



## تحلیل کمانش جانبی تیر جدار نازک ساندویچی کامپوزیت-فلز با سطح مقطع متغیر و در نظر گرفتن کرنش‌های غیرخطی

معصومه سلطانی\*، آزاده سلطانی

دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۶  
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۳/۲۳  
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۲۵  
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۶/۰۷

### کلمات کلیدی:

کامپوزیت فلزی-الیافی  
کمانش جانبی-پیچشی  
تیر جدار نازک  
تیر ماهیچه‌ای  
روش مربعات دیفرانسیلی

**خلاصه:** کامپوزیت‌های لایه‌ای الیاف-فلز که از ترکیب لایه‌های فلزی و کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف ساخته می‌شوند، به دلیل وزن کمتر و خواص مکانیکی مناسب‌تر، در صنایع هوایی، دریایی و خودروسازی کاربرد فراوانی پیدا کرده‌اند. در این پژوهش برای اولین بار پایداری جانبی-پیچشی تیر باریک شونده با مقطع I شکل متقارن از جنس کامپوزیت هیبریدی چند لایه الیاف-فلز مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، معادلات پایداری جانبی-پیچشی و شرایط مرزی با به کارگیری مدل ولاسو برای مقاطع جدار نازک باز، تئوری کلاسیک لایه‌ای و با فرض تغییر شکل‌های کوچک تعیین می‌گردند. سپس با استفاده از یک رابطه کمکی دستگاه معادلات حاکم به یک معادله دیفرانسیل مستقل مرتبه چهار برحسب زاویه پیچش تبدیل می‌شود. در ادامه، معادله نهایی با بهره‌گیری از روش عددی مربعات دیفرانسیل و فرضیات این روش حل و مقدار بار کمانش جانبی-پیچشی محاسبه می‌شود. پس از بررسی صحت و دقت روش معرفی شده، اثرات پارامترهای مهم مانند، چیدمان لایه‌ها، زاویه قرارگیری الیاف، جنس الیاف، تغییر ارتفاع جان تیر، محل اعمال بار عرضی و کسر حجمی فلز بر ظرفیت کمانش جانبی تیر جدار نازک با مقطع متغیر و شرایط انتهایی گیردار-آزاد مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان داد که چیدمان بهینه با قرارگیری لایه‌های الیافی سازنده بال تیر با زاویه صفر درجه و لایه‌های الیافی تشکیل دهنده جان با زاویه ۴۵ درجه بین دو ورق آلومینیومی حاصل می‌شود. همچنین ثابت شد که تغییرات درصد حجمی فلز در مقایسه با تغییر ارتفاع جان تیر نیم‌رخ، بار کمانش جانبی را با شدت بیشتری تغییر می‌دهد.

### ۱- مقدمه

از چندلایه‌های هیبریدی هستند که به صورت لایه گذاری و از به هم چسباندن لایه‌های فلزی و کامپوزیتی تقویت شده با الیاف ساخته می‌شوند. در این مواد خصوصیات مطلوب فلزات همانند چکش‌خواری، نرمی و مقاومت در برابر ضربه با ویژگی‌های کامپوزیت نظیر تحمل خستگی، مقاومت در برابر خوردگی، استقامت و سفتی بالا ترکیب شده است. در نتیجه مقاومت در برابر آتش، سختی بالا، شکل‌پذیری و خستگی بهبود یافته از مهم‌ترین مزایای این مواد هستند [۱ و ۲]. در حال حاضر برای ساخت این کامپوزیت‌ها از فلزاتی مانند تیتانیوم، آلومینیوم، منیزیم و در بعضی موارد فولادهای با مقاومت بالا و عموماً از الیافی مانند آرال، کربن، شیشه و کولار در لایه‌های کامپوزیتی این

از جمله المان‌های سازه‌ای که به‌طور گسترده در بسیاری از زمینه‌ها از جمله مهندسی سازه، هوافضا و خودروسازی مورداستفاده قرار گرفته‌اند، می‌توان به مقاطع جدار نازک اشاره کرد. استفاده از این اعضا به علت توانایی آن‌ها در مصرف اقتصادی مصالح و بهینه‌سازی وزن سازه، در زمینه‌های ذکر شده رو به افزایش است. امروزه با پیشرفت روش‌های تولید و مونتاژ، ساخت اعضا با نیم‌رخ جدار نازک از مصالح مختلف مانند فولاد، چوب، مواد مدرج تابعی و کامپوزیت چندلایه امکان پذیر شده است. کامپوزیت‌های لایه‌ای الیاف-فلز نوعی

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: msoltani@kashanu.ac.ir



مصالح استفاده می‌گردد. با توجه به کاربرد و اهمیت بسیار نیم‌رخ‌های جدار نازک و المان‌های چندلایه الیاف-فلز، تاکنون مطالعات تجربی و عددی مختلفی در زمینه بررسی رفتار این اعضا صورت گرفته که چند نمونه از مهمترین کارهای انجام شده در ادامه معرفی شده‌اند.

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و معیار شکست تسای هیل، نام و هوانگ [۳] به منظور بهینه‌سازی چینش لایه‌های پوسته کامپوزیتی چندلایه فلز-الیاف تحت بارگذاری مختلف از الگوریتم ژنتیک استفاده نمودند. تحقیقات آن‌ها نشان داد که در اکثر شرایط بارگذاری، پوسته‌های چندلایه فلز-الیاف در مقابل بارهای تصادفی و پیش‌بینی نشده مقاوم‌تر از پوسته‌های پلیمری تقویت شده با الیاف کربن هستند. بر اساس تئوری کلاسیک لایه‌ای، لی و همکارانش [۴-۷] در پژوهش‌هایی رفتار خمشی، دینامیکی و پایداری تیر با نیم‌رخ جدار نازک باز و بسته ساخته شده از کامپوزیت الیافی چندلایه را به کمک روش اجزای محدود و توابع شکل هرمیتی بررسی کردند. گوپال و کاپانیا [۸] پاسخ دینامیکی تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای تحت اثر بار ناپایستار نقطه‌ای را به روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند. در پژوهش‌هایی جداگانه، نوریک و همکاران [۹] و کاراگیزوا و همکاران [۱۰] پاسخ صفحات ساندویچی متشکل از هسته لانه‌زنبوری و رویه‌های فلزی را تحت اثر بار انفجاری به صورت تجربی و تحلیلی استخراج نمودند. بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، مظفری و جعفری [۱۱] اثر پارامترهای مهم بر روی بار کمانش پوسته‌های استوانه‌ای چندلایه فلز و کامپوزیت را بررسی نمودند.

لزگی نظرگاه و همکاران [۱۲-۱۵] با استفاده از تئوری محلی-عمومی به تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیرهای ساندویچی با مقاطع توپر و یا جدار نازک پرداختند. عسگریان و همکاران [۱۶] در پژوهشی کمانش پیچشی-جانبی تیر ماهیچه‌ای فولادی با مقطع جدار نازک باز نامتقارن را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها بر مبنای تئوری تغییر شکل‌های کوچک معادلات تعادل را استخراج و به کمک روش نیمه تحلیل بسط سری‌های توانی مقدار بار بحرانی را تعیین نمودند. در تحقیقی دیگر و به کمک روش المان محدود، کیم و لی [۱۷] به بررسی رفتار فلاتر و دیورژانس تیر نوع بک با مقطع قوطی شکل و از جنس مواد کامپوزیتی لایه‌ای با چینش نامتقارن پرداختند. محمدآبادی و دانش مهر [۱۸] به بررسی رفتار کمانش میکروتیرهای کامپوزیتی لایه‌ای اولر-برنولی و تیموشنکو بر مبنای تئوری تنش کوپل اصلاح شده

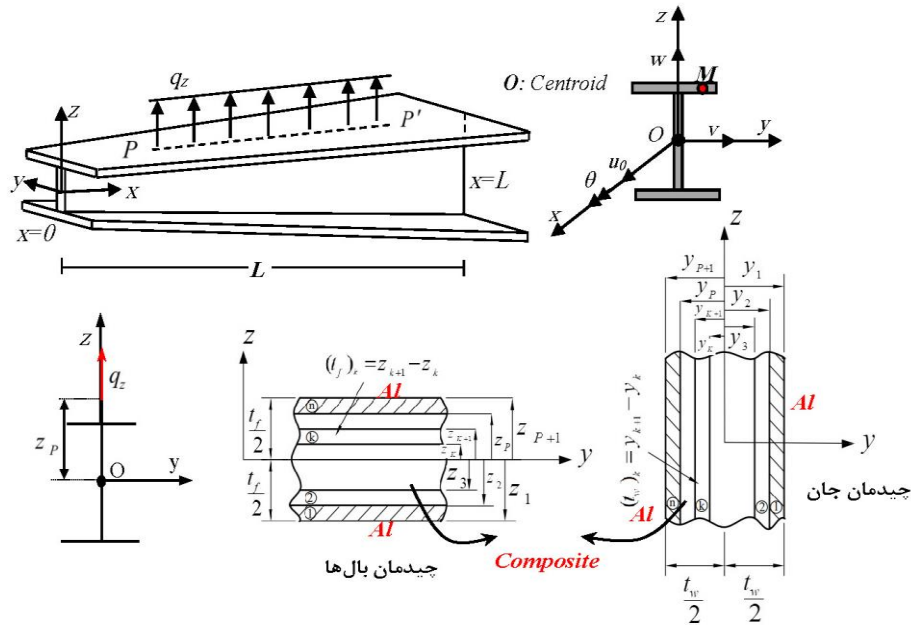
پرداختند، که در این کار اثر برخی عوامل مهم از جمله مقیاس طولی ماده و ضخامت بر روی رفتار میکروتیر کامپوزیتی به صورت جامع بررسی شده است. ملک‌زاده و همکاران [۱۹] با مطالعه رفتار ارتعاشی و پایداری پانل‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر نشان دادند که استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول نتایج دقیقی را ارائه می‌دهد. نگویان و همکاران [۲۰-۲۳] در پژوهش‌هایی رفتار خمشی، دینامیکی و پایداری تیر منشوری با نیم‌رخ جدار نازک باز از جنس مواد مدرج را به کمک روش اجزای محدود بررسی کردند. در این مقالات فرض شده است که خصوصیات مکانیکی مصالح در راستای ضخامت با توجه به قانون توزیع توانی تغییر می‌کند. راویشانکار و همکاران [۲۴] به کمک مدل‌سازی در نرم افزار اجزای محدود انسیس تأثیر جنس الیاف، شاخص کسر حجمی اختلاط، نسبت ابعاد و سرعت زاویه‌ای را بر روی ارتعاشات آزاد تیرهای دوار ساخته شده از کامپوزیت لایه‌ای الیاف-فلز و یا ماده مدرج تابعی به دقت مورد مطالعه قرار دادند. بیدگلی و حیدری رارانی [۲۵] بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات دیفرانسیل حاکم بر کمانش محوری پوسته استوانه‌ای چند لایه الیاف-فلز را تعیین و به کمک روش تحلیلی ناویر این معادلات را حل نمودند. نتایج آن‌ها نشان داد که نحوه چیدمان لایه‌های استوانه از جنس الیاف-فلز تأثیر قابل توجهی بر ظرفیت کمانشی آن دارد. به کمک روش المان محدود، آراجو و همکاران [۲۶] به تحلیل دینامیکی ورق‌های ساندویچی با هسته‌ای از جنس مواد نرم و لایه‌های کامپوزیتی پیزو الکتریک پرداختند. همچنین آن‌ها حالت‌های مختلف از کاربرد هسته‌های نرم و لایه‌های پیزوالکتریک که بعنوان حسگر و سنسور عمل می‌کنند را بر رفتار دینامیکی مورد بررسی قرار دادند. بانات و همکاران [۲۷-۳۱] با استفاده از نرم افزار المان محدود انسیس به بررسی رفتار کمانشی تیرهای جدار نازک کامپوزیتی چند لایه الیاف-فلز با مقاطع C و Z شکل تحت نیروی محوری فشاری پرداختند. آن‌ها تأثیر چیدمان لایه‌ها را بر ظرفیت فشاری مورد بررسی قرار دادند و مقادیر حاصل از مدل‌سازی در نرم افزار را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند. بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی سینوسی دو متغیره، عارفی و زنگور [۳۲] رفتار نانوپلیت ساندویچی با رویه‌های پیزوالکتریک مستقر بر بستر ویسکو-پاسترناک را تحت بارهای مکانیکی و حرارتی بررسی نمودند. آن‌ها در تحقیقی دیگر [۳۳] با بکارگیری دو تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی و

دولایه آلومینیومی و یک هسته از جنس مواد مدرج تابعی متخلخل ساخته شده، پرداخت. او در این پژوهش، معادلات پایداری را بر اساس مدل ولاسو و تئوری کلاسیک لایه‌ای به کمک روش انرژی استخراج کرد.

مرور دقیق تحقیقات انجام شده قبلی در زمینه تحلیل رفتار اعضای ساخته شده از کامپوزیت‌های لایه‌ای الیاف-فلز نشان می‌دهد که اکثر پژوهش‌ها متمرکز بر پوسته‌های استوانه‌ای بوده و تنها چند مورد تحقیق آزمایشگاهی در خصوص بررسی ناپایداری خمشی تیرهای جدار نازک تحت بار محوری فشاری ارائه شده است [۳۱-۳۲]. لازم به ذکر است که در تیرهای جدار نازک با مقطع متقارن با بعلت تفاوت قابل توجه سختی خمشی و پیچشی نیم‌رخ تحت بارگذاری محوری فشاری و یا بار عرضی امکان وقوع مودهای متفاوت ناپایداری وجود دارد. در این اعضا با اعمال بار محوری فشاری به مرکز سطح، کمانش خمشی و یا پیچشی رخ می‌دهد. اما در صورت اعمال بار فشاری خارج از مرکز سطح امکان ناپایداری تحت مود خمشی-پیچشی وجود دارد. پدیده کمانش جانبی-پیچشی از دیگر فرم‌های ناپایداری این اعضا است که تحت بارگذاری عرضی و بدون اعمال بار فشاری رخ می‌دهد. در صورتی که بال فشاری تیر با مقطع جدار نازک باز در فواصل مناسب توسط تکیه‌گاه‌های جانبی کافی مهار نشده باشد، تحت تنش‌های فشاری ناشی از لنگر خمشی حول محور قوی، دچار کمانش جانبی می‌شود. از طرفی بال کششی تمایلی به کمانش نداشته و از این رو کمانش بال فشاری همراه با پیچش مقطع خواهد بود.

در حالی که علیرغم کاربرد گسترده و رو به افزایش تیرهای جدار نازک ساندویچی کامپوزیت-فلز در سازه هواپیماها و فضاپیماها همچنین در پره توربین‌های بادی، بررسی رفتار کمانش جانبی این المان‌ها تا به امروز در ادبیات فنی گزارش نشده است. با توجه به این نکته در پژوهش حاضر، پایدار جانبی-پیچشی تیر ماهیچه‌ای با مقطع متقارن از جنس کامپوزیت چند لایه الیاف-فلز مورد مطالعه قرار گرفته است. مراحل کار بدین صورت است که در ابتدا با استفاده از مدل ولاسو برای مقاطع جدار نازک باز، تئوری کلاسیک لایه‌ای و روش انرژی معادلات دیفرانسیل پایداری حاکم بر عضو استخراج می‌گردند. سپس با معرفی یک عبارت کمکی، دستگاه معادلات پایداری به یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهار مستقل برحسب زاویه پیچش تبدیل می‌شود.

تغییر شکل برشی مرتبه اول، پاسخ خمشی و ارتعاش آزاد میکرو تیر ساندویچی متکی بر فونداسیون ویسکو-وینکلر-پاسترناک را مطالعه نمودند. با استفاده از تئوری کلاسیک لایه‌ای و صرفنظر از تغییر شکل برشی، علی دوست و رضایی‌پژند [۳۴] به بررسی ناپایداری دینامیکی و استاتیکی تیرهای کامپوزیتی چند لایه شکافدار تحت اثر نیروی دنبال کننده پرداختند. طاهری بهروز و همکاران [۳۵] و [۳۶] کمانش پوسته ساده کامپوزیتی با و بدون گشودگی را با اعمال اثرات نقص هندسی و با استفاده از هر دو روش تجربی و عددی مطالعه نمودند. بر اساس تئوری کلاسیک لایه‌ای و یک روش نیمه تحلیلی، احمدی و راشید [۳۷] پایداری جانبی-پیچشی تیر جدار نازک دو سر مفصل با مقطع مستطیلی از جنس کامپوزیت لایه‌ای را بررسی کردند. بر مبنای تئوری تقریبی مرتبه اول لاو، مهندس و همکاران [۳۸] معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای از جنس کامپوزیت لایه‌ای فلز-الیاف را استخراج کردند. در این مقاله، تأثیر پارامترهای مختلفی همچون خصوصیات مصالح لایه‌ها، چیدمان لایه‌ها، زاویه الیاف، شرایط مرزی، تعداد مودهای ارتعاشی و کسر حجمی فلز را به دقت مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها مشاهده کردند که درصد حجمی فلز و چیدمان لایه‌ها اثر قابل توجهی بر پاسخ دینامیکی پوسته دارد. قاسمی و مهندس [۳۹] رفتار ارتعاشی استوانه چندلایه الیاف-فلز و چندلایه الیافی تحت شرایط مرزی مختلف را با یکدیگر مقایسه کردند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان داد که در تمامی مودهای ارتعاشی، فرکانس پوسته استوانه کربن-اپوکسی از شیشه-اپوکسی بیشتر است، اما این روند برای استوانه‌های الیاف-فلز ثابت نیست. در پژوهشی، اسدی و همکاران [۴۰] به کمک روش المان محدود به مطالعه رفتار کمانشی تیرهای جدار نازک چند لایه تحت بارگذاری محوری و عرضی و شرایط انتهایی پرداختند. آقا محمدی و اسلامی‌فارسانی [۴۱] به صورت تجربی اثر مقادیر مختلف نانولوله‌های کربنی چندجداره را بر خصوصیات خمشی کامپوزیت‌های هیبریدی ساخته شده از لایه‌های آلومینیوم ۲۰۲۴ و اپوکسی تقویت شده با الیاف بازالت را بررسی نمودند. در مطالعه‌ای دیگر و با استفاده از تست خمش و ضربه، آن‌ها [۴۲] به بررسی تأثیر نانولوله کربنی چند جداره بر رفتار استاتیکی و دینامیکی کامپوزیت‌های لایه‌ای الیاف-فلز پرداختند. اخیراً، سلطانی [۴۳] به بررسی کمانش خمشی-پیچشی یک تیر جدار نازک ساندویچی که بال و جان مقطع آن از



شکل ۱. تیر جدار نازک ماهیچه‌ای با سطح مقطع متقارن تحت بار عرضی: سیستم مختصات، مشخصات مقطع و چیدمان بال و جان نیم‌رخ

Fig. 1. FML beam with variable doubly symmetric I-section under external distributed loads: Coordinate system, notation for displacement parameters, definition of load eccentricities, and web and flanges lay-up arrangement

## ۲- فرمول‌بندی مسئله

یک تیر جدار نازک با نیم‌رخ متقارن ساخته شده از چندلایه کامپوزیت-فلز که تحت بار عرضی قرار دارد، در شکل ۱ نشان داده شده است. در پژوهش حاضر فرض می‌شود که ارتفاع جان نیم‌رخ I-شکل به صورت خطی از  $d_L$  در انتهای سمت چپ به  $d_R = \alpha d_L$  در انتهای سمت راست تغییر می‌کند. همچنین فرض شده که پهنای بال در طول عضو دارای تغییرات پیوسته و خطی است، بطوریکه از  $b_L$  به  $b_R = \beta b_L$  تغییر می‌کند. بنابراین توابع حاکم بر تغییرات ارتفاع جان و پهنای بال مقطع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$d = d_L (\alpha - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + d_L \quad (1-الف)$$

$$b = b_L (\beta - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + b_L \quad (1-ب)$$

که  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب معرف پارامتر تغییر ارتفاع جان و پهنای بال مقطع متقارن I شکل هستند. در صورتیکه ابعاد مقطع در طول عضو ثابت باشد هر دو پارامتر برابر یک هستند. در شرایطی که مقطع باریک شونده باشد پارامترها در بازه  $[0/1-1]$  تغییر می‌کنند. اما در صورت افزایش پهنای بال و یا ارتفاع جان، پارامترها را بایستی بزرگتر

در ادامه با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، معادله نهایی حاکم بر پایداری جانبی-پیچشی گسسته و با اعمال شرایط مرزی حاکم بر آن بار کمانشی محاسبه می‌گردد. با توجه به اطلاعات نویسندگان، در پژوهش‌های پیشین تاکنون از معادله نهایی ارائه شده در این تحقیق برای تحلیل رفتار تیرهای کامپوزیتی چند لایه با مقطع جدار نازک باز استفاده نشده است. شایان ذکر است که فرمول‌بندی استخراج شده در مقایسه با روش‌های موجود دیگر از محاسبات ریاضی بسیار ساده‌تری برخوردار است. در نتیجه زمان حل بسیار کاهش یافته که این مزیت اصلی روابط ارائه شده است [۴۴ و ۴۵].

