$ بیان می‌شود. بی- اسپلاین $N_{i,p}(r)$ ترکیب خطی از یک سری توابع پایه است که بر اساس الگوریتم دی-بور[4] طی یک رابطه بازگشتی بیان می‌شوند.

$$N_{i,0}(r)=\begin{cases}1 & r_i\le r\le r_{i+1}\\ otherwise & \end{cases} \quad (۲)$$

$$N_{i,p}(r)=\frac{r-r_i}{r_{i+p}-r_i}N_{i,p-1}(r)+\frac{r_{i+p+1}-r}{r_{i+p+1}-r_{i+1}}N_{i+1,p-1}(r)$$

در نهایت سطح نربز با استفاده از تابع شکل دوبعدی $R_{i,j}$ به شکل زیر بیان می‌شود که در آن $P_{i,j}$ مختصات نقاط کنترلی است.

$$S(r,s)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}R_{i,j}(r,s)p_{i,j} \quad (۳)$$

۳- فرمول‌بندی آیزوژئومتریک پوسته

در این بخش فرمول‌بندی پوسته دارای انحنا مبتنی بر نظریه المان‌های خمیده و توابع پایه نربز ارائه می‌شود. تقریب در سطح میانی پوسته با استفاده از توابع پایه نربز و در جهت عمود بر صفحه

1 Greville abscissae
2 Greville points
3 k-refinement
4 De Boor's algorithm

میانی به صورت خطی انجام می‌شود. برای تعریف هندسه پوسته به تعریف دو دستگاه مختصات کلی و محلی سازه نیاز داریم. دستگاه مختصات محلی در هر نقطه کنترلی تعریف می‌شود و در نقاط مورد نیاز با استفاده از نقاط کنترلی و نربزها درونیابی می‌شود.

۳-۱- هندسه و جابجایی

در این بخش مدل‌سازی هندسی و تحلیل پوسته دارای انحنا با استفاده از توابع پایه نربز تشریح می‌شود. استفاده از سطوح نربز در مدل‌سازی سطح میانی سازه بسیار مرسوم است که دقیقاً نوعی تعریف هندسه مبتنی برفرمول بندی پوسته است. هندسه دقیق پوسته با استفاده از تعریف سطح میانی و بردار عمود بر میان سطح پوسته به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲۶]:

$$P=\sum_{i=0}^{N}R_i\left(r,s\right)p_i+\sum_{i=0}^{N}R_i\left(r,s\right)\zeta\frac{a_i}{2}V_{3i} \tag{۴}$$

که در آن تابع $R_i(r,s)$ بی-اسپلاین متناظر با نقطه کنترلی p_i است. a_i ضخامت پوسته و ζ پارامتری برای تعریف بعد ضخامت در راستای عمود بر سطح پوسته است. V_{3i} بردار عمود بر سطح تعریف شده در نقطه کنترلی و در راستای ضخامت است.در واقع رابطه بالا نگاشتی از فضای پارامتری به فضای فیزیکی برای یک نقطه روی پوسته است. رابطه (۵) تغییر مکان پوسته را با توجه به فرضیه میندلین -رایزنر بیان می‌کند. هرنقطه کنترلی شامل سه درجه آزادی جابجایی و دو درجه آزادی دورانی حول دو محور فرضی هستند و این محورها بر محور عمود بر میان سطح، در نقطه مورد نظر عمود هستند.

$$U=\sum_{i=0}^{N}R_i\left(r,s\right)U_i+\sum_{i=0}^{N}R_i\left(r,s\right)\zeta\frac{a_i}{2}\left[-V_{2i}\quad V_{1i}\right]\begin{Bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{Bmatrix} \tag{۵}$$

در رابطه ذکر شده، بردارهای متعامد دستگاه مختصات محلی در هر گره را تشکیل می‌دهند. بردار نرمال $V_۳$، در راستای ضخامت است و امتداد بردارهای $V_۱$ و $V_۲$ روی سطح میانی اختیاری است. برای تعریف هندسه و تغییرمکان‌ها در پوسته به این بردارها نیاز است. این بردارها باید در نقاط واقع بر سطح میانی پوسته تعریف شوند. از آنجایی که نقاط کنترلی روی سطح پوسته قرار نمی‌گیرند، نمی‌توان بردارهای متعامد را در این نقاط تعریف کرد و درجات آزادی چرخشی را مستقیماً به آنها نسبت داد. از اینرو باید یک نقطه متناظر برای هر نقطه کنترلی روی سطح میانی پوسته تعریف کرد [۲۲]. در واقع هر نقطه کنترلی با یک نقطه در فضای فیزیکی نگاشته می‌شود و درجات آزادی چرخشی روی آن تعریف می‌شود. برای این منظور، روش‌های مختلفی پیشنهاد شدند که در ادامه با جزئیات بیشتر بیان می‌شوند.

۳-۲- محاسبه بردارها

به طور کلی در فرمول‌بندی پوسته‌ی میندلین بردارها یا مستقیم در نقاط گوسی محاسبه می‌شوند [۲۷]، و یا توسط توابع نربز از مقادیر کنترلی‌ها درونیابی می‌شوند. با توجه به نتایج ارائه‌شده توسط آدامز و همکاران، محاسبه مستقیم بردارها در نقاط گوسی فرمول‌بندی پیچیده‌تری دارد و با انتگرال‌گیری کاهشی سازگار نیست [۱۴]. به‌منظور درونیابی بردارهای جهت به دستگاه مختصات گرهی در هر نقطه کنترلی واقع بر هندسه نیاز است که مستلزم یک روش تطبیقی یا نگاشت برای نقاط کنترلی خارج از سطح است. در این قسمت روش‌های مختلف استفاده شده در مراجع به‌طور خلاصه بیان می‌شوند.

۳-۲-۱- تعریف بردار در تصویر متناظر هر نقطه کنترلی روی سطح میانی

در این روش در واقع برای هر نقطه کنترلی، نقطه‌ای از سطح میانی که کمترین فاصله را با آن دارد در نظر گرفته می‌شود. برای پیدا کردن چنین نقطه‌ای باید یک روش تکراری مانند جستجوی نیوتن به کارگرفته شود که هزینه محاسباتی بالایی در بردارد. تئوری و الگوریتم بهینه برای پیداکردن تصویر نقاط کنترلی روی هندسه، در مرجع [۲۵]بیان شده‌است.

۳-۲-۲- تعریف بردار در نقاط بیشینه‌ی هر تابع

در اینجا بردارها در نقطه‌ای روی سطح که در آن نقطه تابع شکل مربوط به هر نقطه کنترلی بیشترین مقدار را دارد تعریف می‌شوند. با توجه به اینکه هر نربز یک مقدار بیشینه دارد، یک موقعیت واحد برای هر بردار نرمال به‌دست می‌آید. در همین راستا نقاط دمکو[1]، بیشینه‌ی اسپیلاین‌های چپیشف[2]، نقاط مناسبی هستند. این روش نیز مستلزم استفاده از روش نیوتن است و در نتیجه محاسبات زیادی را به همراه دارد[۱۴].

1 Demko abscissae
2 Chebyshev splines

۳-۲-۳- تعریف بردار در نقاط مهار[1]

این نگاشت در واقع روش ساده‌تری است که در برخی منابع استفاده شده‌است [۲۲] و در آن با توجه به زوج و فرد بودن درجه توابع نربز، هر نقطه کنترلی با یک نقطه در فضای پارامتری متناظر می‌شود، که نقطه مهار نامیده می‌شود. رابطه (۶) موقعیت هر نقطه مهار را روی بردار گرهی در یک بعد را برای توابع زوج و فرد بیان می‌کند، که مختصات پارامتری نقاط مهار روی سطح میانی پوسته از ضرب تانسوری دو بردار مختصات پارامتری t_r, t_s در دو راستا بدست می‌آیند.

$$t_{ir} = \begin{cases} r_{i+(p+1)/2} & if\ p\ is\ odd \\ \frac{1}{2}\left(r_{i+(p/2)} + r_{i+(p/2)+1}\right) & if\ p\ is\ even \end{cases} \quad (۶)$$

لازم به ذکر است که این نقاط در یک تناظر یک به یک قرار ندارند و نقاط متناظر ممکن است در مرزها تکراری باشند. از اینرو بردارهای یکسانی برای چند نقطه کنترلی بدست می‌آید، که دقت را کاهش می‌دهد و نیاز به اصلاح نقاط در مرزها می‌باشد که با توجه به درجه توابع نربز، ضرایب مختلفی برای اصلاح نقاط در مرزها به‌دست می‌آیند [۲۲].

۳-۲-۴- تعریف بردار در نقاط گریویل

انتخاب دیگر برای مختصات پارامتری معادل نقاط کنترلی، فواصل گرایویل هستند، که در واقع میانگین گره‌های هر اسپیلاین هستند و با استفاده از تعریف ساده در رابطه (۷) به دست می‌آیند [۱۴].

$$t_{ir} = \frac{r_{i+1} + \ldots + r_{i+p}}{p} \quad (۷)$$

این فواصل برای صفحه‌ها منطبق بر مختصات پارامتری نقاط کنترلی هستند و برای هندسه‌های دارای انحنا، این نقاط منطبق بر بیشینه‌ی توابع پایه هستند.

