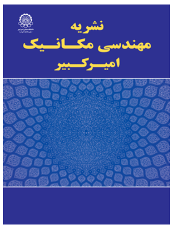


Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 53(12) (2022) 1463-1466
DOI: 10.22060/mej.2021.19846.7138

Free and Forced Vibration Analysis of Stiffened Cylindrical Shells under Moving Internal Pressure

R. Arab, H. lexian*

Cylindrical shells, Ring & stringer stiffeners, Free vibration, Dynamic analysis, Moving internal pressure.

ABSTRACT: Cylindrical shells are used tremendously in many engineering fields such as ships, submarines, and fuel tanks in airplanes. In many cases, shells are exposed to dynamic loads. One of the dynamic loads in shells is internal moving pressure. Analysis of cylindrical stiffened shells under moving internal pressure are investigated in this research. Equations of motion are based on classic shell theory and derived from Hamilton's method. Boundary conditions are assumed simply support. Displacement components are assumed Fourie double series based on boundary conditions. Equations of motions are solved by Galerkin weighted functions method for calculation of natural frequency and dynamic response of cylindrical shells under moving internal pressure. Codes in FORTRAN are used to derive the natural frequency and dynamic response of cylindrical shells. Results are compared with other references and Abaqus software. The effect of geometrical parameters on natural frequency and dynamic response of cylindrical shells under moving internal pressure are investigated finally and results for stiffened shells and unstiffened shells with different stiffeners are compared.

Review History:

Received: Apr. 19, 2021
Revised: Jul. 08, 2021
Accepted: Aug. 28, 2021
Available Online: Nov. 01, 2021

Keywords:

Cylindrical shells
Ring & stringer stiffeners
Free vibration
Dynamic analysis
Moving internal pressure

1. INTRODUCTION

Pipelines, gun barrels, and rocket launcher's barrels are structures that are subjected to mobile internal pressure, which reinforced pipes can be used.

Hopman [1] examined the vibrations of reinforced cylindrical shells. He obtained the mean effect of the amplifiers and added them to the equation of shell vibrations and compared the theoretical results with his laboratory results. Mustafa and Ali [2] considered amplifiers as separate elements and extracted the equations of the kinetic and potential energy of shells and longitudinal and peripheral amplifiers separately. Rasman [3] examined the dynamic response of a cylindrical shell with a moving internal load. The load moves diagonally and with constant speed. Jafari and Bagheri [4, 5] calculated the natural frequencies of peripheral reinforced cylindrical shells by analytical, numerical, and laboratory methods and compared the results with each other. Duck and Tong [6], using first-order shear deformation theory and stress function with complete motion equations, have investigated the nonlinear dynamic response of functionally graded cylindrical shell. Sophie and Pasha [7] examined the forced vibration of the reinforced cylinder by carbon nanotubes under moving load. Internal pressure moves in a circular motion at a constant speed.

In this research, an analytical solution for free vibrations and dynamic response of reinforced cylindrical shell with peripheral and longitudinal amplifiers separately and together, with simple boundary conditions undermovable internal pressure with a function of pressure and completely general velocity is presented which has not been considered before.

2.METHODOLOGY

The Hamilton method is used to obtain the equations of motion. Fig. 1 shows a reinforced cylindrical shell with stiffeners.

If the convections of w_0, v_0, u_0 are arbitrary points on the shell and u, v, w are the convections of interlay of the shell, their geometric relationship is as follows

$$u_0 = u - z w_{,x}$$
$$v_\theta = \frac{a+z}{a} v - \frac{z}{a} \mathrm{w}, \qquad (1)$$
$$w_0 = w$$

Equations of motion are obtained using the Hamilton method with the help of strain and kinetic energies of shell and stiffeners.

The moving internal pressure is as follows

$$q(x,t) = p(t)\,\mathrm{U}\left(x_0(t) - x\right) \qquad (2)$$

*Corresponding author's email: lexian@mut.ac.ir

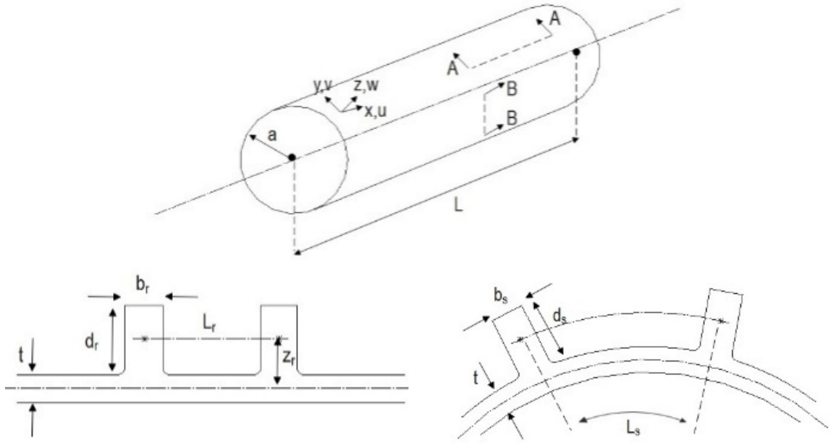


Fig. 1. The geometry of shell and stiffeners

Table 1. Geometry and properties of shells

Length (m)	Radial (m)	Thickness (m)	E (GPa)	ρ (kg/m^3)	υ
1.5	0.05	0.007	207	7770	0.3

Table 2. Geometry and properties of stiffeners

Height (m)	Width (m)	E (GPa)	ρ (kg/m^3)	υ
0.01	0.007	207	7770	0.3

Properties and geometry of shell and stiffeners are in Tables 1 and 2.

The behavior of moving pressure in cylindrical shell are shown in Figs. 2 and 3

Dynamic solutions are obtained by placing pressure in the equations of motion and solving it using the Galerkin method.

3. RESULTS AND DISCUSSION

The results are compared with the results of Abacus software and are closely related to each other. The radial conventions are examined as shown in Fig. 4.

4. CONCLUSION

Rings are effective in reducing the radial convections of cylindrical shells under internal moving load and have little effect on longitudinal convections. Stringers have little effect on radial convection and are effective in reducing longitudinal convection. The effect of rings toward the increase in thickness is greater than reducing radial convections and the effect of stringers toward the increase in thickness is greater than reducing longitudinal convections. For each point of the cylinder, the radial convection is approximately zero until the internal moving pressure is applied to that point, and as soon as the moving pressure reaches that point, the radial displacement immediately increases and then follows the deformation pattern to its previous points.

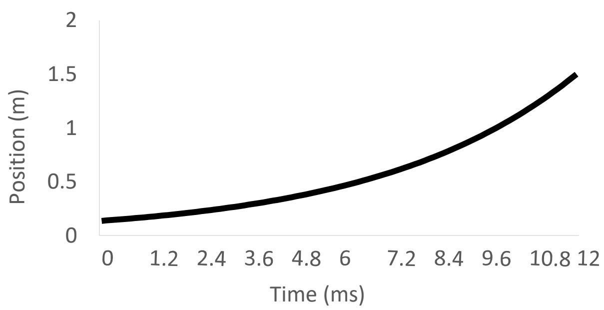


Fig. 2. The situation of internal pressure in the cylinder

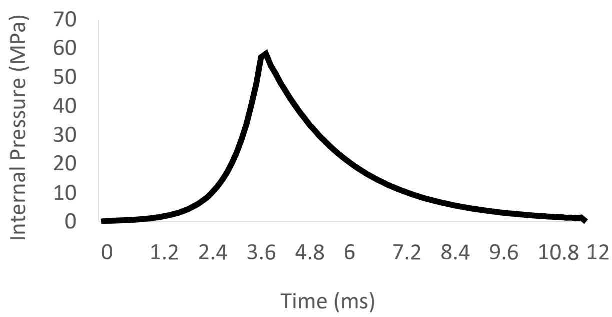


Fig. 3. Pressure diagram in terms of time

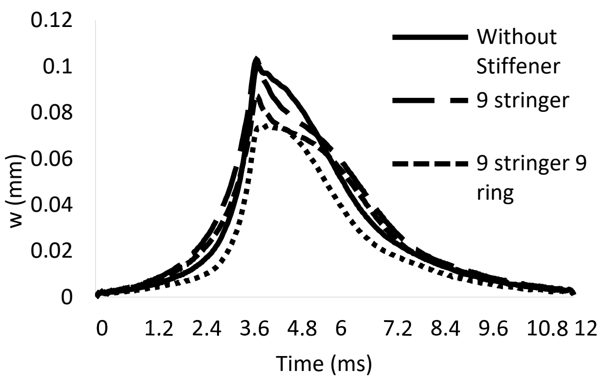


Fig. 4. Analysis of the effect of different types of stiffener on the radial convection of the cylindrical shell

REFERENCES

[1] Hoppmann WH, Some characteristics of the flexural vibrations of orthogonally stiffened cylindrical shells, Journal of the Acoustical Society of America, 30 (1958) 77-82 .

[2] Mustafa B.A.J and Ali R, An energy method for free vibration analysis of stiffened circular cylindrical shells, Journal of Computers and Structures, 32 (2) (1989) 335-363.

[3] Rasmann. H, Response of a cylindrical shell to an inclined, moving pressure discontinuity (shock wave), Journal of Sound and Vibration, 8 (2) (1968) 240-255.

[4] Jafari AA and Bagheri M, Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical, experimental and numerical methods, Journal of ThinWalled Structures 44 (2006) 89-90.

[5] Bagheri Mand Jafari AA, Analytical and experimental modal analysis of nonuniformly ring-stiffened cylindrical shells, Archive of Applied Mechanics, 75 (2006) 177-191.

[6] Duc.N.D and Thang.P.T, Nonlinear Dynamic Response and Vibration of Shear Deformable Imperfect Eccentrically Stiffened S-FGM Circular Cylindrical Shells Surrounded on Elastic Foundations, j.ast, 40 (2015) 115–127.

[7] A. Sofiyev,R. Pasha, The forced vibration of infinitely long cylinders reinforced by carbon nanotubes subjected to combined internal and ring-shaped compressive pressures, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1 (2020) 1-12.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

R. Arab, H. lexian, Free and Forced Vibration Analysis of Stiffened Cylindrical Shells under Moving Internal Pressure, Amirkabir J. Mech Eng., 53(12) (2022) 1463-1466.

DOI: 10.22060/mej.2021.19846.7138

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ۱۲، سال ۱۴۰۰، صفحات ۵۸۶۷ تا ۵۸۸۶
DOI: 10.22060/mej.2021.19846.7138

تحلیل دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده تحت فشار داخلی متحرک

رضا عرب، حسین لکزیان*

مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۳۰
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۴/۱۷
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۶/۰۶
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۸/۱۰

کلمات کلیدی:
پوسته استوانه‌ای
تقویت کننده‌های متعامد
ارتعاش آزاد
تحلیل دینامیکی
فشار داخلی متحرک

خلاصه: پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده کاربرد فراوانی در بسیاری از شاخه‌های مهندسی از قبیل کشتی‌ها، زیردریایی و مخازن سوخت هواپیما دارد. در اکثر این موارد پوسته تحت بارهای دینامیکی قرار می‌گیرد. یکی از بارهای دینامیکی که می‌تواند به این پوسته‌ها وارد شود فشار داخلی متحرک می‌باشد. تحلیل پوسته استوانه‌ای تقویت شده تحت فشار داخلی متحرک در این پژوهش مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات حرکت بر اساس تئوری کلاسیک پوسته با استفاده از روش همیلتون استخراج شده‌اند. شرایط مرزی پوسته دو سر ساده در نظر گرفته شده است. مؤلفه‌های جابه‌جایی با توجه به شرایط مرزی به‌صورت بسط سری فوریه دوگانه نوشته شده‌اند. برای بدست آوردن فرکانس طبیعی و پاسخ پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری متحرک داخلی معادلات حرکت با استفاده از روش توابع وزنی گالرکین حل شده‌اند. برای به‌دست‌آوردن فرکانس‌های طبیعی و پاسخ زمانی پوسته کدهایی به زبان فرترن نوشته شده‌اند و نتایج با پاسخ مراجع دیگر و پاسخ نرم افزار آباکوس مقایسه شده‌اند و در نهایت تأثیر پارامترهای هندسی بر فرکانس‌های طبیعی و پاسخ زمانی پوسته استوانه‌ای تقویت شده تحت فشار داخلی متحرک بررسی شده است و نتایج برای پوسته تقویت‌نشده و پوسته تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های مختلف مقایسه شده‌اند.

۱- مقدمه

خطوط لوله، لوله‌های اسلحه و لوله‌های پرتاب موشک سازه‌هایی هستند که تحت فشار داخلی متحرک قرار می‌گیرند که می‌توان از لوله تقویت شده نیز استفاده شود. رفتار دینامیکی این سازه‌ها نیازمند تحقیقات و بررسی‌های فراوانی می‌باشد. ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده و حل دینامیکی پوسته استوانه‌ای در پژوهش‌های قبلی صورت گرفته که به آنها اشاره می‌شود.

