



مدلسازی و تحلیل فلاتر یک بال جعبه‌ای سه بعدی با استفاده از مدل آیرودینامیک ناپایای واگنر

امیرحسین قاسمی کرم^۱، عباس مزیدی^{۱*}، سید احمد فاضل‌زاده حقیقی^۲

^۱ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

^۲ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۶

بازنگری: ۱۴۰۰/۰۶/۲۲

پذیرش: ۱۴۰۰/۰۷/۱۷

ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۸/۱۷

کلمات کلیدی:

فلاتر

بال جعبه‌ای

مدل ناپایای واگنر

خلاصه: تاکنون مدلسازی و تحلیل آیروالاستیک بال جعبه‌ای یا به صورت دوبعدی انجام گرفته و یا با صرف زمان و هزینه زیاد در نرم‌افزارهای تخصصی صورت گرفته است. در این مقاله سعی شده تا با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی، رفتار آیروالاستیک یک نمونه بال جعبه‌ای سه بعدی مدلسازی و تحلیل گردد. به منظور مدلسازی اثر بالچه از دو فنر طولی و پیچشی که انتهای آنها بر روی محور الاستیک بال‌ها قرار گرفته، استفاده شده است. استخراج معادلات حرکت و مدلسازی نیروهای آیرودینامیکی به ترتیب با استفاده از اصل هامیلتون و مدل ناپایای واگنر انجام شده است. جهت تبدیل معادلات حاکم دیفرانسیل پاره‌ای-انتگرالی به یک مجموعه معادله دیفرانسیل معمولی، از تکنیک‌های ریاضی و روش مودهای فرضی بهره برده شده است. اعتبارسنجی حل معادلات با مقایسه نتایج حل عددی و نتایج خروجی از نرم‌افزار نسترن انجام شده است. اثرات تغییر پارامترهای طراحی نظیر زاویه عقبگرد، میزان صلیبیت بالچه و طول وتر بال‌ها بر فلاتر بال مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش همزمان زاویه عقبگرد در بال جلو و عقب باعث افزایش پایداری سیستم می‌شود. همچنین افزایش سفتی پیچشی بالچه موجب افزایش سرعت فلاتر می‌شود در حالی که افزایش سفتی طولی آن باعث کاهش سرعت فلاتر می‌گردد.

۱- مقدمه

جعبه‌ای مطالعه نموده‌اند که این مطالعات منجر به معرفی و طراحی ساختارهای مختلف شده است. عمده این تحقیقات در راستای طراحی مفهومی و طراحی پایه این نوع بال‌ها انجام شده است [۱]. از جمله تحقیقات جامعی که در سالهای اخیر در خصوص طراحی بال جعبه‌ای انجام شده است، می‌توان به مطالعات فردیانی و همکاران^۱ [۲] اشاره نمود. این مطالعات عمدتاً به منظور امکان‌سنجی و پیاده‌سازی برخی ایده‌های نو در بال‌های جعبه‌ای صورت گرفته است. به عنوان نمونه می‌توان به طراحی بال جعبه‌ای با استفاده از آلیاژهای بسیار سبک و بهینه‌سازی آن اشاره نمود. آن‌ها در تحقیقات خود به معرفی برخی کاربردهای ممکن جهت استفاده از بال‌های جعبه‌ای در هواپیماهای غیرنظامی و مسائل زیست محیطی آن پرداخته‌اند. در زمینه روش‌های تخمین وزن بال‌های جعبه‌ای و مقایسه آنها با مدل‌های واقعی،

بال جعبه‌ای یکی از انواع بال‌های غیرصفحه‌ای و خلاقانه محسوب می‌شود که طراحان به منظور کاهش هزینه‌های پرواز، توجه ویژه‌ای به آن داشته‌اند. مطالعات اولیه در خصوص بال‌های جعبه‌ای توسط پرانتل در سال ۱۹۱۸ انجام شد. وی این نوع بال را به عنوان بهترین ساختار جهت کاهش دراگ القایی معرفی نمود. کاهش ضریب دراگ القایی خود عامل ایجاد برخی ویژگی‌های دیگر نظیر کاهش ابعاد هندسی بال و کاهش مصرف سوخت می‌شود. کاهش ابعاد هندسی بال می‌تواند اجازه نشست و برخاست هواپیماهای با تعداد مسافر بیشتر را در باند فرودگاه‌های کوچک فراهم نموده و مشکلات ترافیکی این فرودگاه‌ها را به میزان قابل توجه‌ای کاهش دهد. از این‌رو در سالهای اخیر، محققان زیادی پیرامون بال‌های