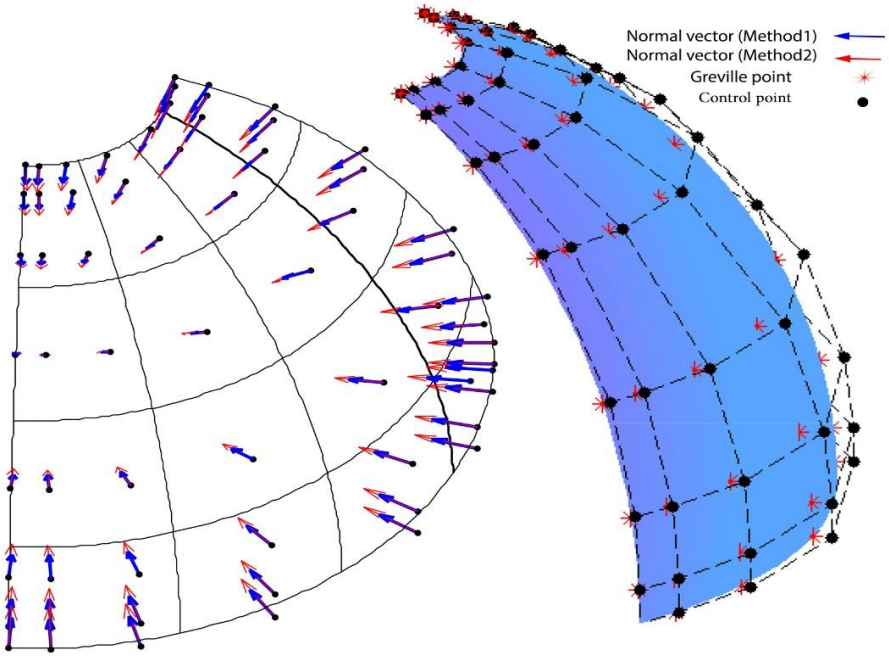
آدامز و همکاران، به منظور مقایسه روش‌های مذکور، سه انتخاب مختلف برای مختصات پارامتریک نقاط کنترلی روی سطح، را در نظر گرفتند. نقاط با کمترین فاصله از کنترلی‌ها روی سطح، نقاط با فواصل مساوی روی بردار گرهی و نقاط گریویل. با توجه به نتایج ارائه شده توسط آدامز و همکاران، بردارهای تعریف شده در تصویر نقاط کنترلی روی سطح، نقاط گرایویل و نقاط با فاصله یکنواخت نزدیک‌اند و نمودار بدست آمده برای خطای طول و جهت بردارها در هر سه مورد رفتار تقریباً یکسانی را داشته است. به‌طوریکه برای شبکه‌بندی یکسان با بالا رفتن درجه توابع، خطای درونیابی افزایش یافته هست. این مسئله، توسط محققان دیگر برای روش اول تأیید شده‌است [۲۳و۱۸].. با توجه به نتایج ارائه شده توسط آدامز و همکاران [۲۴و۲۳].زمان حل در حالتی که تصویر نقاط در مختصات پارامتری با استفاده از الگوریتم حل تکراری محاسبه می‌شوند، ۹/۳ ثانیه و در حالتی که مختصات پارامتری معادل کنترلی‌ها انتخاب می‌شوند، ۰/۰۱ ثانیه است. از طرفی با مقایسه دقت سه روش، دقت زاویه بردارها در نقاط گریویل بیشتر است. در حالی که با انتخاب فواصل مساوی پارامتری در پالایش K دقت درونیابی به علت قرار گرفتن غیر یکنواخت نقاط، پایین‌تر است. از اینرو آن‌ها با در نظر گرفتن دو فاکتور زمان حل و دقت نتایج، نشان دادند استفاده از نقاط گریویل انتخاب بهینه‌تری برای تعریف بردارهای معادل نقاط کنترلی است اما مشکل افزایش خطای درونیابی با بالارفتن درجه توابع همچنان پابرجاست. لازم به ذکر است که استفاده از نقاط مهار هم به عنوان روش دیگر اشاره شده در مقالات، در ادامه مورد بررسی قرار گرفته و در نتایجی که در ادامه ارائه خواهند شد، دیده می‌شود که مشکل افزایش خطای درونیابی با بالارفتن درجه در مورد نقاط مهار مانند گریویل همچنان پابرجاست.

در روش‌های مذکور بعد از انتخاب مختصات پارامتری t_{ir} ، مختصات معادل نقاط کنترلی برای محاسبه بردارها، از حاصل ضرب تانسوری t_{ir} در دو بعد، بدست می‌آیند. و بردارهای متعامد معادل نقاط کنترلی به صورت زیر محاسبه می‌شوند[۲۷].

$$V_{3i} = \frac{S_{,r}(t_{ir}, t_{is}) \times S_{,s}(t_{ir}, t_{is})}{\left\| S_{,r}(t_{ir}, t_{is}) \times S_{,s}(t_{ir}, t_{is}) \right\|}, \quad V_1 = \frac{e_2 \times V_3}{\left\| e_2 \times V_3 \right\|}, \quad V_2 = V_3 \times V_1 \quad (۸)$$

۳-۲-۵- محاسبه‌ی دقیق بردارها با استفاده از حل دستگاه معادلات روی کل دامنه

1 Anchor points



شکل ۱. الف: سطح نربز، نقاط کنترلی و گریویل. ب: بردارهای عمود در نقاط کنترلی

Fig. 1. (a): The NURBS surface, Greville and control points. (b): The normal vector at the control points

در راستای حل مشکل روش‌های مذکور، دارنیچ و همکاران روش دقیقی برای محاسبه سیستم‌های پایه گرهی معرفی کردند که بردارهای جهت درونیابی شده تا حد امکان به مقادیر دقیق بردارهای جهت نرمال نزدیک باشند. آن‌ها با استفاده از حل یک دستگاه معادلات روی کل دامنه، مقادیر گرهی بردارها را محاسبه کردند و نشان دادند که فقط با محاسبه بردارها بر اساس روش ارائه‌شده توسط آنها، نتایج دقیق هستند و با افزایش درجه نربزها و پیوستگی بین المانی خطای درونیابی بالا نمی‌رود. به منظور تشکیل دستگاه معادلات حاکم، تعداد نقاط گوسی باید به‌نحوی انتخاب شود که دستگاه معادلات معین یا فرا معین باشد. برای اینکه دستگاه معادلات نوشته شده روی دامنه جواب یکتا داشته باشد، باید تعداد معادلات مستقل خطی با تعداد نقاط کنترلی برابر باشد. در حالتی که تعداد معادلات بیشتر باشد نیاز به روش‌های کمترین مربعات برای حل دستگاه معادلات است.

۳-۲-۶- محاسبه بردارهای گرهی با استفاده از تعریف دستگاه معادلات در فواصل گریویل

در این مقاله به‌منظور بالا بردن دقت درونیابی بردارها روی سطوح با انحنای قابل توجه، مشابه روش دارنیچ [۲۳]. بردارها از طریق حل یک دستگاه معادلات روی کل دامنه بدست می‌آیند با این تفاوت که دستگاه معادلات روی نقاط میانگین گرهی (گریویل) نوشته می‌شوند. از آنجاییکه انتخاب نقاط گریویل برای محاسبه بردارها در نتایج آدامز دقت قابل قبولی داشته‌اند و در تناظر یک به یک با نقاط کنترلی قرار دارند، در این مقاله، مقادیر بردارها در این نقاط به عنوان بردارهای معلوم دستگاه معادلات در نظر گرفته شده‌اند تا با استفاده از حل دستگاه روی کل دامنه مقادیر مجهول بردارها برای نقاط کنترلی محاسبه شوند. دستگاه معادلات روی دامنه به‌صورت زیر تعریف شده‌است:

$$A_{ij}^{Gr} = \sum_{I=1}^{n_{Gr}} R_I A_{ijI}^{cp} \quad i,j = 1,2,3 \tag{۹}$$

که در آن R_i توابع شکل نربز، A_{ij}^{Gr}، j امین مؤلفه i امین بردار پایه دستگاه بردارهای پایه در فواصل گریویل و A_{ij}^{cp} مولفه‌های مجهول دستگاه بردارهای پایه گرهی هستند. که برای هر ترکیب i,j رابطه (۹) منجر به یک دستگاه معادلات می‌شود. مزیت دیگر استفاده از این نقاط، وجود تناظر یک به یک با نقاط کنترلی برای همه درجات توابع نربز است که تعداد معادلات مستقل خطی با تعداد نقاط کنترلی که در واقع تعداد مجهولات به حساب می‌آیند برابر خواهند بود. این مسئله منجر به وجود جواب یکتا برای دستگاه معادلات می‌شود و نیاز

به روش‌های حل کمترین مربعات نیست. از طرفی با توجه به حذف معادلات اضافه، زمان حل کاهش پیدا می‌کند که در شبکه‌بندی ریزتر اهمیت پیدا می‌کند. در شکل ۱ بردارهای عمود بر میان سطح در هر نقطه کنترلی برای مدل یک چهارم نیمکره ترسیم شده‌اند. بردارها در نقاط کنترلی با استفاده از حل دستگاه معادلات تشکیل شده روی ۱. نقاط گریویل و ۲. نقاط گوسی بدست آمده‌اند که برای مقایسه بهتر با دو رنگ و اندازه مختلف ترسیم شده‌اند. نقاط کنترلی در شکل درواقع تشکیل چندضلعی محدبی را می‌دهند که سطح نربز را احاطه کرده‌است و روی آن قرار نگرفته‌اند. نقاط گریویل روی سطح با استفاده از ضرب تانسوری بردارهای گرهی حاوی فواصل گریویل در دوبعد و توابع نربز بدست آمده‌اند. به منظور مقایسه‌ی نتایج این دو روش زمان تقریبی حل و جابجایی در نقطه اعمال بار برای مسائل حل شده در انتها در جدول ۲ مقایسه شده‌اند.