هویمان [۱] ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده متعامد را مورد بررسی قرار داد. او میانگین اثر تقویت‌کننده‌ها را به دست آورد و در معادله ارتعاشات پوسته اضافه نمود و نتایج تئوری را با نتایج آزمایشگاهی خود مقایسه کرد. گلتلی [۲] معادلات انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی پوسته و تقویت‌کننده‌های محیطی را به صورت مجزا بدست آورد و از روش انرژی فرکانس‌های طبیعی را به دست آورد. میکولاس و مک المن [۳] با میانگین‌گیری از تأثیر تقویت‌کننده‌ها رابطه‌ای صریح برای بدست‌آوردن فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های تقویت شده طولی، محیطی و متعامد بدست آوردند. تانگ [۴] اولین تئوری جامع برای پاسخ الاستیک لوله به بار متحرک را ارائه داد. مدلی برای پیش‌بینی رفتار پوسته چدار نازک درنظر گرفت و از تئوری پوسته جدار نازک استفاده نمود. ایگل و سیوال [۵] تقویت‌کننده‌ها را به عنوان المان‌ها مجزا در نظر گرفتند و فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کردند. راسمن [۶] پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای با بارگذاری داخلی متحرک بررسی نمود. بارگذاری به صورت مورب و با سرعت ثابت حرکت می‌کند. ابتدا ارتعاشات آزاد پوسته را بررسی کرد و سپس با استفاده از آنالیز مودال و فرکانس‌های طبیعی حل دینامیکی برای پوسته را ارائه نمود. دوبینز [۷] بارگذاری استاتیکی و

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: lexian@mut.ac.ir

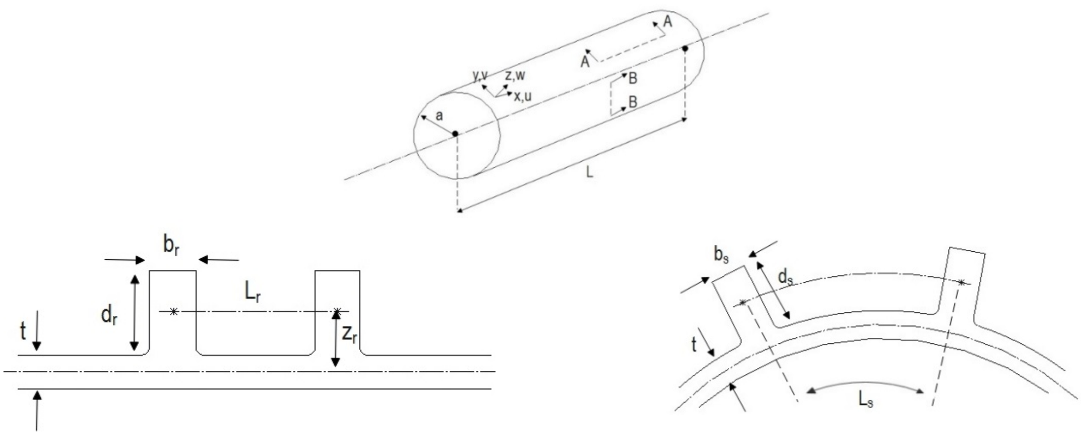
دینامیکی بر روی صفحه را بررسی نمود. ابتدا فرکانس‌های طبیعی را به دست آورد و از آن برای پاسخ زمانی استفاده نمود.شیوا کاوا [۸] حل پاسخ دینامیکی برای پوسته استوانه با بارگذاری نقطه‌ای متحرک را ارائه نمود. ابتدا فرکانس‌های طبیعی پوسته را به دست آورد و در آخر به حل دینامیکی پوسته برای بارگذاری متحرک پرداخت.

سدربام و هلر [۹] تحلیل دینامیکی برای پوسته استوانه‌ای تحت بار دینامیکی ارائه نمودند. بارگذاری دینامیکی به صورت یک خط در طول استوانه می‌باشد. با داشتن معادلات حرکت با استفاده از روش گالرکین ارتعاشات آزاد پوسته بررسی شده و با استفاده از آنالیز مودال و بهره‌گیری از فرکانس‌های طبیعی حل دینامیکی انجام شده است. مصطفی و علی [۱۰] تقویت‌کننده‌ها را به عنوان المان‌های مجزا درنظر گرفتند و معادلات انرژی‌های جنبشی و پتانسیل را برای پوسته‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی و محیطی به طور مجزا استخراج نمودند، در این معادلات اینرسی انتقالی پوسته و تقویت‌کننده‌ها در سه جهت و اینرسی چرخشی تقویت‌کننده‌ها در تابع انرژی وارد شده‌اند. لی و لی [۱۱] ارتعاشات آزاد و پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تحت بار ضربه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند. تکیه‌گاه را به صورت استوانه دو سر ساده در نظر گرفتند. برای حل تحلیلی از روش آنالیز مودال استفاده شده به طوری که ابتدا از حل ارتعاشات آزاد فرکانس‌های طبیعی را به دست آورده و به کمک آنها و آنالیز مدال پاسخ دینامیکی پوسته را تحت بارگذاری ضربه‌ای به دست آورد.وانگ و همکاران [۱۲] معادلات انرژی پوسته و تقویت‌کننده‌های محیطی را از تحقیقات پیشین استخراج نمودند و با به‌کارگیری اصل همیلتون و اعمال روش ریتز، معادلات حرکت و در نهایت فرکانس‌های طبیعی را نیز محاسبه نمودند. برخلاف تحقیقات انجام شده قبلی، در این تحقیق توزیع موقعیت مکانی و توزیع فاصله خارج از مرکزی تقویت‌کننده‌ها به طور دلخواه و غیریکنواخت در نظر گرفته شده است.

روتولو [۱۳] مقایسه‌ای بین انواع تئوری‌های پوسته‌های نازک که در تحقیقات پیشین به کار برده شده است انجام داد. ژائو و لیو [۱۴] تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای چندلایه‌ای دوار با تکیه‌گاه ساده و تقویت‌کننده‌های طولی و محیطی را با استفاده از روش انرژی انجام دادند. اثر تقویت‌کننده‌ها به دو روش مدل‌سازی شده است. یک بار روش متوسط‌گیری و بار دیگر روش المان مجزا استفاده شده است. جعفری و باقری [۱۵ و ۱۶] فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده محیطی را با روش‌های تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی محاسبه کردند و نتایج حاصل را با یکدیگر مقایسه نمودند. همچنین ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده تحت نیروی محوری و فشار داخلی بررسی کردند. خلیلی و همکاران [۱۷] ارتعاش آزاد واجباری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی را تحت بار ضربه‌ای بررسی کردند. معادلات تعادل با روش گلرکین به دست آمده و در آخر اثر جهت الیاف و پارامترهای هندسی بر پاسخ زمانی پوسته بررسی شده است. سوفیه [۱۸] حداکثر جابجایی‌های استاتیکی و دینامیکی پوسته استوانه‌ای مواد طبقه‌بندی شده تابعی[1] طویل تحت بارهای محوری و فشار داخلی متحرک با سرعت ثابت را ارائه نموده و تأثیر هندسه پوسته و سرعت بار متحرک بر رفتار پوسته را بررسی کرده است.دانگ و نام [۱۹] حل تحلیلی دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تحت فشار خارجی احاطه شده توسط بستر الاستیک با تقویت کننده فلز را انجام داده‌اند.میرزایی و همکاران [۲۰] مجموعه‌ای از راه حل‌های تحلیلی برای پاسخ الاستودینامیک گذرا از لوله‌های استوانه‌ای تحت فشار در حال حرکت با پروفیل خاص را مرد بررسی قرار دادند.یانگ و همکاران [۲۱] جهت بررسی رفتار ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی، آنالیز مودال تحت شرایط مرزی دو سر آزاد انجام دادند و جهت پیش‌بینی دَمپینگ سازه از روش انرژی کرنشی به همراه مدل المان محدود استفاده نمودند. داک و تانگ [۲۲] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تابع تنش به همراه معادلات کامل حرکت به بررسی پاسخ دینامیکی غیر خطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده پرداخته‌اند. کینا و همکاران [۲۳] با استفاده از روش آنالیز هندسی به بررسی رفتار ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده پرداخت. او به این منظور از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده نمود.حسرتی و همکاران [۲۴] یک حل عددی برای ارتعاشات آزاد و اجباری غیر خطی پوسته‌های استوانه‌ای ارائه نموده‌اند.معادلات حرکت براساس اصل همیلتون و گسسته‌سازی از روش دیفرانسیل تعمیم‌یافته به دست آمده و پاسخ فرکانسی برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده است و درآخر تأثیر پارامترهای هندسی بر رفتار ارتعاشی غیر خطی پوسته را بررسی کرده‌اند.

آرزم و همکاران [۲۵] پاسخ دینامیکی برای استوانه متقارن محوری تحت بارگذاری خارجی متحرک بررسی کردند. بارگذاری

1 Functionally Graded Material (FGM)



شکل ۱. هندسه پوسته و تقویت کننده‌ها [۱۰]
Fig. 1. Geometry of shell & stiffeners

با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و در آخر پاسخ زمانی را با نتایج تجربی مقایسه نمودند. سوفیه و پاشا [۲۶] ارتعاش اجباری استوانه تقویت‌شده توسط نانولوله‌های کربنی تحت بار متحرک بررسی کردند. فشار داخلی به صورت حلقوی و با سرعت ثابت حرکت می‌کند. خواص مکانیکی تقویت‌کننده‌های کربنی به صورت خطی در راستای ضخامت متغیر می‌باشد. تأثیر هندسه، سرعت بار داخلی و نحوه توزیع خواص مکانیکی تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دینامیکی بررسی شده است. رمضانی و میرزایی [۲۷] راه‌حل‌های تحلیلی برای پاسخ دینامیکی گذرای پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم تحت فشارهای داخلی متحرک منفرد و پی‌درپی ارائه کردند. نتایج برای شرایط مرزی دو سر ساده و دو سر گیردار بیان شده است. در آخر نتایج با نتایج تجربی و شبیه‌سازی المان محدود مقایسه شده‌اند. ایپک چی و محبوبی [۲۸] روش ریاضی برای مطالعه رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تحت فشار داخلی متحرک ارائه کرده‌اند. پوسته شامل سه لایه است که در آن لایه‌های داخلی و خارجی دارای خواص ایزوتروپیک می‌باشد و لایه میانی دارای نسبت پواسون منفی است. فرکانس طبیعی و پاسخ دینامیکی ارائه شده است. برای تأیید روش تحلیلی نتایج با نتایج اجزای محدود مقایسه شده‌اند.

در این پژوهش یک حل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد و پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای تقویت شده با تقویت کننده‌های محیطی و طولی به صورت جدا و همراه باهم با شرایط مرزی دو سر ساده تحت فشار داخلی متحرک با تابع فشار و سرعت کاملاً عمومی ارائه شده که قبلاً مورد توجه نبوده است.

۲- معادلات حرکت

برای به‌دست آوردن معادلات حرکت از روش همیلتون استفاده می‌شود. درشکل ۱ پوسته استوانه‌ای تقویت شده همراه با تقویت کننده‌ها نشان داده شده است. همان طور که در شکل دیده می‌شود ضخامت پوسته t است و ارتفاع و عرض رینگ و استرینگر به ترتیب با d_r و b_r و d_s و b_s نشان داده شده است.