در پایان، برای اطمینان از صحت و دقت روابط ارائه شده، نتایج حاصل از روش مربعات دیفرانسیلی با مقادیر به‌دست آمده از مدل‌سازی در نرم افزار المان محدود انسیس مقایسه و تطابق مطلوبی بین نتایج مشاهده می‌شود. همچنین تأثیر پارامترهای اساسی همچون ضریب تغییر ارتفاع جان، محل اثر بار، چیدمان لایه‌های کامپوزیتی، کسر حجمی فلز، زاویه قرارگیری الیاف در بال و جان نیم‌رخ و جنس الیاف بر پایداری جانبی-پیچشی تیر ماهیچه‌ای I-شکل کامپوزیتی چند لایه الیاف-فلز تحت بارگذاری عرضی و شرایط انتهایی گیردار-آزاد بررسی می‌شود.

با قرار دادن میدان جابه‌جایی (۲) در رابطه (۳-الف)، مؤلفه‌های

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} = u_0' - yv'' - zw'' - \omega\theta'' \quad (4\text{-الف})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \left( z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \theta' \quad (4\text{-ب})$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \theta' \quad (4\text{-ج})$$

با استفاده از روابط (۲) و (۳-ب)، روابط بین مؤلفه‌های غیرخطی

کرنش و تغییر مکان را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) = \quad (5\text{-الف})$$

$$\frac{1}{2} [v'^2 + w'^2 + r^2 \theta'^2] + yw'\theta' - zv'\theta'$$

$$\varepsilon_{xy}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \quad (5\text{-ب})$$

$$\frac{1}{2} (w' + \theta'y)\theta$$

$$\varepsilon_{xz}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \quad (5\text{-ج})$$

$$-\frac{1}{2} (v' - \theta'z)\theta$$

در رابطه (۵-الف)، پارامتر  $r$  بیانگر فاصله هر نقطه دلخواه روی

نیم‌رخ تا مرکز سطح است:

$$r^2 = y^2 + z^2 \quad (6)$$

مطابق تئوری ولاسو، منتجه‌های تنش برای کل مقطع کامپوزیتی

به صورت رابطه (۷) تعریف می‌شوند [۵]:

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA \quad (7\text{-الف})$$

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (7\text{-ب})$$

$$M_z = -\int_A \sigma_{xx} y dA \quad (7\text{-ج})$$

$$B_\omega = -\int_A \sigma_{xx} \omega dA \quad (7\text{-د})$$

مساوی یک در نظر گرفت.

مطابق شکل، دستگاه مختصات دکارتی  $Oxyz$  منطبق بر مرکز

سطح نیم‌رخ تیر (تار خنثی) در نظر گرفته شده و محورهای  $x$ ،  $y$  و

$z$  به ترتیب در راستای طولی، جانبی و عمودی هستند. همچنین،

میدان جابه‌جایی حاکم بر تیر جدار نازک نسبت به تار خنثی گذرنده

از مرکز سطح نیم‌رخ تیر در شکل ۱ نشان داده شده است. در این

پژوهش، تغییر مکان‌ها کوچک و در محدوده الاستیک خطی مورد

نظر هستند. براساس تئوری کلاسیک ولاسو<sup>۱</sup> و صرف نظر از تغییر

شکل‌های برشی، میدان جابه‌جایی نقاط روی مقطع تیر در راستای

محوری، جانبی و عمودی را می‌توان به شکل روابط (۲) بیان نمود

[۴۶]:

$$U(x, y, z) = u_0(x) - y \frac{dv(x)}{dx} - z \frac{dw(x)}{dx} - \omega(y, z) \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (2\text{-الف})$$

$$V(x, y, z) = v(x) - z\theta(x) \quad (2\text{-ب})$$

$$W(x, y, z) = w(x) + y\theta(x) \quad (2\text{-ج})$$

که در اینجا جابه‌جایی مرکز سطح در جهت  $x$  با نماد  $u_0$

جابه‌جایی در راستای جانبی ( $y$ ) با  $v$  و جابه‌جایی در جهت  $z$  با نماد

$w$  مشخص شده است. همچنین  $\theta$  نشان دهنده چرخش عمود بر

مقطع تیر حول محور طولی  $x$  است و زاویه پیچش نامیده می‌شود.

همچنین  $\omega(y, z)$  یک متغیر مربوط به خصوصیات سطح مقطع است

که به تابع پیچش معروف می‌باشد و با استفاده از تئوری سن ونان<sup>۲</sup>

بر روی سطح مقطع تعریف می‌شود. تابع پیچش برای مقطع I شکل

متقارن برابر با  $\omega = -zy$  بوده که پارامترهای  $y$  و  $z$  به ترتیب معرف

مختصات جانبی و عمودی هستند. مطابق میدان جابه‌جایی ارائه‌شده

برای مقطع متقارن، روابط کرنش-جابه‌جایی گرین مجموع مؤلفه‌های

خطی ( $\varepsilon_{ij}^*$ ) و غیرخطی ( $\varepsilon_{ij}^*$ ) هستند که به ترتیب با استفاده از رابطه

(۳-الف) و (۳-ب) به دست می‌آیند [۱۶]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = x, y, z \quad (3\text{-الف})$$

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) \quad i, j, k = x, y, z \quad (3\text{-ب})$$

1 Vlasov  
2 Saint-Venant

$$M_y = \int_{A_f} \sigma'_{xx} \left( z - \frac{d}{2} \right) dA + \quad (ب-۱۱)$$

$$\int_{A_w} \sigma''_{xx} z dA + \int_{A_f} \sigma''_{xx} \left( z + \frac{d}{2} \right) dA$$

$$M_z = - \left( \int_{A_f} \sigma'_{xx} y dA + \int_{A_w} \sigma''_{xx} y dA + \int_{A_f} \sigma''_{xx} y dA \right) \quad (ج-۱۱)$$

$$B_\omega = \int_{A_f} \sigma'_{xx} y \left( z - \frac{d}{2} \right) dA + \quad (د-۱۱)$$

$$\int_{A_w} \sigma''_{xx} y z dA + \int_{A_f} \sigma''_{xx} y \left( z + \frac{d}{2} \right) dA$$

$$M_{sv} = 2 \left( \int_{A_f} \tau'_{xy} z dA + \int_{A_w} \tau''_{xz} y dA + \int_{A_f} \tau''_{xy} z dA \right) \quad (ه-۱۱)$$

در ادامه با جایگذاری مؤلفه‌های میدان کرنش جابه‌جایی خطی (۴) در روابط تنش (۹) و با استفاده از روابط (۱۱)، معادلات نهایی حاکم بر نتیجه‌های نیروی محوری و گشتاورها برحسب میدان جابه‌جایی و با فرض چیدمان متقارن به صورت روابط (۱۲) حاصل می‌شوند:

$$N = \iint_b \bar{Q}'_{11} \left( u'_0 - yv'' - \left( z - \frac{d}{2} \right) w'' + y \left( z - \frac{d}{2} \right) \theta'' \right) dz dy + \quad (الف-۱۲)$$

$$2 \iint_b \bar{Q}'_{16} (z\theta') dz dy +$$

$$\iint_d \bar{Q}''_{11} \left( u'_0 - yv'' - yzw'' + yz\theta'' \right) dy dz +$$

$$2 \iint_d \bar{Q}''_{16} (y\theta') dy dz +$$

$$\iint_b \bar{Q}'_{11} \left( u'_0 - yv'' - \left( z + \frac{d}{2} \right) w'' + y \left( z + \frac{d}{2} \right) \theta'' \right) dz dy +$$

$$2 \iint_b \bar{Q}'_{16} (z\theta') dz dy = (2A'_{11}b + A'_{11}d)u'_0$$

$$M_z = - \left[ \iint_b \bar{Q}'_{11} \left( yu'_0 - y^2v'' - \iint_b y \left( z - \frac{d}{2} \right) w'' + \iint_b \bar{Q}'_{16} (yz\theta') dz dy + y^2 \left( z - \frac{d}{2} \right) \theta'' \right) dz dy \right. \quad (ب-۱۲)$$

$$\left. \iint_d \bar{Q}''_{11} \left( yu'_0 - y^2v'' - \iint_d zyw'' + y^2z\theta'' \right) dy dz + 2 \iint_d \bar{Q}''_{16} (y^2\theta') dy dz \right.$$

$$\left. \bar{Q}'_{11} \left( yu'_0 - y^2v'' - \iint_b y \left( z + \frac{d}{2} \right) w'' + \iint_b \bar{Q}'_{16} (yz\theta') dz dy + y^2 \left( z + \frac{d}{2} \right) \theta'' \right) dz dy \right]$$

$$= (A'_{11} \frac{b^3}{6} + D''_{11}d)v'' - 2(D''_{16}d)\theta'$$

$$M_{sv} = \int_A \left( \tau_{xz} \left( y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \tau_{xy} \left( z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right) dA \quad (ه-۷)$$

در روابط فوق،  $N$  نیروی محوری است.  $M_z$  و  $M_y$  به ترتیب بیانگر لنگر خمشی حول محورهای قوی و ضعیف هستند.  $M_{sv}$  و  $B_\omega$  به ترتیب بیانگر لنگر تابیدگی و لنگر پیچش سن-ونان هستند. این متوجه‌ها حاصل جمع مؤلفه‌های ایجاد شده در بال، جان و بال پایین هستند و می‌توان آن‌ها را به شکل زیر تعریف کرد:

$$N = N^t + N^w + N^b \quad (الف-۸)$$

$$M_z = M_z^t + M_z^w + M_z^b \quad (ب-۸)$$

$$M_y = M_y^t + M_y^w + M_y^b \quad (ج-۸)$$

$$B_\omega = B_\omega^t + B_\omega^w + B_\omega^b \quad (د-۸)$$

$$M_{sv} = M_{sv}^t + M_{sv}^w + M_{sv}^b \quad (ه-۸)$$

که در روابط فوق  $t$  بیانگر بال بالا،  $w$  جان و  $b$  بال پایین نیم‌رخ تیر هستند. با فرض آنکه لایه‌های فلزی و کامپوزیت الیافی به طور کامل و پیوسته به هم چسبیده‌اند، روابط متشکله تنش-کرنش مربوط به هریک از بال‌ها و جان نیم‌رخ I شکل کامپوزیتی با  $N$  لایه ارتوتروپیک به شکل رابطه (۹) بیان می‌شوند [۵]:

$$\begin{aligned} (\sigma'_{xx})^k &= (\bar{Q}'_{11})^k (\varepsilon'^{Tf})^k + 2(\bar{Q}'_{16})^k (\varepsilon'_{xy})^k \\ (\tau'_{xy})^k &= (\bar{Q}'_{16})^k (\varepsilon'_{xx})^k + 2(\bar{Q}'_{66})^k (\varepsilon'_{xy})^k \\ (\sigma''_{xx})^k &= (\bar{Q}''_{11})^k (\varepsilon''_{xx})^k + 2(\bar{Q}''_{16})^k (\varepsilon''_{xz})^k \\ (\tau''_{xz})^k &= (\bar{Q}''_{16})^k (\varepsilon''_{xx})^k + 2(\bar{Q}''_{66})^k (\varepsilon''_{xz})^k \\ (\sigma''_{xx})^k &= (\bar{Q}''_{11})^k (\varepsilon''_{xx})^k + 2(\bar{Q}''_{16})^k (\varepsilon''_{xy})^k \\ (\tau''_{xy})^k &= (\bar{Q}''_{16})^k (\varepsilon''_{xx})^k + 2(\bar{Q}''_{66})^k (\varepsilon''_{xy})^k \end{aligned} \quad (۹)$$

که  $\bar{Q}_{ij}$  نشان دهنده داریه‌های ماتریس سفتی کاهش یافته و  $k$  شماره هر لایه است. با توجه به تقارن مقطع نسبت به محور افقی ( $y$ ) داریم:

$$\bar{Q}'_{11} = \bar{Q}''_{11}, \bar{Q}'_{16} = \bar{Q}''_{16}, \bar{Q}'_{66} = \bar{Q}''_{66} \quad (۱۰)$$

با توجه به روابط (۸) و (۹)، نتیجه‌های تنش روی کل مقطع کامپوزیتی چندلایه را می‌توان به شکل روابط (۱۱) بیان کرد:

$$N = \int_{A_f} \sigma'_{xx} dA + \int_{A_w} \sigma''_{xx} dA + \int_{A_f} \sigma''_{xx} dA \quad (الف-۱۱)$$



کششی و ماتریس سفتی خمشی هستند که براساس شکل ۱ و با استفاده از رابطه (۱۳) به دست می‌آیند:

$$A_{11}^f = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^f(z_k - z_{k-1}) \quad (الف-۱۳)$$

$$A_{11}^w = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^w(y_k - y_{k-1}) \quad (ب-۱۳)$$

$$D_{11}^f = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^f(z_k^3 - z_{k-1}^3); D_{66}^f = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{66}^f(z_k^3 - z_{k-1}^3); D_{16}^f = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{16}^f(z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (ج-۱۳)$$

$$D_{11}^w = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^w(y_k^3 - y_{k-1}^3); D_{66}^w = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{66}^w(y_k^3 - y_{k-1}^3); D_{16}^w = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{16}^w(y_k^3 - y_{k-1}^3) \quad (د-۱۳)$$

که  $z_{k-1}$  و  $z_k$  به ترتیب، فاصله میان تار بال تا سطوح خارجی و داخلی لایه  $k_{th}$  در بال هستند. به همین شکل،  $y_{k-1}$  و  $y_k$  فاصله میان تار جان تا سطوح خارجی و داخلی لایه  $k_{th}$  در جان هستند. در این پژوهش لایه چینی در بال‌ها و جان به صورت بالانس در نظر گرفته می‌شود که در این حالت:

$$D_{16}^w = D_{16}^f = 0 \quad (۱۴)$$

بنابراین، نیروی محوری و لنگرها برحسب منته‌های تنش برای مقطع جدار نازک متقارن کامپوزیتی با فرض چیدمان متقارن و بالانس را می‌توان به صورت رابطه (۱۵) تعریف نمود:

$$N = (EA)_{com} u'_0 \quad (الف-۱۵)$$

$$M_z = (EI_z)_{com} v'' \quad (ب-۱۵)$$

$$M_y = -(EI_y)_{com} w'' \quad (ج-۱۵)$$

$$B_\omega = (EI_\omega)_{com} \theta'' \quad (د-۱۵)$$

$$M_{sv} = (GJ)_{com} \theta' \quad (ه-۱۵)$$

در رابطه (۱۵)،  $(EA)_{com}$  بیانگر سختی محوری است.  $(EI_y)_{com}$  و  $(EI_z)_{com}$  نشان دهنده سختی‌های خمشی حول محورهای جانبی

$$M_y = \iint_b \left( z - \frac{d}{2} \right) w'' + 2 \iint_b \bar{Q}_{16}^f \left( z - \frac{d}{2} \right) (z\theta') dz dy + \iint_d y \left( z - \frac{d}{2} \right) \theta'' dz dy + \bar{Q}_{11}^w (zu'_0 - yzv'' - \iint_d z^2 w'' + \iint_d yz^2 \theta'' dy dz + 2 \iint_d \bar{Q}_{16}^w (zy\theta') dy dz + \bar{Q}_{11}^f \left( z + \frac{d}{2} \right) (u'_0 - yv'' - \iint_b \left( z + \frac{d}{2} \right) w'' + 2 \iint_b \bar{Q}_{16}^f \left( z + \frac{d}{2} \right) (z\theta') dz dy + y \left( z + \frac{d}{2} \right) \theta'' dz dy = -(2D_{11}^f b + A_{11}^f \frac{d^2}{2}) w'' + 4(D_{16}^f b) \theta' \quad (ج-۱۲)$$

$$B_\omega = \iint_b \left( z - \frac{d}{2} \right) w'' + 2 \iint_b \bar{Q}_{16}^f y \left( z - \frac{d}{2} \right) (z\theta') dz dy + \iint_d y \left( z - \frac{d}{2} \right) \theta'' dz dy + \bar{Q}_{11}^w (yz)(zu'_0 - \iint_d yv'' - zv'' + 2 \iint_d \bar{Q}_{16}^w (yz)(y\theta') dy dz + yz\theta'' dy dz + \bar{Q}_{11}^f y \left( z + \frac{d}{2} \right) (u'_0 - \iint_b yv'' - \left( z + \frac{d}{2} \right) w'' + 2 \iint_b \bar{Q}_{16}^f y \left( z + \frac{d}{2} \right) (z\theta') dz dy + y \left( z + \frac{d}{2} \right) \theta'' dz dy = \left( \frac{b^3}{6} (A_{11}^f \frac{d^2}{4} + D_{11}^f) + D_{11}^w \frac{d^3}{12} \right) \theta'' \quad (د-۱۲)$$

$$M_{sv} = 2 \left\{ \begin{aligned} & \bar{Q}_{16}^f (zu'_0 - yzv'' - \iint_b z \left( z - \frac{d}{2} \right) w'' + 2 \iint_b \bar{Q}_{66}^f (z^2 \theta') dz dy + zy \left( z - \frac{d}{2} \right) \theta'' dz dy + \bar{Q}_{16}^w (yu'_0 - y^2 v'' - \iint_d zy w'' + \iint_d \bar{Q}_{66}^w (y^2 \theta') dy dz + y^2 z \theta'' dy dz + \bar{Q}_{16}^f (zu'_0 - yzv'' - \iint_b z \left( z + \frac{d}{2} \right) w'' + 2 \iint_b \bar{Q}_{66}^f (z^2 \theta') dz dy + zy \left( z + \frac{d}{2} \right) \theta'' dz dy \end{aligned} \right\} = -2(D_{16}^w d)v'' - 4(D_{16}^f b)w'' + 2(4D_{16}^f b + 2D_{66}^w d)\theta' \quad (ه-۱۲)$$

در رابطه فوق  $A_{ij}$  و  $D_{ij}$  نشان دهنده درایه‌های ماتریس سفتی

$$\delta U_I = \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 2\tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + 2\tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dA dx \quad (18)$$

در رابطه (۱۸)،  $L$  طول عضو است. با توجه به روابط متشکله تنش- کرنش تیر I-شکل چندلایه کامپوزیتی که در رابطه (۹) ارائه شد، تغییرات مرتبه اول انرژی کرنش را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\delta U_I = \int_0^L \int_{A_f} (\sigma'_{xx} \delta \varepsilon'_{xx} + 2\tau'_{xy} \delta \varepsilon'_{xy} + 2\tau'_{xz} \delta \varepsilon'_{xz}) dA_f dx + \int_0^L \int_{A_w} (\sigma''_{xx} \delta \varepsilon''_{xx} + 2\tau''_{xy} \delta \varepsilon''_{xy} + 2\tau''_{xz} \delta \varepsilon''_{xz}) dA_w dx + \int_0^L \int_{A_f} (\sigma^b_{xx} \delta \varepsilon^b_{xx} + 2\tau^b_{xy} \delta \varepsilon^b_{xy} + 2\tau^b_{xz} \delta \varepsilon^b_{xz}) dA_f dx \quad (19)$$