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: Amazidi@yazd.ac.ir

1 Frediani et al.



آیروالاستیسیته خطی بال‌های پراتنل (به عنوان یک زیر مجموعه از بال‌های غیرصفحه‌ای) را ارائه کرده‌اند. آن‌ها جهت تحلیل فلاتر بال از نرم‌افزار نستر استفاده نموده و خواص فیزیکی و هندسی آن را در نرم‌افزار با استفاده از المانهای یک‌بعدی و اجرام متمرکز پیاده‌سازی کرده‌اند. دورهام و ریکتز^۸ [۱۱] در یافته‌های خود مشاهده کردند که ساختار خاصی از بال جعبه‌ای می‌تواند سرعت فلاتر بالاتری نسبت به ساختارهایی با نسبت منطری بالا داشته باشد و آنها این ادعای خود را با استفاده از نتایج تونل باد اثبات نمودند. لی^۹ [۱۲] با استفاده از یک سیستم بهینه‌سازی خودکار^{۱۰}، طراحی سازه‌ای-آیرودینامیکی یک بال جعبه‌ای را انجام داد. او در تحقیق خود اثرات قیدهای آیروالاستیک بر روی جرم بال جعبه‌ای کامپوزیت و آیروتروپیک را با استفاده از این سیستم مورد بررسی قرار داد. وان‌آکن^{۱۱} [۱۳] امکان‌سنجی استفاده از یک سیستم کنترلی فعال جهت به تأخیر انداختن پدیده فلاتر را بررسی نمود و تحلیل فلاتر وی نشان داد که کنترل فعال می‌تواند مرز فلاتر یک بال جعبه‌ای با یک موتور ملخی^{۱۲} را گسترش دهد. کاولارو و همکاران^{۱۳} [۱۴] تحلیل رفتار بال جعبه‌ای در زمان وقوع فلاتر و پس از آن را برای یک هواپیما پراتنل با قابلیت ظرفیت ۲۵۰ مسافر را با استفاده از نرم‌افزار نستر انجام دادند. جهت انجام آنالیز فوق، مدل سازه‌ای استفاده شده در نرم‌افزار بوسیله یک سری المان‌های یک‌بعدی و اجرام متمرکز قرار گرفته در وسط و دو انتهای المان‌ها مدل‌سازی شده است. نتایج این تحقیق نشان داد که مطالعه حاضر یک گام ابتدایی جهت آنالیز جامع پرواز آزاد بال پراتنل محسوب می‌شود. فاضل‌زاده و همکاران [۱۵] بال جعبه‌ای دو بعدی را مدل‌سازی نموده و مشخصه‌های فلاتر آن را مورد بررسی قرار دادند. آنها خاصیت الاستیک خمشی و پیچشی هر بال را با استفاده از دو فنر خطی طولی و پیچشی، و همچنین اتصال بالچه را نیز با استفاده از یک فنر خطی طولی مدل‌سازی نمودند. آن‌ها اثر پارامترهای طراحی نظیر صلبیت خمشی بال، نسبت طول بال جلویی به بال عقب، ارتفاع پروازی هواپیما و طول وتر ایرفویل را بر فلاتر بال جعبه‌ای بررسی کردند. ساکتی و همکاران^{۱۴} [۱۶] یک تکنیک جهت کنترل فعال

مطالعه‌ای توسط آجاج^۱ و همکاران [۳] انجام گرفته است. دماسی و همکاران^۲ [۴] در مطالعه خود به تحلیل و بررسی اثر برهمکنش تغییر شکل خمشی و پیچشی بال‌های جلو و عقب بر رفتار پسا بحرانی بال جعبه‌ای پرداخته‌اند. تعیین اثر اندازه و الزامات موجود بر بهینه‌سازی طراحی ساختارهای مختلف بال جعبه‌ای توسط جانسن و پرز [۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج این تحقیق نشان داد که عوامل یاد شده می‌توانند اثر قابل ملاحظه‌ای بر طراحی بال‌های جعبه‌ای داشته باشد. یکی از طرح‌های کامل بال جعبه‌ای توسط شیکتانز^۳ [۶] ارائه شده است. این نوع بال جعبه‌ای جهت استفاده بر روی هواپیما مسافری با ظرفیت ۲۵۰ سرنشین طراحی شده و هندسه و ابعاد این بال جعبه‌ای مشابه بال هواپیمای ایرباس ۳۲۰ (به عنوان نمونه مرجع) طراحی شده است. او در تحقیق خود موارد متنوعی نظیر توزیع نیروی لیفت، زاویه عقبگرد در بال‌های جلو و عقب، تخمین جرم بال‌ها، اثر نیروهای برشی و ممان خمشی در انواع اتصالات در سازه بال، سطوح کنترلی روی بال‌ها، محل قرارگیری موتور هواپیما روی بال جعبه‌ای، کارایی آیرودینامیکی، پایداری طولی استاتیکی و اراهه فرود هواپیما را مورد بررسی قرار داد. اسکاردائونی و همکاران^۴ [۷] اخیراً طراحی یک بال جعبه‌ای سبک را با استفاده از برنامه نویسی غیرخطی مقید^۵ انجام داده‌اند. در این مطالعه، روش مزبور با استفاده از یک رویکرد بهینه‌سازی چندگانه صورت گرفته و میزان کارایی آن نیز بر روی بال جعبه‌ای پراتنل نشان داده شده است. همچنین این محققین اظهار نموده‌اند که استراتژی فوق به آسانی قابلیت پیاده‌سازی بر روی بال هواپیماهای متداول نیز می‌باشد.