(u,v,w) به ترتیب جابجایی‌ها در راستاهای (x,y,z) که مختصات استوانه‌ای هستند در شکل نشان داده شده است. اگرجابجایی‌های u، v، w نقطه‌ای دلخواه روی پوسته باشد و u,v,w جابجایی‌های لایه میانی پوسته باشند ارتباط هندسی آنها به صورت زیر می‌باشد.

$$u_0 = u - zw,_x \qquad v_0 = \frac{a+z}{a}v - \frac{z}{a}\mathrm{w},_\varphi \qquad w_0 = w \tag{۱}$$

کرنش‌های متناظر نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\varepsilon_x = u_0,_x \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{a+z}\left(v_0,_\varphi + w_0\right) \qquad \varepsilon_{x_\varphi} = v_0,_x + \left(\frac{1}{a+z}\right)u_0,_\varphi \tag{۲}$$

با استفاده از رابطه بین تنش و کرنش صفحه‌ای، تنش‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_\varphi\right)$$
$$\sigma_\varphi=\frac{E}{1-\nu^2}+\left(\varepsilon_\varphi+\nu\varepsilon_x\right) \qquad (۳)$$
$$\sigma_{x\varphi}=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)\rho}\varepsilon_{x\varphi}$$

انرژی کرنشی نیز پوسته به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰].

$$u_c=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_\varphi\varepsilon_\varphi+\sigma_{x\varphi}\varepsilon_{x\varphi}\right)\left(a+z\right)d_xd_\varphi d_z \qquad (۴)$$

با جایگذاری تنش‌ها بر حسب کرنش و کرنش‌ها بر حسب میدان‌های جابجایی انرژی کرنشی پوسته به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$u_c=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\frac{E_C}{2\left(1-\nu^2\right)}[u,_x^2-2zu,_x\,w,_{xx}+z^2w,_{xx}^2+$$
$$\frac{1}{a^2}v,_\varphi^2-\frac{2z}{a^2\left(a+z\right)}v,_\varphi\,w,_{\varphi\varphi}+\frac{z^2}{a^2\left(a+z\right)^2}w,_{\varphi\varphi}^2$$

$$-\frac{2z}{a\left(a+z\right)^2}ww,_{\varphi\varphi}+\frac{w^2}{\left(a+z\right)^2}+2\frac{\nu}{a}u,_x\,v,_\varphi-$$
$$\frac{2\nu z}{a\left(a+z\right)}u,_x\,w,_{\varphi\varphi}+\frac{2\nu}{\left(a+z\right)}wu,_x-\frac{2z}{a}v,_\varphi\,w,_{xx} \qquad (۵)$$
$$+\frac{2z^2}{a\left(a+z\right)}w,_{xx}\;w,_{\varphi\varphi}-\frac{2\nu z}{\left(a+z\right)}ww,_{xx}+$$
$$\frac{1-\nu}{2}[\frac{\left(a+z\right)^2}{a^2}v,_x^2+\frac{z^2}{a^2}\;w,_{x\varphi}^2-\frac{2z\left(a+z\right)}{a^2}v,_x\,w,_{x\varphi}$$
$$+\frac{2}{a}v,_x\,u,_\varphi-\frac{2z}{a}v,_x\,w,_{x\varphi}-\frac{2z}{a\left(a+z\right)}u,_\varphi\,w,_{x\varphi}+$$
$$\frac{2z^2}{a\left(a+z\right)}w,_{x\varphi}^2+\frac{1}{\left(a+z\right)^2}u,_\varphi^2-\frac{2z}{\left(a+z\right)^2}\;u,_\varphi\,w,_{x\varphi}$$

$$+\frac{z^2}{\left(a+z\right)^2}w,_{x\varphi}^2]]\left(a+z\right)d_xd_\varnothing d_z$$

رابطه بین جابجایی‌های تقویت‌کننده محیطی[1] که بافاصله x در راستای طولی و فاصله z در راستای شعاعی از صفحه میانی است با جابجایی‌های صفحه میانی به صورت زیر می‌باشد.

$$u_r=u-zw,_x$$
$$v_r=\frac{a+z}{a}v-\frac{z}{a}w,_\varphi-\frac{x}{a}\;u,_\varphi \qquad (۶)$$
$$w_r=w$$

کرنش محیطی تقویت کننده محیطی نیز از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\varepsilon_{r\varphi}=\frac{1}{a+z}\left(\frac{a+z}{a}v,_\varphi-\frac{z}{a}\;w,_{\varphi\varphi}-\frac{x}{a}u,_{\varphi\varphi}+w\right) \qquad (۷)$$

انرژی کرنشی کل برای k رینگ به صورت زیر به دست می‌آید. که در آن dA_{rk} مساحت k امین المان در نظر گرفته شده رینگ می‌باشد و $\left(GJ\right)_{rk}$ سفتی پیچشی k امین رینگ می‌باشد [۱۰].

$$U_r=\sum_{k=1}^{k}\frac{E_{rk}}{2}\int_0^{2\pi}\int_{A_{rk}}\varepsilon_{r_\varphi}^2\left(a+z\right)dA_{rk}\mathrm{d}_\varphi$$
$$+\sum_{k=1}^{k}\frac{\left(GJ\right)_{rk}}{2a^2}\int_0^{2\pi}w,_{x\varphi}^2\,\mathrm{d}_\varphi \qquad (۸)$$

با جایگذاری کرنش محیطی از رابطه (۷) در رابطه (۸) انرژی کرنش تقویت‌کننده‌های محیطی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$U_r=\sum_{k=1}^{k}\frac{E_{rk}}{2}\int_0^{2\pi}\int_{A_{rk}}[\frac{a+z}{a^2}v,_\varphi^2+\frac{z^2}{a^2\left(a+z\right)}w,_{\varphi\varphi}^2+$$
$$\frac{x^2}{a^2\left(a+z\right)}u,_{\varphi\varphi}^2+\frac{w^2}{\left(a+z\right)}+\frac{2}{a}wv,_\varphi-\frac{2z}{a^2}v,_\varphi\,w,_{\varphi\varphi} \qquad (۹)$$

1 Ring

$$-\frac{2z}{a\left(a+z\right)}ww_{,\varphi\varphi}-\frac{2x}{a^2}v_{,\varphi\varphi}u_{,\varphi\varphi}+\frac{2xz}{a^2\left(a+z\right)}u_{,\varphi\varphi}w_{,\varphi\varphi}-$$
$$\frac{2x}{a\left(a+z\right)}wu_{,\varphi\varphi}]d_{\varphi}dA_{rk}+\sum_{k=1}^{k}\frac{\left(GJ\right)_{rk}}{2a}\int_0^{2\pi}w_{,x\varphi}^2\,d_{\varphi}$$

رابطه بین جابجایی‌های تقویت کننده طولی که بافاصله y در راستای محیطی و فاصله z در راستای شعاعی از صفحه میانی، با جابجایی‌های صفحه میانی به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned}u_s&=u-zw_{,x}-yv_{,x}\\ v_s&=\frac{a+z}{a}v-\frac{z}{a}w_{,\varphi}\\ w_s&=w\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

کرنش طولی تقویت کننده طولی[1] نیزاز رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\varepsilon_{sx}=u_{,x}-yv_{,xx}-zw_{,xx} \qquad (۱۱)$$

شبیه به انرژی کرنش تقویت‌کننده‌های محیطی، انرژی کرنش تقویت کننده‌های طولی به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰].

$$U_s=\sum_{p=1}^{p}\int_0^l\int_{A_{sp}}\frac{E_{sp}\varepsilon_{sx}^2}{2}dA_{sp}d_x+\sum_{p=1}^{p}\frac{\left(GJ\right)_{sp}}{2a^2}\int_0^l w_{,x\varphi}^2\,d_x \qquad (۱۲)$$

با جایگذاری کرنش طولی از رابطه (۱۱) در رابطه (۱۲) انرژی کرنش تقویت‌کننده‌های طولی به صورت رابطه (۱۳) به دست می‌آید.

$$U_s=\sum_{p=1}^{p}\int_0^l\int_{A_{sp}}(u_{,x}^2+y^2v_{,xx}^2+z^2w_{,xx}^2-2zu_{,x}w_{,xx}-$$
$$2yu_{,x}v_{,xx}+2yzv_{,xx}w_{,xx})\,dA_{sp}\mathrm{d}_x+\sum_{p=1}^{p}\frac{\left(GJ\right)_{sp}}{2a^2}\int_0^l w_{,x\varphi}^2\,d_x \qquad (۱۳)$$

انرژی جنبشی پوسته بر حسب جابجایی‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود. $\dot{w}$، $\dot{v}$، $\dot{u}$ مشتق جابجایی‌ها نسبت به زمان هستند.

$$T_c=\frac{1}{2}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^l\rho_c(\dot{u}_0^2+\dot{v}_0^2+\dot{w}_0^2)\left(a+z\right)d_xd_{\varphi}d_z \qquad (۱۴)$$

با جایگذاری معادلات (۱) در انتگرال فوق انرژی جنبشی پوسته به صورت رابطه (۱۶) به دست می‌آید.

$$T_c=\frac{1}{2}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^l\rho_c(\dot{u}^2+z^2\dot{w}_{,x}^2-$$
$$2z\dot{u}\dot{w}_{,x}+\frac{\left(a+z\right)^2}{a^2}\dot{v}^2+\frac{z^2}{a^2}\dot{w}_{,\varphi}^2- \qquad (۱۵)$$
$$2z\frac{\left(a+z\right)}{a^2}\dot{v}\dot{w}_{,\varphi}+\dot{w}^2)\left(a+z\right)d_xd_{\varphi}d_z$$

انرژی جنبشی تقویت‌کننده‌های محیطی را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۰].

$$T_r=\frac{1}{2}\sum_{1}^{k}\rho_{rk}\int_0^{2\pi}\int_{A_{rk}}(\dot{u}_r^2+\dot{v}_r^2+\dot{w}_r^2)\left(a+z\right)d_{\varphi}dA_{rk} \qquad (۱۶)$$

با جایگذاری معادلات (۶) در انتگرال فوق انرژی جنبشی تقویت‌کننده‌های محیطی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$T_r=\frac{1}{2}\sum_{1}^{k}\rho_{rk}\int_0^{2\pi}\int_{A_{rk}}(\dot{u}^2+z^2\dot{w}_{,x}^2-2z\dot{u}\dot{w}_{,x}+$$
$$\frac{\left(a+z\right)^2}{a^2}\dot{v}^2+\frac{z^2}{a^2}\dot{w}_{,\varphi}^2+\frac{x^2}{a^2}\dot{u}_{,\varphi}^2 \qquad (۱۷)$$
$$-2z\frac{\left(a+z\right)}{a^2}\dot{v}\dot{w}_{,\varphi}-2x\frac{\left(a+z\right)}{a^2}\dot{v}\dot{u}_{,\varphi}+$$
$$2\frac{xz}{a^2}\dot{u}_{,\varphi}\dot{w}_{,\varphi}+\dot{w}^2)\left(a+z\right)d_{\varphi}dA_{rk}$$

انرژی جنبشی تقویت‌کننده‌های طولی را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۰].

$$T_s=\frac{1}{2}\sum_{1}^{p}\rho_{sp}\int_0^l\int_{A_{sp}}(\dot{u}_s^2+\dot{v}_s^2+\dot{w}_s^2)d_xdA_{sp} \qquad (۱۸)$$

1 Stringers

با جایگذاری معادلات (۱۰) در انتگرال فوق انرژی جنبشی تقویت‌کننده‌های طولی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$T_s=\frac{1}{2}\sum_{1}^{p}\rho_{sp}\int_0^{2\pi}\int_{A_{sp}}(\dot{u}^2+z^2\dot{w}_{,x}^2+y^2\dot{v}_{,x}^2-2z\dot{u}\dot{w}_{,x}-2y\dot{u}\dot{v}_{,x}+2yz\dot{v}_{,x}\dot{w}_{,x}+\frac{(a+z)^2}{a^2}\dot{v}^2+\frac{z^2}{a^2}\dot{w}_{,\varphi}^2-2z\frac{(a+z)}{a^2}\dot{v}\dot{w}_{,x}+\dot{w}^2)d_x dA_{sp} \quad (۱۹)$$

اگر معادله (۵) در راستای ضخامت و معادلات (۹) و (۱۳) حول مساحت تقویت‌کننده‌ها انتگرال‌گیری شود ضرایب $(c_1\ldots c_{34})$ ظاهر می‌شوند. (در پیوست ۱ آورده شده‌اند) و اگر معادله (۱۵) در راستای ضخامت و معادلات (۱۷) و (۱۹) حول مساحت تقویت‌کننده‌ها انتگرال‌گیری شود ضرایب $(h_1\ldots h_{23})$ ظاهر می‌شوند. (در پیوست ۱ آورده شده‌اند). اگر $q(x,t)$ بار خارجی در راستای شعاعی باشد، با به‌کارگیری روش همیلتون معادلات حرکت به صورت زیر ظاهر می‌شوند.

$$\begin{aligned}&2c_1u_{,xx}-c_2w_{,xxx}+c_9v_{,x\varphi}+c_{10}w_{,x}+c_{16}v_{,x\varphi}+\\&2c_{19}u_{,\varphi\varphi}-c_{20}w_{,x\varphi\varphi}+2c_{30}u_{,xx}-c_{33}w_{,xxx}-c_{24}u_{,\varphi\varphi\varphi}\\&=2(h_1+h_8+h_{16})\ddot{u}-(h_3+h_{10}+h_{19})\ddot{w}_{,x}-2h_{13}\ddot{u}_{,\varphi\varphi}\end{aligned} \quad (۲۰)$$

$$\begin{aligned}&2c_4v_{,\varphi\varphi}+c_5w_{,\varphi}+c_9u_{,x\varphi}+c_{11}w_{,xx\varphi}+2c_{13}v_{,xx}-\\&c_{15}w_{,xx\varphi}+c_{16}u_{,x\varphi}-c_{17}w_{,xx\varphi}+2c_{22}v_{,\varphi\varphi}+c_{26}w_{,\varphi}\\&-c_{27}w_{,\varphi\varphi}-2c_{31}v_{,xxx}=2(h_4+h_{11}+h_{20})\ddot{v}-\\&(h_6+h_{14}+h_{22})\ddot{w}_{,\varphi}-2h_{18}\ddot{v}_{,xx}\end{aligned} \quad (۲۱)$$

$$\begin{aligned}&c_2u_{,xxx}-2c_3w_{,xxxx}-2c_5v_{,\varphi}-2c_6w_{,\varphi\varphi\varphi\varphi}+\\&2c_7w_{,\varphi\varphi}-2c_8w-c_{10}u_{,x}+c_{11}v_{,\varphi xx}\\&-2(c_{12}+c_{14}+c_{18}+c_{21})w_{,xx\varphi\varphi}+(c_{15}+c_{17})v_{,xx\varphi}\\&+c_{20}u_{,\varphi\varphi x}-2c_{23}w_{,\varphi\varphi\varphi\varphi}-2c_{25}w-c_{26}v_{,\varphi}+c_{27}v_{,\varphi\varphi\varphi}\\&+2c_{28}w_{,\varphi\varphi}-(c_{29}+c_{34})w_{,xx\varphi\varphi}-2c_{32}w_{,xxxx}+c_{33}u_{,xxx}\\&=-2(h_2+h_9+h_{17})\ddot{w}_{,xx}+(h_3+h_{10}+h_{19})\ddot{u}_{,x}\\&+(h_6+h_{14}+h_{22})\ddot{v}_{,\varphi}-2(h_5+h_{12}+h_{21})\ddot{w}_{,\varphi\varphi}+\\&2(h_7+h_{15}+h_{23})\ddot{w}\end{aligned} \quad (۲۲)$$