با توجه به مؤلفه‌های منتجه‌های تنش و با استفاده از روابط (۸)، فرم کلی حاکم بر تغییرات مرتبه اول انرژی کرنشی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\delta U_I = \int_L ((N' + N'' + N^b) \delta u'_0) dx + \int_L ((M'_z + M''_z + M^b_z) \delta v''_0) dx - \int_L ((M'_y + M''_y + M^b_y) \delta w''_0) dx + \int_L ((B'_\omega + B''_\omega + B^b_\omega) \delta \theta''_0) dx + \int_L ((M'_{sv} + M''_{sv} + M^b_{sv}) \delta \theta'_0) dx \quad (20)$$

و یا

$$\delta U_I = \int_L \left( \frac{N \delta u'_0 + M_z \delta v''_0}{M_y \delta w''_0 + B_\omega \delta \theta''_0} \right) dx + \int_0^L (M_{sv} \delta \theta'_0) dx \quad (21)$$

در ادامه با جایگذاری رابطه (۱۵) در عبارت تغییرات انرژی کرنشی (۲۱) خواهیم داشت:

$$\delta U_I = \int_L \left( \begin{matrix} (EA)_{com} u'_0 \delta u'_0 + (EI_z)_{com} v''_0 \delta v''_0 + \\ (EI_y)_{com} w''_0 \delta w''_0 + (EI_\omega)_{com} \theta''_0 \delta \theta''_0 + \\ (GJ)_{com} \theta'_0 \delta \theta'_0 \end{matrix} \right) dx \quad (22)$$

تغییرات انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های اولیه و کار خارجی به ترتیب از روابط (۲۳-الف) و (۲۳-ب) به دست می‌آیند [۱۶]:

$$\delta U_0 = \int_V \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^* dV = \int_0^L \int_A \sigma_{xx}^0 \delta \varepsilon_{xx}^* dA dx + 2 \int_0^L \int_A \sigma_{xy}^0 \delta \varepsilon_{xy}^* dA dx + 2 \int_0^L \int_A \sigma_{xz}^0 \delta \varepsilon_{xz}^* dA dx \quad (23-الف)$$

( $y'$ ) و عمودی ( $z$ ) هستند.  $(EI_\omega)_{com}$  بیانگر سختی تابیدگی و  $(GJ)_{com}$  سختی پیچشی است. این پارامترها با توجه به روابط (۱۲) و هندسه مسئله که در رابطه (۱) ارائه شد، برابرند با:

$$(EA)_{com} = 2 \left( b_L (\beta - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + b_L \right) A_{11}^f + \left( d_L (\alpha - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + d_L \right) A_{11}^w \quad (16-الف)$$

$$(EI_z)_{com} = \frac{1}{6} \left( b_L (\beta - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + b_L \right) A_{11}^f + \left( d_L (\alpha - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + d_L \right) D_{11}^w \quad (16-ب)$$

$$(EI_y)_{com} = 2 \left( b_L (\beta - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + b_L \right) D_{11}^f + \frac{1}{4} \left( d_L (\alpha - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + d_L \right)^2 \left( b_L (\beta - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + b_L \right) A_{11}^f + \frac{1}{12} \left( d_L (\alpha - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + d_L \right)^3 A_{11}^w \quad (16-ج)$$

$$(EI_\omega)_{com} = \frac{1}{6} \left( b_L (\beta - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + b_L \right) D_{11}^f + \frac{1}{24} \left( d_L (\alpha - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + d_L \right)^2 \left( b_L (\beta - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + b_L \right) A_{11}^f + \frac{1}{12} \left( d_L (\alpha - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + d_L \right)^3 D_{11}^w \quad (16-د)$$

$$(GJ)_{com} = 8 \left( b_L (\beta - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + b_L \right) D_{66}^f + 4 \left( d_L (\alpha - 1) \left( \frac{x}{L} \right) + d_L \right) D_{66}^w \quad (16-ه)$$

جهت استخراج معادلات حاکم بر پایداری جانبی تیر جدار نازک هیبرید کامپوزیت-فلز از اصل انرژی پتانسیل کل استفاده شده است که شرط حداقل شدن انرژی را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۶]:

$$\delta \Pi = \delta U_I + \delta U_0 - \delta W_e = 0 \quad (17)$$

در رابطه فوق،  $\delta \Pi$  نشان دهنده تغییرات انرژی پتانسیل کل،  $\delta U_I$  تغییرات انرژی کرنشی خطی الاستیک،  $\delta U_0$  تغییرات انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های اولیه، و  $\delta W_e$  کار خارجی ناشی از بارهای وارد بر عضو می‌باشد.

تغییرات انرژی کرنشی الاستیک به شکل رابطه (۱۸) بیان می‌شود [۱۶]:



$$(EA)_{com} u_0' = 0 \quad (الف-۲۷)$$

$$((EI_y)_{com} w'') = q_z \quad (ب-۲۷)$$

$$((EI_z)_{com} v'') - (M_y^* \theta'') = 0 \quad (ج-۲۷)$$

$$((EI_\omega)_{com} \theta'') - ((GJ)_{com} \theta') - M_y^* v'' + M_t \theta = 0 \quad (د-۲۷)$$

تحت وضعیت ایستا، شرایط مرزی نیز به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$(EA)_{com} u_0' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta u_0 = 0 \quad (الف-۲۸)$$

$$(EI_z)_{com} v'' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta v' = 0 \quad (ب-۲۸)$$

$$((EI_z)_{com} v'') - (M_y^* \theta') = 0 \quad \text{یا} \quad \delta v = 0 \quad (ج-۲۸)$$

$$(EI_y)_{com} w'' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta w' = 0 \quad (د-۲۸)$$

$$((EI_y)_{com} w'') = 0 \quad \text{یا} \quad \delta w = 0 \quad (ه-۲۸)$$

$$(EI_\omega)_{com} \theta'' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta \theta' = 0 \quad (و-۲۸)$$

$$((EI_\omega)_{com} \theta'') - (GJ)_{com} \theta' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta \theta = 0 \quad (ز-۲۸)$$

همان‌گونه که از روابط (۲۷) مشاهده می‌شود، دستگاه معادله دیفرانسیل حاکم بر پایداری جانبی-پیچشی تیر جدار نازک کامپوزیتی چندلایه تحت بارگذاری عرضی، شامل دو معادله دیفرانسیل مرتبه چهار وابسته به مؤلفه‌های جابه‌جایی جانبی و پیچشی ( $\theta$ ،  $v$ ) است که معادله حاکم بر تغییر شکل جانبی (ج-۲۷) را می‌توان به صورت زیر نیز بیان نمود [۱۶]:

$$v'' = \frac{M_y^* \theta}{(EI_z)_{com}} \quad (۲۹)$$

در ادامه با جایگذاری رابطه (۲۹) در معادله پایداری حاکم بر پیچش (د-۲۷)، معادله نهایی زیر که تنها برحسب تغییر شکل پیچشی است، به دست می‌آید:

$$(EI_z)_{com} ((EI_\omega)_{com} \theta'') - (EI_z)_{com} ((GJ)_{com} \theta') - M_y^{*2} \theta + (EI_z)_{com} M_t \theta = 0 \quad (۳۰)$$

$$\delta W_e = \int_0^L q_z \delta w_p dx \quad (ب-۲۳)$$

که  $\delta \varepsilon_{ij}^*$  بیانگر تغییرات جملات غیرخطی تانسور کرنش است. همچنین پارامترهای  $\sigma_{ij}^*$  نشان دهنده مؤلفه‌های تنش عمودی و برشی ناشی از بار وارده بر سطح مقطع در لحظه کمانش هستند. با توجه به شکل ۱، بار عرضی اعمال شده در جهت  $Z$  باعث ایجاد لنگر خمشی اولیه حول محور قوی یعنی  $M_y^*$  و نیروی برشی  $V_z$  می‌شود. تحت چنین شرایطی، تنش‌های محوری و برشی عبارتند از:

$$\sigma_{xx}^0 = -\frac{M_y^*}{I_y} z, \quad \sigma_{xz}^0 = \frac{V_z}{A} = -\frac{M_y^{*'}}{A}, \quad \sigma_{xy}^0 = 0 \quad (۲۴)$$

با توجه به شکل ۱، تیر تحت نیروی عرضی دلخواه  $q_z$  قرار دارد که در امتداد خط ( $PP'$ ) اعمال می‌شود. براساس فرضیات سینماتیک غیرخطی، مؤلفه تغییر مکان عمودی سطح مقطع ( $W_p$ ) منطبق بر نقطه  $P$  یا همان محل اثر بار عرضی و تغییرات مرتبه اول آن به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۶]:

$$w_p = w - z_p \frac{\theta^2}{2} \rightarrow \delta w_p = \delta w - z_p \theta \delta \theta \quad (۲۵)$$

با جایگذاری عبارات (۵)، (۲۴) و (۲۵) در روابط (۲۳)، معادلات حاکم بر تغییرات انرژی کرنشی ناشی از تنش اولیه و کار خارجی را می‌توان به صورت عبارات انتگرالی از میدان جابه‌جایی بیان کرد. فرضیات محاسبات در مراجع [۱۶ و ۴۵] ارائه شده است.

$$\delta U_0 = \int_0^L (-M_y^* v'' \delta \theta - M_y^* \theta \delta v'') dx \quad (الف-۲۶)$$

$$\delta W_e = \int_0^L (q_z \delta w - M_t \theta \delta \theta) dx \quad (ب-۲۶)$$

که در این رابطه  $M_t = q_z Z_p$  بیانگر لنگر پیچشی مرتبه دوم، ناشی از خروج از مرکزیت بارهای عرضی است. با جایگذاری روابط (۲۲) و (۲۶) در رابطه (۷) و نیز با به‌کارگیری روش انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء معادلات پایداری جانبی تیر جدار نازک کامپوزیتی چندلایه با مقطع متغیر به دست می‌آیند:

یکی از مهمترین نکات در همگرایی نتایج، علاوه بر تعداد نقاط، چگونگی توزیع نقاط در دامنه حل است. بهترین نوع سیستم نقاط داده برداری که تاکنون ارائه شده است، توزیع نقطه‌ای غیریکنواخت (چبیشف-گوس-لوباتو) است. این توزیع قادر به تعیین جواب‌های عددی با دقت بسیار خوب اما با تعداد گره‌های کم و هزینه محاسباتی پایین است [۴۷-۴۹]. بنابراین در این پژوهش از این توزیع استفاده شده است:

$$x_i = \frac{L}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right], \quad (33)$$

if  $0 \leq x \leq L \quad i = 1, 2, \dots, N$

با معرفی یک مختصات بی‌بعد محلی جدید  $\xi = x / L$  و اعمال قوانین روش مربعات دیفرانسیلی، معادله (۲۹) را می‌توان به شکل ماتریسی ارائه شده در رابطه (۳۴) نوشت. توضیحات کامل در مورد روند استخراج فرم فشرده ماتریسی زیر در مرجع [۴۵] ارائه شده است.

$$([K] + [K_G])_{N \times N} \{\theta\}_{N \times 1} = \{0\}_{N \times 1} \quad (34)$$

که در آن

$$\begin{aligned} [K] &= [a][C]^{(4)} + [b][C]^{(3)} + [c][C]^{(2)} + [d][C]^{(1)} \\ [K_G] &= [e] \\ \{\theta\} &= \{\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \dots \quad \theta_N\}^T \end{aligned} \quad (35)$$

که  $[K]$  و  $[K_G]$  مربعی و به ابعاد  $N \times N$  هستند و  $\{\theta\}$  ماتریس ستونی صفر است. درایه‌های ماتریس‌های  $d, c, b, a$  و  $e$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} a_{jk} &= ((EI_z)_{com} (EI_\omega)_{com}) \Big|_{\xi=\xi_j} \delta_{jk} \\ b_{jk} &= 2((EI_z)_{com} (EI_\omega)'_{com}) \Big|_{\xi=\xi_j} \delta_{jk} \\ c_{jk} &= ((EI_z)_{com} ((EI_\omega)''_{com} - L^2(GJ)_{com})) \Big|_{\xi=\xi_j} \delta_{jk} \\ d_{jk} &= -L^2 ((EI_z)_{com} (GJ)'_{com}) \Big|_{\xi=\xi_j} \delta_{jk} \\ e_{jk} &= L^4 ((EI_z)_{com} M_t - M_y^{*2}) \Big|_{\xi=\xi_j} \delta_{jk} \end{aligned} \quad (36)$$

در روابط فوق  $\delta$  تابع دلتای کرونکر است. در ادامه با گسسته‌سازی

لازم به ذکر است که شرایط مرزی حاکم بر معادله فوق در روابط (۲۸-و) و (۲۸-ی) ارائه شده‌اند. با توجه به وجود ضرایب متغیر در رابطه نهایی که ناشی از تغییرات خصوصیات هندسی و همچنین لنگر خمشی و پیچشی می‌باشند، حل این معادله دیفرانسیل با استفاده از روش‌های تحلیلی و یا کلاسیک معمول تقریباً غیرممکن است و بایستی از روش‌های عددی و یا نیمه تحلیلی موجود استفاده نمود. از آنجایی که روش عددی مربعات دیفرانسیلی روشی قدرتمند با دقت و سرعت همگرایی بالا است، در پژوهش حاضر از آن به منظور حل معادله (۳۰) و محاسبه بار کماتش جانبی استفاده شده که جزئیات این روش در بخش بعدی ارائه می‌شود.

### ۳- روش مربعات دیفرانسیل

در این جا روش عددی مربعات دیفرانسیلی برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه چهار پایداری جانبی و شرایط مرزی استفاده می‌شود تا از این طریق بتوان مقادیر بارهای کماتش جانبی-پیچشی را به دست آورد. اساس این روش بر مبنای تقریب مشتق یک تابع در نقطه مشخص به صورت جمع حاصلضرب فاکتورهای وزنی و مقادیر تابع در یکسری نقاط تعیین شده در محدوده حل مسئله است. بنابراین، مشتقات یک تابع از هر مرتبه‌ای را در نقطه‌ای دلخواه مانند  $x = x_i$  را می‌توان بر حسب مقادیر تابع در تمامی بازه به صورت زیر بازنویسی نمود [۴۷]:

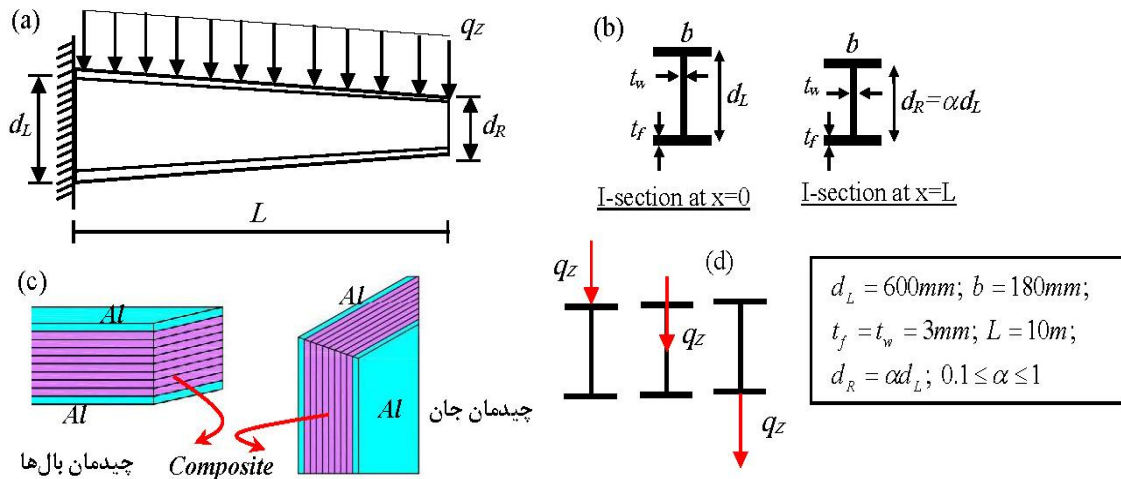
$$\frac{d^m f}{dx^m} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(m)} f(x_j) \quad (31)$$

که  $N$  تعداد نقاط انتخابی در امتداد طول عضو و  $C_{ij}^{(m)}$  ماتریس ضرایب وزنی است که مطابق رابطه زیر تقریب زده می‌شود [۴۷]:

$$C_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M(x_j)} \text{ for } i \neq j \\ - \sum_{k=1, k \neq i}^N C_{ik}^{(1)} \text{ for } i=j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (32)$$

$$M(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j)$$

$$C_{ij}^{(m)} = C_{ij}^{(1)} C_{ij}^{(m-1)} \quad 2 \leq m \leq N-1$$



شکل ۲. تیر I شکل کامپوزیت چند لایه گیردار-آزاد با مقطع متغیر تحت بار گسترده یکنواخت: خصوصیات هندسی، نحوه چیدمان لایه‌های بال و جان و محل اعمال بار

Fig. 2. Fixed-free laminated composite I-beam with varying cross-sections subjected to uniformly distributed load: geometric properties, lay-up arrangement, and loading position

مختلف بین دو ورق فلزی قرار گرفته‌اند. لایه آلومینیوم ۲۰۲۴ به دلیل خصوصیات مکانیکی مطلوب از قبیل هزینه کم، استحکام مناسب، چگالی پایین و مقاومت در برابر شکست به عنوان آلیاژی مناسب در ساخت کامپوزیت‌های هیبریدی کاربرد دارد [۵۰ و ۵۱]. در پژوهش حاضر، لایه‌های ارتوتروپیک می‌توانند از جنس‌های کربن-اپوکسی و یا شیشه نوع E-اپوکسی باشند که ثابت‌های مادی هر یک از مواد مورد استفاده در جدول ۱ ارائه شده است. لازم به ذکر است که چندلایه‌های آلومینیوم تقویت شده با الیاف شیشه به علت مقاومت مناسب در برابر رطوبت و خوردگی، سبکی و صرفه‌جویی در مصرف سوخت، بعلاوه اتصال محکم الیاف شیشه با زمینه پلیمری در صنایع هواپیمایی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۵۰ و ۵۱]. اما چندلایه‌های آلومینیوم تقویت‌شده با الیاف کربن به دلیل پل زدن بسیار کارآمد الیاف روی ریز ترک‌ها، نرخ رشد ترک بسیار کم، همچنین سختی و استحکام بالا معمولاً در بدنه هلیکوپتر بکار می‌روند [۵۰ و ۵۱].

با توجه به این نکته که محل اعمال بار عرضی بر رفتار پایداری جانبی اثر گذار است، در مثال حاضر فرض شده که بار گسترده یکنواخت می‌تواند به سه محل متفاوت: بال بالا، مرکز سطح و یا بال پایین نیم‌رخ تیر وارد گردد. در این قسمت، نخست دقت و صحت فرمول ارائه شده بررسی می‌شود و سپس اثر پارامترهای تأثیرگذار روی ظرفیت کمناش جانبی مانند چیدمان لایه‌ها، زاویه الیاف، جنس الیاف، پارامتر تغییر ارتفاع جان، محل اعمال بار عرضی و شاخص

شرایط مرزی و جایگذاری آن‌ها در رابطه ماتریسی و سپس حل مسئله مقدار ویژه به دست آمده در معادله (۳۴)، بار بحرانی کمناش جانبی-پیچشی برای تیر با نیم‌رخ جدار نازک کامپوزیتی چندلایه محاسبه خواهد شد.