به واسطه اهمیت فراوان و اثر پدیده‌های آیروالاستیک بر طراحی بال‌ها، در سالهای اخیر تحقیقاتی در خصوص آیروالاستیسیته بال‌های جعبه‌ای توسط محققان انجام گرفته که عمده این تحقیقات توسط نرم‌افزارهای تخصصی نظیر نرم‌افزار نستر^۶ انجام شده است [۸]. همچنین مطالعات موثری نیز در خصوص ساخت مدل‌هایی از بال‌های غیرصفحه‌ای با هدف انجام آزمایشات آیروالاستیک تجربی صورت پذیرفته است [۹]. بُمباردیری و همکاران^۷ [۱۰] تحلیل

8 Durham and Ricketts

9 Lee

10 Automated STRuctural Optimization System (ASTROS)

11 Van Aken

12 Tilt-rotor whirl

13 Cavallaro et al.

14 Sacchetti et al.

1 Ajaj et al.

2 Demasi et al.

3 Schiktanz

4 Scardaoni et al.

5 Constrained non-linear programming problem (CNLPP)

6 MSC NASTRAN

7 Bombardieri et al.

۲- مدل‌سازی و استخراج معادلات حاکم

یک بال جعبه‌ای می‌تواند ساختارهای مختلفی داشته باشد و هر یک از بال‌های جلو و عقب بنابر نظر طراح می‌تواند دارای زوایای عقب‌گرد و پایین‌گرد^۴ مثبت یا منفی باشد. علاوه بر این، بالچه نیز به نوبه خود می‌تواند از دو قسمت بالایی و پایینی^۵ (با زاویه عمودی مثبت و منفی) تشکیل گردد که در نقطه وسط به یکدیگر متصل شده‌اند. وجود هر یک از این مشخصه‌های فوق می‌تواند به پیچیدگی مدل‌سازی و تحلیل فلاتر بال جعبه‌ای اضافه کند. این مشخصه‌ها از دیدگاه آیرودینامیک حائز اهمیت بوده و ضروری است که میزان تأثیرگذاری آنها بر رفتار آیرودینامیک بال جعبه‌ای مورد مطالعه قرار گیرد. یکی از متداول‌ترین ساختارهای بال جعبه‌ای که تاکنون نسبت به دیگر ساختارها توجه بیشتری بدان شده، مطابق شکل ۱ می‌باشد. به دلیل پیچیده بودن هندسه بال جعبه‌ای، در این تحقیق از چندین دستگاه مختصات واسط جهت استخراج معادلات حرکت استفاده شده است. می‌توان با استفاده از انتقال بین این دستگاه‌های مختصات واسط، رابطه میان آنها را که تابعی از زوایای عقب‌گرد و زاویه پایین‌گرد و همچنین تغییر شکل خمشی و پیچشی بال بوده را بدست آورد. شکل ۱ نمایی از این دستگاه‌های مختصات واسط را میان بال جلو و عقب و همچنین دستگاه مختصات مرجع (که روی مرکز جرم بدنه هواپیما قرار دارد) به خوبی نشان می‌دهد.

در شکل فوق زیرنویس‌های f ، r و θ به ترتیب مربوط به بدنه، بال جلو و بال عقب بوده و پارامترهای $C.G$ ، A_f و A_r نیز به ترتیب مرکز ثقل بدنه هواپیما و زوایای عقب‌گرد بال‌های جلو و عقب حول محورهای Z_f و Z_r می‌باشند. دستگاه‌های مختصات واسط $(XYZ)_f$ و $(XYZ)_r$ به ترتیب دستگاه مختصات قرار گرفته روی ریشه بال‌های جلو و عقب بدون زاویه عقب‌گرد بوده و دستگاه مختصات (XYZ) نیز دستگاه مختصات اصلی بوده که روی مرکز جرم بدنه هواپیما قرار گرفته است. همچنین بردارهای \vec{R}_f و \vec{R}_r به ترتیب بردارهای اتصال ریشه بال‌های جلو و عقب به مرکز جرم هواپیما می‌باشند. با توجه به وجود زوایای عقب‌گرد و بالاگرد (زاویه رو به بالا حول محور Y که در مطالعه حاضر فقط برای بال جلو تعریف شده و با نماد Γ_f نشان داده می‌شود)، لازم است که دستگاه‌های مختصات واسط دیگری مطابق شکل ۲-الف برای بال‌های جلو و عقب قبل از تغییر شکل آنها تعریف