۳-۳- معادلات حاکم

در فرمول‌بندی مبتنی بر المان محدود، معادلات تعادل حاصل از حل مسئله کار مجازی، فرم کلی زیر را دارند:

$$KU = F \tag{۱۰}$$

که ماتریس سختی K و بردار نیرویی F با انتگرال روی وصله بدست می‌آیند. برای محاسبه ماتریس سختی در دستگاه کلی سازه باید کرنش‌ها در دستگاه کلی محاسبه شوند. میدان کرنش، با استفاده از مشتق توابع به کمک رابطه (۱۱) به شکل زیر بیان می‌شود[۲۷].

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = \Delta\left\{u_{,x}\ u_{,y}\ u_{,z}\ v_{,x}\ v_{,y}\ v_{,z}\ w_{,x}\ w_{,y}\ w_{,z}\right\}^T = Bd$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

برای محاسبه کرنش‌ها در دستگاه کلی سازه، مشتقات جابجایی در دستگاه کلی با استفاده از ژاکوبین J_1 بدست می‌آیند [۲۷]:

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ \dots \\ w_{,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,r} \\ u_{,s} \\ \dots \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} u_{,r} \\ u_{,s} \\ \dots \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

که در آن مشتقات میدان جابجایی نسبت به متغیرهای فضای پارامتری نربز، به شکل زیر تعریف می‌شوند [۲۷]:

$$\begin{Bmatrix} u_{,r} \\ u_{,s} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,r} \\ v_{,s} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,r} \\ w_{,s} \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} R_{i,r} & 0 & 0 & -\zeta R_{i,r} l_{2i} & \zeta R_{i,r} l_{1i} \\ R_{i,s} & 0 & 0 & -\zeta R_{i,s} l_{2i} & \zeta R_{i,s} l_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -R_i l_{2i} & R_i l_{1i} \\ 0 & R_{i,r} & 0 & -\zeta R_{i,r} m_{2i} & \zeta R_{i,r} m_{1i} \\ 0 & R_{i,s} & 0 & -\zeta R_{i,s} m_{2i} & \zeta R_{i,s} m_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -R_i m_{2i} & R_i m_{1i} \\ 0 & 0 & R_{i,r} & -\zeta R_{i,r} n_{2i} & \zeta R_{i,r} n_{1i} \\ 0 & 0 & R_{i,s} & -\zeta R_{i,s} n_{2i} & \zeta R_{i,s} n_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -R_i n_{2i} & R_i n_{1i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \frac{a_i}{2}\alpha_i \\ \frac{a_i}{2}\beta_i \end{Bmatrix} = \sum \Pi_i d_i \tag{۱۳}$$

با جایگزینی مشتقات در رابطه (۱۱) و در نظر گرفتن بردار درجات آزادی $d_i = \left\{u_i\ v_i\ w_i\ \alpha_i\ \beta_i\right\}^T$، ماتریس کرنش- جابجایی در دستگاه مختصات کلی، $B_l = \Delta\Lambda\Pi$ بدست می‌آید. برای محاسبه ماتریس سختی باید ماتریس خصوصیات مواد از مختصات محلی به کلی منتقل شود. ماتریس انتقال با استفاده از مؤلفه‌های برداری دستگاه مختصات محلی $V_i = (l_i, m_i, n_i)^T$ که در نقاط گوسی بدست آمده‌اند، به شکل زیر تعریف می‌شود [۲۶]:

$$C = T^T C' T \tag{۱۴}$$

که در آن

$$T = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & l_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 \\ 2l_3 l_2 & 2m_3 m_2 & 2n_3 n_2 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & l_2 n_3 + l_3 n_2 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & l_3 n_1 + l_1 n_3 \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

در نهایت رابطه ماتریس سختی با انتگرال روی وصله بدست می‌آید[۲۶]:

$$K_{patch} = \iiint B^T C B \left| J_1 \right| dr ds d\zeta \tag{۱۶}$$

با توجه به اینکه انتگرال‌گیری و وزن‌های مربوط به آنها در روش گوس در فضای نرمال گوسی انجام می‌شود باید توسط یک نگاشت دیگر فضای پارامتری نربز و فضای انتگرال‌گیری به هم مرتبط شوند. این نگاشت به شکل زیر تعریف می‌شود[۲۷]:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\left(\left(r_{i+1} - r_i\right)\xi + \left(r_{i+1} + r_i\right)\right), \\ s &= \frac{1}{2}\left(\left(s_{i+1} - s_i\right)\eta + \left(s_{i+1} + s_i\right)\right) \end{aligned} \tag{۱۷}$$

که در آن ξ, η متغیرهای تعریف شده در فضای انتگرال‌گیری می‌باشند. این نگاشت نیز منجر به ایجاد ژاکوبین J_2 می‌شود[۲۷].

$$J_2 = \begin{bmatrix} r_{,\xi} & s_{,\xi} & 0 \\ r_{,\eta} & s_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

در نهایت ماتریس سختی در فضای انتگرال‌گیری به‌صورت زیر بیان می‌شود[۲۷]:

$$K_{patch} = \iiint B^T C B \left| J_1 \right| \left| J_2 \right| d\xi d\eta d\zeta \tag{۱۹}$$

۴- نتایج و بحث

در این قسمت برای نشان دادن کارایی فرمول‌بندی مورد استفاده در تحلیل پوسته انحنادار، مسائل رایج پوسته که بیشتر مورد توجه محققان بوده‌است بررسی می‌شوند. این مسائل که معیار مناسبی برای اعتبار سنجی روش‌های تحلیل خطی هستند، اخیراً توسط محققانی که در زمینه تحلیل سازه‌های پوسته کار کرده‌اند مانند بنسون و همکاران [۱۸]، دارنیچ و همکاران [۲۳]و آدامز و همکاران [۱۴]. مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مثال‌های بررسی شده در این بخش شامل پوسته‌ی بام اسکوردلیس- لو، پوسته استوانه‌ای با دیافراگم صلب و نیمکره تحت بارهای متمرکز عمود برهم هستند. همه‌ی مثال‌ها با استفاده از پالایش K، شبکه‌بندی شده‌اند که دارای بیشترین پیوستگی بین المانی هستند. در تحلیل آیزوژئومتری با توجه به قرارنگرفتن نقاط کنترلی روی سطح فیزیکی، تعریف چرخش‌ها و دستگاه مختصات محلی در نقاط کنترلی باید در نقاط متناظر آنها از طریق یک نگاشت صورت گیرد که به روش‌های هم‌مکانی[1] موسوم‌اند. همانطور که قبلاً گفته شد این کار منجر به خطا می‌شود که با انتخاب شبکه نقاط کنترلی به اندازه کافی ریز کاهش می‌یابد. با توجه به نتایج ارائه شده توسط آدامز، رفتار همگرایی برای انتخاب‌های مختلف نقاط هم‌مکانی یکسان است [۱۴]. از اینرو در اینجا به منظور مقایسه نتایج کار حاضر با روش هم‌مکانی فقط به ارائه نتایج مرتبط با بردارها در نقاط مهار اکتفا شده‌است. در همه مسائل حل شده نتایج حاصل از دو روش محاسبه بردارها، برای درجات مختلف توابع نربز ارائه شده‌است. لازم به ذکر است، روشی که در آن بردارها از طریق حل دستگاه معادلات روی نقاط گریویل بدست می‌آیند، روش دقیق[2] نام‌گذاری شده‌است. و روشی که در آن نقاط مهار برای مختصات پارامتری کنترلی‌ها در نظر گرفته شده‌است، روش هم‌مکانی نام‌گذاری شده‌است. برای مشاهده تأثیر درجه توابع بر مشکل قفل شدگی در هر سه مثال حل شده از انتگرال‌گیری کامل استفاده شده است. جدول ۱ شامل مشخصات مواد مسائل بررسی شده است.

۴-۱- نیمکره سوراخ‌دار تحت نیروهای متمرکز متعامد

سازه‌ی پوسته نیمکره تحت نیروهای متمرکز متعامد در چهار نقطه مطابق شکل ۲ قرار دارد. لبه انتهایی نیمکره بدون تنش و نسبت لاغری پوسته $R/h=$ ۲۵۰ ست.