#### ۴- بحث و بررسی نتایج عددی

در این بخش، نتایج تحلیل پایداری جانبی تیر جدار نازک ماهیچه‌ای با مقطع کامپوزیتی چندلایه الیاف-فلز مبتنی بر تئوری ولاسو ارائه می‌شوند. بدین منظور مثالی جامع از یک عضو جدار نازک با شرایط مرزی گیردار-آزاد که مطابق شکل ۲ تحت بار گسترده یکنواخت قرار دارد، در نظر گرفته شده است. پس از صحت سنجی روش عددی مربعات دیفرانسیلی، با توجه به بارهای اعمالی چیدمان مناسبی از لایه‌های ارتوتروپیک شیشه-اپوکسی در بال و جان نیم‌رخ جهت افزایش ظرفیت کمناش جانبی معرفی خواهد شد. با توجه به شکل، ارتفاع جان نیم‌رخ I-شکل به صورت خطی از  $d_L$  در انتهای گیردار به  $\alpha d_L$  آزاد کاهش یافته است. اما پهنای بال‌ها ثابت و بدون تغییر در نظر گرفته شده است. تحت چنین شرایطی، پارامتر  $\beta$  را بایستی برابر یک در رابطه (۱۶) قرار داد. در حالیکه ضریب تغییر ارتفاع جان ( $\alpha$ ) در بازه  $[0/1-1]$  تغییر می‌کند. مقطع متقارن تیر هیبرید کامپوزیتی متشکل از دو ورق آلومینیوم T۳-۲۰۲۴ با هشت لایه کامپوزیت الیافی است که لایه‌های الیافی با چیدمان‌های

جدول ۱. خصوصیات مکانیکی مواد [۳۹]

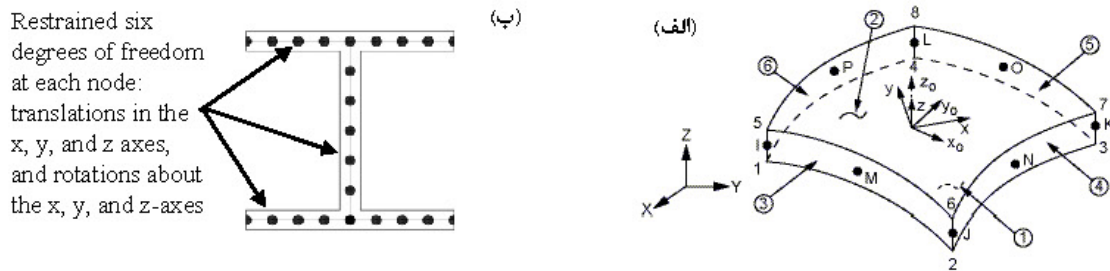
Table 1. Mechanical properties of the materials [39]

$\nu_x$	$G_{xy}$ (GPa)	$E_y$ (GPa)	$E_x$ (GPa)	جنس الیاف
۰/۲۶	۴/۱۴	۸/۲۷	۳۸/۶	شیشه نوع E-اپوکسی
۰/۲۸	۷/۱۷	۱۰/۳	۱۸۱	کربن-اپوکسی
۰/۳۳	۲۷/۰۷	۷۲	۷۲	آلومینیوم T۳-۲۰۲۴

جدول ۲. پارامترهای مؤثر بر بار کمانش جانبی و محدوده تغییرات هر یک

Table 2. Parameters affecting lateral buckling load

بازه تغییرات	پارامترهای مؤثر
$0 \leq \theta \leq 90$	$\theta$ زاویه الیاف
$0.1 \leq \alpha \leq 1$	$\alpha$ ضریب باریک شوندگی ارتفاع جان
$0 \leq MVF \leq 1$	$MVF$ کسر حجمی فلز
$Z_p = -\frac{h}{2}, 0, \frac{h}{2}$	$Z_p$ محل اعمال بار عرضی



شکل ۳. (الف) المان پوسته (shell281) دارای هشت گره و شش درجه آزادی در هر گره [۵۳] و (ب) شرایط مرزی گیردار

Fig. 3. (a) Shell element (SHELL281) having eight nodes with six degrees of freedom at each node, (b) Fixed end condition

#### ۴-۱- اعتبارسنجی نتایج

به منظور اعتبار سنجی و بررسی دقت فرمول‌بندی ارائه شده در مطالعه حاضر، مقادیر بار کمانش جانبی-پیشگی حاصله با نتایج سایر محققین و همچنین نرم افزار اجزاء محدود انسیس مقایسه گردیده‌اند. روش‌های متعددی جهت مدلسازی سه بعدی چندلایه‌های فلز - الیاف با استفاده از نرم افزار انسیس وجود دارد، اما برای تیرهای جدار نازک به علت آنکه نسبت ضخامت به سایر ابعاد بسیار کوچک است، المان پوسته همواره ارجحیت دارد [۱۶، ۲۵، ۳۱-۳۷، ۴۴]. در این پژوهش، با توجه به هندسه مسئله از المان پوسته shell281 نشان داده شده در شکل ۳-الف برگرفته از راهنمای نرم افزار انسیس استفاده شده است. این المان هشت گره دارد که هر گره دارای شش درجه آزادی (سه درجه جابجایی و سه درجه چرخش) است که برای

کسر حجمی فلز<sup>۱</sup> بررسی می‌شود. پارامتر بدون بعد کسر حجمی فلز به صورت نسبت جمع ضخامت تمامی لایه‌های فلزی به ضخامت کلی لمینیت تعریف می‌گردد [۲۵]:

$$MVF = \frac{n \times t_{Al}}{t_{Lam}} \quad (37)$$

در رابطه (۳۷)،  $n$  تعداد لایه‌های آلومینیوم،  $t_{Al}$  ضخامت هر ورق آلومینیوم و  $t_{Lam}$  ضخامت کلی می‌باشد.  $MVF=0$  یعنی حالتی که تنها لایه‌های کامپوزیتی وجود داشته باشد و  $MVF=1$  به معنی فلز بدون الیاف است. هر یک از عوامل مؤثر بر ظرفیت کمانشی مسئله مورد بحث و بازه تغییرات آن‌ها در جدول ۲ نشان داده شده است.

1 Metal Volume Fraction (MVF)

جدول ۳. اثر تعداد تقسیم بندی بر بار کمانش جانبی تیر همگن دو سر مفصل با مقطع متغیر تحت بار گسترده یکنواخت

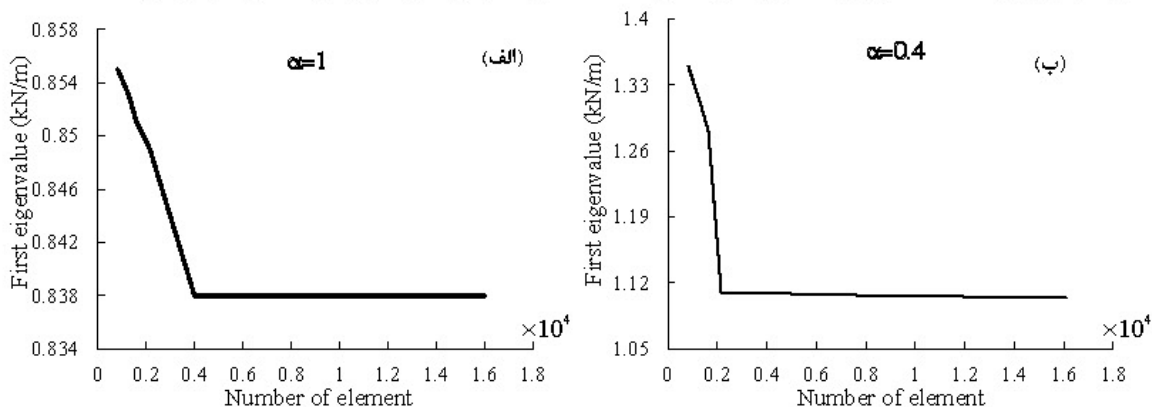
Table 3. Convergence study of the DQM-based results in terms of lateral buckling load for a simply supported tapered homogenous I-beam under uniformly distributed load

		بار کمانش جانبی (kN/m)							
انسیس	سلطانی و همکاران [۵۲]	عسگریان و همکاران [۱۶]	روش حاضر					$\alpha$	محل اعمال بار
			تعداد نقاط در طول تیر براساس روش مربعات دیفرانسیل (N)						
			۲۹	۲۱	۱۵	۹	۵		
۱/۲۶۰	۱/۲۴۵	۱/۲۴۷	۱/۲۴۶	۱/۲۴۶	۱/۲۴۶	۱/۲۴۸	۱/۲۷۸	۰/۲	بال بالا
۱/۱۰۷	۱/۱۳۰	۱/۱۳۱	۱/۱۳۰	۱/۱۳۰	۱/۱۳۰	۱/۱۳۱	۱/۱۶۱	۰/۴	
۰/۹۸۳	۱/۰۳۳	۱/۰۳۴	۱/۰۳۳	۱/۰۳۳	۱/۰۳۳	۱/۰۳۳	۱/۰۵۲	۰/۶	
۰/۸۹۶	۰/۹۵۳	۰/۹۵۳	۰/۹۵۳	۰/۹۵۳	۰/۹۵۳	۰/۹۵۲	۰/۹۵۸	۰/۸	
۰/۸۴۴	۰/۸۸۷	۰/۸۸۷	۰/۸۸۷	۰/۸۸۷	۰/۸۸۷	۰/۸۸۶	۰/۸۷۷	۱/۰	
۱/۷۷۵	۱/۷۸۹	۱/۷۹۲	۱/۷۸۹	۱/۷۸۹	۱/۷۸۹	۱/۷۸۹	۰/۸۶۷	۰/۲	
۱/۷۷۹	۱/۸۳۷	۱/۸۳۹	۱/۸۳۷	۱/۸۳۷	۱/۸۳۷	۱/۸۳۶	۱/۸۸۵	۰/۴	مرکز سطح
۱/۸۱۵	۱/۸۸۳	۱/۸۸۶	۱/۸۸۳	۱/۸۸۳	۱/۸۸۳	۱/۸۸۲	۱/۸۹۲	۰/۶	
۱/۸۴۴	۱/۹۲۸	۱/۹۳۱	۱/۹۲۷	۱/۹۲۷	۱/۹۲۷	۱/۹۲۶	۱/۸۸۶	۰/۸	
۱/۸۸۷	۱/۹۷۱	۱/۹۷۵	۱/۹۷۱	۱/۹۷۱	۱/۹۷۱	۱/۹۶۸	۱/۸۶۲	۱/۰	
۲/۳۰۱	۲/۳۵۰	۲/۳۵۴	۲/۳۵۰	۲/۳۵۰	۲/۳۵۰	۲/۳۴۸	۲/۴۵۸	۰/۲	
۲/۴۵۷	۲/۵۳۸	۲/۵۴۴	۲/۵۳۸	۲/۵۳۸	۲/۵۳۸	۲/۵۳۶	۲/۴۶۱	۰/۴	
۲/۶۰۶	۲/۷۱۲	۲/۷۱۹	۲/۷۱۲	۲/۷۱۲	۲/۷۱۲	۲/۷۰۹	۲/۴۵۵	۰/۶	بال پایین
۲/۷۵۰	۲/۸۷۶	۲/۸۸۵	۲/۸۷۶	۲/۸۷۶	۲/۸۷۶	۲/۸۷۲	۲/۴۴۳	۰/۸	
۲/۹۰۴	۳/۰۳۱	۳/۰۴۴	۳/۰۳۱	۳/۰۳۱	۳/۰۳۱	۳/۰۲۷	۲/۴۲۷	۱/۰	

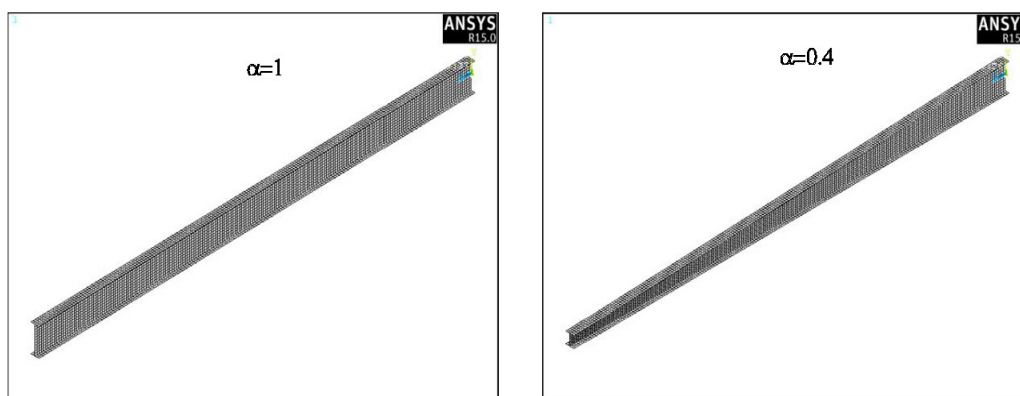
برش به صورت کامل از بال به جان نیمرخ منتقل می‌گردد، بنابراین در مدلسازی سه بعدی از گره مشترک در مرز بین بال و جان استفاده شده است. جهت تعیین نمودن موده‌های کمانش جانبی-پیچشی و بار نظیر هر مود از تحلیل ساده خطی استفاده شده است. این تحلیل مبتنی بر حل مقادیر ویژه است و برای سازه‌های ایده‌آل و بدون نقص هندسی اولیه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در ابتدا به منظور بررسی روند همگرایی و همچنین صحت‌گذاری بر روش حل ارائه شده، مسئله برای تیر باریک شونده ایزوتروپ حل و با نتایج موجود در سایر مراجع و مقادیر حاصل از مدل‌سازی در نرم افزار انسیس مقایسه می‌شود. در این راستا، بار بحرانی کمانش جانبی-پیچشی تیر ماهیچه‌ای در حالت  $MVF=1$  به ازای مقادیر مختلف  $N$ ، محل اعمال بار گسترده یکنواخت ( $Z_p$ ) و ضریب باریک شوندگی ارتفاع جان نیمرخ تیر ( $\alpha$ ) محاسبه و به همراه نتایج تحقیق مراجع [۱۶] و [۵۲] و همچنین مقادیر عددی حاصل از تحلیل المان محدود با استفاده از نرم افزار انسیس در جدول ۳ نشان داده شده است. برای مقایسه نتایج تحلیل پایداری جانبی حاصل از کار حاضر با نتایج بدست آمده از مرجع [۱۶]، لازم است ضخامت بال و جان به

تحلیل ورق‌های نازک و نسبتاً ضخیم مناسب می‌باشد [۵۳]. در صورت استفاده از این المان امکان لایه‌چینی کامپوزیت‌ها، اختصاص ضخامت و خصوصیات هر لایه به صورت جداگانه وجود دارد. پس از مدل‌سازی و اعمال بار گسترده عرضی، شرایط مرزی به مدل نرم‌افزاری معرفی می‌گردد. به‌منظور ایجاد شرایط تکیه‌گاهی گیردار، مقادیر تغییر مکان و چرخش حول هر سه محور مختصات برای تمامی نقاط لبه انتهایی تیر مطابق شکل ۳-ب مقید گردید. با توجه به آنکه در این مطالعه مود کمانش کلی جانبی-پیچشی حاکم است، مدل‌سازی عددی با فرض عدم جدایش بین ورق فولادی و لایه‌های الیافی انجام شده است که نتایج تجربی موجود در خصوص مود کمانشی خمشی عضو جدار نازک تحت بار محوری فشاری درستی فرض یاد شده را تأیید می‌کنند [۲۷-۳۱]. همچنین اثر چسب در اتصال میان لایه‌های کامپوزیت و آلومینیوم در معادلات رفتاری لحاظ نشده و فرض بر اتصال پیوسته است. بنابراین در مدلسازی سه بعدی نیز فرض مذکور بکار برده و در نتیجه از اتصال کامل در فصل مشترک لایه‌های الیافی و ورق‌های فلزی استفاده شده است. همچنین ذکر این نکته ضروری است که در روابط ارائه شده در تحقیق حاضر فرض بر این است که جریان



شکل ۴. نمودار روند همگرایی بار کمانشی (اولین مقدار ویژه) بر حسب افزایش تعداد المان (الف) تیر با مقطع ثابت، (ب) تیر با مقطع باریک شونده.  
**Fig. 4. Convergence rate of buckling load (the first eigenvalue) versus the number of elements, (a) uniform beam, (b) tapered beam**



شکل ۵. مدل المان محدود تیر جدار نازک (الف) تیر با مقطع ثابت، (ب) تیر با مقطع باریک شونده  
**Fig. 5. Finite element modeling of thin-walled beam using ANSYS, (a) uniform beam, (b) tapered beam**

همانطور که از جدول ۳ استنباط می‌شود، تعداد ۲۱ نقطه برای به‌دست آوردن بار بحرانی جانبی کافی است و جواب‌ها در این تعداد تقسیم بندی همگرا شده‌اند. همچنین تطابق بسیار خوبی بین نتایج به‌دست آمده با نتایج عددی حاصل از نرم افزار انسیس و همچنین پژوهش‌های انجام شده توسط عسگریان و همکاران [۱۶] و سلطانی و همکاران [۵۲] وجود دارد.

همانگونه که بخش مقدمه مقاله حاضر توضیح داده شد، تاکنون پژوهش عددی یا تجربی در زمینه پایداری جانبی تیر ماهیچه با مقطع I-شکل کامپوزیت لایه‌ای الیاف-فلز منتشر نشده است. در مطالعات عددی و آزمایشگاهی موجود که توسط بانات و همکاران [۳۱-۲۷] ارائه شده‌اند، رفتار کمانش و پس‌کمانش تیرهای جدار نازک تحت بار محوری فشاری بررسی شده است. بنابراین، تنها مود ناپایداری خمشی در این پژوهش‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. حال آنکه فرمول‌بندی

ترتیب ۱۰ و ۸ میلی‌متر در نظر گرفته شود. همچنین لازم به توضیح است که جهت دستیابی به نتایج دقیق‌تر نقاط انتخابی در دامنه حل ( $N$ ) به صورت عدد فرد در نظر گرفته شده‌اند [۴۷].

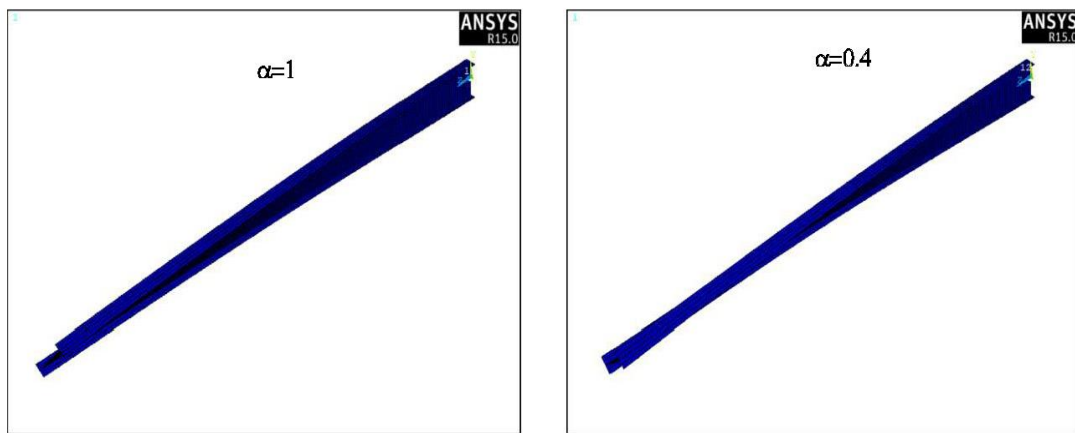
باید توجه داشت که جهت استخراج نتایج صحیح از نرم افزار المان محدود انسیس بایستی آنالیز مش تحت تحلیل مقدار ویژه انجام شود. به منظور رسیدن به یک مدل مطلوب و همگرا شدن نتایج بار بحرانی به یک مقدار ثابت، تعداد المان‌ها در چندین مرحله، افزایش می‌یابد. در شکل ۴ روند همگرایی اولین مقدار ویژه تیر جدار نازک ایزوتروپ با مقطع ثابت ( $\alpha=1$ ) و باریک شونده ( $\alpha=0.4$ ) تحت بار گسترده یکنواخت بر بال بالا با افزایش تعداد مش‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. همان‌طور که از شکل نمایان است با افزایش تعداد المان‌ها به بیش از ۴۰۰۰، مقادیر بار کمانش جانبی همگرا شده‌اند. شکل ۵ هر دو مدل المان‌بندی شده را نمایش می‌دهد.