فلاتر بال پرناتل را معرفی نمودند. تحلیل فلاتر مدل المان محدود بال با استفاده از آنالیز مودال (جهت استخراج فرکانس‌های طبیعی بال) و تئوری دابلت-لاتیس^۱ (جهت اعمال بارهای آیرودینامیکی) انجام گرفته است. در این تحقیق فلاتر بال جعبه‌ای با استفاده از سطوح کنترلی قرار گرفته روی بال جلو کنترل شده و یک الگوریتم کنترل بهینه نیز ارائه شده است. علاوه بر مطالعاتی که بدان اشاره شد در سال ۲۰۲۰ پروژه‌ای با عنوان پارسیفال^۲ توسط برخی از ارگان‌ها^۳ شروع شده است که هدف آن بررسی پدیده‌های آیرودینامیک استاتیکی و دینامیکی بال‌های جعبه‌ای می‌باشد [۱۷]. به تازگی تحقیقی از مبادریری و همکاران [۱۸] ارائه شده است که در آن بررسی پاسخ کوپل آیرودینامیک و دینامیک پرواز هواپیما پرناتل به عنوان یک چالش جدید در این نوع ساختارها معرفی شده است. آن‌ها جهت اعمال نیروهای آیرودینامیکی از یک روش دابلت-لاتیس ارتقا یافته در نرم‌افزار نسترن استفاده نموده‌اند؛ زیرا در این روش، ترم‌هایی که عموماً در فرمولاسیون کلاسیک صرفه‌نظر می‌شوند در محاسبات در نظر گرفته می‌شود.

همانطور که در مرور کارهای گذشته دیده شد، تاکنون فعالیتی در مورد مدل‌سازی و شبیه‌سازی آیرودینامیک بال‌های جعبه‌ای سه بعدی صورت نپذیرفته است و با توجه به پیچیدگی هندسی، فعالیت‌های مرتبط با تحلیل آیرودینامیک این دسته از بال‌ها با استفاده از مدل‌های بسیار ساده دوبعدی، نرم‌افزارهای تجاری و یا آزمایشات تونل باد انجام شده است. در این تحقیق، مدل‌سازی و تحلیل آیرودینامیک یک بال جعبه‌ای سه بعدی بطور کامل انجام شده است. جهت شبیه‌سازی از خصوصیات یکی از متداول‌ترین ساختارهای بال جعبه‌ای که بر پایه بال هواپیمای ایرباس ۳۲۰ طراحی شده است و در سال‌های اخیر مورد توجه سازندگانی چون کمپانی ایرباس قرار گرفته، استفاده شده است. از خصوصیات منحصر به فرد این تحقیق در مقایسه با پژوهش‌های پیشین می‌توان به در نظر گرفتن مدل تیر اویلر-برنولی برای بال‌های عقب و جلو به جای مدل دو بعدی مقطع بال، مدل‌سازی بال جعبه‌ای بصورت دو تیر متصل به هم و لحاظ کردن سفتی خمشی و پیچشی بالچه متصل‌کننده بال عقب به جلو در مدل‌سازی و تحلیل آیرودینامیک اشاره نمود.