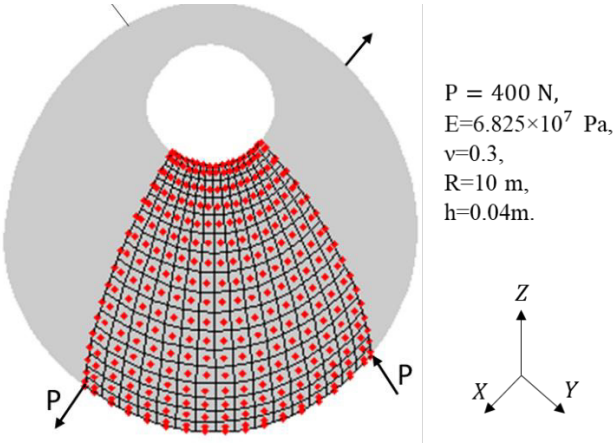
این مسئله از مسائل شناخته شده مودهای خمشی بدون تغییر حجم و چرخش‌های بزرگ صلب‌گونه است. در واقع انرژی غشایی در آن صفر است و هیچ کرنش غشایی در آن ایجاد نمی‌شود. برای

1 Collocated method
2 Exact method

جدول ۱. مشخصات مواد

Table 1. Material properties

مدل	مدول الاستیک $(E)\times10^{7}$	نسبت پواسون (ν)
نیمکره [۱۴]	۶/۸۲۵	۰/۳
استوانه [۱۴]	۳۰۰	۰/۳
بام اسکوردلیس- لو [۲۳]	۴۳/۲	۰/۰
پوسته با انحنای متغیر [۲۹]	۲/۵	۰/۲۹



شکل ۲. مدل یک‌چهارم نیمکره تحت بارهای متمرکز شعاعی

Fig. 2. A quarter model of hemispherical shell subjected to radial forces

جلوگیری از حرکت صلب‌گونه، نقطه وسط لبه بالایی در راستای Z مقید شده است تا تقارن مسئله حفظ شود. به خاطر تقارن، یک چهارم هندسه سازه جهت تحلیل مدل‌سازی شده‌است.

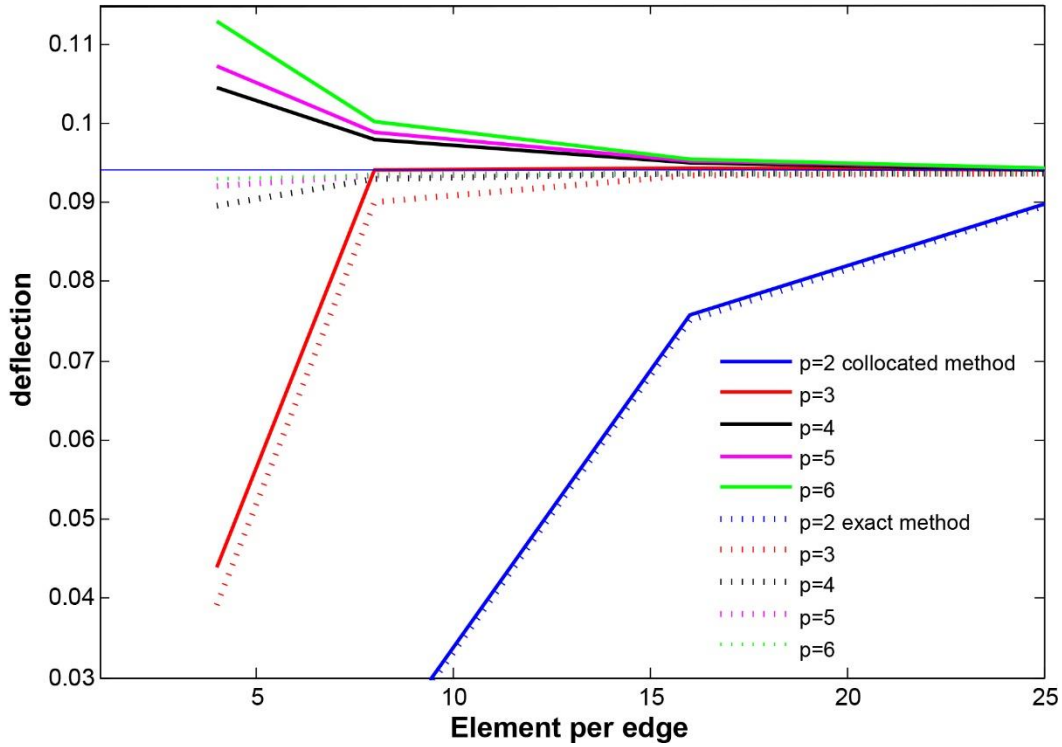
رفتار همگرایی تغییر مکان نقطه اعمال بار، در شکل ۳، بررسی شده‌است. نتایج مربوط به تغییر شکل نقطه اعمال بار برای درجات مختلف نربز و با استفاده از دو روش مختلف ارائه شده‌اند. همانطور که در نمودارها دیده می‌شود، برای $p=۲$ قفل شدگی منجر به خطا و تأخیر در همگرایی شده‌است و برای $p>۳$ اثر قفل شدگی تقریباً حذف شده‌است. با توجه به نتایج بدست برای درجات بالاتر توابع نربز خطای درونیابی در روش هم مکانی، منجر به کاهش دقت حل در شبکه‌بندی درشت شده است که با انتخاب شبکه نقاط ریزتر این خطا پوشش داده شده است. این افزایش خطا در نتایج بدست آمده از روش جدید محاسبه بردارها دیده نمی‌شود و رفتار همگرایی بهتری برای درجات بالای نربزها و شبکه‌بندی درشت را نشان می‌دهند. نتایج بدست آمده برای تغییر شکل در راستای اعمال بار به مقدار ۰/۰۹۳۶ همگرا شده است که به پاسخ تحلیلی ۰/۰۹۴ با تقریب خوبی نزدیک است [۲۸]، کانتور تغییر مکان شعاعی حاصل از فرمول‌بندی ارائه شده در شکل ۴ نشان داده شده است. همانطور که در کانتور ارائه‌شده دیده می‌شود، مقدار جابجایی شعاعی برای نقطه اعمال بار تقریباً به مقدار ۰/۱ همگرا شده است.

۴-۲- پوسته بام اسکوردلیس- لو

مسئله‌ی بام اسکوردلیس-لو یک صفحه استوانه‌ای است تحت اثر وزن خودش که دو مرز خمیده آن تحت تکیه گاه دیافراگم صلب قرار دارند و دو مرز دیگر آن بدون تنش هستند.

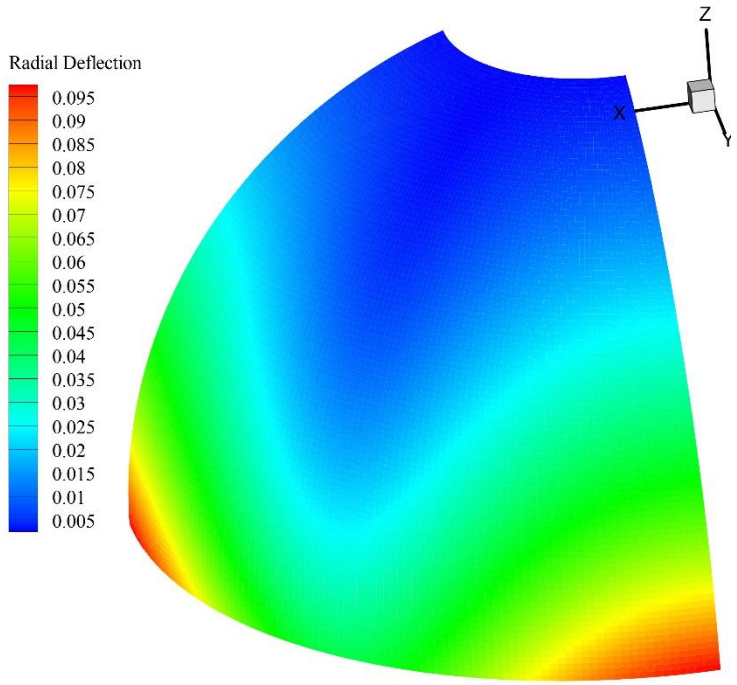
مشخصات هندسی و خواص مکانیکی مصالح در شکل ۵ نشان داده شده‌است. شبکه‌بندی نقاط کنترلی روی مدل یک چهارم نشان داده شده است. نسبت‌های هندسی $R/h=۱۰۰$ و $L/h=۲۰۰$ ، منجر به سازه نازکی می‌شود که تحت تأثیر پدیده‌ی قفل شدگی غشایی است. در این مسئله برش عرضی قابل چشم‌پوشی است و نیروهای غشایی و خمشی غالب هستند. با توجه به شکل ۵، به‌خاطر تقارن مسئله، تنها یک چهارم سازه‌ی بام با استفاده از اعمال شرایط مرزی مرتبط مدل‌سازی می‌شود. برای بررسی رفتار همگرایی نتایج، تغییر مکان نقطه‌ی میانی لبه آزاد، همانند مثال نیمکره برای درجات مختلف توابع نربز با حل تحلیلی در شکل ۶ مقایسه شده‌اند..