جدول ۴. مقایسه بار کمانش جانبی بدست آمده توسط روش ارائه شده با نتایج نرم افزار انسیس

Table 4. The lateral buckling loads comparison between the present methodology and ANSYS code for distributed load applied at the centroid when  $MVF=0.2$

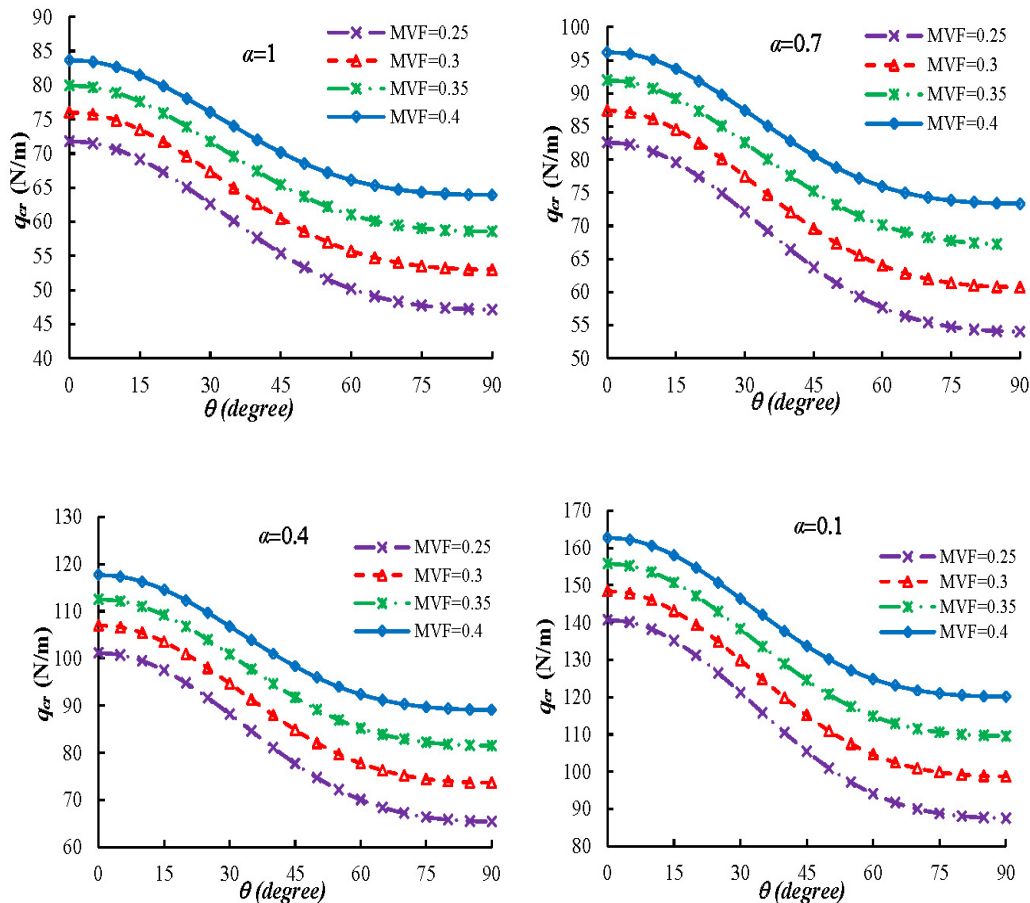
بار کمانش جانبی (N/m)									
$[Al, (90)_f]_s$			$[Al, (0)_f]_s$			$[Al, (0, 90)_f]_s$			$\alpha$
$\Delta$ (%)	انسیس	نتایج حاضر	$\Delta$ (%)	انسیس	نتایج حاضر	$\Delta$ (%)	انسیس	نتایج حاضر	
۶/۶۱۳	۱۳۵/۸۱۷	۱۴۵/۴۳۴	۱۱/۶۴۹	۲۴۵/۷۹۲	۲۷۸/۲۰۱	۸/۳۲۲	۱۹۴/۶۷۷	۲۱۲/۳۴۸	۱
۸/۱۵۹	۱۳۰/۵۴۱	۱۴۲/۱۳۷	۱۳/۴۰۹	۲۳۵/۷۰۳	۲۷۲/۲۰۲	۱۰/۲۲۶	۱۸۶/۴۵۳	۲۰۷/۶۹۱	۰/۸
۷/۵۳۹	۱۲۸/۲۰۷	۱۳۸/۶۶۰	۱۳/۲۵۱	۲۳۰/۶۴۹	۲۶۵/۸۸۱	۹/۹۷۲	۱۸۲/۵۶۰	۲۰۲/۷۸۱	۰/۶
۵/۷۱۰	۱۲۷/۲۴۸	۱۳۴/۹۵۴	۱۱/۵۹۵	۲۲۹/۱۰۸	۲۵۹/۱۵۹	۸/۲۹۶	۱۸۱/۱۶۳	۱۹۷/۵۵۲	۰/۴
۳/۹۶۷	۱۲۵/۷۷۰	۱۳۰/۹۶۶	۹/۴۴۶	۲۲۸/۱۱۵	۲۵۱/۹۱۰	۶/۹۷۱	۱۷۸/۵۲۸	۱۹۱/۹۰۱	۰/۲



شکل ۶. مود اول کمانش جانبی تیر جدار نازک الیاف فلز با لایه چینی متعامد  $[Al, (0, 90)_f]_s$  (الف) تیر با مقطع ثابت، (ب) تیر با مقطع باریک شونده  
Fig. 6. The first lateral buckling mode of FML I-beam subjected to uniformly distributed load, (a) uniform beam, (b) tapered beam

نرم افزار انسیس در جدول ۴ نشان داده شده‌اند. براساس جدول ۴ مشاهده می‌شود که مقادیر بار بحرانی محاسبه شده از پژوهش حاضر تطابق خوبی با نتایج به دست آمده از مدلسازی در نرم افزار المان محدود دارند، به طوریکه بیشترین درصد خطا ۱۳/۴۱٪ (با میانگین ۹٪) است. شکل ۶ وضعیت کمانش یافته تیر جدار نازک الیاف فلز با لایه چینی متعامد  $[Al, (0, 90)_f]_s$  را برای دو حالت مقطع ثابت و متغیر ( $\alpha=0/4$ ) نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که روش تحلیل خطی مقدار ویژه به درستی می‌تواند شکل مود اول کمانش جانبی-پیچشی را پیش‌بینی کند. همچنین این شکل نشان می‌دهد که کمانش هر دو عضو به صورت کمانش کلی است و هیچگونه کمانش موضعی مشاهده نمی‌گردد. علاوه بر این با دقت در تصاویر مشخص است که پدیده تورق و یا جداسدگی میان ورق‌های آلومینیومی و لایه‌های کامپوزیتی با بکار بردن فرض اتصال پیوسته

معرفی شده در تحقیق حاضر مناسب بررسی رفتار کمانش جانبی-پیچشی تیر I-شکل کامپوزیت لایه‌ای الیاف-فلز است. در خصوص انواع مودهای ناپایداری تیرهای جدار نازک در بخش مقدمه توضیحات مفصلی ارائه شده است. بنابراین در این مرحله، نتایج پیش‌بینی شده توسط روش حاضر در خصوص تیر ماهیچه‌ای جدار نازک چند لایه الیاف-فلز با مقادیر به دست آمده از تحلیل المان محدود با استفاده از نرم‌افزار انسیس مقایسه می‌شوند. به همین منظور، بار کمانش جانبی-پیچشی تیر کامپوزیتی چند لایه الیاف-فلز مد نظر از جنس الیاف ارتوتروپیک شیشه-پوکسی با چیدمان متعامد  $[Al, (0, 90)_f]_s$  و تک‌جهته  $[Al, (0)_f]_s$  و  $[Al, (90)_f]_s$  برای چند مقدار متفاوت از پارامتر ( $\alpha$ ) و با فرض  $MVF=0/2$  تحت شرایطی که بار گسترده عرضی به مرکز سطح مقطع اعمال می‌شود، به ازای ۲۱ نقطه انتخابی در امتداد طول عضو محاسبه و به همراه نتایج حاصل از مدلسازی سه بعدی در



شکل ۷. تغییرات بار کمانش جانبی ( $q_{cr}$ ) برحسب زاویه چینش الیاف در بال بالا و پایین نیم‌رخ برای کسر حجمی مختلف آلومینیوم و سه ضریب متفاوت تغییر ارتفاع جان، محل اعمال بار گسترده: بال بالا

Fig. 7. Variation of the lateral buckling load versus lamina orientation of both flanges: effect of metal volume fraction, for different tapering ratios, and for a transverse load applied at the top flange

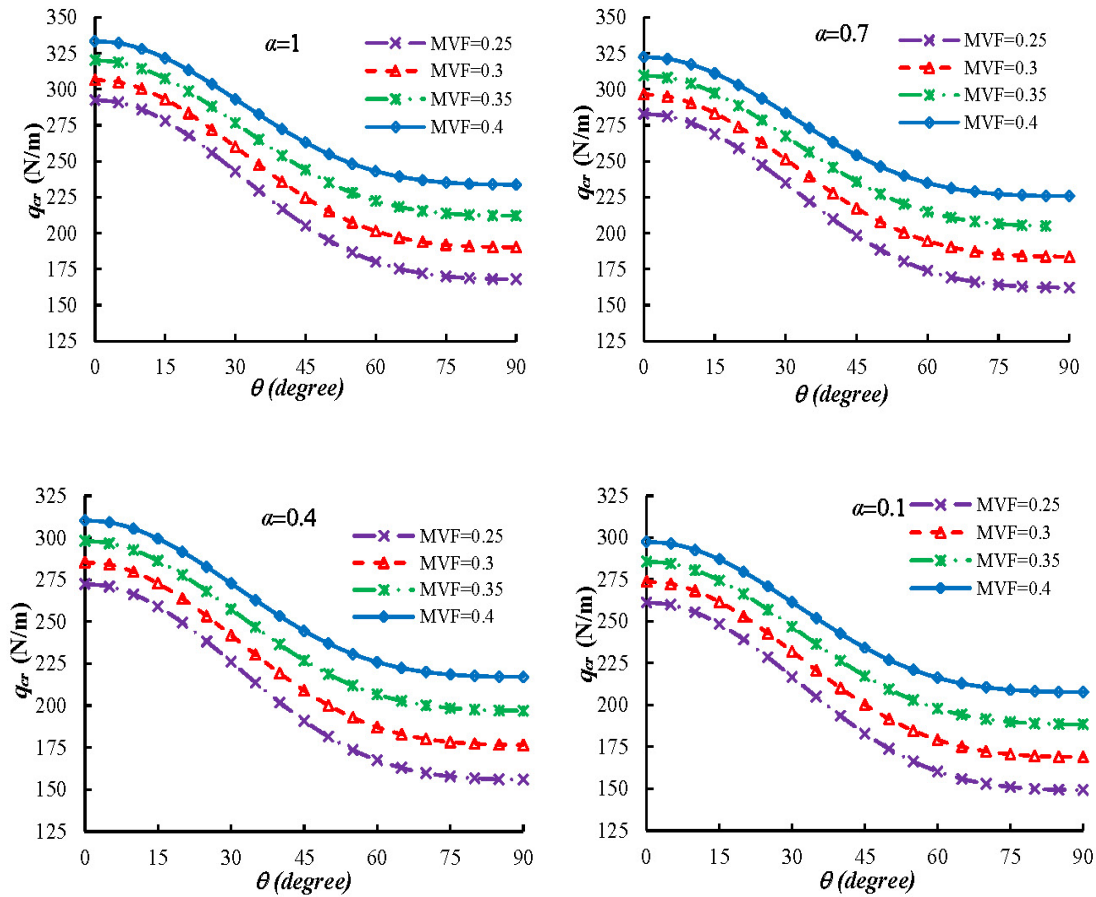
منشوری) با گام‌های ۰/۳ تغییر می‌کند. همچنین در ادامه تأثیر درصد حجمی آلومینیوم بر پایداری جانبی بررسی می‌شود.

در مورد اول فرض شده که چیدمان لایه‌های در جان به صورت  $[Al, (\pm\theta)]_s$  است. بنابراین ۸ لایه کامپوزیتی در جان با زاویه صفر درجه نسبت به محور اصلی تیر قرار گرفته‌اند. حال آنکه در بال بالا و پایین چیدمان متقارن و بالانس به صورت  $[Al, (\pm\theta)]_s$  در نظر گرفته شده است. برای این حالت، تغییرات بار کمانش جانبی تیر ماهیچه‌ای با مقطع I شکل کامپوزیتی الیاف-فلز تحت بار گسترده یکنواخت برحسب زاویه الیاف در بال برای مقادیر متفاوت از درصد حجمی فلز و سه مقدار مختلف ضریب تغییر ارتفاع جان (۰/۱، ۰/۴، ۰/۷، ۱) در شکل‌های ۶ تا ۸ برای سه موقعیت بارگذاری مختلف (بال بالا، مرکز سطح و بال پایین) نشان داده شده است. همچنین در جدول ۵ تأثیر پارامتر باریک شونده‌گی جان تیر ( $\alpha$ )، کسر حجمی

لایه‌ها در مدل‌سازی سه بعدی رخ نداده است.

#### ۴-۲- بررسی اثر پارامترهای مهم بر پایداری جانبی

پس از صحت‌سنجی روش مربعات دیفرانسیلی، با توجه به بارهای اعمالی چیدمان مناسبی از لایه‌های ارتوتروپیک شیشه-اپوکسی که خصوصیات آن در جدول ۱ ارائه شده، در بال و جان نیم‌رخ جهت افزایش ظرفیت کمانشی معرفی خواهد شد. در این راستا، سه حالت مختلف از چیدمان لایه‌های ارتوتروپیک را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یکی از اهداف مقاله حاضر بررسی تأثیر کاهش ارتفاع جان نیم‌رخ بر رفتار پایداری جانبی است. به همین منظور، در این بخش فرض شده که ارتفاع جان مقطع (فاصله میان تار بال بالا و پایین) در انتهای آزاد به ترتیب ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درصد نسبت به ارتفاع نیم‌رخ در انتهای گیردار کاهش یافته است. بنابراین پارامتر  $\alpha$  از ۰/۱ تا ۱ (تیر



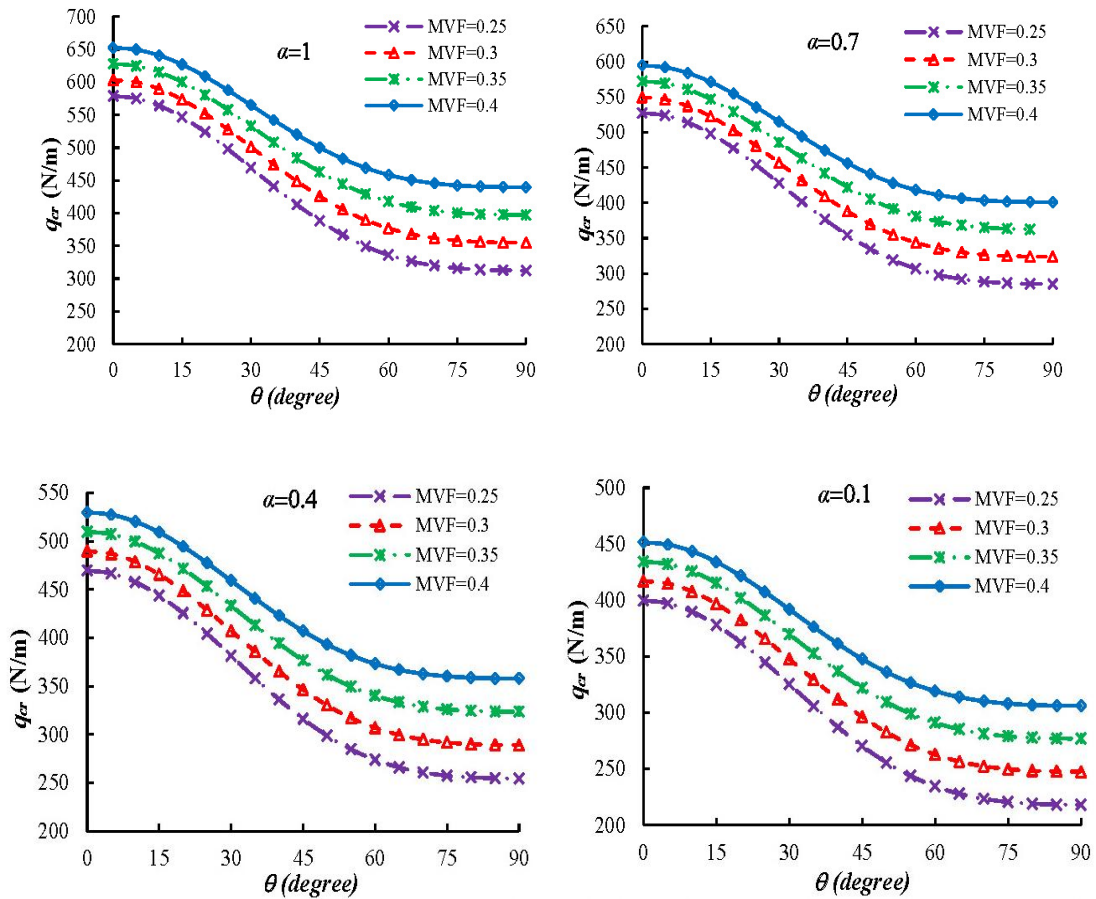
شکل ۸. تغییرات بار کمانش جانبی ( $q_{cr}$ ) بر حسب زاویه چینش الیاف در بال بالا و پایین نیمرخ برای کسر حجمی مختلف آلومینیوم و سه ضریب متفاوت تغییر ارتفاع جان، محل اعمال بار گسترده: مرکز سطح

Fig. 8. Variation of the lateral buckling load versus lamina orientation of both flanges: effect of metal volume fraction, for different tapering ratios, and for a transverse load applied at the centroid

صورت تک جهته و با زاویه صفر درجه بین دو ورق آلومینیومی قرار گرفته‌اند. در حالیکه از چیدمان متقارن و بالانس ( $[Al, (\pm\theta)]_S$ ) در جان استفاده شده است. در ادامه با فرض آنکه بار گسترده می‌تواند به بال بالا و یا مرکز سطح نیمرخ اعمال شود، تأثیر زاویه چینش الیاف در جان بر ظرفیت پایداری جانبی عضو ماهیچه‌ای I شکل با شرایط انتهایی گیردار-آزاد بررسی شده است. بدین منظور، تغییرات بار کمانشی بر حسب  $\alpha$  برای مقادیر مختلف کسر حجمی فلز و با فرض ( $\alpha=1, 0.7, 0.4, 0.1$ ) و برای سه محل بارگذاری مدنظر: بال بالا، مرکز سطح و بال پایین به ترتیب در شکل‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است. با توجه به نمودارها می‌توان نتیجه‌گیری نمود که برای تمامی مقادیر درصد حجمی فلز و پارامتر تغییر ارتفاع جان ( $\alpha$ )، ظرفیت کمانش جانبی با افزایش زاویه الیاف دچار افزایش و سپس کاهش می‌شود. این افزایش پایداری جانبی از زاویه ۰ تا ۴۵

فلز و زاویه چینش الیاف سازنده بال بر ظرفیت پایداری جانبی تیر گیردار-آزاد تحت بار گسترده یکنواخت بررسی شده است. نتیجه اولیه‌ای که با توجه به شکل‌ها و جدول ۵ می‌توان فهمید این است که ظرفیت کمانش جانبی با افزایش زاویه الیاف به شدت کاهش می‌یابد. به طوریکه، با افزایش زاویه در بازه ۰ تا ۶۰ درجه ظرفیت کمانشی با شدت بیشتری نسبت به بازه ۶۰ تا ۹۰ درجه کاهش می‌یابد. به بیان دیگر، تیر جدار نازک چندلایه با افزایش زاویه چینش الیاف در بال ضعیف‌تر و ناپایدارتر می‌شود. بنابراین، پایداری جانبی حداکثر زمانی به دست می‌آید که چیدمان لایه‌ها برای هر دو بال به صورت تک جهته باشد.