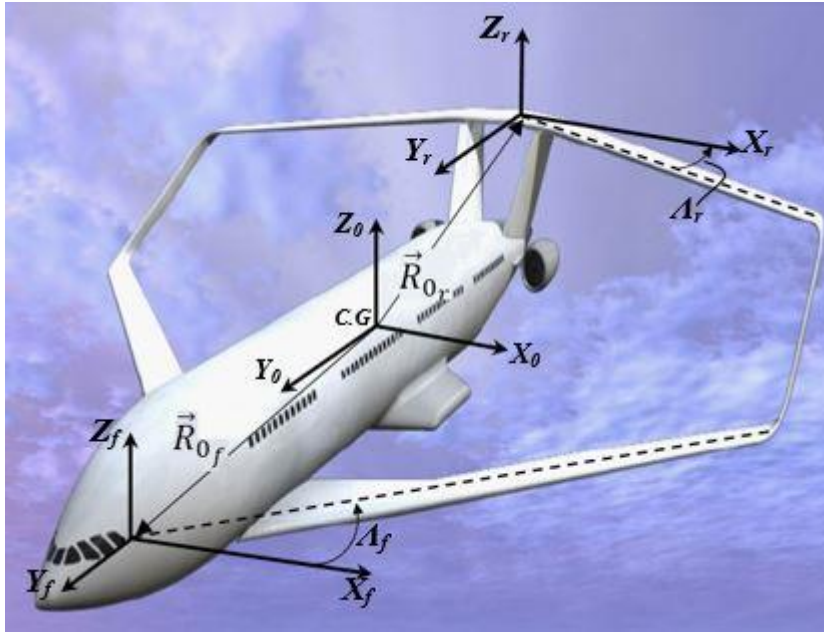
1 Doublet-Lattice

2 PARSIFAL

3 Community Research and Development Information Service (CORIDS), Innovation and Networks Executive Agency (INEA)

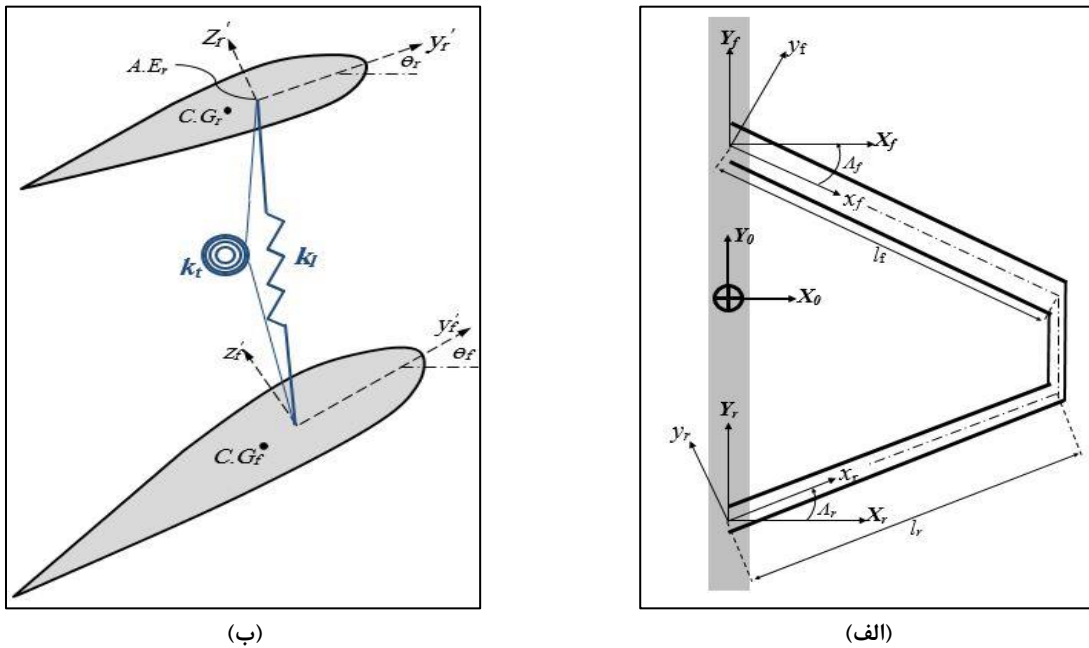
4 Dihedral and sweep angles

5 Upper and Lower winglet



شکل ۱. دستگاه‌های مختصات واسط در مدل‌سازی بال جعبه‌ای

Fig. 1. The intermediate coordinate systems in box-wing modeling



شکل ۲. (الف) دستگاه‌های مختصات بال جعبه‌ای قبل از تغییر شکل (ب) نمایی از مقطع بال‌های جلو و عقب بعد از تغییر شکل

Fig. 2. (a) The coordinate systems of box-wing before deformation (b) A schematic of front and rear wings section after deformation

مختصات دیگری نیز تعریف نمود که بدین منظور از دو دستگاه مختصات دیگر $(x' y' z')$ و $(x'' y'' z'')$ که به ترتیب منطبق بر سطح مقطع بال‌های جلو و عقب بعد از تغییر شکل بال بوده، استفاده می‌گردد. لازم به ذکر است تغییر شکل هر کدام از بال‌ها در راستای محورهای x ، y و z به ترتیب با u ، v و w بیان می‌شود. علاوه بر آن