ارتعاشات آزاد بدون در نظر گرفتن $q(x,t)$ نیروی خارجی در راستای شعاعی و با در نظر گرفتن میدان‌های جابجایی به صورت زیر که شرایط مرزی دو سر تکیه گاه ساده را ارضا می‌کند قابل حل است.

$$\begin{aligned}u&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\ Cos\frac{m\pi}{l}x\ Cos\ n\varphi\ e^{i\omega_{mn}t}\\v&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\ Sin\frac{m\pi}{l}x\ Sin\ n\varphi\ e^{i\omega_{mn}t}\\w&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\ Sin\frac{m\pi}{l}x\ Cos\ n\varphi\ e^{i\omega_{mn}t}\end{aligned} \quad (۲۳)$$

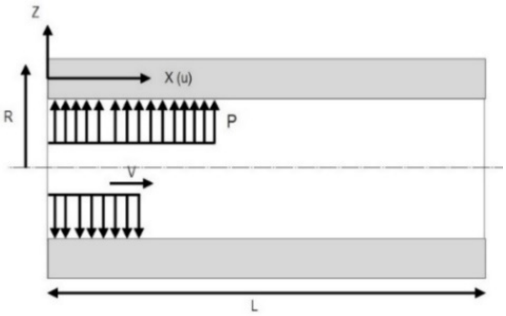
با جایگذاری میدان‌های جابجایی در معادلات حرکت و به کارگیری روش گلرکین ماتریس ضرایب به صورت زیر ظاهر می‌شود.

$$\begin{bmatrix}K_{11}-\omega^2M_{11}&K_{12}&K_{13}-\omega^2M_{13}\\K_{12}&K_{22}-\omega^2M_{22}&K_{23}-\omega^2M_{23}\\K_{13}-\omega^2M_{13}&K_{23}-\omega^2M_{23}&K_{33}-\omega^2M_{33}\end{bmatrix}_{mn}\times\begin{bmatrix}A_{mn}\\B_{mn}\\C_{mn}\end{bmatrix} \quad (۲۴)$$

برای داشتن یک حل غیربدیهی از ضریب‌های A_{mn} و B_{mn} و C_{mn} دِترمینان ماتریس ضرایب آن‌ها برابر با صفر قرار داده می‌شود و فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آیند. (ضرایب K_{ij} و M_{ij} در پیوست ۲ آورده شده‌اند.)

۳- فشار داخلی متحرک و حل دینامیکی

همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود فشار داخلی به صورتی می‌باشد که با گذشت زمان از ابتدای استوانه شروع شده و در پایان زمان تمام استوانه تحت فشار قرار می‌گیرد. بنابراین برای تعریف آن از تابع پله استفاده می‌شود.



شکل۲. فشار داخلی متحرک

Fig. 2. Moving internal pressure

$$q(x,t)=p(t)\,\mathrm{U}\left(x_0(t)-x\right) \tag{۲۵}$$

برای حل دینامیکی $q(x,t)$ نیروی خارجی نیز در راستای شعاعی در معادلات حرکت آورده شده و میدان‌های جابجایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{aligned} u&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\ Cos\frac{m\pi}{l}x\ Cos\ n\varphi\ T_{mn}(t)\\ v&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\ Sin\frac{m\pi}{l}x\ Sin\ n\varphi\ T_{mn}(t)\\ w&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\ Sin\frac{m\pi}{l}x\ Cos\ n\varphi\ T_{mn}(t)\end{aligned} \tag{۲۶}$$

اگر فشار داخلی به صورت سری دوبل فوریه در نظر گرفته شود (متناظر با جابجایی در نظر گرفته شده در راستای شعاعی) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} &q(x,t)=q(x)\,p(t)=\\ &[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{mn}\ Sin\frac{m\pi}{l}x\ Cos\ n\varphi]\,p(t)\end{aligned} \tag{۲۷}$$

که در آن

$$P_{mn}=\frac{2}{\pi l}\int_0^l\int_0^{2\pi}q(x)\,Sin\frac{m\pi}{l}x\ Cos\ n\varphi\ dx\,d\varphi=0 \tag{۲۸}$$

$$\begin{aligned} &P_{m0}=\frac{2}{l}\int_0^l q(x)\,Sin\frac{m\pi}{l}x\ dx=\\ &\frac{2}{l}\int_0^l \mathrm{U}\left(x_0(t)-x\right)Sin\frac{m\pi}{l}x\ dx\\ &=\frac{2}{l}\int_0^{x_0(t)}Sin\frac{m\pi x}{l}dx=\frac{2}{m\pi}\left(1-Cos\left(\frac{m\pi}{l}x_0(t)\right)\right)\end{aligned} \tag{۲۹}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود حل دینامیکی برای مُد محیطی $n=0$ انجام می‌شود. برای مُد محیطی $n=0$ میدان جابجایی محیطی صفر می‌باشد بنابراین معادلات حرکت به‌صورت معادلات (۳۰) و (۳۱) کاهش می‌یابد.

$$\begin{aligned} &2c_1u,_{xx}-c_2w,_{xxx}+c_{10}w,_x+2c_{30}u,_{xx}-c_{33}w,_{xxx}=\\ &2\left(h_1+h_8+h_{16}\right)\ddot{u}-\left(h_3+h_{10}+h_{19}\right)\ddot{w},_x\end{aligned} \tag{۳۰}$$

$$\begin{aligned} &c_2u,_{xxx}-2c_3w,_{xxxx}-2c_8w-c_{10}u,_x-2c_{25}w-2c_{32}w,_{xxxx}\\ &+c_{33}u,_{xxx}=-2\left(h_2+h_9+h_{17}\right)\ddot{w},_{xx}+\left(h_3+h_{10}+h_{19}\right)\ddot{u},_x\\ &+2\left(h_7+h_{15}+h_{23}\right)\ddot{w}-a\ q(x,t)\end{aligned} \tag{۳۱}$$

توابع جابجایی نیز برای مُد محیطی $n=۰$ به صورت رابطه (۳۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u&=\sum_{m=1}^{\infty}A_{m0}\ Sin\frac{m\pi}{l}x\ T_{m0}(t)\\ w&=\sum_{m=1}^{\infty}C_{m0}\ Sin\frac{m\pi}{l}x\ T_{m0}(t)\end{aligned} \tag{۳۲}$$

با استفاده از معادلات (۳۲) و روش گالرکین سمت راست تساوی‌های معادلات حرکت (۳۰) و (۳۱) که شامل مشتقات زمانی هستند به صورت روابط (۳۳) و (۳۴) به دست می‌آید.

$$\ddot{T}_{m0}(t)\begin{bmatrix}\left[2\left(h_1+h_8+h_{16}\right)\right]A_{m0}l/2- \\ \left[\left(h_3+h_{10}+h_{19}\right)\right]\left(m\pi/l\right)C_{m0}l/2\end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

$$\ddot{T}_{m0}(t)[-\left[\left(h_3+h_{10}+h_{19}\right)\left(m\pi/l\right)\right]A_{m0}l/2 + \begin{bmatrix}\left[2\left(h_2+h_9+h_{17}\right)\left(m\pi/l\right)^2\right]+ \\ \left[2\left(h_7+h_{15}+h_{23}\right)\right]\end{bmatrix}C_{m0}l/2]-a\,q(x,t) \tag{۳۴}$$

با کمک حل ارتعاشات آزاد که $T_{m.}(t)=e^{i\omega_{m.}t}$ می‌باشد سمت چپ معادلات حرکت (۳۰) و (۳۱) نیز به صورت رابطه (۳۵) و (۳۶) حاصل می‌شود.

$$-\omega_{m0}{}^2T_{m0}(t)\begin{bmatrix}\left[2\left(h_1+h_8+h_{16}\right)\right]A_{m0}l/2- \\ \left[\left(h_3+h_{10}+h_{19}\right)\left(m\pi/l\right)\right]C_{m0}l/2\end{bmatrix} \tag{۳۵}$$

$$\begin{aligned}&-\omega_{m0}{}^2T_{m0}(t)[\left[-\left[\left(h_3+h_{10}+h_{19}\right)\left(m\pi/l\right)\right]\right]A_{m0}l/2+ \\ &[\left[2\left(h_2+h_9+h_{17}\right)\left(m\pi/l\right)^2\right] \\ &+\left[2\left(h_7+h_{15}+h_{23}\right)\right]]C_{m0}l/2\end{aligned} \tag{۳۶}$$

با تساوی سمت چپ و راست معادلات حرکت، ساده سازی و جمع آنها با یکدیگر معادله دیفرانسیل زیر حاصل می‌شود. ($Z_{m.}(t)$ در پیوست ۳ آورده شده است.)

$$\ddot{T}_{m0}(t)+\omega^2T_{m0}(t)=G_{m0}(t) \tag{۳۷}$$

$$G_{m0}(t)=\frac{\frac{2a}{m\pi}\left(1-Cos\left(\frac{m\pi}{l}x_0(t)\right)\right)p(t)C_{m0}}{Z_{m0}} \tag{۳۸}$$

برای حل معادله دیفرانسیل (۳۷) از تبدیل لاپلاس[1] و انتگرال کانولوشن[2] استفاده شده و حاصل به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}&T_{m0}(t)=\frac{C_{m0}}{\omega_{m0}Z_{m0}}\int_0^t\frac{2a}{m\pi}\times \\ &\left(1-Cos\left(\frac{m\pi}{l}x_0(t)\right)\right)p(t)Sin\left(\omega_{m0}(t-\tau)\right)d\tau\end{aligned} \tag{۳۹}$$

تابع $x_{.}(t)$ بیانگرموقعیت فشار داخلی بر حسب زمان می‌باشد.

تابع $p(t)$ بیانگر مقدار فشار داخلی بر حسب زمان می‌باشد.

همچنین تابع $x_{.}(t)$ به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$x_0(t)=\mathrm{a}_0\left(e^{b_0(t-t_0)}\right) \tag{۴۰}$$

و $p(t)$ به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$p(t)=\begin{cases}f\times e^{\frac{t-t_s}{c_1}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;0\le t\le\frac{t_0}{3} \\ f\times e^{\frac{t_s-t}{c_2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\frac{t_0}{3}\le t\le t_0\end{cases} \tag{۴۱}$$

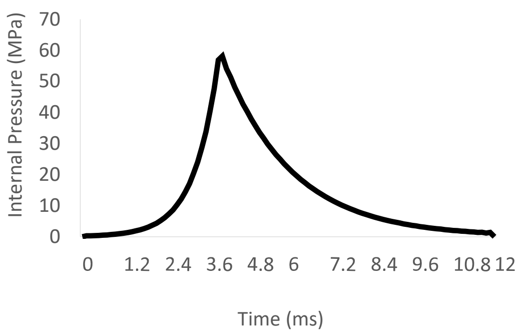
که نمودار آن‌ها در شکل ۳ آورده شده است.

برای حل انتگرال معادله (۳۹) $p(t)$ به صورت سری فوریه زیر در نظر گرفته می‌شود.