در حالت دوم همانند مورد قبلی فرض شده که هر دو بال و جان مقطع از هشت لایه الیافی و دو لایه آلومینیوم ساخته شده‌اند. با این تفاوت که در این مورد، لایه‌های شیشه/اپوکسی در بال بالا و پایین به



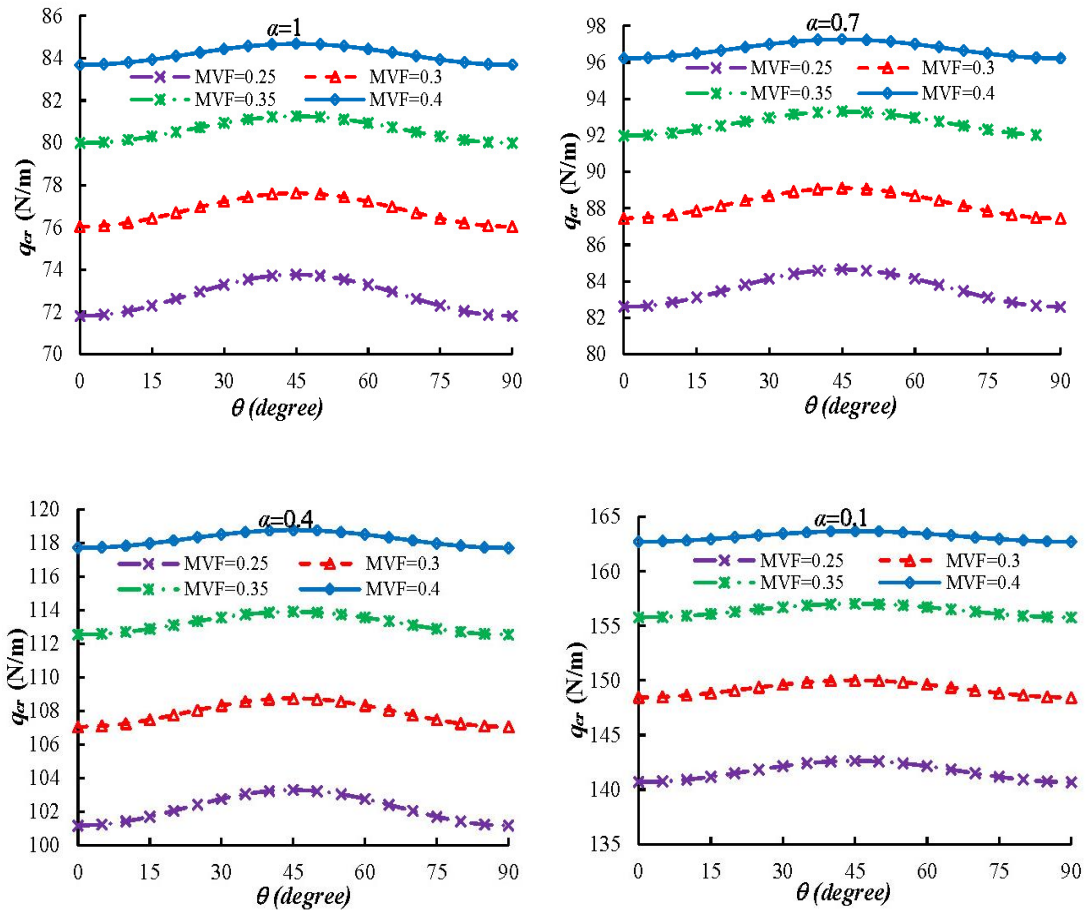
شکل ۹. تغییرات بار کمانش جانبی ( $q_{cr}$ ) برحسب زاویه چینش الیاف در بال بالا و پایین نیمرخ برای کسر حجمی مختلف آلومینیوم و سه ضریب متفاوت تغییر ارتفاع جان، محل اعمال بار گسترده: بال پایین

Fig. 9. Variation of the lateral buckling load versus lamina orientation of both flanges: effect of metal volume fraction, for different tapering ratios, and for a transverse load applied at the bottom flange

جدول ۵. بار کمانش جانبی بدست آمده برای مقطع متغیر تحت بار گسترده یکنواخت برحسب زاویه چینش الیاف در بال بالا و پایین نیمرخ

Table 5. The estimated lateral buckling load for non-uniform cross-section under uniformly distributed load versus lamina orientation of both flanges

(N/m) بار کمانش جانبی								$\alpha$	محل اعمال بار
$MVF=0.4$				$MVF=0.2$					
زاویه									
۹۰	۷۵	۱۵	۰	۹۰	۷۵	۱۵	۰		
۸۹/۰۹۲	۸۹/۷۰۹	۱۱۴/۵۴۹	۱۱۷/۶۹۴	۵۶/۹۲۳	۵۷/۹۸۱	۹۱/۰۳۹	۹۴/۸۷۸	۰/۴	بال بالا
۷۷/۶۴۲	۷۸/۱۶۱	۹۹/۳۱۱	۱۰۲/۰۱۱	۴۹/۷۲۴	۵۰/۶۱۵	۷۸/۷۷۱	۸۲/۰۹۵	۰/۶	
۶۹/۷۱۷	۷۰/۱۶۸	۸۸/۹۵۳	۹۱/۳۷۰	۴۴/۷۰۳	۴۰/۴۷۳	۷۰/۴۸۴	۷۳/۴۸۴	۰/۸	
۶۳/۹۲۸	۶۴/۳۳۰	۸۱/۴۶۰	۸۳/۶۷۹	۴۱/۰۱۸	۴۱/۶۹۹	۶۴/۵۱۰	۶۷/۲۸۵	۱/۰	
۲۱۷/۰۶۱	۲۱۸/۴۷۶	۲۹۹/۴۴۷	۳۱۰/۴۳۷	۱۳۴/۹۷۵	۱۳۷/۰۵۱	۲۴۴/۸۸۵	۲۵۹/۱۵۹	۰/۴	مرکز سطح
۲۲۲/۹۵۶	۲۲۴/۳۹۵	۳۰۷/۳۲۶	۳۱۸/۵۹۵	۱۳۸/۶۸۳	۱۴۰/۷۸۸	۲۵۱/۳۲۴	۲۶۵/۸۸۱	۰/۶	
۲۲۸/۴۸۸	۲۲۹/۹۴۹	۳۱۴/۷۲۷	۳۲۶/۲۶۱	۱۴۲/۱۶۴	۱۴۴/۲۹۳	۲۵۷/۱۸۲	۲۷۲/۲۰۲	۰/۸	
۲۳۳/۷۳۲	۲۳۵/۲۱۴	۳۲۱/۷۴۶	۳۳۳/۳۵۱	۱۴۵/۴۶۳	۱۴۷/۶۱۶	۲۶۲/۸۳۶	۲۷۸/۲۰۱	۱/۰	



شکل ۱۰. تغییرات بار کمانش جانبی ( $q_{cr}$ ) برحسب زاویه چینش الیاف در جان نیمرخ برای کسر حجمی مختلف آلومینیوم و سه ضریب متفاوت تغییر ارتفاع جان، محل اعمال بار گسترده: بال بالا

Fig. 10. Variation of the lateral buckling load versus lamina orientation of the web: effect of metal volume fraction, for different tapering ratios, and for a transverse load applied at the top flange

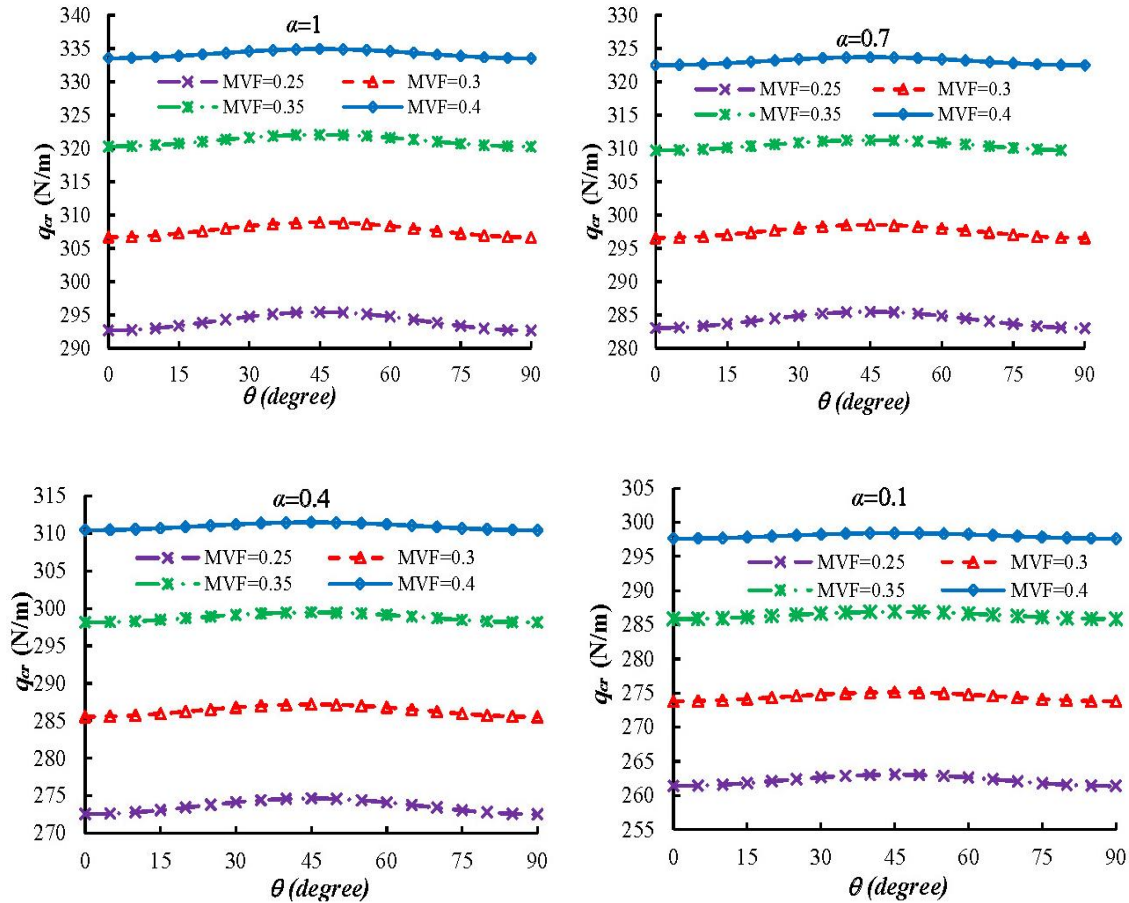
می‌یابد. همچنین نمودارها نشان می‌دهند که شیب تغییرات در بازه  $60 < \theta < 90$  شدید و در بازه  $60 < \theta < 90$  کمتر خواهد بود.

با مشاهده نتایج ارائه شده در اشکال ۷ تا ۱۵ نتیجه می‌شود در صورت استفاده از الیاف شیشه با افزایش کسر حجمی فلز پایداری جانبی به صورت قابل توجهی افزایش می‌یابد، که این نتیجه با توجه به ویژگی‌های مادی شیشه-اپوکسی و آلومینیوم قابل پیش‌بینی است. همچنین با توجه به این اشکال می‌توان نتیجه‌گیری نمود که هرچه درصد حجمی آلومینیوم افزایش می‌یابد، تأثیر تغییر زاویه چیدمان الیاف در مقطع بر پایداری جانبی تیر تحت بار عرضی به صورت چشمگیری کاهش می‌یابد. به طور مثال و براساس شکل ۱۴، در شرایط تیر با مقطع ثابت تحت بار بر مرکز سطح و با درصد حجمی فلز برابر  $0.25/0.4$  و مقدار بار کمانش جانبی با افزایش زاویه چینش

درجه بوده و از  $45$  تا  $90$  درجه بار کمانشی کاهش می‌یابد. به عبارتی با قرار دادن زاویه چیدمان الیاف سازنده جان در امتداد  $45$  درجه حداکثر ظرفیت کمانشی حاصل می‌شود.

در حالت سوم فرض شده که هر دو بال و جان تیر با مقطع I شکل کامپوزیتی متشکل از ده لایه شامل دو ورق آلومینیومی و هشت لایه شیشه-اپوکسی است که لایه‌های الیافی با چیدمان متقارن و بالانس  $([Al, (\pm\theta)_f]_s)$  بین دو ورق فلزی قرار گرفته‌اند. میزان تأثیر تغییر کسر حجمی فلز آلومینیوم و زاویه چیدمان لایه‌های سازنده بال و جان روی بار کمانش جانبی تیر جدار نازک ماهیچه‌ای با فرض  $(0.1/0.4, 0.1/0.7, 0.1/1)$  و تحت سه موقعیت بارگذاری متفاوت در شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، پایداری جانبی با افزایش زاویه الیاف به طور پیوسته کاهش





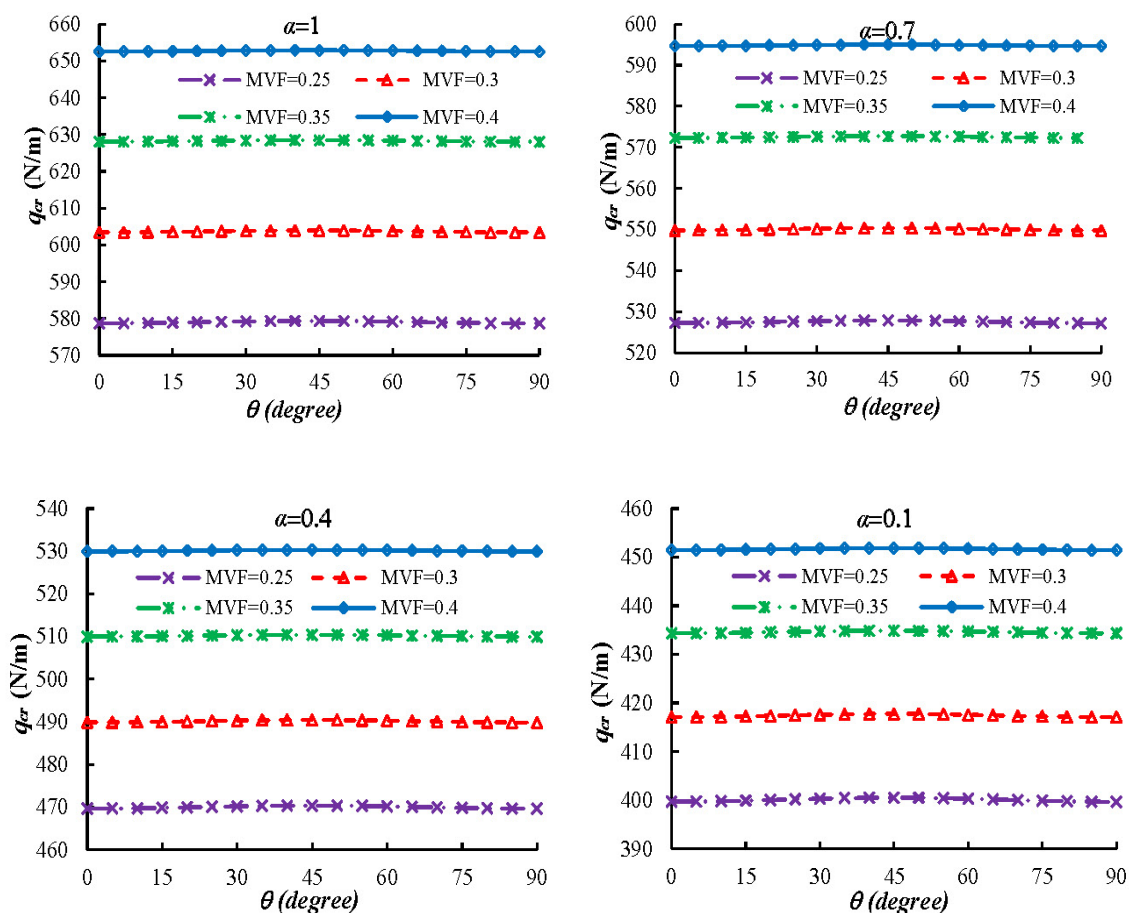
شکل ۱۱. تغییرات بار کمانش جانبی ( $q_{cr}$ ) برحسب زاویه چینش الیاف در جان نیمرخ برای کسر حجمی مختلف آلومینیوم و سه ضریب متفاوت تغییر ارتفاع جان، محل اعمال بار گسترده: مرکز سطح

Fig. 11. Variation of the lateral buckling load versus lamina orientation of the web: effect of metal volume fraction, for different tapering ratios, and for a transverse load applied at the centroid

قرار داده شوند. این موضوع مطابق رابطه (۱۶) مورد انتظار نیز هست، زیرا مقادیر سختی خمشی  $(EI_z)_{com}$  و سختی تابیدگی  $(EI_\omega)_{com}$  برحسب جملات سختی تک جهته  $(A_{11}$  و  $D_{11})$  بیان شده‌اند. این دو مؤلفه زمانی به حداکثر مقدار خود می‌رسند که الیاف سازنده هر دو بال و جان نیمرخ با زاویه صفر در راستای طول تیر قرار گیرند. از آنجا که بال‌ها وظیفه تحمل لنگرهای خمشی و پیچشی تابیدگی را دارند، جهت افزایش ظرفیت پایداری جانبی-پیچشی، الیاف سازنده بال‌ها بایستی به صورت یک جهته و با زاویه صفر درجه چیده شوند. همچنین براساس رابطه (۱۶)، عبارت سختی پیچشی سن-ونان  $(GJ)_{com}$  وابسته به سختی پیچشی در هر دو بال و جان  $D_{66}^w$  و  $D_{66}^f$  (مقطع است که این دو پارامتر با فرارگیری الیاف لایه‌های کامپوزیتی در امتداد ۴۵ درجه معمولاً به مقدار حداکثر خود می‌رسند. با توجه به

الیاف در بال و جان از ۰ به ۹۰ درجه به ترتیب ۴۲/۶٪ و ۳۰٪ کاهش می‌یابد. این روند می‌تواند با این اصل توجیه شود که با افزایش کسر حجمی فلز به علت زیاد شدن ضخامت لایه‌های آلومینیومی میزان مشارکت لایه‌های الیافی در تعیین مقاومت مقطع کاهش می‌یابد. نکته دیگری که با توجه به نمودارهای ارائه شده نتیجه می‌شود آن است که تغییر زاویه چیدمان الیاف در بال بالا و پایین در مقایسه با به نحوه چینش لایه‌ها در جان نیمرخ بر ظرفیت کمانش جانبی تأثیر بسیار بیشتری دارند. در نهایت با توجه به نمودارهای ارائه شده در شکل‌های ۷ تا ۱۵ می‌توان گفت که آرایش بهینه لایه‌ها بدین صورت است که لایه‌های الیافی سازنده بال تیر بایستی با زاویه صفر درجه نسبت به امتداد طولی عضو قرار گیرند و لایه‌های الیافی تشکیل دهنده جان تیر I شکل باید با زاویه ۴۵ درجه بین دو ورق آلومینیومی





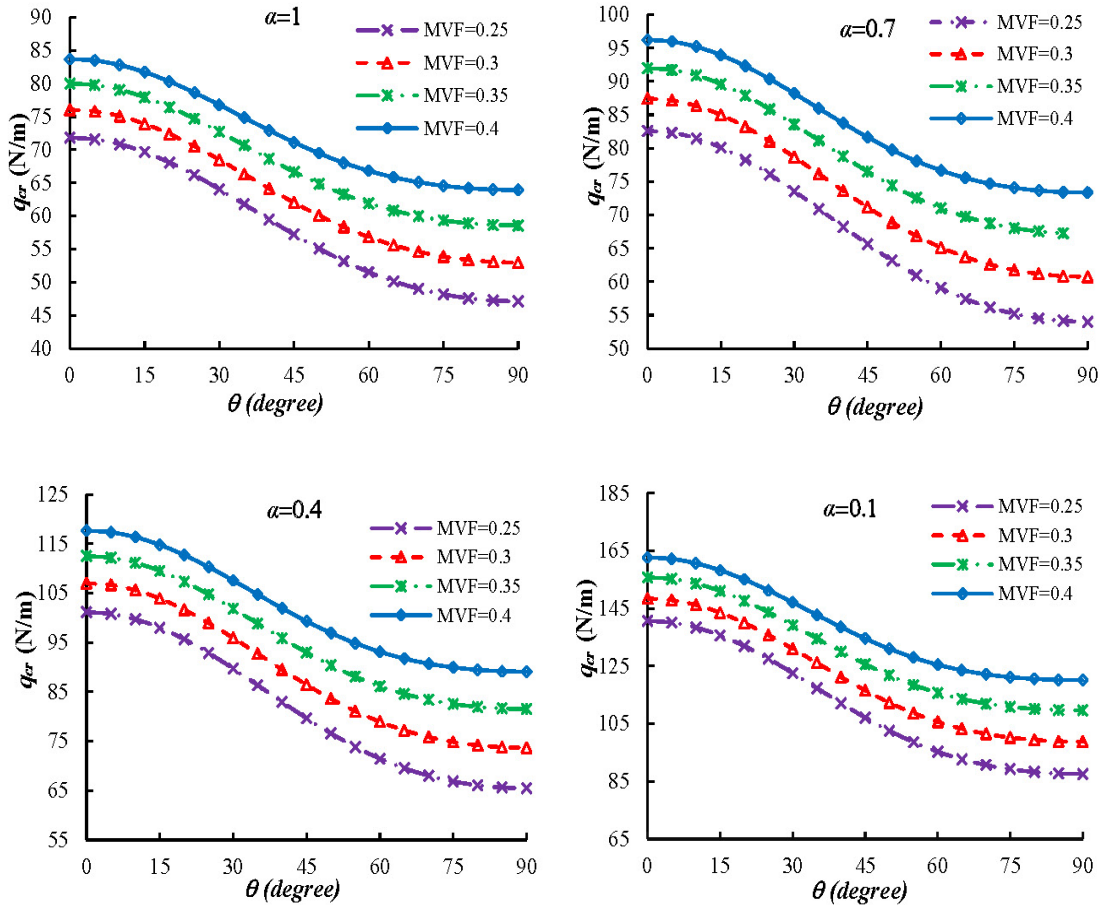
شکل ۱۲. تغییرات بار کمانش جانبی ( $q_{cr}$ ) برحسب زاویه چینش الیاف در جان نیمرخ برای کسر حجمی مختلف آلومینیوم و سه ضریب متفاوت تغییر ارتفاع جان، محل اعمال بار گسترده: بال پایین