نمود. در شکل ۲، دستگاه‌های مختصات واسط $(xyz)_r$ و $(xyz)_f$ به ترتیب دستگاه مختصات قرار گرفته روی بال‌های جلو و عقب، قبل از تغییر شکل و با زاویه عقبگرد و بالاگرد می‌باشند. از آنجاییکه هر کدام از بال‌های جلو و عقب دارای تغییر شکل خمشی و پیچشی بوده لذا بایستی علاوه بر دستگاه‌های مختصات تعریف شده قبلی، دستگاه‌های

$$\vec{R}_r = -R_{y_r} \hat{J}_r + R_{z_r} \hat{K}_r + x_{1r} \hat{i}_r + y_{1r} \hat{j}_r + z_{1r} \hat{k}_r \quad (4)$$

بردارهای ijk و IJK به ترتیب بردارهای یکه دستگاه‌های مختصات xyz و XYZ بوده و پارامترهای R_z و R_y نیز به ترتیب فواصل مرکز جرم بدنه هواپیما از ریشه بال در راستای محورهای y و z می‌باشد. همچنین در روابط فوق، فواصل یک نقطه دلخواه بال بدون تغییر شکل از ریشه بال با پارامترهای x_1, y_1, z_1 نشان داده شده که در مرجع [۱۹] ذکر شده است. انرژی کرنشی کل بال جعبه‌ای شامل انرژی بال جلو و عقب بوده که تغییرات آن را می‌توان به صورت زیر نشان داد.

$$\delta U_t = \int_0^{l_f} \{V_{x_f} w'_f \delta w'_f + (S_{x_f} + T_{x_f}) \delta \theta'_f + [M_{z_f} \cos \theta_f + M_{y_f} \sin \theta_f] w''_f \delta \theta_f + [M_{z_f} \sin \theta_f - M_{y_f} \cos \theta_f] \delta w''_f\} dx_f + \int_0^{l_r} \{V_{x_r} w'_r \delta w'_r + (S_{x_r} + T_{x_r}) \delta \theta'_r + [M_{z_r} \cos \theta_r + M_{y_r} \sin \theta_r] w''_r \delta \theta_r + [M_{z_r} \sin \theta_r - M_{y_r} \cos \theta_r] \delta w''_r\} dx_r \quad (5)$$

که ضرایب $M_{z'}, T_{x'}, S_{x'}, V_{x'}$ و $M_{y'}, T_{x'}, S_{x'}, V_{x'}$ برای بال‌های جلو و عقب مطابق روابط ذیل می‌باشند.

$$\begin{aligned} V_{x'} &= \left\{ EA \left[w'^2 / 2 - x_\theta w'' \sin \theta \right] \right\}_{(f,r)} \\ S_{x'} &= \left\{ GJ \theta' \right\}_{(f,r)} \\ T_{x'} &= \left\{ EA r_a^2 \theta' \frac{w'^2}{2} \right\}_{(f,r)} \\ M_{y'} &= \left\{ -EI_y w'' \cos \theta \right\}_{(f,r)} \\ M_{z'} &= \left\{ EI_z w'' \sin \theta - EA e_a \frac{w'^2}{2} \right\}_{(f,r)} \end{aligned} \quad (6)$$

در روابط فوق، پارامترهای $x_\theta, r_a, e_a, G, E, I, J$ به ترتیب فاصله بین مرکز جرم و محور الاستیک سطح مقطع بال، شعاع ژیراسیون سطح مقطع بال، فاصله بین محور کششی و محور الاستیک بال، مدول یانگ، مدول برشی و همچنین ممان اینرسی و ممان اینرسی قطبی سطح مقطع بال می‌باشند. همانطور که بدان اشاره شد، در این مقاله اثر بالچه در معادلات به صورت دو فنر خطی طولی و پیچشی در نظر گرفته شده است. از این رو تغییرات انرژی ذخیره شده در این فنرها به صورت زیر می‌باشد.

بال در راستای محور x دارای یک پیچش نیز بوده که مطابق شکل ۲-ب، با θ نشان داده می‌شود. جهت محاسبه تغییرات انرژی جنبشی بال‌های جلو و عقب لازم است که بردار یک نقطه دلخواه از بال‌ها را بر حسب مختصات بال مربوطه بیان نمود. از این رو بایستی ارتباط بین دستگاه‌های مختصات واسط را تعیین کرد. ارتباط مابین دستگاه‌های مختصات $(xyz)_f$ و $(xyz)_r$ با توجه به وجود زوایای بالاگرد و عقبگرد (A_r, A_f, Γ_f) در بال‌های جلو و عقب قابل استخراج می‌باشد. همچنین تبدیل بین دستگاه‌های مختصات $(xyz)_f$ و $(x'y'z')$ و همچنین دستگاه‌های مختصات $(xyz)_r$ و $(x'y'z')$ نیز در مرجع [۱۹] آورده شده است.