همانطور که در نمودارهای رسم شده دیده می‌شود، برای $p=۲$ نمودارهای حاصل منطبق بر هم هستند در حالیکه با بالا رفتن درجه توابع خطای درونیابی در روش هم مکانی منجر به افزایش خطا برای شبکه‌بندی درشت می‌شود در حالیکه نتایج بدست آمده از روش حاضر، رفتار همگرایی بهتری را دارند و افزایش درجه توابع خطای حل را کاهش می‌دهد.. این اختلاف در نتایج برای درجات بالای نربز، در نمودار ارائه شده توسط دارنیچ و همکاران [۲۳] نیز دیده می‌شود، آن‌ها رفتار همگرایی جابجایی بدست آمده از تعریف بردارها در نزدیک‌ترین نقاط روی سطح فیزیکی را با نتایج کار خود مقایسه کردند. با توجه به نتایج شکل ۶، مقادیر بدست آمده از دو روش مختلف برای تغییر مکان قائم نقطه میانی لبه آزاد، برای همه درجات توابع نربز به مقدار ۰/۳۰۱۵ همگرا شده‌اند که با توجه به پاسخ تحلیلی ۰/۳۰۲۴ قابل قبول است [۲۳]. با توجه به نمودارهای



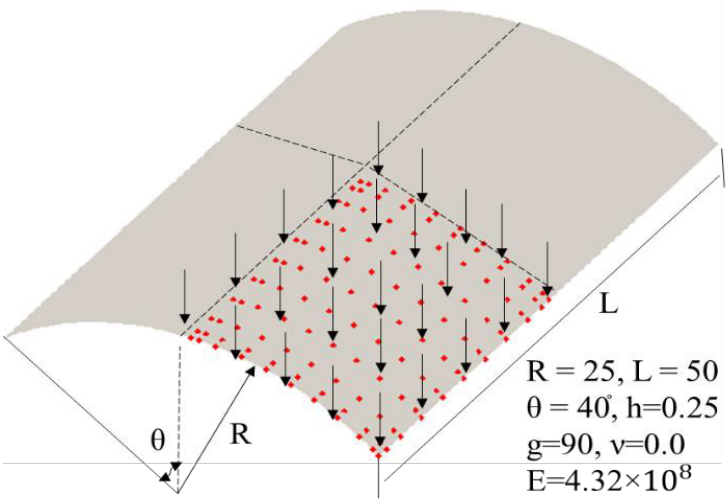
شکل ۳. مقایسه رفتار همگرایی جابجایی پوسته نیمکره برای درجات مختلف توابع نربز

Fig. 3. Comparison of deformation convergence behavior of hemispherical shell for various order of the NURBS

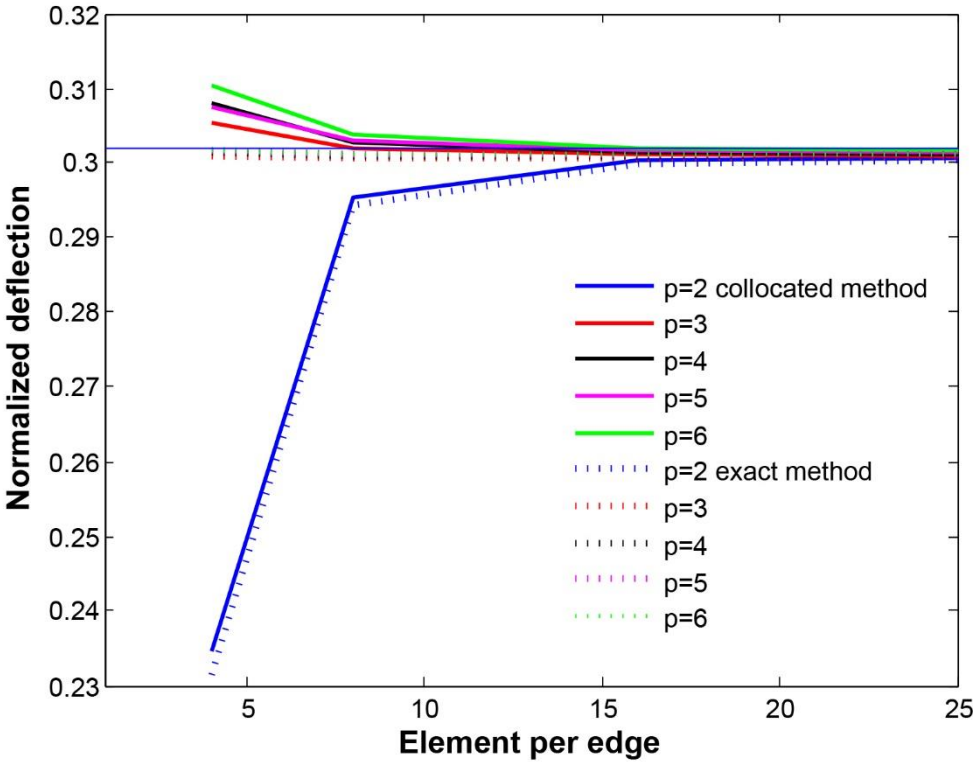


شکل۴. کانتور تغییر مکان شعاعی برای نیمکره مدل‌سازی شده تحت بارهای شعاعی نقطه‌ای

Fig. 4. Contour plot of the radial deflection for modelled hemisphere subjected to radial forces



شکل ۵. مدل ۱/۴ بام اسکوردلیس- لو تحت وزن خودش
Fig. 5. A quarter model of Scordelis-Lo roof subjected to vertical gravity

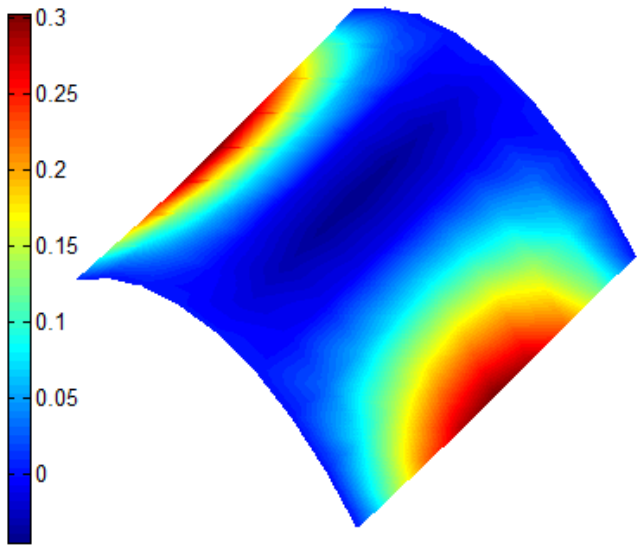


شکل ۶. مقایسه رفتار همگرایی جابجایی بام اسکوردلیس- لو برای درجات مختلف توابع نربز
Fig. 6. Comparison of deformation convergence behavior of Scordelis-Lo roof for various order of the NURBS

بدست آمد، برای $p>2$ اثر قفل شدگی حذف شده‌است. کانتور تغییر مکان عمودی برای پوسته بام اسکوردلیس- لو تحت وزن خودش حاصل از فرمول‌بندی ارائه شده، در شکل ۷ نشان داده شده است.

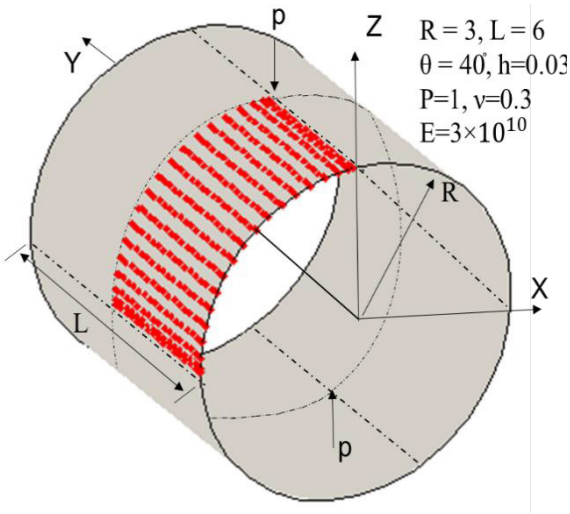
۴-۳- استوانه تحت فشار با تکیه‌گاه صلب

استوانه تحت دو بار متمرکز درراستای شعاعی و مخالف یکدیگر در وسط بالا و پایین قرار گرفته است. دو انتهای آن با تکیه گاه صلب مقید شده‌اند، به‌طوریکه درجات آزادی چرخشی محور مماس بر لبه‌ها



شکل۷. کانتور تغییرمکان عمودی برای پوسته بام اسکوردلیس- لو تحت وزن خودش

Fig. 7. Contour plot of the vertical deflection for modelled Scordelis-Lo roof subjected to vertical gravity



شکل ۸. هندسه استوانه تحت فشار با تکیه‌گاه صلب و شبکه نقاط کنترلی برای مدل ۱/۸

Fig. 8. An eighth model of pinched cylinder subjected to point load

و درجات آزادی جابجایی محوری روی مرز آزاد هستند.