Fig. 12. Variation of the lateral buckling load versus lamina orientation of the web: effect of metal volume fraction, for different tapering ratios, and for a transverse load applied at the bottom flange

چنین الگویی پیروی نمی‌کند. در شرایط بارگذاری مدنظر برخلاف آنچه مورد انتظار است با افزایش باریک شونده‌ی پایداری جانبی عضو افزایش می‌یابد. بنابراین برخلاف انتظار، عضو طره تحت بار جانبی بر بال بالا با  $\alpha=0/1$  پایدارتر از همان عضو با مقطع ثابت ( $\alpha=1$ ) است. شایان ذکر است که نتیجه مذکور فقط در خصوص اعضای جدار نازک با شرایط تکیه‌گاهی گیردار-آزاد صادق است [۴۴ و ۴۵]. دلیل این امر را می‌توان اینگونه توجیه نمود که با کاهش ارتفاع جان، میزان لنگر پیچشی محرک که هم‌زمان با رخ دادن کمانش جانبی ایجاد می‌شود به صورت قابل توجهی نسبت به شرایطی که ارتفاع جان در طول عضو ثابت است، کاهش می‌یابد. نکته قابل توجه دیگر آن است که ظرفیت کمانش جانبی تیر جدار نازک ساندویچی کامپوزیت-فلز زمانی حداکثر است که بار گسترده جانبی در امتداد بال پایین اعمال

این نکته که جان تیر تنش‌های برشی را تحمل می‌کند و وظیفه انتقال نیروی برشی را دارد، لایه‌های الیاف سازنده جان بایستی با زاویه ۴۵ درجه قرار گیرند تا حداکثر ظرفیت برشی برای مقطع به‌دست آید. بنابراین در ادامه این پژوهش جهت تعیین حداکثر ظرفیت کمانش جانبی، لایه چینی بهینه با چینش  $[Al, (\theta)_s]$  در بال‌ها و چیدمان  $[Al, (\pm\theta)_s]$  در جان مورد استفاده قرار می‌گیرد.

با دقت در نتایج ارائه شده می‌توان این نکته را نتیجه‌گیری کرد که در شرایطی که بار گسترده به مرکز سطح و یا بال بالای مقطع وارد می‌شود با کاهش پارامتر نسبت غیریکنواختی ارتفاع جان تیر و در نتیجه کاهش تمام ویژگی‌های هندسی سطح مقطع، پایداری عضو کاهش می‌یابد. درحالی که نتایج مربوط به پایداری جانبی-پیچشی تیرهایی که بار عرضی به بال بالای نیمرخ اعمال شده از



شکل ۱۳. تغییرات بار کمانش جانبی ( $q_{cr}$ ) برحسب زاویه چینش الیاف در هر دو بال و جان نیم‌رخ برای کسر حجمی مختلف آلومینیوم و سه ضریب متفاوت تغییر ارتفاع جان، محل اعمال بار گسترده: بال بالا

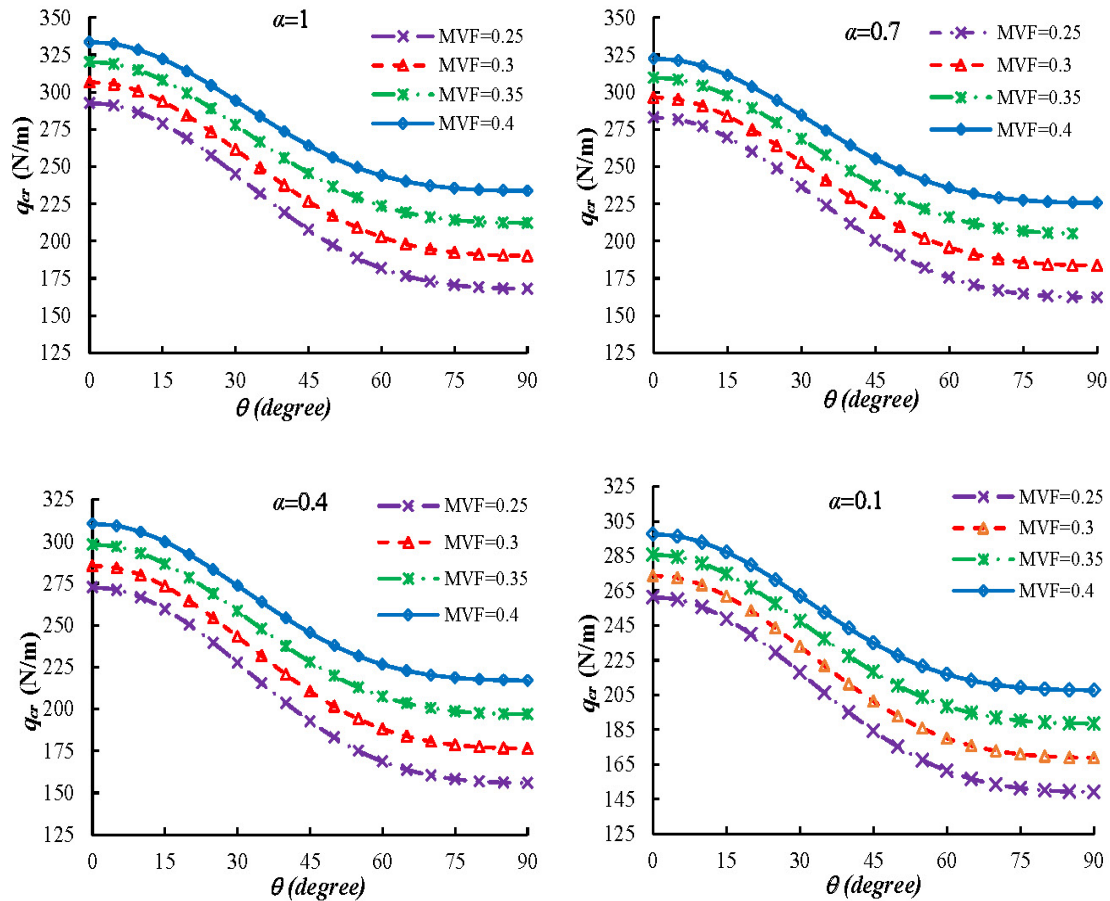
Fig. 13. Variation of the lateral buckling load versus lamina orientation of the web and both flanges: effect of metal volume fraction, for different tapering ratios, and for a transverse load applied at the top flange

اعمال می‌گردد، با وقوع کمانش جانبی لنگر پیچشی مقاوم ایجاد شده و در نتیجه تنش برشی کاهش می‌یابد. لذا با تغییر زاویه الیاف از ۰ به ۴۵ ظرفیت پایداری جانبی تیر جدار نازک با مقطع ثابت و یا متغیر به صورت قابل توجهی افزایش پیدا نمی‌کند.

در این قسمت، تیرهای ماهیچه‌ای با ساختار هیبرید کامپوزیت-فلز از جنس شیشه-اپوکسی و یا کربن-اپوکسی با چیدمان بهینه مطابق هندسه و شرایط انتهایی نشان داده شده در شکل ۲ مورد تحلیل پایداری جانبی قرار گرفته‌اند. هدف اصلی بررسی دقیق‌تر اثر افزایش درصد حجمی فلز، تغییر ارتفاع جان، محل اعمال بار گسترده و جنس الیاف بر ظرفیت کمانش جانبی-پیچشی می‌باشد. بدین منظور، تأثیر تغییرات هم‌زمان پارامتر تغییر ارتفاع جان ( $\alpha$ ) و کسر حجمی آلومینیوم بر بار کمانش جانبی در شکل‌های ۱۶ تا ۱۸ به

شده است. زیرا در این شرایط لنگر پیچشی مقاوم به وجود می‌آید که در جهت افزایش پایداری جانبی مقطع عمل می‌کند و کمترین مقدار بار جانبی زمانی به دست می‌آید که بار بر بال بالا وارد شود.

در همین راستا با مقایسه نتایج ارائه شده در شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ می‌توان دریافت در شرایطی که بار به بال بالای مقطع وارد می‌شود با تغییر زاویه چینش الیاف در جان نیم‌رخ از ۰ به ۴۵ درجه، ظرفیت پایداری جانبی بیشتر از دو حالت بارگذاری دیگر افزایش می‌یابد. دلیل آن این است که با اعمال بار گسترده به بال بالا، هم‌زمان با کمانش جانبی لنگر پیچشی محرک ایجاد می‌شود و در نتیجه تنش برشی افزایش می‌یابد. با توجه به این حقیقت که جان تیر تنش برشی را تحمل می‌کند، الیاف سازنده جان مشارکت بیشتری در تعیین ظرفیت مقطع خواهند داشت. اما در حالتی که بار جانبی به بال پایین



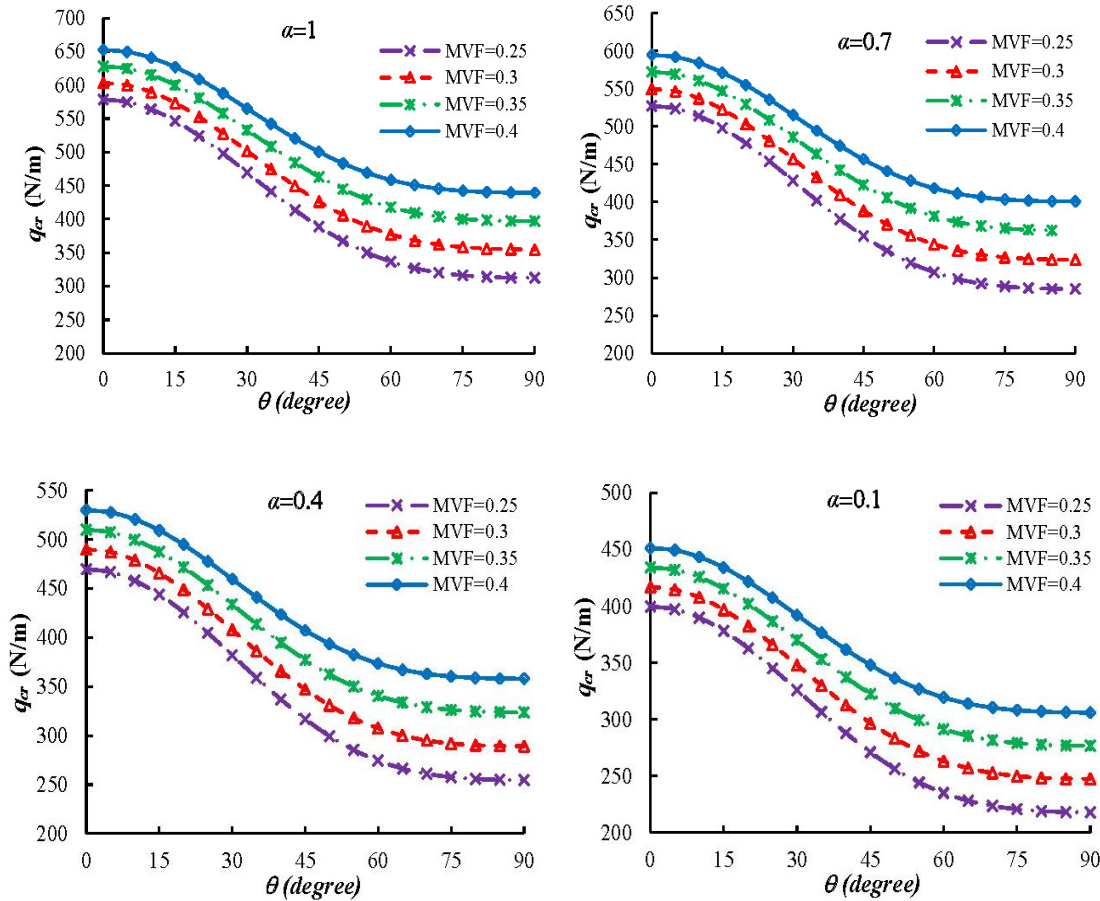
شکل ۱۴. تغییرات بار کمانش جانبی ( $q_{cr}$ ) برحسب زاویه چینش الیاف در هر دو بال و جان نیمرخ برای کسر حجمی مختلف آلومینیوم و سه ضریب متفاوت تغییر ارتفاع جان، محل اعمال بار گسترده: مرکز سطح

Fig. 14. Variation of the lateral buckling load versus lamina orientation of the web and both flanges: effect of metal volume fraction, for different tapering ratios, and for a transverse load applied at the centroid

می‌شود، به دلیل ایجاد لنگر پیچشی محرک، مقدار بار کمانشی نسبت به حالت بارگذاری بر روی مرکز سطح و بال پایین کاهش پیدا کرده است. شکل‌های ۱۷ و ۱۸ به ترتیب مربوط به بارگذاری روی مرکز سطح و بال پایین، مطابق انتظار نشان می‌دهند که کاهش ضریب باریک شونده‌گی جان ( $\alpha$ ) به علت کم شدن خصوصیات هندسی مقطع و یا همان ارتفاع جان مستقلاً باعث افزایش ناپایداری می‌شود. اما در شرایطی که بار به بال بالا وارد شده، عکس این روند مشاهده می‌شود که این امر ناشی از کاهش لنگر پیچشی ثانویه است. همچنین مشخص است که ظرفیت پایداری جانبی برای تمامی مقادیر ضریب تغییر ارتفاع جان و نقطه اثر بارگذاری در تیر هیبرید کامپوزیت-فلز ده لایه از جنس گلار با افزایش درصد حجمی فلز آلومینیوم به صورت قابل توجهی افزایش می‌یابد. به طور مثال، در شرایطی که بار گسترده

ترتیب برای بارگذاری روی بال بالا، مرکز سطح و بال پایین ارائه شده است. لازم به ذکر است که  $MVF=0$  به معنی عدم حضور لایه‌های فلزی در ساخت دیواره‌های نیمرخ تیر است و  $MVF=1$  بیانگر حالتی است که مقطع I شکل کاملاً از جنس آلومینیوم می‌باشد.

بررسی نمودارهای ترسیم شده نشان می‌دهد که تغییرات درصد حجمی فلز، پارامتر تغییر ابعاد نیمرخ تیر و محل اعمال بار گسترده یک‌نواخت بر رفتار کمانشی عضو دارنازک کامپوزیت لایه‌ای فلز-الیاف بسیار اثرگذار هستند. به طوریکه از بین سه حالت بارگذاری مدنظر پایدارترین وضعیت مربوط به شرایطی است که بار گسترده به بال پایین مقطع وارد می‌شود. زیرا در این شرایط لنگر پیچشی ثانویه مقاوم در حین کمانش به وجود می‌آید که در جهت افزایش ظرفیت مقطع است. به عبارت دیگر، در شرایطی که بار گسترده به بال بالای نیمرخ اعمال



شکل ۱۵. تغییرات بار کمانش جانبی ( $q_{cr}$ ) بر حسب زاویه چینش الیاف در هر دو بال و جان نیمرخ برای کسر حجمی مختلف آلومینیوم و سه ضریب متفاوت تغییر ارتفاع جان، محل اعمال بار گسترده: بال پایین

Fig. 15. Variation of the lateral buckling load versus lamina orientation of the web and both flanges: effect of metal volume fraction, for different tapering ratios, and for a transverse load applied at the bottom flange

شوندگی جان تأثیر قابل توجهی بر مقاومت پایداری جانبی عضو طره دارند. همان‌گونه که قابل مشاهده است درصد حجمی فلز در مقایسه با تغییر ارتفاع جان نیمرخ، بار کمانش جانبی را با شدت بیشتری تغییر می‌دهد.

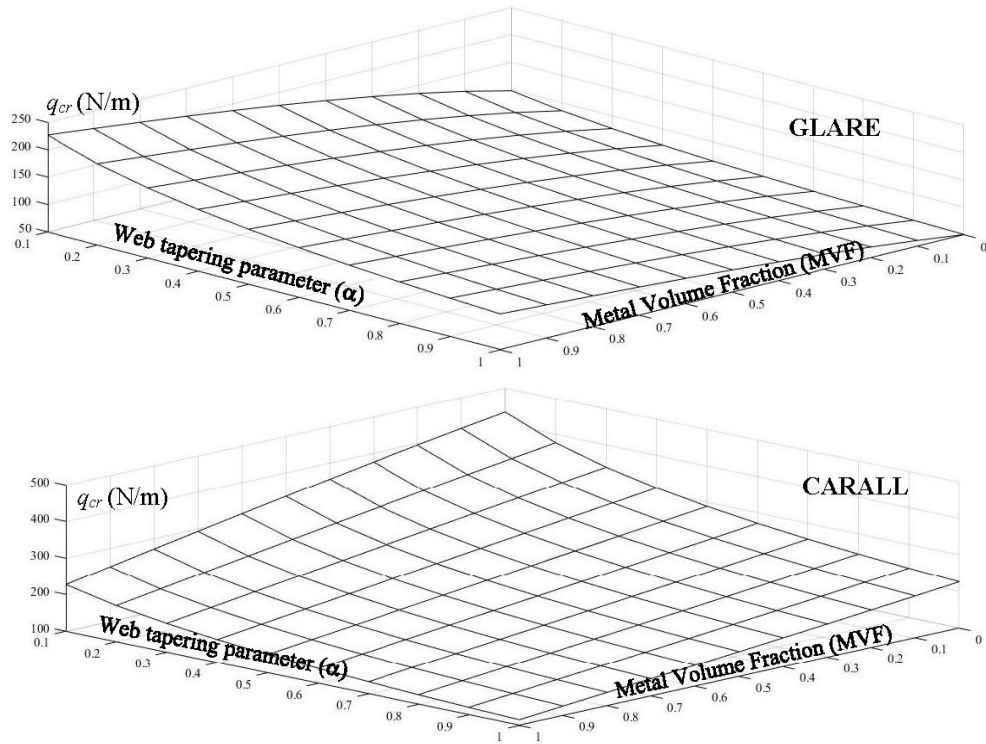
#### ۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق به کمک روش مربعات دیفرانسیلی یک حل عددی برای تحلیل پایداری جانبی-پیچشی تیر ماهیچه‌ای با مقطع جدار-نازک باز متقارن ساخته شده از کامپوزیت چندلایه الیاف-فلز تحت بار عرضی ارائه گردید. در ابتدا، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر پایداری ارتجاعی که شامل دو معادله دیفرانسیل مرتبه چهار وابسته به مؤلفه تغییر مکان جانبی و پیچشی است، بر اساس تئوری کلاسیک

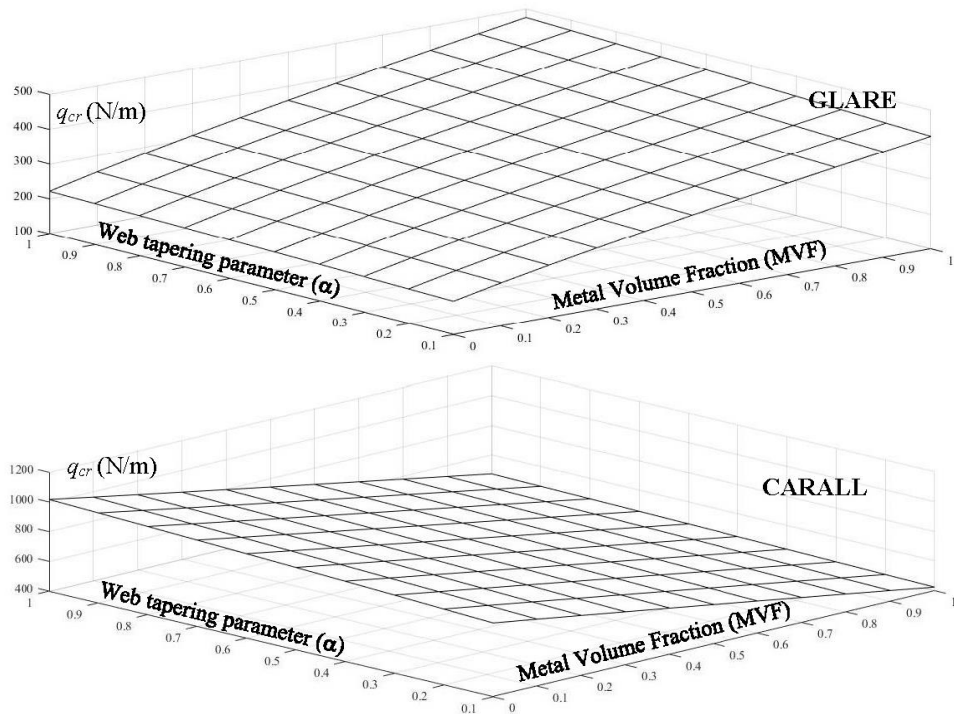
با مرکز سطح وارد شده و با افزایش درصد حجمی فلز از ۰ به ۲۰، مقدار بار کمانش جانبی برای تمامی مقادیر ضریب باریک شوندگی ( $\alpha$ ) به طور متوسط ۲۷٪ افزایش می‌یابد. اما در خصوص کرال عکس این روند مشاهده می‌شود و با افزایش کسر حجمی فلز مقدار بار بحرانی کاهش می‌یابد. به طوری که با افزایش کسر حجمی آلومینیوم از ۰ به ۲۰٪ و تحت بار بر مرکز سطح، میزان بار کمانشی حدود ۱۰ درصد (به صورت میانگین) کاهش می‌یابد.