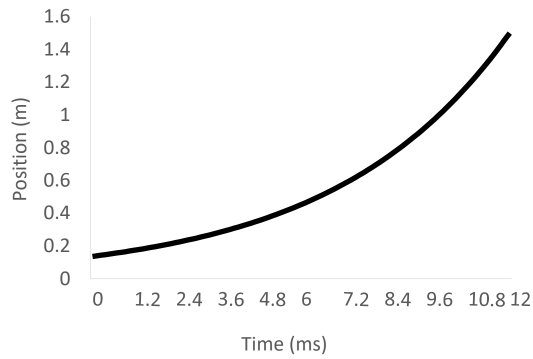
$$p(t)=\sum_{n'=1}^{\infty}a_{n'}\ Sin\frac{n'\pi t}{t_0} \tag{۴۲}$$

$$\begin{aligned}a_{n'}=&\frac{fc_1t_0\left[\pi c_1n'\mathrm{e}^{\frac{-t_0}{3c_1}}\right]}{\pi^2c_1{}^2n'^2+t_0{}^2}+\frac{fc_1t_0[t_0Sin\frac{n'\pi}{3}-\pi c_1n'cos\frac{n'\pi}{3}]}{\pi^2c_1{}^2n'^2+t_0{}^2} \\ &\frac{fc_2t_0[\pi c_2n'cos\frac{n'\pi}{3}+t_0sin\frac{n'\pi}{3}]}{\pi^2c_2{}^2n'^2+t_0{}^2}+ \\ &\frac{fc_2t_0\left[-\pi c_2n'\mathrm{e}^{\frac{-2t_0}{3c_2}}cosn'\pi-t_0\mathrm{e}^{\frac{-2t_0}{3c_2}}sinn'\pi\right]}{\pi^2c_2{}^2n'^2+t_0{}^2}\end{aligned} \tag{۴۳}$$

1 Laplace transform
2 Convolution integral



(b)(ب)



(a)(الف)

شکل۳. (الف) نمودار فشار بر حسب زمان $C_2=۰/۰۰۲$ $C_1=۰/۰۰۰۷$ $t_s=۰/۰۰۴$ **= ۱۰^۷۶ (ب) موقعیت فشار داخلی در استوانه** $t_0=۰/۰۱۲$ $b_0=۲۰۰$ $a_0=۱/۵$

Fig. 3. (a) Pressure diagram in terms of time C_2=0.002 C_1= 0.0007, t_s=0.004, f=6×10^7 (b) The situation of internal pressure in the cylinder t_0=0.012, b_0=200, a_0=1.5

و $x_0(t)$ نیز به یکصَد تابع خطی تقسیم شده است. به این ترتیب این حل به صورت عمومی برای هر بارگذاری با توابع $x_0(t)$ و $p(t)$ مختلف ارائه شده است به این صورت که سری فوریه $p(t)$ محاسبه شده و $x_0(t)$ به چند تابع خطی تقسیم شود و در روابط جایگذاری شوند. بنابراین انتگرال معادله (۳۹) به صورت زیر حاصل می‌شود و با استفاده از نرم افزار میپل[1] قابل محاسبه است (ω_m فرکانس طبیعی متناظر می‌باشد).

$$T_{m0}(t)=\frac{C_{m0}}{\omega_{m0}Z_{m0}}\sum_{n'=1}^{\infty}a_{n'}\int_0^t\frac{2a}{m\pi}\left(1-Cos\left(\frac{m\pi}{l}(a_x\tau+b_x)\right)\right)Sin\frac{n'\pi\tau}{t_0}Sin\left(\omega_{m0}(t-\tau)\right)d\tau \qquad (۴۴)$$

حاصل این انتگرال به صورت زیرخواهد بود.

$$\begin{aligned}
T_{m0}(t)= & \qquad (۴۵)\\
& \frac{2aC_{m0}}{m\pi\omega_{m0}Z_{m0}}\sum_{n'=1}^{\infty}a_{n'}[t_0\left[\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\sin(\omega_{m0}t\right]\left(\pi^5t_0^2l^2m^2n'^3a_x^2\right)\\
& \frac{2aC_{m0}}{m\pi\omega_{m0}Z_{m0}}\sum_{n'=1}^{\infty}a_{n'}[t_0\left[\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\sin(\omega_{m0}t\right]\left(\pi^5t_0^2l^2m^2n'^3a_x^2\right)\\
& -2\cos(\frac{m\pi ta_x}{l})\sin(\frac{\pi n't}{t_0})\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\left(\pi^2t_0^2l^4n'^2\omega_{m0}^2\right)\\
& -\sin(\frac{m\pi ta_x}{l})\sin(\frac{\pi n't}{t_0})\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\left(\pi^2t_0^2l^4n'^2\omega_{m0}^2\right)\\
& +2\sin(\frac{m\pi ta_x}{l})\sin(\frac{\pi n't}{t_0})\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\left(\pi^2t_0^3l^4n'^2m_{m0}^3\right)\\
& +\cos(\frac{m\pi ta_x}{l})\sin(\frac{\pi n't}{t_0})\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\left(t_0^5l^4\omega_{m0}^5\right)\\
& -\sin(\frac{m\pi ta_x}{l})\sin(\frac{\pi n't}{t_0})\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\left(t_0^5l^4\omega_{m0}^5\right)\\
& +2\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\sin(\omega_{m0}t)\left(\pi^3t_0^2l^4m^2n'^3\omega_{m0}^2\right)\\
& -\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\sin(\omega_{m0}t)\left(\pi t_0^4l^4n'\omega_{m0}^4\right)\\
& -\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\sin(\omega_{m0}t)\left(\pi^3t_0^4l^2m^2n'\omega_{m0}^2a_x^2\right)\\
& +2\sin(\frac{m\pi b_x}{l})\cos(\omega_{m0}t)\left(\pi^4t_0^2l^3n'^3m\omega_{m0}a_x\right)\\
& -\cos(\frac{m\pi ta_x}{l})\sin(\frac{\pi n't}{t_0})\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\left(\pi^2t_0^5l^2m^2a_x^2\omega_{m0}^3\right)\\
& +\sin(\frac{m\pi ta_x}{l})\sin(\frac{\pi n't}{t_0})\sin(\frac{m\pi b_x}{l})\left(\pi^2t_0^5l^2m^2a_x^2\omega_{m0}^3\right)\\
& +2\sin(\frac{m\pi ta_x}{l})\cos(\frac{\pi n't}{t_0})\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\left(\pi^2t_0^4l^3n'ma_x\omega_{m0}^3\right)\\
& +\cos(\frac{m\pi ta_x}{l})\sin(\frac{\pi n't}{t_0})\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\left(\pi^4t_0^3l^2\omega_{m0}m^2n'^2a_x^2\right)\\
& -2\cos(\frac{m\pi ta_x}{l})\cos(\frac{\pi n't}{t_0})\sin(\frac{m\pi b_x}{l})\left(\pi^4t_0^2l^3n'^3m\omega_{m0}a_x\right)
\end{aligned}$$

1 Maple

جدول۱. هندسه و خواص پوسته و تقویت کننده‌ها

Table 1. Geometry and properties of shells and stiffeners

پارامتر	واحد	$M_۱$	$M_۲$	$M_۳$	$M_۴$
طول	m	۰/۳۹۴۴۶	۱/۵	۱/۵	۱/۵
شعاع	m	۰/۰۴۹۷۵۸	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵
ضخامت	m	۰/۰۰۱۶۵۱	۰/۰۰۷	۰/۰۰۷	۰/۰۰۷
مدول یانگ	GPa	۶۸/۹۵	۲۰۷	۲۰۷	۲۰۷
چگالی	kg/m۳	۲۷۶۲	۷۷۷۰	۷۷۷۰	۷۷۷۰
ضریب پواسون	-------	۰/۳	۰/۳	۰/۳	۰/۳
ارتفاع تقویت کننده محیطی d_r	m	۰/۰۰۵۳۳	۰/۰۱	_	۰/۰۱
عرض تقویت کننده محیطی b_r	m	۰/۰۰۳۱۷۵	۰/۰۰۷	_	۰/۰۰۷
ارتفاع تقویت کننده طولی d_s	m	_	_	۰/۰۱	۰/۰۱
عرض تقویت کننده طولی b_s	m	_	_	۰/۰۰۷	۰/۰۰۷
تعداد تقویت کننده محیطی		۱۹	۱۴	۰	۹
تعداد تقویت کننده طولی		۰	۰	۹	۹

$$
\begin{aligned}
&+2\cos(\frac{m\pi t a_x}{l})\cos(\frac{\pi n' t}{t_0})\sin(\frac{m\pi b_x}{l})\left(\pi^2 t_0{}^4 l^3 n' m\, a_x \omega_{m0}{}^3\right)\\
&-2\sin(\frac{m\pi t a_x}{l})\cos(\frac{\pi n' t}{t_0})\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\left(\pi^4 t_0{}^2 l^3 n'^3 m\omega_{m0}(a_x\right)\\
&-\sin(\frac{\pi n' t}{t_0})\left(\pi^4 t_0{}^5 \omega_{m0} m^4\, a_x{}^4\right)-\sin(\frac{\pi n' t}{t_0})\left(\pi^4 t_0 l^4 n'^4 \omega_{m0}\right)\\
&+2\sin(\frac{\pi n' t}{t_0})\left(\pi^2 t_0{}^3 l^4 n'^2 \omega_{m0}{}^3\right)+2\sin(\frac{\pi n' t}{t_0})\left(\pi^2 t_0{}^5 l^2 m^2\, a_x{}^2 \omega_{m0}{}^3\right)\\
&-2\sin(\omega_{m0}t)\ (\pi^5 t_0{}^2 l^2 m^2 n'^3 a_x{}^2)+\sin(\omega_{m0}t)\left(\pi^5 l^4 n'^5\right)\\
&+\sin(\omega_{m0}t)(\pi^5 t_0{}^4 m^4 n' a_x{}^4)-2\sin(\omega_{m0}t)(\pi^3 t_0{}^2 l^4 m^2 n'^3 \omega_{m0}{}^2)\\
&+\sin\left(\omega_{m0}\, t\right)\left(\pi t_0{}^4 l^4 n' \omega_{m0}{}^4\right)-2\sin(\omega_{m0}t)\left(\pi^3 t_0{}^4 l^2 m^2 n' \omega_{m0}{}^2 a_x{}^2\right)\\
&+\sin(\frac{\pi n' t}{t_0})\left(t_0{}^5 l^4 \omega_{m0}{}^5\right)-\cos(\frac{m\pi b_x}{l})\sin(\omega_{m0}t)\left(\pi^4 l^4 n'^5\right)\\
&+2\sin(\frac{\pi n' t}{t_0})\left(\pi^4 t_0{}^3 l^2 \omega_0 m^2 n'^2\, a_x{}^2\right)]/\\
&(\pi^6 t_0{}^4 m^4 n'^2 a_x{}^4-\pi^4 t_0{}^6 m^4 \omega_{m0}{}^2 a_x{}^4\\
&-2\pi^6 t_0{}^2 l^2 m^2 a_x{}^2 n'^4+2\pi^2 t_0{}^6 l^2 m^2 a_x{}^2 \omega_{m0}{}^4+\\
&\pi^6 l^4 n'^4-3\pi^4 t_0{}^2 l^4 n'^4 \omega_{m0}{}^4\\
&+3\pi^2 t_0{}^4 l^4 n'^2 \omega_{m0}{}^4-t_0{}^6 l^4 \omega_{m0}{}^4)]
\end{aligned}
$$

پاسخ‌های زمانی نیز به صورت زیر نوشته می‌شوند (ضرایب A_m. و C_m. ضرایب حاصل شده از مُدهای نُرمالایز شده نسبت به ماتریس جرم $\left[M\right]$ می‌باشند).

$$
\begin{aligned}
u&=\sum_{m=1}^{\infty} A_{m0}\ Sin\frac{m\pi}{l}x\ T_{m0}\left(t\right)\\
w&=\sum_{m=1}^{\infty} C_{m0}\ Sin\frac{m\pi}{l}x\ T_{m0}\left(t\right)
\end{aligned}
\qquad (۴۶)
$$

۴- نتایج و تحلیل آن

برای بررسی ارتعاشات آزاد، مدل $M_۱$ و برای بررسی حل دینامیکی مدل‌های $M_۲$، $M_۳$ و $M_۴$ در جدول۱ آورده شده‌اند. در جدول ۲ برخی از فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از حل تحلیلی برای مدل $M_۱$ با نتایج مرجع [۱۵] که در آن از روش ریتز برای حل ارتعاشات آزاد استفاده شده است و نتایج مدل‌سازی آباکوس[۱] مقایسه شده است.

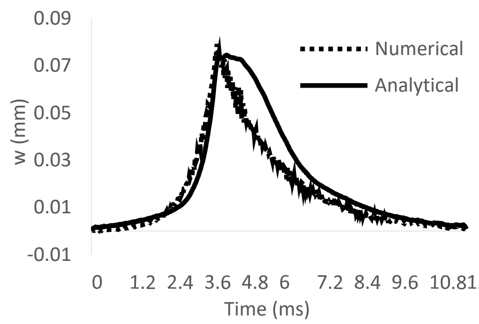
حل دینامیکی این مسئله با کُد نویسی زبان فرترن انجام شده و برای صحت‌سنجی با نتایج مدل شبیه سازی شده در نرم افزار آباکوس

1 ABAQUS

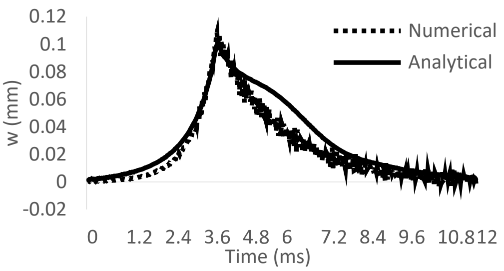
جدول۲. مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته تقویت‌شده مدل $M_۱$ با نوزده تقویت‌کننده محیطی با مرجع [۱۵] و نتایج آباکوس

Table 2. Comparison of natural frequencies of M_1 stiffened shell with nineteen rings, with reference [15] and Abacus results