استخراج معادلات حاکم مطابق اصل تغییرات هامیلتون به صورت معادله (۱) بیان می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} [-\delta T_t + \delta U_t + \delta U_k - \delta W_{nct}] dt = 0 \quad (1)$$

که در رابطه فوق جمله‌های $\delta T_t, \delta U_t, \delta U_k$ و δW_{nct} به ترتیب تغییرات انرژی جنبشی کل شامل بال‌ها، تغییرات انرژی کرنشی کل بال، تغییرات انرژی پتانسیل بالچه شامل دو فنر خطی طولی و پیچشی و همچنین تغییرات کار نیروهای ناپایستار می‌باشند. تغییرات انرژی جنبشی کل بال‌های جلو و عقب به صورت رابطه زیر بیان می‌شود.

$$\delta T_{tw} = -\int_0^{l_f} \rho_f \vec{R}_f \cdot \delta \vec{R}_f dA_f dx_f - \int_0^{l_r} \rho_r \vec{R}_r \cdot \delta \vec{R}_r dA_r dx_r \quad (2)$$

که در رابطه بالا پارامترهای ρ_r و ρ_f به ترتیب دانسیته بال‌های جلو و عقب، A_f و A_r به ترتیب سطح مقطع بال‌های جلو و عقب و بردارهای \vec{R}_r و \vec{R}_f نیز به ترتیب بردار موقعیت یک نقطه دلخواه از بال‌های جلو و عقب می‌باشند که مطابق معادلات (۳) و (۴) بدست می‌آیند. همچنین l_f و l_r به ترتیب طول بال‌های جلو و عقب بوده که مطابق شکل ۲، از ریشه بال شروع شده و تا محل اتصال بالچه به بال ادامه دارد.

$$\vec{R}_f = R_{y_f} \hat{J}_f - R_{z_f} \hat{K}_f + x_{1f} \hat{i}_f + y_{1f} \hat{j}_f + z_{1f} \hat{k}_f \quad (3)$$

$$m_r \ddot{w}_r + m_r x_{\theta} \ddot{\theta}_r + (EI)_r w^{(4)}_r + \int_0^{l_f} \{k_t a_{31} \dot{w}_r [\delta_D(x_r - l_r)]^3 \delta_D(x_r - l_r) + k_t a_{33} \dot{w}_r [\delta_D(x_r - l_r)]^2 \delta_D(x_r - l_r) - k_t a_{33} \dot{w}_r [\delta_D(x_r - l_r)]^2 [\delta_D(x_r - l_r)]^2\} dx_r + \{M_{w_r} \ddot{w}_r - I_{w_r} \sin^2 \Lambda \dot{w}_r'' - I_{w_r} \sin \Lambda \cos \Lambda \dot{\theta}_r''\} \delta_D(x_r - l_r) = L_r \quad (11)$$

$$I_r \ddot{\theta}_r + m_r x_{\theta} \ddot{w}_r - (GJ)_r \theta_r'' + \int_0^{l_f} \{-k_t a_{11} \theta_r [\delta_D(x_r - l_r)]^2 [\delta_D(x_r - l_r)]^2 - k_t (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \theta_r [\delta_D(x_r - l_r)]^3 \delta_D(x_r - l_r)\} dx_r + \{I_{w_r} \cos^2 \Lambda \ddot{\theta}_r + I_{w_r} \sin \Lambda \cos \Lambda \dot{w}_r''\} \delta_D(x_r - l_r) = M_r \quad (12)$$

شایان ذکر است با توجه به پیچیدگی هندسه و دینامیک مسئله، معادلات حاکم فوق با در نظر گرفتن فرضیاتی نظیر ناچیز بودن ارتعاشات طولی (u) و عرضی (v) بال‌های جلو و عقب، در نظر گرفتن جرم بالچه به صورت دو جرم متمرکز با خواص (m_{wf} و I_{wf}) و (m_{wr} و I_{wr}) در انتهای بال‌های جلو و عقب، ثابت بودن سطح مقطع بال‌های جلو و عقب و همچنین همگن بودن خواص مربوط به سفتی خمشی و پیچشی و نادیده گرفتن اثر اعوجاج بال‌ها استخراج شده‌اند.