همچنین با توجه به نمودارهای اشکال ۱۶ تا ۱۸ مشاهده می‌شود که همواره مقاطع از جنس کربن-اپوکسی پایداری جانبی بیشتری دارند. البته براساس خصوصیات مکانیکی شیشه و کربن/اپوکسی این نتیجه مورد انتظار نیز است. با توجه به این شکل‌ها می‌توان مجدداً نتیجه‌گیری نمود که تغییر دو پارامتر کسر حجمی فلز و ضریب باریک



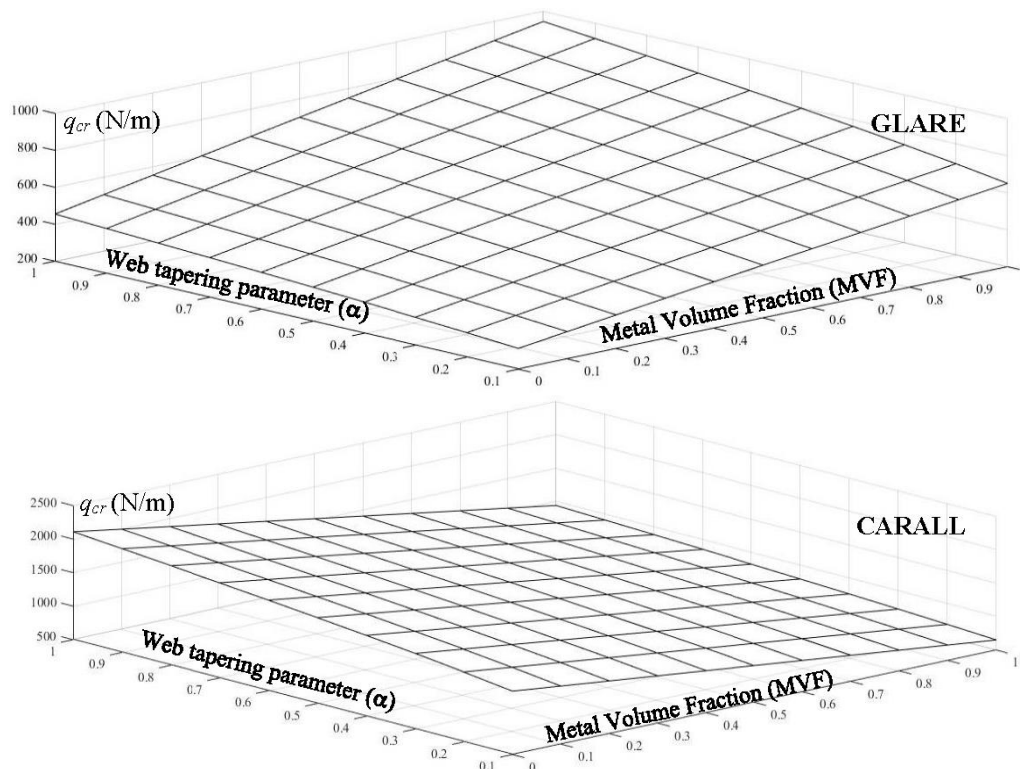


شکل ۱۶. تغییرات بار کمانش جانبی ( $q_{cr}$ ) بر حسب کسر حجمی فلز و ضریب باریک شونده‌گی جان برای دو مقطع کرال و گلر، محل اعمال بار گسترده: بال بالا  
 Fig. 16. Variation of the lateral buckling load with respect to the metal volume fraction and web tapering for GLARE and CARALL sections: transverse load applied at the top flange



شکل ۱۷- تغییرات بار کمانش جانبی ( $q_{cr}$ ) بر حسب کسر حجمی فلز و ضریب باریک شونده‌گی جان برای دو مقطع کرال و گلر، محل اعمال بار گسترده: مرکز سطح

Fig. 17. Variation of the lateral buckling load with respect to the metal volume fraction and web tapering for GLARE and CARALL sections: transverse load applied at the centroid



شکل ۱۸. تغییرات بار کمانش جانبی ( $q_{cr}$ ) بر حسب کسر حجمی فلز و ضریب باریک شونده‌گی جان برای دو مقطع کرال و گلر، محل اعمال بار گسترده: بال پایین

**Fig. 18. Variation of the lateral buckling load with respect to the metal volume fraction and web tapering for GLARE and CARALL sections: transverse load applied at the bottom flange**

چیدمان الیاف سازنده بال به صورت قابل توجهی کاهش می‌یابد. به طوریکه، با افزایش زاویه در بازه ۰ تا ۶۰ درجه ظرفیت کمانشی با شدت بیشتری نسبت به بازه ۶۰ تا ۹۰ درجه کاهش می‌یابد.

- در شرایطی که بار عرضی به بال بالای نیم‌رخ وارد می‌گردد به‌علت ایجاد لنگر پیچشی محرک در زمان کمانش جانی-پیچشی، زاویه الیاف لایه‌های کامپوزیتی جان تیر تأثیر بیشتری در ظرفیت پایداری جانبی دارند.

- پایداری جانبی حداکثر زمانی به‌دست می‌آید که چیدمان لایه‌ها برای هر دو بال به صورت تک‌جهته و صفر درجه باشد و الیاف تشکیل‌دهنده جان با زاویه ۴۵ درجه میان دو ورق فلزی قرار گیرند. - با مشاهده نتایج به‌دست‌آمده می‌توان دریافت نمود که پایدارترین وضعیت در مقابل کمانش جانبی برای تمامی حالت‌های تحلیل شده با اعمال بار گسترده به بال پایین ایجاد می‌شود و ناپایدارترین شرایط در حالتی که بار عرضی به بال بالا وارد می‌شود، رخ می‌دهد.

- نتایج به دست آمده نشان دادند در صورتیکه مقطع لایه‌ای الیاف-فلز از شیشه-پوکسی ساخته شده باشد با افزایش کسر حجمی

لایه‌ای و مدل ولانو برای مقاطع جدار نازک استخراج گردید. سپس با استفاده از یک رابطه کمکی دستگاه معادلات پایداری به یک معادله دیفرانسیل مستقل مرتبه چهار بر حسب زاویه پیچش تبدیل و مقدار بار کمانش جانبی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی به دست آمد. نتایج حاصل از این پژوهش را می‌توان به صورت زیر جمع بندی نمود:

- همانطور که مشاهده شد، روش عددی مربعات دیفرانسیل علاوه بر همگرا بودن از دقت خوبی در تعیین بار کمانش جانبی تیر جدار نازک با مقطع متغیر برخوردار است.

- پارامترهایی مانند تغییر ارتفاع جان، محل اثر بار عرضی، کسر حجمی فلز، جنس الیاف و زاویه چیدمان الیاف در لایه‌های کامپوزیتی از عوامل تأثیرگذار بر پایداری جانبی هستند.

- مقادیر بار کمانشی با افزایش زاویه چیدمان الیاف در جان تغییرات اندکی دارد، اما با افزایش زاویه الیاف سازنده لایه‌های کامپوزیتی هر دو بال تغییرات قابل توجهی را نشان می‌دهد.

- نتایج نشان دادند که ظرفیت کمانش جانبی با افزایش زاویه



- [10] D. Karagiozova, G. N. Nurick, G. S. Langdon, Behaviour of sandwich panels subject to intense air blasts–Part 2: Numerical simulation. *Composite structures*, 91(4) (2009) 442-450.
- [11] A. Mozaffari, H. Jafari, Investigation of the Effective Parameters on Buckling Load of FML Cylindrical Panel Using FSDT Shells Theory, (2010).
- [12] S.B. Beheshti-Aval, M. Lezgy-Nazargah, A coupled refined high-order global– local theory and finite element model for static electromechanical response of smart multilayered/ sandwich beams, *Archive of Applied Mechanics*, 82 (2012) 1709-1752.
- [13] M. Lezgy-Nazargah, S.B. Beheshti-Aval, Coupled refined layerwise theory for dynamic free and forced responses of piezoelectric laminated composite and sandwich beams, *Meccanica*, 48(6) (2013) 1479–1500.
- [14] M. Lezgy-Nazargah, Efficient coupled refined finite element for dynamic analysis of sandwich beams containing embedded shear-mode piezoelectric layers, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(3) (2016) 337-352.
- [15] M. Lezgy-Nazargah, A generalized layered global-local beam theory for elasto-plastic analysis of thin-walled members, *Thin-Walled Structures*, 115 (2017) 48-57.
- [16] B. Asgarian, M. Soltani, F. Mohri, Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections. *Thin-walled structures*, 62 (2013) 96-108.
- [17] N. I. Kim, J. Lee. Divergence and flutter behavior of Beck's type of laminated box beam. *International Journal of Mechanical Sciences*. 84 (2014) 91-101.
- [18] M. M. Abadi, A. R. Daneshmehr, An investigation of modified couple stress theory in buckling analysis of micro composite laminated Euler–Bernoulli and Timoshenko beams. *International Journal of Engineering Science*, 75 (2014) 40-53.
- [19] K. MalekzadehFard, M.Gholami, F. Reshadi, M. Livani, Free vibration and buckling analyses of cylindrical sandwich panel with magneto rheological fluid layer, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 20 (6) (2015) 1-27.
- فلز پایداری جانبی به صورت قابل توجهی افزایش می‌یابد. در حالیکه عکس این روند در خصوص مقطع از جنس کربن-اپوکسی مشاهده می‌شود.
- همچنین ثابت شد که تغییرات درصد حجمی فلز در مقایسه با کاهش ارتفاع جان نیم‌رخ، بار کمانش جانبی را با شدت بیشتری تغییر می‌دهد.
- با توجه به نتایج ارائه شده مشاهده شد که همواره مقاطع کامپوزیت هیبرید کربن-اپوکسی با کسر حجمی آلومینیوم متفاوت پایداری جانبی بیشتری نسبت به مقطع شیشه-اپوکسی دارند.

## مراجع

- [1] M. Sadighi, R. C. Alderliesten, & R. Benedictus, Impact resistance of fiber-metal laminates: A review. *International Journal of Impact Engineering*, 49(2012) 77-90.
- [2] G. Wu, & J. M. Yang, The mechanical behavior of GLARE laminates for aircraft structures. *Jom*, 57(1) (2005) 72-79.
- [3] H.W. Nam, W.Hwang, Stacking Sequence Design of Fiber – Metal Laminate for Maximum Strength, *Journal of Composite Materials*, 35(18) (2001) 1654-1683.
- [4] J. Lee, S. E. Kim, & K. Hong, Lateral buckling of I-section composite beams. *Engineering Structures*, 24(7) (2002) 955-964.
- [5] J. Lee, S. E. Kim, Free vibration of thin-walled composite beams with I-shaped cross-sections. *Composite structures*, 55(2) (2002) 205-215.
- [6] J. Lee, Flexural analysis of thin-walled composite beams using shear-deformable beam theory. *Composite Structures*, 70(2) (2005) 212-222.
- [7] T. P.Vo, J. Lee, Flexural–torsional buckling of thin-walled composite box beams. *Thin-walled structures*, 45(9) (2007) 790-798.
- [8] V. K. Goyal, R. K. Kapania. Dynamic stability of laminated beams subjected to non-conservative loading. *ThinWalled Structures*, 46 (2008) 1359-1369.
- [9] G. N. Nurick, G. S. Langdon, Y.Chi, N. Jacob, Behaviour of sandwich panels subjected to intense air blast–Part 1: Experiments. *Composite Structures*, 91(4) (2009) 433-441.

- [31] D. Banat, & R. J. Mania, Stability and strength analysis of thin-walled GLARE composite profiles subjected to axial loading. *Composite Structures*, 212(2019) 338-345.
- [32] M. Arefi, A. M. Zenkour, Nonlocal electro-thermo-mechanical analysis of a sandwich nanoplate containing a Kelvin–Voigt viscoelastic nanoplate and two piezoelectric layers. *Acta Mechanica*, 228(2) (2017) 475-493.
- [33] M. Arefi, A. M. Zenkour, Vibration and bending analysis of a sandwich microbeam with two integrated piezo-magnetic face-sheets. *Composite Structures*, 159 (2017) 479-490
- [34] H. Alidoost, J. Rezaeepazhand. Instability of a delaminated composite beam subjected to a concentrated follower force. *Thin-Walled Structures*. 120 (2017) 191-202.
- [35] F. Taheri-Behrooz, M. Omid, and M.M. Shokrieh, Experimental and numerical investigation of buckling behavior of composite cylinders with cutout. *Thin-Walled Structures*, 116(2017)136-144.
- [36] F. Taheri-Behrooz, M. Omid, Buckling of axially compressed composite cylinders with geometric imperfections. *Steel and Composite Structures*, 29(4) (2018) 557-567.
- [37] H. Ahmadi, H. A. Rasheed, Lateral torsional buckling of anisotropic laminated thin-walled simply supported beams subjected to mid-span concentrated load. *Composite Structures*, 185(2018) 348-361.
- [38] M. Mohandes, A. R. Ghasemi, M. Irani-Rahagi, K. Torabi, F. Taheri-Behrooz, Development of beam modal function for free vibration analysis of FML circular cylindrical shells. *Journal of Vibration and Control*, 24(14) (2018) 3026-3035.
- [39] A. R. Ghasemi, M. Mohandes, Comparison between the frequencies of FML and composite cylindrical shells using beam modal function model. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 50(2) (2019) 239-245.
- [40] A. Asadi, A. H. Sheikh, O. T. Thomsen, Buckling behaviour of thin-walled laminated composite beams having open and closed sections subjected to axial and end moment loading. *Thin-Walled Structures*, 141(2019) 85-96.
- [41] H. Aghamohammadi, R. Eslami-Farsani, Improvement
- [20] T-T. Nguyen, N-I. Kim, J. Lee, Free vibration of thin-walled functionally graded open-section beams, *Composite structures*, 95 (2016) 105-116.
- [21] T-T. Nguyen, N-I. Kim, J. Lee, Analysis of thin-walled open section beams with functionally graded materials, *Composite structures*, 138 (2016) 75-83.
- [22] T-T. Nguyen, P.T. Thang, J. Lee, Lateral buckling analysis thin-walled functionally graded beams,” *Composite structures*, 160 (2017) 952-963.
- [23] T-T. Nguyen, P.T. Thang, J. Lee, Flexural-torsional stability of thin-walled functionally graded open-section beams, *Thin walled structures*, 110 (2017) 88-96.
- [24] H. Ravishankar, R. Rengarajan, K. Devarajan, B. Kaimal, Free vibration behaviour of fiber metal laminates, hybrid composites, and functionally graded beams using finite element analysis. *International Journal of Acoustics and Vibration*, 21(4) (2016) 418-428.
- [25] A. M. M. Bidgoli1a, M. Heidari-Rarani, Axial buckling response of fiber metal laminate circular cylindrical shells. *Structural Engineering and Mechanics*, 57(1) (2016) 45-63.
- [26] A. L. Araújo, V. S. Carvalho, C. M. Soares, J. Belinha, A. J. M. Ferreira, Vibration analysis of laminated soft core sandwich plates with piezoelectric sensors and actuators. *Composite Structures*, 151(2016) 91-98.
- [27] R. J. Mania, Z. Kolakowski, J. Bienias, P. Jakubczak, & K. Majerski, Comparative study of FML profiles buckling and postbuckling behaviour under axial loading. *Composite Structures*, 134(2015)216-225.
- [28] D. Banat, Z. Kolakowski, R.J. Mania, Investigations of FML profile buckling and post-buckling behaviour under axial compression. *Thin-Walled Structures*, 107(2016)335-344.
- [29] D. Banat, R.J. Mania, Failure assessment of thin-walled FML profiles during buckling and post buckling response. *Composites Part B: Engineering*, 112(2017)278-289.
- [30] D. Banat, R.J. Mania, Progressive failure analysis of thin-walled Fiber Metal Laminate columns subjected to axial compression. *Thin-Walled Structures*, 122 (2018)52-63.

- Materials, (2020) 1-16.
- [46] V.Z. Vlasov, Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, (1961).
- [47] C.W. Bert, M. Malik, Differential quadrature method in computational mechanics, a review, Applied Mechanics Reviews (1996),49: 1-28.
- [48] Shu C. Differential Quadrature and Its Application in Engineering. Springer; (2000).
- [49] Z. Zong, & Y. Zhang, Advanced differential quadrature methods. CRC press (2009).
- [50] Long, A.C. ed., Composites forming technologies. Elsevier (2014).
- [51] A. Vlot, L. B.Vogeleang, &T. J. De Vries, Towards application of fibre metal laminates in large aircraft. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, (1999).
- [52] M. Soltani, F. Atoufi, F. Mohri, R. Dimitri, & F. Tornabene, Nonlocal elasticity theory for lateral stability analysis of tapered thin-walled nanobeams with axially varying materials. Thin-Walled Structures, 159(2021) 107268.
- [53] ANSYS, Version 5.4, Swanson Analysis System, Inc, (2007)
- in the flexural properties of basalt fibers/epoxyaluminum laminate composites using multi-walled carbon nanotubes, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering , 51(3) (2019) 81-90, (In Persian).
- [42] H. Aghamohammadi, R. Eslami-Farsani, A. Tcharkhtchi, The effect of multi-walled carbon nanotubes on the mechanical behavior of basalt fibers metal laminates: an experimental study. International Journal of Adhesion and Adhesives, 98 (2020) 102538.
- [43] M. Soltani, Flexural-torsional stability of sandwich tapered I-beams with a functionally graded porous core. International Journal of Numerical Methods in Civil Engineering, 4(3) (2020)8-20.
- [44] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Improved finite element formulation for lateral stability analysis of axially functionally graded non-prismatic I-beams, International Journal of Structural Stability and dynamics, 19(9) (2019) 1950108.
- [45] M. Soltani, B. Asgarian, Lateral-torsional stability analysis of a simply supported axially functionally graded beam with a tapered I-section, Mechanics of Composite

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Soltani, A. Soltani, *Lateral Stability Analysis Of Thin-Walled Fiber-Metal Laminate Beam With Varying Cross-Section By Considering Nonlinear Strains*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 53(10) (2022) 5239-5268.

DOI: [10.22060/mej.2021.19700.7093](https://doi.org/10.22060/mej.2021.19700.7093)