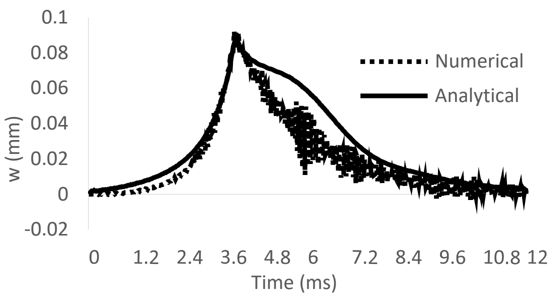
		$M_۱$				
m	n	حل تحلیلی	مرجع[۱۵]	آباکوس	خطا % [۱۵]	خطا% (آباکوس)
۱	۲	۱۵۵۶	۱۵۶۴	۱۵۰۲	۰/۵	۳
	۳	۴۳۵۷	۴۳۸۸	۴۲۳۲	۰/۷	۲/۹
۲	۲	۲۱۲۳	۲۱۱۸	۲۰۸۰	۰/۲	۲
	۳	۴۳۴۹	۴۴۰۰	۴۲۲۶	۱	۲/۹
۳	۲	۳۳۹۷	۳۴۰۹	۳۳۴۳	۰/۳	۱/۶
	۳	۴۵۶۷	۴۶۰۷	۴۴۵۹	۰/۸	۱/۴
	۴	۸۲۷۵	۸۴۴۹	-	۲	-



(الف) (a)



(ب) (b)



(ج) (c)

شکل۴. مقایسه جابجایی شعاعی در نقطه‌ای به فاصله ۰/۱۲ متر از ابتدای استوانه تقویت شده بین نتیجه تحلیلی و نتیجه حاصل از نرم افزار آباکوس برای (الف) مدل $M_۲$ با چهارده تقویت‌کننده محیطی (ب) مدل $M_۳$ با نه تقویت کننده طولی (ج) مدل $M_۴$ با نه تقویت‌کننده طولی و نه تقویت کننده محیطی

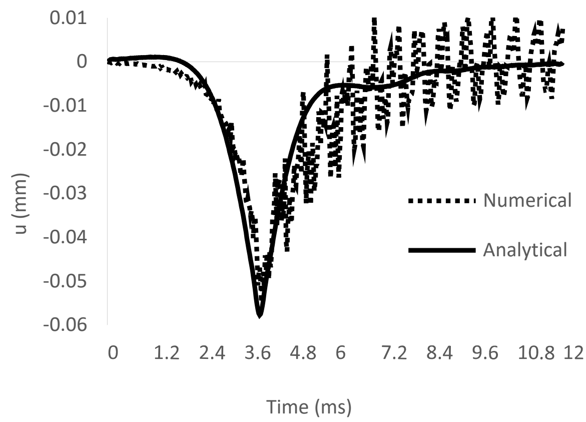
Fig. 4. Comparison of radial convection at a point with a distance of 0.12 (m) from the beginning of the reinforced cylinder, between the analytical result and the result obtained from ABAQUS software for (a) model M_2 with fourteen rings(b) model M_3 with nine stringers(c) Model M_4 with nine stringers and nine rings

مقایسه شده است. مدل استفاده شده در نرم افزار آباکوس به صورت پوسته[1] بوده و برای شبیه‌سازی فشار داخلی متحرک از سابروتین نویسی[2] استفاده شده است.

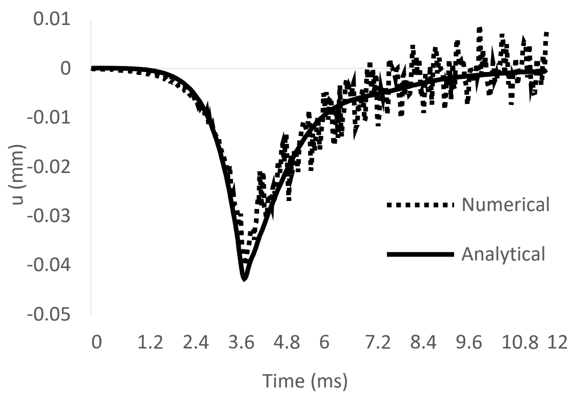
در شکل۴ نتایج حل تحلیلی جابجایی شعاعی با نتایج آباکوس

1 Shell

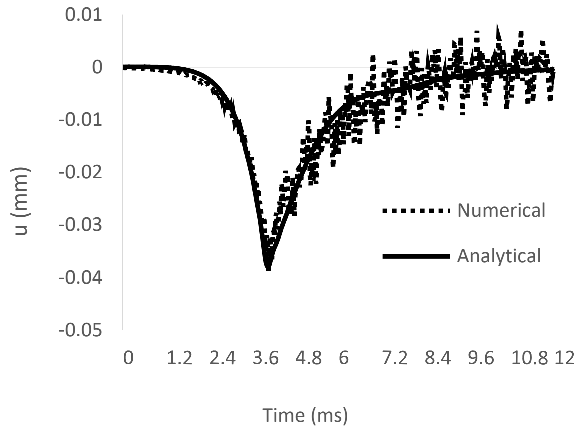
2 Vdload



(a) (الف)



(b) ب)



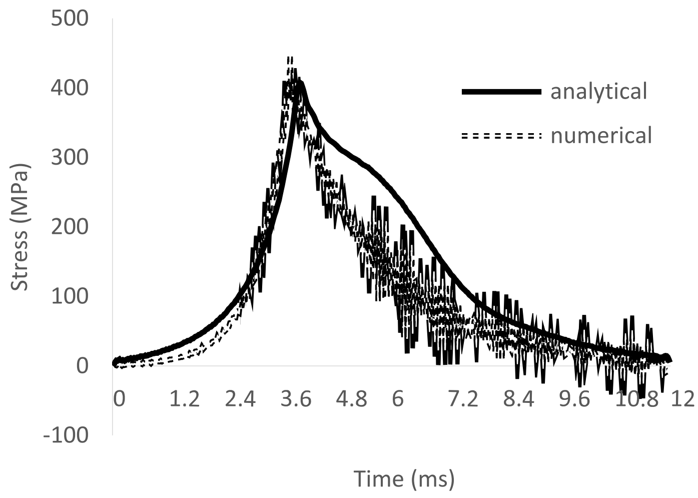
(c) ج)

شکل۵. مقایسه جابجایی طولی در نقطه‌ای به فاصله ۰/۱۲ متر از ابتدای استوانه تقویت شده بین نتیجه تحلیلی و نتیجه حاصل از نرم افزار آباکوس برای (الف) مدل M_2 با چهارده تقویت کننده محیطی (ب) مدل M_3 با نُه تقویت کننده طولی (ج) مدل M_4 با نُه تقویت کننده محیطی و نُه تقویت کننده طولی

Fig. 5. Comparison of longitudinal convection at a point with a distance of 0.12 (m) from the beginning of the reinforced cylinder, between the analytical result and the result obtained from ABAQUS software for (a) model M_2 with fourteen peripheral amplifiers (b) model M_3 with nine Longitudinal amplifier (c) Model M_4 with nine longitudinal and nine Longitudinal amplifier

برای مُدل‌های ذکر شده آورده شده است. جابجایی شعاعی پوسته در نقطه‌ای به فاصله ۰/۱۲ متر از ابتدای پوسته برای استوانه تقویت شده با تقویت‌کننده محیطی، استوانه تقویت‌شده با تقویت‌کننده طولی و استوانه تقویت‌شده با هر دو نوع تقویت‌کننده آورده شده‌اند که تطابق قابل قبولی با نتایج آباکوس دارند. همانطور که مشاهده می‌شود مشابه نمودار فشار نسبت به زمان که در لحظه ۴ میلی‌ثانیه بیشترین مقدار را دارد بیشترین جابجایی شعاعی نیز در این زمان رخ می‌دهد. همچنین در موقعیت ۰/۱۲ متر از ابتدای استوانه، تقریباً می‌توان گفت از آغاز نمودار فشار نسبت به زمان در معرض فشار قرار می‌گیرد یعنی در این فاصله از ابتدای استوانه از لحظه آغاز تا پایان فرآیند تحت فشار داخلی قرار دارد در صورتی که نقاط جلوتر از ابتدای فرآیند تحت فشار داخلی قرار ندارند و با گذشت زمان فشار داخلی متحرک به نقاط جلوتر می‌رسد.

در شکل ۵ نتایج حل تحلیلی جابجایی طولی با نتایج آباکوس برای مدل‌های ذکر شده آورده شده است. جابجایی طولی پوسته در نقطه‌ای به فاصله ۰/۱۲ متر از ابتدای پوسته برای استوانه تقویت شده با تقویت‌کننده محیطی، استوانه تقویت‌شده با تقویت‌کننده طولی و استوانه تقویت شده با هر دو نوع تقویت‌کننده آورده شده‌اند.



شکل۶. مقایسه تنش محیطی در نقطه‌ای به فاصله ۰/۱۲ متر از ابتدای استوانه تقویت‌شده مدل $M_۴$ با نُه تقویت‌کننده محیطی و نُه تقویت‌کننده طولی بین نتیجه تحلیلی و نتیجه حاصل از نرم‌افزار آباکوس

Fig. 6. Comparison of conventional stress at a point with a distance of 0.12 (m) from the beginning of the stiffened cylinder Model M_4 with nine rings and nine stringers between the analytical result and the result obtained from ABAQUS software

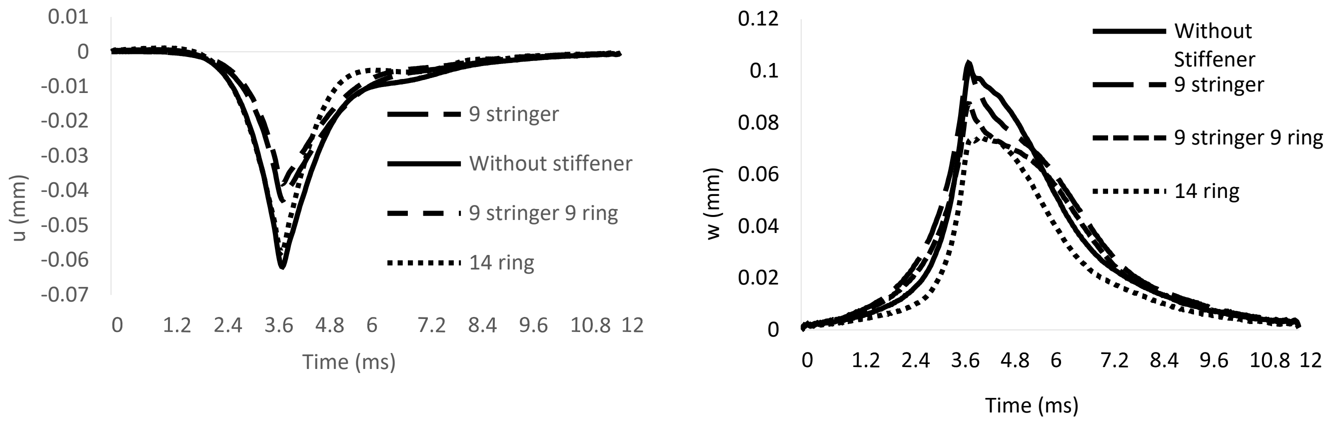
همانطورکه مشاهده می‌شود مشابه نمودار فشار نسبت به زمان که در لحظه ۴ میلی‌ثانیه بیشترین مقدار را دارد بیشترین جابجایی طولی نیز در این زمان رخ می‌دهد. فشار داخلی متحرک باعث می‌شود که جابجایی شعاعی مقداری مثبت و جابجایی طولی مقداری منفی داشته باشد یعنی فشار داخلی متحرک در راستای طولی موجب جمع شدن پوسته استوانه‌ای می‌شود.

با استفاده از رابطه‌های (۲) و (۳) تنش محیطی پوسته تقویت شده قابل محاسبه است. در شکل ۶ مقایسه نتیجه تحلیلی و نتیجه حاصل از نرم افزار آباکوس برای تنش محیطی نقطه‌ای به فاصله ۰/۱۲ متر از ابتدای استوانه برای پوسته تقویت شده با نُه تقویت‌کننده محیطی و نُه تقویت‌کننده طولی مدل $M_۴$ آورده شده است. تنش محیطی نیز مانند نمودار فشار-زمان، تا زمان ۴ میلی‌ثانیه روند صعودی دارد و تقریباً به مقدار ۴۰۰ مِگا پاسکال نزدیک می‌شود و با گذشت از این لحظه که فشار روند کاهشی دارد تنش محیطی نیز تا پایان فرآیند روند نزولی خود را طی می‌کند تا به صفر برسد.

در شکل ۷ جابجایی‌های شعاعی و طولی استوانه بدون تقویت کننده با مدل‌های ذکر شده مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تقویت کننده‌های شعاعی موجب کاهش جابجایی شعاعی شده و در جابجایی طولی تأثیر چندانی ندارند و تقویت‌کننده‌های طولی در جابجایی شعاعی تأثیر چندانی ندارند و موجب کاهش جابجایی طولی می‌شوند.

در شکل ۸ جابجایی‌های شعاعی و پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده با چهارده تقویت‌کننده محیطی مدل $M_۲$ با پوسته تقویت نشده که هم وزن مدل $M_۲$ می‌باشد و جابجایی‌های طولی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده با نُه تقویت‌کننده طولی مدل $M_۳$ با پوسته تقویت نشده که هم وزن مدل $M_۳$ می‌باشد به طوری که پوسته تقویت نشده با افزایش ضخامت به وزن پوسته تقویت‌شده رسیده است مقایسه شده‌اند. همان‌طورکه مشاهده می‌شود تقویت‌کننده‌های محیطی در کاهش جابجایی‌های شعاعی و تقویت‌کننده‌های طولی در کاهش جابجایی‌های طولی تأثیر بیشتری نسبت به افزایش ضخامت درکاهش جابجایی‌ها دارند.