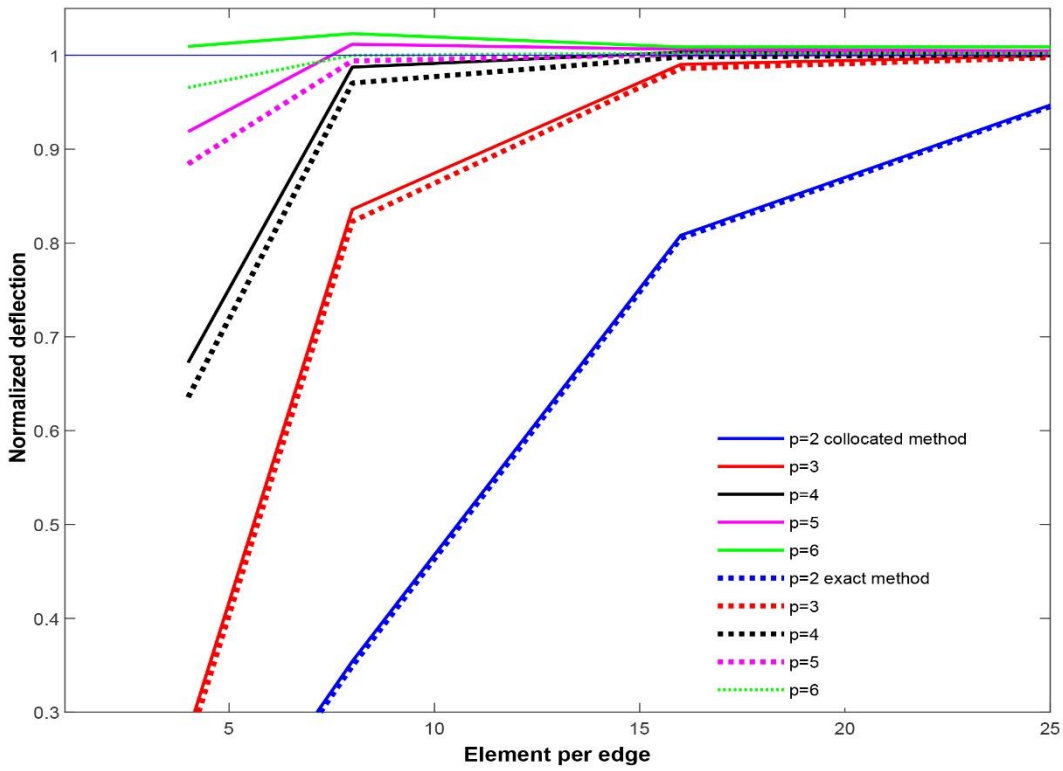
این مورد یک مسئله بحرانی برای سنجش قابلیت المان پوسته در تغییر شکل‌های خمشی و غشایی بویژه در نزدیکی نقاط اعمال بار است. نتایج آن یک رفتار غالب خمشی را همراه قفل شدگی غشایی و برشی نشان داده است. به خاطر تقارن در هندسه و بارگذاری، تنها یک هشتم سازه با اعمال شرایط مرزی مناسب مدل‌سازی شده‌است که در شکل ۸ شبکه نقاط کنترلی مدل یک هشتم روی کل سازه نشان داده شده‌است. نمودار همگرایی تغییر مکان عمودی نقطه زیر بار که با مقدار حل تحلیلی آن بی‌بعد شده‌است، در شکل ۹ برای درجات مختلف p ارائه شده‌است. برای درجات پایین توابع نربز مشکل قفل‌شدگی دقت نتایج را به شدت تحت تأثیر قرار داده است که برای درجات بالاتر اثر قفل شدگی کمتر است. رفتار همگرایی برای نتایج بدست آمده از روش دقیق محاسبه بردارها، روند منظمی را با افزایش درجه توابع نشان می‌دهد و مقادیر برای همه درجات از پایین به جواب دقیق همگرا شده‌اند.

کانتور تغییر مکان شعاعی برای پوسته استوانه‌ای تحت فشار بدست آمده از حل آیزوژئومتریک حاصل از فرمول‌بندی ارائه شده در شکل ۱۰ نشان داده شده‌است.

۴-۴- پوسته با انحنای متغیر

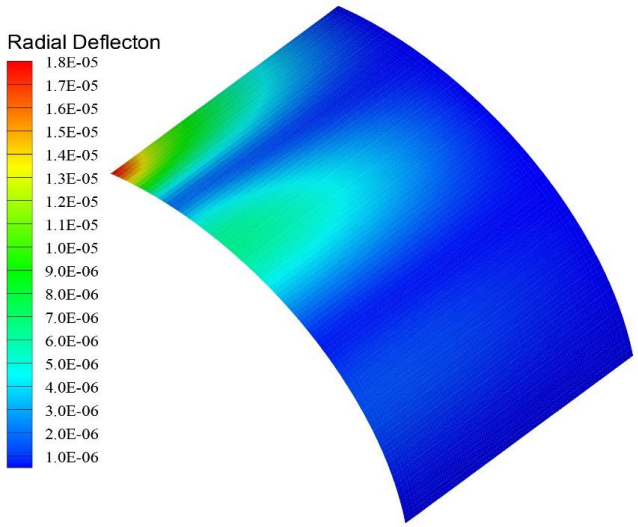
به‌منظور بررسی کارایی روش ارائه شده، به عنوان آخرین مثال پوسته با انحنای متغیر در نظر گرفته شده‌است. هندسه پوسته مدل‌سازی شده به همراه نقاط کنترلی در شکل ۱۱ ارائه شده‌است.

مختصات نقاط کنترلی و مقادیر وزن‌ها در مرجع[۲۹] ذکر شده است. سازه تحت اثر بار یکنواخت ۱۰۰عرضی در راستای قائم قرار گرفته‌است و در چهار گوشه خود توسط تکیه گاه ساده مقید شده است. ضخامت پوسته در همه نقاط پوسته برابر $t = ۰/۳$ در نظر گرفته شده‌است. ضریب پوآسون و مدول الاستیسیته در جدول مشخصات مواد ذکر شده‌اند. به منظور بررسی رفتار همگرایی، شبکه‌بندی با تعداد المان‌های ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ در هر جهت درنظر گرفته شده‌است. مقدار بیشینه جابجایی در راستای قائم برای درجات مختلف توابع نربز با مرجع [۲۹] مقایسه شده‌است. لازم به ذکر است که در مرجع مذکور از فرمول‌بندی ارائه شده توسط کنگ و یون [۲۷] استفاده شده‌است که در آن بردارهای گرهی مستقیماً در نقاط گوسی محاسبه شده‌اند. شکل ۱۲ رفتار همگرایی برای جابجایی بیشینه در راستای قائم را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، مقدار بیشینه جابجایی برای درجات مختلف نربز مشابه مرجع [۲۹]به مقدار ۰/۹۸



شکل ۹. مقایسه رفتار همگرایی جابجایی پوسته استوانه‌ای برای درجات مختلف توابع نربز

Fig. 9. Comparison of deformation convergence behavior of cylinder shell for various order of the NURBS

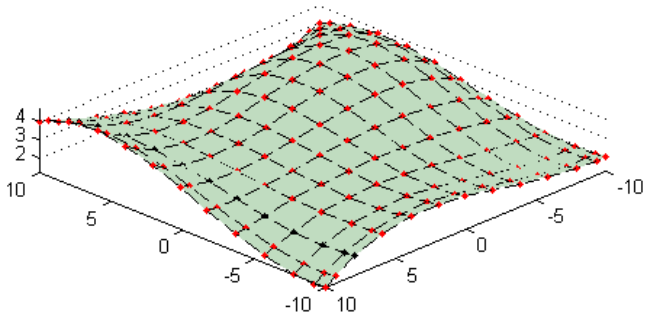


شکل۱۰. کانتور تغییر مکان شعاعی برای مدل پوسته استوانهای تحت بار نقطه‌ای

Fig. 10. Contour plot of the radial deflection for modelled cylinder shell subjected to point load

همگرا شده‌است. دقت بالای همگرایی در شبکه‌بندی درشت همانند مثال‌های قبلی کارایی روش ارائه شده را نشان می‌دهد.