در شکل ۹ جابجایی‌های شعاعی پوسته مدل $M_۱$ تقویت شده با چهارده تقویت کننده محیطی و جابجایی‌های شعاعی پوسته مدل $M_۲$ تقویت شده با نُه تقویت کننده طولی برای فواصل مختلف از ابتدای پوسته آورده شده است. همانطورکه مشاهده می‌شود برای هر نقطه از استوانه تا زمانی که فشار داخلی متحرک به آن نقطه اعمال نشده جابجایی شعاعی تقریباً صفر بوده و به محض رسیدن فشار متحرک به آن نقطه بلافاصله جابجایی شعاعی افزایش یافته و پس از آن از الگوی تغییر شکل نقاط قبلی آن تبعیت می‌کند.

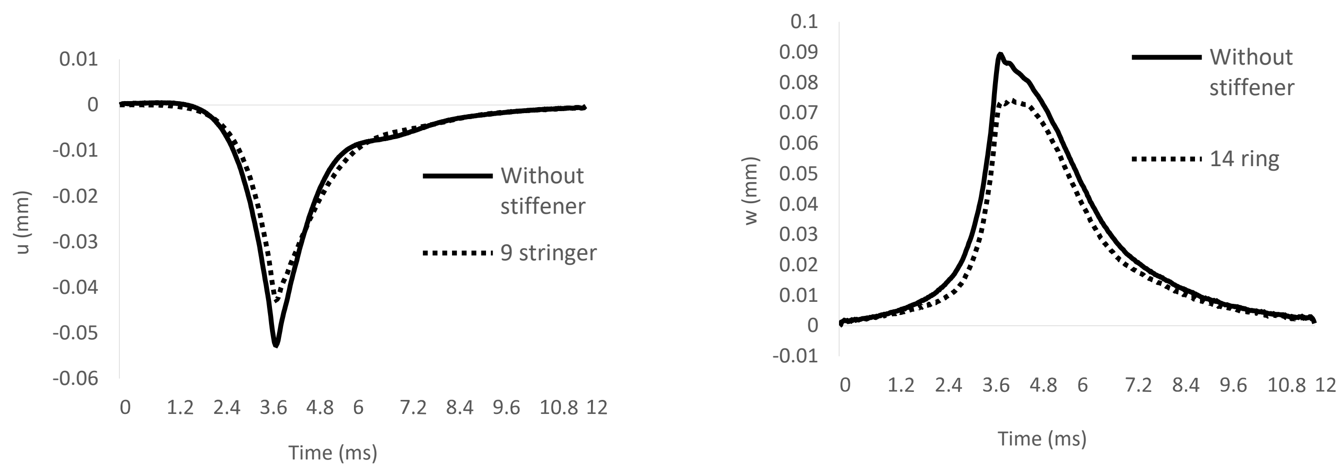


(b) (ب)

(a) (الف)

شکل۷. (الف) بررسی تأثیر انواع تقویت‌کننده‌ها بر جابجایی شعاعی پوسته استوانه‌ای (ب) بررسی تأثیر انواع تقویت‌کننده‌ها بر جابجایی طولی پوسته استوانه‌ای

Fig. 7. (a) Analysis of the effect of different types of stiffener on the radial convection of the cylindrical shell (b) Analysis of the effect of different types of stiffener on the longitudinal convection of the cylindrical shell

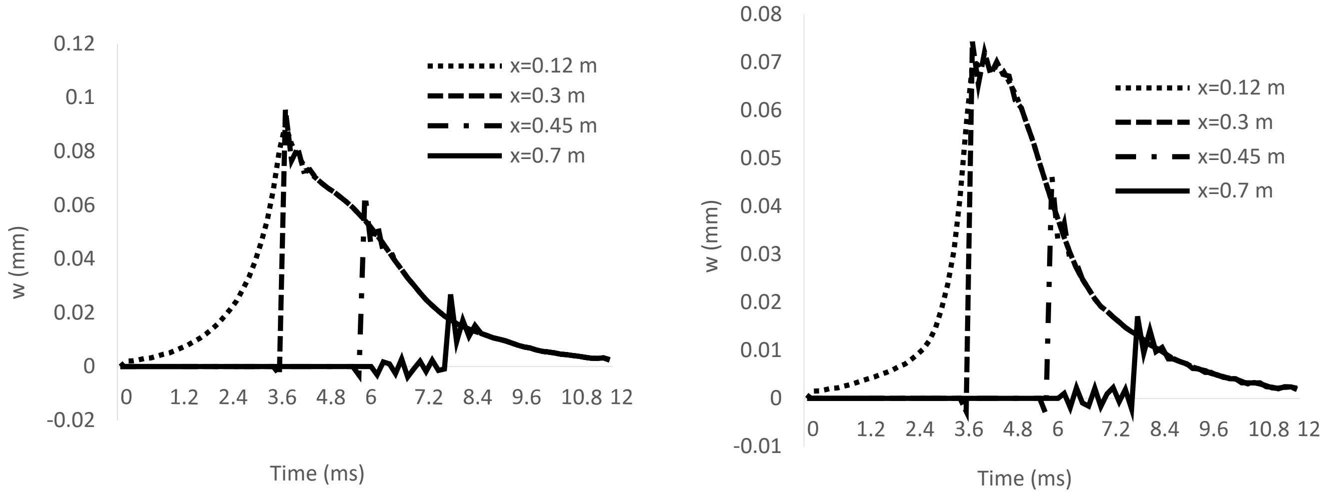


(b) (ب)

(a) (الف)

شکل۸. (الف) مقایسه جابجایی شعاعی مدل $M_۲$ تقویت شده با چهارده تقویت کننده محیطی با پوسته تقویت نشده هم وزن با پوسته تقویت شده (ب) مقایسه جابجایی طولی مدل $M_۳$ تقویت شده با نه تقویت کننده طولی با پوسته تقویت نشده هم وزن با پوسته تقویت شده

Fig. 8. (a) Comparison of radial convection of model M_2 stiffened with fourteen rings with unreinforced shell equal in weight to reinforced shell (b) Comparison of radial convection of model M_3 stiffened with nine stringers with unreinforced shell equal in weight to reinforced shell



(الف) **(a)**   (ب) **(b)**

شکل۹. جابجایی شعاعی استوانه تقویت شده در فواصل مختلف از ابتدای استوانه برای(الف) مدل $M_۲$ (ب) مدل $M_۳$

Fig. 9. Radial convection of a stiffened cylinder with at different distances from the beginning of the cylinder for (a) Model M_2 (b) Model M_3

۵- نتیجه گیری

یک حل تحلیلی برای پاسخ دینامیکی پوسته استوانه تقویت شده تحت فشار داخلی متحرک ارائه شد. نتایج برای مدل‌های فرض شده نشان می‌دهد که :

۱- مشابه نمودار فشار نسبت به زمان شکل ۴ که در لحظه ۴ میلی‌ثانیه بیشترین مقدار را دارد بیشترین جابجایی شعاعی و طولی نیز در این زمان رخ می‌دهد.

۲- با توجه به اینکه بارگذاری حالت شوک دارد در نتیجه بارگذاری بازه وسیعی از فرکانس‌ها را در برداشته و موجب تحریک سازه در فرکانس‌های طبیعی آن می‌شود.

۳- تقویت‌کننده‌های محیطی در کاهش جابجایی‌های شعاعی پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری متحرک داخلی مؤثرند و در جابجایی طولی تأثیر کمی دارند. تقویت‌کننده‌های طولی در جابجایی شعاعی تأثیر کمی دارند و در کاهش جابجایی طولی مؤثرند به طوری که جابجایی شعاعی در نقطه‌ای به فاصله ۰/۱۲ متر از ابتدای استوانه تقویت‌شده مدل $M_۲$ (تقویت شده با چهارده تقویت‌کننده محیطی) نسبت به جابجایی شعاعی پوسته تقویت نشده در همان نقطه ۰/۷۲ برابر شده و جابجایی طولی در نقطه‌ای به فاصله ۰/۱۲ متر از ابتدای استوانه تقویت‌شده مدل $M_۳$ (تقویت شده با نُه تقویت‌کننده طولی) نسبت به جابجایی طولی پوسته تقویت نشده در همان نقطه ۰/۶۸ برابر شده است.

۴- تأثیر تقویت‌کننده‌های محیطی نسبت به افزایش ضخامت در حالتی که پوسته تقویت نشده و پوسته تقویت‌شده با تقویت‌کننده محیطی هم وزن می‌باشند در کاهش جابجایی‌های شعاعی بیشتر می‌باشد و تأثیر تقویت‌کننده‌های طولی نسبت به افزایش ضخامت در حالتی که پوسته تقویت نشده و پوسته تقویت‌شده با تقویت‌کننده طولی هم وزن می‌باشند در کاهش جابجایی‌های طولی بیشتر می‌باشد به‌طوری‌که جابجایی شعاعی در نقطه‌ای به فاصله ۰/۱۲ متر از ابتدای استوانه تقویت‌شده مدل $M_۲$ (تقویت شده با چهارده تقویت‌کننده محیطی) نسبت به جابجایی شعاعی پوسته تقویت‌نشده هم وزن با پوسته تقویت‌شده در همان نقطه ۰/۸۳ برابر می‌باشد و جابجایی طولی در نقطه‌ای به فاصله ۰/۱۲ متر از ابتدای استوانه تقویت‌شده مدل $M_۳$ (تقویت شده با نُه تقویت‌کننده طولی) نسبت به جابجایی طولی پوسته تقویت‌نشده هم‌وزن در همان نقطه ۰/۸۷ برابر می‌باشد.

۵- برای هر نقطه از استوانه تا زمانی که فشار داخلی متحرک به آن نقطه اعمال نشده جابجایی شعاعی تقریباً صفر بوده و به محض رسیدن فشار متحرک به آن نقطه بلافاصله جابجایی شعاعی افزایش یافته و پس از آن از الگوی تغییر شکل نقاط قبلی آن تبعیت می‌کند.

علائم و نمادها

A_{mn}	ثابت شکل مود پوسته در جهت محوری
B_{mn}	ثابت شکل مود پوسته در جهت محیطی
C_{mn}	ثابت شکل مود پوسته در جهت شعاعی
A_r	سطح مقطع تقویت‌کننده محیطی (رینگ)
A_s	سطح مقطع تقویت‌کننده طولی (استرینگر)
E_c	مدول یانگ پوسته
E_r	مدول یانگ تقویت‌کننده محیطی (رینگ)
E_s	مدول یانگ تقویت‌کننده طولی (استرینگر)
G	مدول برشی
I	اینرسی جرمی
J	اینرسی قطبی
$[K]$	ماتریس سختی
$[M]$	ماتریس جرم
$[\Omega]$	ماتریس ضرایب
U_c	انرژی کرنشی پوسته
U_r	انرژی کرنشی پوسته
U_s	انرژی کرنشی پوسته
T_c	انرژی جنبشی پوسته
T_r	انرژی جنبشی تقویت‌کننده‌های محیطی (رینگ)
$\sigma_x, \sigma_\varphi, \sigma_{x\varphi}$	مؤلفه‌های تنش
ω_{mn}	فرکانس‌های طبیعی
$p(t)$	تابع فشار داخلی برحسب زمان
$x_{.}(t)$	تابع موقعیت فشار داخلی در استوانه
$P_{mn}, P_{m.}$	ضرایب فوریه برای فشار داخلی
$a_{n'}$	ضریب فوریه برای تابع زمانی فشار داخلی
$T_{m.}(t)$	پاسخ زمانی
$Z_{m.}$	جرم نُرمالیزه شده
f	ثابت برای تعریف تابع زمانی فشار داخلی
t_s	ثابت برای تعریف تابع زمانی فشار داخلی
$t_{.}$	زمان کلی فشار داخلی متحرک
$\mathrm{a}_{.}$	ثابت برای تعریف تابع موقعیت فشار داخلی
$b_{.}$	ثابت برای تعریف تابع موقعیت فشار داخلی
T_s	انرژی جنبشی تقویت‌کننده‌های طولی (استرینگر)
a	شعاع سطح میانی پوسته
l	طول پوسته استوانه‌ای
l_r	فاصله رینگ‌ها با یکدیگر
l_s	فاصله استرینگرها با یکدیگر
u	جابجایی طولی
v	جابجایی محیطی
w	جابجایی شعاعی
t	ضخامت پوسته
b_r	عرض تقویت‌کننده محیطی (رینگ)
b_s	عرض تقویت‌کننده طولی (استرینگر)
d_r	ارتفاع تقویت‌کننده محیطی (رینگ)
d_s	ارتفاع تقویت‌کننده طولی (استرینگر)
m	تعداد نیم‌موج‌های طولی
n	تعداد نیم‌موج‌های شعاعی
ν	ضریب پواسون
ρ_c	چگالی پوسته
ρ_s	چگالی تقویت‌کننده طولی (استرینگر)
$\varepsilon_x, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_{x\varphi}$	چگالی تقویت‌کننده طولی (استرینگر)

مراجع

[1] Hoppmann WH, Some characteristics of the flexural vibrations of orthogonally stiffened cylindrical shells,