در ادامه، کانتور جابجایی در راستای قائم، برای پوسته با شکل

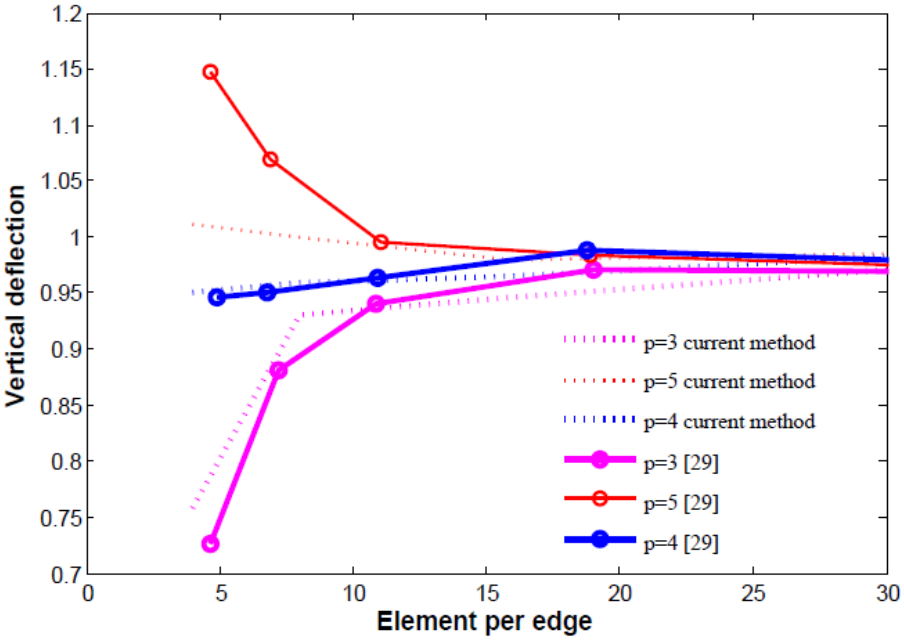


شکل ۱۱. مدل پوسته با شکل دلخواه و شبکه نقاط کنترلی

Fig. 11. The free form shell model and net of control points

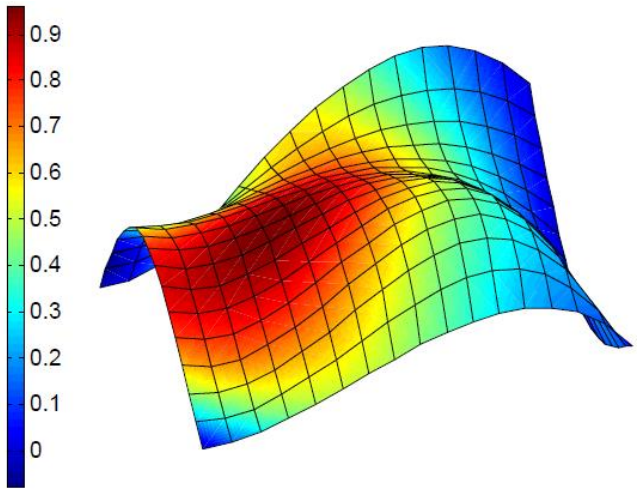
آزاد در شکل ۱۳ ارائه شده‌است.

در انتها به منظور مقایسه زمان حل دستگاه معادلات تعریف شده در نقاط گریویل و گوسی، برای همه مثال‌های حل شده، شبکه نقاط کنترلی (۱۴×۱۴) و درجات توابع پایه ۵و۴و۳= p در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به جابجایی‌ها و زمان حل در جدول ۲ ارائه شده‌است. همان طور که مشاهده می‌شود پاسخ بدست آمده برای جابجایی نقاط تحت بار، با استفاده از دو روش مذکور و برای همه درجات کاملاً یکسان است در حالیکه نسبت زمان حل در روش دوم



شکل ۱۲. مقایسه رفتار همگرایی جابجایی برای پوسته با شکل آزاد برای درجات مختلف نربز

Fig. 12. Comparison of deformation convergence behavior of free form shell for various order of the NURBS



شکل۱۳. کانتور تغییر مکان عمودی برای پوسته با شکل آزاد تحت بار یکنواخت عرضی

Fig. 13. Contour plot of the vertical deflection for free form shell subjected to transversal uniform load

به زمان حل در روش اول کمتر از ۰/۱ است. همانگونه که در مرجع [۲۳]دارنیچ نتیجه‌گیری کرده‌است، اصولاً هنگامی‌که بردارها از طریق حل دستگاه روی کل وصله محاسبه می‌شوند دقیق هستند که به نظر می‌رسد دلیل یکسان بودن نتایج جابجایی‌ها باشد. در واقع استفاده از نقاط گریویل، منجر به حذف معادلات اضافی می‌شود. با مقایسه زمان محاسبه بردارها، می‌توان نتیجه گرفت که پیشنهاد استفاده از نقاط بهینه گریویل جهت تعریف دستگاه معادلات در این پژوهش، انتخاب مناسبی به‌ویژه برای مسائل با حجم محاسبات زیاد است.

به‌منظور صحه‌سنجی و مقایسه نتایج در مثال‌های حل شده، مقادیر جابجایی برای نقطه اعمال بار در شبکه‌بندی مختلف و برای درجات مختلف توابع نربز، مشابه جداول ارائه‌شده در مرجع[۱۴]، ارائه شده است. لازم به ذکر است که جداول ارائه شده در مرجع مذکور حاوی مقادیر جابجایی نقاط اعمال بار برای درجات توابع $p=۲,۳$ با پیوستگی بین المانی $c^{۰}$،$c^{۱}$ و $c^{۲}$ و همچنین برای انتگرال‌گیری کامل و انتخابی هستند. با توجه به اینکه در این پژوهش از توابع نربز با بیشینه پیوستگی در سطح میانی پوسته استفاده شده، نتایج مرتبط با بیشینه پیوستگی (پیوستگی $c^{۱}$ برای توابع درجه ۲ و پیوستگی $c^{۲}$ برای توابع درجه ۳) و همچنین انتگرال‌گیری کامل، با نتایج کار حاضر در جداول ۳ و۴ مقایسه شده‌اند. نتایج بدست آمده در پژوهش حاضر تطابق خوبی با نتایج کار آدامز و همکاران [۱۴] دارند که برای شبکه‌بندی ریزتر نقاط کنترلی کاملاً به یک مقدار همگرا شده‌اند.

۵- نتیجه‌گیری

فرمول‌بندی پوسته مبتنی بر تئوری میندلین- رایزنر برای

جدول ۲. مقایسه جابجایی‌ها و زمان محاسبه بردارها در دو روش مذکور
Table 2. Comparison of deflections and time to calculate vectors for 2 mentioned methods

استوانه تحت فشار با تکیه‌گاه صلب				
درجه توابع	روش ۲		روش ۱	
	زمان (ثانیه)	جابجایی	زمان (ثانیه)	جابجایی
۳	۰/۳۸	$-۱/۷۵۶\times۱۰^{-۵}$	۳/۹۵	$-۱/۷۵۶\times۱۰^{-۵}$
۴	۰/۴۸	$-۱/۸۲۸\times۱۰^{-۵}$	۵/۴۱	$-۱/۸۲۸\times۱۰^{-۵}$
۵	۰/۵۱	$-۱/۸۳۴\times۱۰^{-۵}$	۷/۲۱	$-۱/۸۳۴\times۱۰^{-۵}$
نیمکره سوراخ‌دار تحت نیروهای متمرکز متعامد				
درجه توابع	روش ۲		روش ۱	
	زمان (ثانیه)	جابجایی	زمان (ثانیه)	جابجایی
۳	۰/۴	۰/۰۹۲۵	۳/۸۷	۰/۹۲۵
۴	۰/۴۲۶	۰/۰۹۳۴	۵/۴۱	۰/۰۹۳۴
۵	۰/۵۱۶	۰/۰۹۳۶	۷/۵۹	۰/۰۹۳۶
پوسته بام اسکوردلیس- لو				
درجه توابع	روش ۲		روش ۱	
	زمان (ثانیه)	جابجایی	زمان (ثانیه)	جابجایی
۳	۰/۴	۰/۳۰۱۱	۳/۷۸	۰/۳۰۱۱
۴	۰/۴۳	۰/۳۰۱۸	۶/۰۴	۰/۳۰۱۸
۵	۰/۴۵	۰/۳۰۲۰	۷/۱۶	۰/۳۰۲۰
پوسته با انحنای متغیر				
درجه توابع	روش ۲		روش ۱	
	زمان (ثانیه)	جابجایی	زمان (ثانیه)	جابجایی
۳	۰/۳۹	۰/۹۳۷	۳/۵۶	۰/۹۳۷
۴	۰/۴۲	۰/۹۶۵۲	۵/۱۵	۰/۹۶۵۲
۵	۰/۴۶	۰/۹۸۶۵	۷/۲۴	۰/۹۸۶۵

جدول ۳. مقایسه جابجایی عمودی نقطه اعمال بار برای پوسته نیمکره (cm)
Table 3. comparison of vertical deflection at the loading point for hemisphere shell

تعداد المان / درجه توابع		**۲**	**۴**	**۸**	**۱۶**	**۳۲**
۲	پژوهش حاضر	۰/۰۸۶	۰/۰۱۴	۱/۹۴	۷/۵۱	**۹/۱۹**
	آدامز و همکاران [۱۴]	۰/۰۸۸	۰/۰۱۴۰۷	۱/۹۴۳۷	۷/۵۱	**۹/۱۹۴**
۳	پژوهش حاضر	۰/۱۹	۳/۹۱	۹/۰۱	۹/۳۳	**۹/۳۶**
	آدامز و همکاران [۱۴]	**۰/۱۹۵۴**	**۳/۸۹**	**۹/۰۲۵**	**۹/۳۳**	**۹/۳۵**

تحلیل سازه‌های پوسته‌ای با شکل و انحنای دلخواه در چارچوب آیزوژئومتریک بیان شده است. به منظور مدل‌سازی دقیق، از توابع نربز و تکنیک پالایش K، در سطح میانی پوسته استفاده شده‌است. از آنجا که در فرمول‌بندی پوسته، به تعریف دستگاه مختصات محلی در هر نقطه روی سطح فیزیکی نیاز است و با توجه به اینکه در فرمول‌بندی مبتنی بر نربز، نقاط کنترلی روی سطح فیزیکی قرار نمی‌گیرند، لازم

جدول ۴. مقایسه جابجایی عمودی نقطه اعمال بار برای پوسته‌ی استوانه‌ای(μm)
Table 4. Comparison of vertical deflection at the loading point for cylinder shell

تعداد المان / درجه توابع		۲	۴	۸	۱۶	۳۲
۲	پژوهش حاضر	۰/۰۰۶۵	۰/۰۱۷۸۳	۰/۰۶۴۶	۰/۱۴۸۹	**۰/۱۸۰۴**
	آدامز و همکاران[۱۴]	۰/۰۰۷۵	۰/۰۱۷۹	۰/۰۶۸۶	۰/۱۴۹	**۰/۱۸**
۳	پژوهش حاضر	۰/۰۱۲۳	۰/۰۴۸۸	۰/۱۵۲۲	۰/۱۸۲۴	**۰/۱۸۴۹**
	آدامز و همکاران[۱۴]	**۰/۰۱۲۹**	**۰/۰۵۷۳**	**۰/۱۵۲۳**	**۰/۱۸۲۴**	**۰/۱۸۴۹**

است بردارها به‌نحو مناسبی تعریف شوند. از این رو در روش‌های معمول هر نقطه کنترلی از طریق یک نگاشت با نقطه‌ای روی سطح فیزیکی نگاشته می‌شود و بردارها در این نقطه تعریف می‌شوند. این نگاشت منجر به خطا می‌شود و تنها با انتخاب شبکه نقاط کنترلی به اندازه کافی ریز این خطا پوشش داده می‌شود. در این مقاله بردارهای جهت در نقاط کنترلی با استفاده از حل دستگاه معادلات تعریف شده روی کل وصله و در فواصل گریویل بدست می‌آیند. با توجه به تناظر یک به یک موجود بین نقاط کنترلی و گریویل، تعریف دستگاه در نقاط گریویل منجر به یکتایی حل و کاهش زمان حل به دلیل حذف معادلات اضافی می‌شود. از طرفی در روش‌های معمول تعریف بردارها در نقاط متناظر نقاط کنترلی روی سطح فیزیکی پوسته، با انتخاب شبکه بندی درشت و درجات بالای توابع نربز، خطای حل به دلیل افزایش خطای بردارهای درونیابی شده افزایش می‌یابد. در حالیکه در نتایج بدست آمده در روش حاضر این مشکل دیده نمی‌شود و امکان استفاده از شبکه‌بندی درشت با توابع پایه درجه بالا را فراهم می‌کند. مطالعه رفتار همگرایی برای جابجایی‌های نقاط تحت بار در مسائل موسوم به مسائل بغرنج در پوسته این نتیجه را تأیید می‌کند. به‌منظور صحه‌سنجی نتایج و بررسی دقت روش استفاده شده، جابجایی‌ها برای مسئله نیمکره و استوانه با تکیه‌گاه صلب، با مراجع دیگر مقایسه شدند که از تطابق بالایی برخوردارند. همچنین با مقایسه زمان محاسبه بردارها، می‌توان نتیجه گرفت که پیشنهاد استفاده از نقاط بهینه گریویل جهت تعریف دستگاه معادلات در این پژوهش، انتخاب مناسبی به ویژه برای مسائل با حجم محاسبات زیاد مانند حل‌های غیرخطی است.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

A	دستگاه توابع پایه
a	ضخامت پوسته در هر نقطه
C	ماتریس خواص مواد در دستگاه کلی
C'	ماتریس خواص مواد در دستگاه محلی
F	ماترس نیرو
J	ماتریس ژاکوبین
K	ماتریس سختی
l,m,n	مولفه‌های بردارهای جهتی
N	توابع پایه بی اسپیلاین
R	تابع نربز
r,s	مختصات فضای پارامتری نربز
T	ماتریس انتقال
u,v,w	درجات آزادی انتقالی
V_1,V_2,V_3	بردارهای جهت
w	مقادیر وزنی نقاط کنترلی

علائم یونانی

ζ,η,ξ	مختصات فضای انتگرال‌گیری
α	درجه آزادی چرخشی
β	درجه آزادی چرخشی

بالانویس

Gr	نقاط گریویل
Cp	نقاط کنترلی

۶- مراجع

[1] J. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 2)194) (2005) 4195-4135.

[2] J. Cottrell, T.J.R. Hughes, A. Reali, Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis, Comput.Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) –4160 4183

[3] Y. Bazilevs, L. Beir˜ao da Veiga, J. Cottrell, T.J.R. Hughes., G. Sangalli, Isogeometric analysis: Approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. Math. Mod. Methods Appl. Sci. 16(2006), 60-1.

[4] T. W. Sederberg, J. Zheng, A. Bakenov, A. Nasri, T-splines and T-NURCCSs, ACM Transactions on Graphics, 3)22) (2003). 484–477.

[5] Y. Bazilevs, V. M Calo. J. A Cottrell, J. A Evans, T. J. R Hughes, S. Lipton, T. W Sederberg,. Isogeometric analysis using T-splines. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(5) (2010), 229-263.

[6] R. Echter, M. Bischoff, Numerical efficiency, locking and unlocking of NURBS finite elements, Computer Method sin Applied Mechanics and Engineering, 1)199) 2010 382–374.

[7] L. Beirão Da Veiga, T. J. R. Hughes, J. Kiendl, C. Lovadina, J. Niiranen, A. Reali and H. Speleers, A locking-free model for Reissner–Mindlin plates: Analysis and isogeometric implementation via NURBS and triangular NURPS, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 25(8) 2015 1519-1551.

[8] R. Bouclier, T. Elguedj, A. Combescure, Efficient isogeometric NURBS-based solid-shell elements: Mixed formulation and B-bar method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1)267) 110-86 2013.

[9] R. Bouclier, T. Elguedj, A. Combescure, An isogeometric locking-free NURBS-based solid-shell element for geometrically nonlinear analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 101(10) 2015 777-808.

[10] J. F. Caseiro, R. A. F. Valente, A. Reali, J. Kiend, F. Auricchio, R. J. Alves de Sousa. On the assumed natural strain method to alleviate locking in solid-shell NURBS-based finite elements, Computational Mechanics, 53 (2014) 1353–1341.

[11] G. Kikis, W. Dornisch, S. Klinkel, Isogeometric Reissner-Mindlin shell analysis - employing different control meshes for displacements and rotations, Appl. Math. Mech. 16(1) (2016) 209 – 210.

[12] Q. Hu, Y. Xia, S. Natarajan, A. Zilian, P. Hu, Stéphane P.A. Bordas, Isogeometric analysis of thin Reissner-Mindlin plates and shells: locking phenomena and B-bar method, Comput Mech. 65 (2020) 1341–1323.

[13] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug, H. Maitournam, Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part I: Beams, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 279 (2014) 1- 28.

[14] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug, H. Maitournam, Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements. Part II: Plates and shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 284(1) (2015) 106-137

[15] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug, H. Maitournam, A Reduced Integration for Reissner-Mindlin Non-linear Shell Analysis Using T-Splines, in: Isogeometric Analysis and Applications, Springer, 125-103 2015.

[16] J. Kiendl, K. U. Bletzinger, J. Linhard, R. Wüchner, Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198 (2009) 3914–3902.

[17] N. Nguyen-Thanh, J. Kiendl, H. Nguyen-Xuan, R. Wüchner, K.-U. Bletzinger, Y. Bazilevs, T. Rabczuk, Rotation free isogeometric thin shell analysis using PHT-splines, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 200 (2011) 3424–3410.

[18] D. J. Benson, Y. Bazilevs, M. C. Hsu, T. J. R. Hughes, A large

deformation, rotation-free, isogeometric shell, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 200 (2011) 1378–1367.

[19] D. J. Benson, Y. Bazilevs, M. C. Hsu, T. J. R. Hughes, Isogeometric shellanalysis: The Reissner–Mindlin shell, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199 (2010) 289–276.

[20] D. J. Benson, S. Hartmann, Y. Bazilevs, M. C. Hsu, T. J. R. Hughes, Blended isogeometric shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, –133(2013)255 146.

[21] R. Echter, B. Oesterle, M. Bischoff, A hierarchic family of isogeometricshell finite elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 180–170(2013)254.

[22] T. K. Uhm, S. K. Youn, T-spline finite element method for the analysis of shell structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering,4)80) (2009)-507 536.

[23] W. Dornisch, S. Klinkel, B. Simeon, Isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 253 (2013) 504-491.

[24] W. Dornisch, S. Klinkel, Treatment of Reissner–Mindlin shells with kinks without the need for drilling rotation stabilization in an isogeometric frame-work, Comput. MethodsAppl. Mech. Eng.66–35(2014)276.

[25] L. Piegl, W. Tiller, The NURBS book: Monographs in visual communications, Springer Publisher, Berlin, second edition, ISBN: 1997, 6897-1431.

[26] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, The finite element method for solid and structural mechanics. Butterworth-heinemann., (2005).

[27] P. Kang, S. K. Youn, Isogeometric analysis of topologically complex shell structures, Finite Elements in Analysis and Design, 99 (2015) 81-68.

[28] R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. Finite Elements in Analysis and Design, 1(1) (1985) 3–20.

[29] S. Nikoei, B. Hassani, Isogeometric analysis of Free Form Shells and Accurate calculation of direction vectors using Kirchhoff-Love and Reissner-Mindlin theories, JMEUT,218-209 (2020) (4)50 (in Persian).

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

Z. Ghadimi, B. Hassani, Accurate calculation of nodal vectors in isogeometric analysis of shell structures, using Greville points, Amirkabir J. Mech Eng., 53(10) (2022) 5185-5202.

DOI: 10.22060/mej.2021.19614.7070