Mechanics,42 (1997) 134-123

[13] Ruotolo R, A comparison of some thin shell theories used for the dynamic analysis of stiffened cylinders, Journal of Sound and Vibration,vol. 5)243) (2001) 860-847,

[14] Zhao X and Liew KM, Vibration of rotating cross-ply laminated circular cylindrical shells with stringer and ring stiffeners, Journal of Solids and Structures 39 (2002), 545-529

[15] Jafari AA and Bagheri M, Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical, experimental and numerical methods, Journal of ThinWalled Structures 44 (2006) 90-89

[16] Bagheri M and Jafari AA, Analytical and experimental modal analysis of nonuniformly ring-stiffened cylindrical shells, Archive of Applied Mechanics, 75 (2006) 191-177

[17] S.M.R. Khalili, R. Azarafza and A. Davar, Transient dynamic response of initially stressed composite circular cylindrical shells under radial impulse load, Journal of Composite Structures, 89 (2009) 284-275

[18] A. Sofiyev, Dynamic response of an FGM cylindrical shell under moving loads, Journal of Composite Structures, 93 (2010) 66-58

[19] Dao Van Dung and Vu Hoai Nam, Nonlinear dynamic analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical thin shells under external pressure and surrounded by an elastic medium, European Journal of Mechanics A/Solids, 2014)46) 53-42

[20] M. Mirzaei, M. T. Asadi and R. Akbari, vibrational behavior of pulse detonation engine tubes, Aerospace Science and Technology,47 (2015) 190-177

[21] yang.j, Xiong,J.,Ma,L., NaFeng,L and YangWang,S.,ZhiWu,L., Modal Response of All-Composite Corrugated Sandwich Cylindrical Shells, Composites Science and Technology, Journal of the Acoustical Society of America, (1958) 30 82-77

[2] Galletly GD, On the in-vacuo vibrations of simply supported, ring-stiffened cylindrical shells, U.S. National Congress of Applied Mechanics (1995) 231-225

[3] Martin M.Mikulas.Jr and McElman, On free vibration of eccentrically stiffened cylindrical shells and plates, NASA Technical Note D-3010 24 (1965)

[4] s.Tang, DynamicResponse of aTube under moving pressure, Preceding of American Society of Civil Engineers, 5 (1965) 122-97

[5] Egle DM and Sewall JL, Analysis of free vibration of orthogonally stiffened cylindrical shells with stiffeners treated as discrete elements, Journal of AIAA, 6 (3) (1968) 526-518

[6] Rasmann. H, Response of a cylindrical shell to an inclined, moving pressure discontinuity (shock wave), Journal of Sound and Vibration, 255-240 (1968) (2) ,8

[7] Dobyns. A. L, Analysis of Simply-Supported Orthotropic Plates Subject to Static and Dynamic Loads, AIAA Journal, vol.650–642 (1981) (5) 19

[8] Shirakawa. K, Dynamic response of a pre-stressed cylindrical shell to a moving load, Journal of Sound and Vibration, 273–263 (1983) (2),90

[9] Cederbaum. G and Heller. R. A, Dynamic deformation of orthotropic cylinders, Journal of Pressure Vessel Technology. Transactions of the ASME,(1989) (2)111 101–97

[10] Mustafa B.A.J and Ali R, An energy method for free vibration analysis of stiffened circular cylindrical shells, Journal of Computers and Structures, 32 (2) (1989) 363-335

[11] Y.S.Lee and K.D. Lee, On the dynamic response of laminated circular cylindrical shells under impulse loads, computers and structures, 157–149 (1997) 63

[12] Wang CM. Swaddiwudhipong and Tian J, Ritz method for vibration analysis of cylindrical shells with ring stiffeners Journal of Engineering

2015)115) 20-9

[22] Duc.N.D and Thang.P.T, Nonlinear Dynamic Response and Vibration of Shear Deformable Imperfect Eccentrically Stiffened S-FGM Circular Cylindrical Shells Surrounded on Elastic Foundations, j.ast, 40 (2015) 127–115

[23] Qina.X.C, Wangb.F.and Gonga.Y.P, Free Vibration Analysis of Isogeometric Curvi Linearly Stiffened Shells, ThinWalled Structures, 116 (2017) 135–124

[24] E.Hasrati,R.Ansari and J. Torabi, A novel numerical solution strategy for solving nonlinear free and forced vibration problems of cylindrical shells, Applied Mathematical Modelling, 32 (2018) -30 45

[25] M Arazm.H Eipakchi and M Ghannad, Vibrational behavior investigation of axially functionally graded cylindrical shells under moving pressure, Acta Mechanica, 3234-3221 (2019) 230

[26] A. Sofiyev,R. Pasha, The forced vibration of infinitely long cylinders reinforced by carbon nanotubes subjected to combined internal and ring-shaped compressive pressures, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 12-1 (2020) 1

[27] H. Ramezani,M. Mirzaei, Transient elastodynamic behavior of cylindrical tubes under moving pressures and different boundary conditions, Applied Mathematical Modeling 949-934 (2020) 77,

[28] H. Eipakchi,F. Mahboubi, Vibrational behavior of composite cylindrical shells with auxetic honeycombs core layer subjected to a moving pressure, Composite Structures, 2020) 254)

پیوست ۱

$$c_1 = at \qquad c_2 = \frac{t^3}{6} \qquad c_3 = \frac{at^3}{12}$$

$$c_4 = \frac{t}{a} \qquad c_5 = \frac{2t}{a} \qquad c_6 = \left[Ln\left(\frac{a+\frac{t}{2}}{a-\frac{t}{2}} \right) - ta \right]$$

$$c_7 = \left[Ln\left(\frac{a-\frac{t}{2}}{a+\frac{t}{2}} \right) + t \right] \qquad c_8 = \left[Ln\left(\frac{a+\frac{t}{2}}{a-\frac{t}{2}} \right) \right] \qquad c_9 = 2\nu t$$

$$c_{10} = 2\nu t \qquad c_{11} = \frac{t^3}{6a} \qquad c_{12} = \frac{t^3}{6a}$$

$$c_{13} = \frac{(1-\nu)}{2}\left(at + \frac{t^3}{4a} \right) \qquad c_{14} = \frac{(1-\nu)}{24a}t^3 \qquad c_{15} = \frac{(1-\nu)}{6a}t^3$$

$$c_{16} = (1-\nu)t \qquad c_{17} = \frac{(1-\nu)}{6a}t^3 \qquad c_{18} = \frac{(1-\nu)}{6a}t^3$$

$$c_{19} = \frac{(1-\nu)}{2}\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{a+\frac{t}{2}}{a-\frac{t}{2}} \right) \right] \qquad c_{20} = (1-\nu)\left[aLn\left(\frac{a-\frac{t}{2}}{a+\frac{t}{2}} \right) + t \right] \qquad c_{21} = \frac{(1-\nu)}{2l}\left[a^2 Ln\left(\frac{a+\frac{t}{2}}{a-\frac{t}{2}} \right) - ta \right]$$

$c_{22}=\left(\frac{A_r}{a}+\frac{I_r^1}{a^2}\right)\frac{E_r}{2l_r}$ $\quad c_{23}=\frac{f_7E_r}{2a^2l_r}$ $\quad c_{24}=\frac{I_{zr}^2E_r}{2a^3l_r}$

$c_{25}=\frac{E_rf_5}{2l_r}$ $\quad c_{26}=\frac{E_rA_r}{al_r}$ $\quad c_{27}=\frac{E_rI_r^1}{a^2l_r}$

$c_{28}=\frac{E_rf_6}{al_r}$ $\quad c_{29}=\frac{G_rJ_r}{2al_r}$ $\quad c_{30}=\frac{E_sA_s}{2l_s}$

$c_{31}=\frac{E_sI_{zs}^2}{2l_s}$ $\quad c_{32}=\frac{E_sI_s^2}{2l_s}$ $\quad c_{33}=\frac{E_sI_s^1}{l_s}$

$c_{34}=\frac{G_sJ_s}{2a^2l_s}$

$f_5=\int_d\frac{b_r}{a+z}\,dz$ $\quad f_6=\int_d\frac{b_r}{a+z}\,zdz$ $\quad f_7=\int_d\frac{b_r}{a+z}z^2\,dz$

$I_{r,s}^1=\int_d b_{r,s}\;zdz$ $\quad I_{r,s}^2=\int_d b_{r,s}\;z^2\,dz$ $\quad I_{r,s}^3=\int_d b_{r,s}\;z^3\,dz$

$I_{zs}^2=\int_b d_s\;y^2\,dy$ $\quad I_{zr}^2=\int_b d_r\;x^2\,dx$

$h_1=\frac{at\rho}{2}$ $\quad h_2=\frac{at^3\rho}{24}$ $\quad h_3=\frac{t^3\rho}{12}$

$h_4=\frac{t^3\rho}{8a}+\frac{at\rho}{2}$ $\quad h_5=\frac{t^3\rho}{24a}$ $\quad h_6=\frac{t^3\rho}{6a}$

$h_7=\frac{at\rho}{2}$ $\quad h_8=\frac{aA_r\rho}{2l_r}+\frac{I_r^1\rho}{2l_r}$ $\quad h_9=\frac{aI_r^2\rho}{2l_r}+\frac{I_r^3\rho}{2l_r}$

$h_{10}=\frac{aI_r^1\rho}{l_r}+\frac{I_r^2\rho}{2l_r}$ $\quad h_{11}=\frac{aA_r\rho}{2l_r}+\frac{3I_r^1\rho}{2l_r}+\frac{3I_r^2\rho}{2al_r}+\frac{I_r^3\rho}{2a^2l_r}$ $\quad h_{12}=\frac{I_r^2\rho}{2l_r}+\frac{I_r^3\rho}{2a^2l_r}$

$h_{14}=\frac{I_r^1\rho}{l_r}+\frac{I_r^3\rho}{a^2l_r}+\frac{2I_r^2\rho}{al_r}$ $\quad h_{15}=\frac{aA_r\rho}{2l_r}+\frac{I_r^1\rho}{2l_r}$ $\quad h_{16}=\frac{A_s\rho}{2l_s}$

$h_{17}=\frac{I_s^2\rho}{2l_s}$ $\quad h_{18}=\frac{I_{zs}^2\rho}{2l_s}$ $\quad h_{19}=\frac{I_s^1\rho}{l_s}$

$h_{20}=\frac{A_s\rho}{2l_s}+\frac{I_s^2\rho}{2a^2l_s}+\frac{I_s^1\rho}{al_s}$ $\quad h_{21}=\frac{I_s^2\rho}{2a^2l_s}$ $\quad h_{22}=\frac{I_s^2\rho}{a^2l_s}+\frac{I_s^1\rho}{al_s}$

$h_{23}=\frac{A_s\rho}{2l_s}$

پیوست ۲

$$k_{11}=2(c_1\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+c_{19}(n)^2+c_{24}(n)^4+c_{30}\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)^2)$$

$$k_{12}=c_9\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)(n)+c_{16}\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)(n)$$

$$k_{13}=c_2\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)^3+c_{10}\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)+a_{20}\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)(\mathrm{n})^2+c_{33}\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)^3$$

$$k_{22}=-2(c_4(\mathrm{n})^2+c_{13}\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)^2(n)+c_{22}(\mathrm{n})^2$$
$$+c_{31}\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)^4)$$

$$k_{23}=c_5(n)+c_{15}\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)^2(n)+a_{17}\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)^2(n)$$
$$+c_{26}(n)+c_{22}(\mathrm{n})^3$$

$$k_{33}=-2[c_3\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)^4+c_6(\mathrm{n})^4+c_7(\mathrm{n})^2+c_8+(c_{12}$$
$$+a_{14}+c_{29}+c_{34}+a_{18}+a_{21})\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)^2(\mathrm{n})^2+c_{23}(\mathrm{n})^4+c_{25}+c_{28}(\mathrm{n})^2+c_{32}\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)^4]$$

$$M_{11}=-2(h_1+h_8+h_{16})-2h_{13}(\mathrm{n})^2$$

$$M_{12}=0$$

$$M_{13}=(h_3+h_{10}+h_{19})\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)$$

$$M_{22}=-2(h_4+h_{11}+h_{20})-2h_{18}\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)^2$$

$$M_{23}=-(h_6+h_{14}+h_{22})(n)$$

$$M_{33}=-2[(h_2+h_9+h_{17})\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\right)^2+(h_7+h_{12}$$
$$+h_{21})+(h_{16}+h_{20}+h_{22})(\mathrm{n})^2]$$

پیوست ۳

$$Z_{m0}=\left[2(h_1+h_8+h_{16})\right]A_{m0}{}^2-\left[2(h_3+h_{10}+h_{19})\right]+[[2(h_2+h_9+h_{17})(m\pi/l)^2\right]$$
$$+\left[2(h_7+h_{15}+h_{23})\right]]C_{m0}{}^2]$$

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

R. Arab, H. lexian, Free and Forced Vibration Analysis of Stiffened Cylindrical Shells under Moving Internal Pressure, Amirkabir J. Mech Eng., 53(12) (2022) 5867-5886.

DOI: 10.22060/mej.2021.19846.7138