۳- مدل اصلاح شده ناپایا بر پایه تابع واگنر

در این مقاله جهت اعمال اثر نیروها و ممان‌های آیرودینامیکی از مدل ناپایا تابع واگنر استفاده شده است. به دلیل وجود زاویه عقبگرد بال و همچنین بسط مدل دوبعدی به سه‌بعدی، مدل آیرودینامیکی ناپایا بر پایه تابع واگنر نیازمند برخی اصلاحات بوده که مطابق ذیل می‌باشد [۲۰]:

$$\begin{aligned} (\dot{w} + U_{\infty} \theta) &\rightarrow (\dot{w} + U_{\infty} \cos \Lambda \theta + U_{\infty} \sin \Lambda w') \\ (\dot{\theta}) &\rightarrow (\dot{\theta} + U_{\infty} \sin \Lambda \theta') \end{aligned} \quad (13)$$

$$C_{L\theta} \rightarrow \frac{2\pi AR}{AR \sqrt{1 + (2 \cos \Lambda / AR)^2} + 2 \cos \Lambda}$$

$$\frac{1}{2} b \rightarrow \frac{b}{2} (C_{L\theta} / \pi - 1)$$

که در روابط فوق پارامترهای $C_{L\theta}$ ، U_{∞} و AR و b به ترتیب اشاره به سرعت سیال هوا، ضریب لیفت، نسبت منظر و نصف طول وتر ایرفویل دارند. با اعمال اصلاحات فوق بر روی نیرو و ممان آیرودینامیکی که روابط آن در مرجع [۲۰] آورده شده است، نیرو و ممان آیرودینامیکی بر پایه تابع واگنر برای بال سه‌بعدی با زاویه

$$\delta U_k = \int_0^{l_f} \int_0^{l_r} [k_t \Delta \bar{r} \cdot \delta \Delta \bar{r} + k_t \Delta \bar{\theta} \cdot \delta \Delta \bar{\theta}] \delta_D(x_r - l_r) \delta_D(x_f - l_f) dx_r dx_f \quad (Y)$$

که پارامترهای k_t و k_l به ترتیب سفتی فنرهای طولی و پیچشی بوده و بردارهای $\Delta \bar{r}$ و $\Delta \bar{\theta}$ نیز به ترتیب اشاره به تغییر طول فنر طولی و چرخش فنر پیچشی دارد. همچنین δ_D نیز تابع دلتای دیراک می‌باشد. خاطر نشان می‌شود تغییرات طولی و پیچشی فنرها (که جهت مدلسازی حرکت طولی و پیچشی بالچه از آنها استفاده شده است) تابع تغییر شکل بال‌های جلو و عقب بوده که کاملاً از یکدیگر مستقل می‌باشند. از این رو تغییرات طولی و پیچشی فنرها قبل و بعد از تغییر شکل بال قابل محاسبه می‌باشد. پس از جایگذاری تغییرات طولی و پیچشی فنرها در معادله (۷)، بردارهای یکه مختصات برای هر دو بال در رابطه نهایی ظاهر می‌شوند. از آنجاییکه این بردارهای یکه کاملاً مستقل از یکدیگر بوده، لذا جهت تعیین انرژی ذخیره شده کل، از انتگرال دوگانه استفاده شده است. نیروهای ناپایستار شامل نیروها و ممان‌های آیرودینامیکی می‌باشد. از این رو تغییرات کار نیروهای ناپایستار سیستم به صورت رابطه ذیل می‌باشد.

$$\delta W_{ncf} = \int_0^{l_f} [L_f \delta w_f + M_f \delta \theta_f] dx_f + \int_0^{l_r} [L_r \delta w_r + M_r \delta \theta_r] dx_r \quad (8)$$

که در رابطه بالا، L و M به ترتیب نیروها و ممان‌های آیرودینامیکی می‌باشند. با جایگذاری معادلات (۲)، (۵)، (۷) و (۸) در معادله (۱) و مساوی صفر قرار دادن ضرایب δw_r ، $\delta \theta_f$ ، δw_f و $\delta \theta_r$ چهار معادله دیفرانسیلی پاره‌ای-انتگرالی کوپل مطابق ذیل بدست خواهد آمد.

$$m_f \ddot{w}_f + m_f x_{\theta} \ddot{\theta}_f + (EI)_f w^{(4)}_f + \int_0^{l_f} \{k_t w_f [\delta_D(x_f - l_f)]^3 \delta_D(x_r - l_r) - k_t a_{33} w_r [\delta_D(x_f - l_f)]^2 [\delta_D(x_r - l_r)]^2\} dx_r + \{M_{w_f} \ddot{w}_f - I_{w_f} \sin^2 \Lambda \dot{w}_f'' - I_{w_f} \sin \Lambda \cos \Lambda \dot{\theta}_f''\} \delta_D(x_f - l_f) = L_f \quad (9)$$

$$I_f \ddot{\theta}_f + m_f x_{\theta} \ddot{w}_f - (GJ)_f \theta_f'' + \int_0^{l_f} \{k_t \theta_f [\delta_D(x_f - l_f)]^3 \delta_D(x_r - l_r) - k_t a_{11} \theta_r [\delta_D(x_f - l_f)]^2 [\delta_D(x_r - l_r)]^2\} dx_r + \{I_{w_f} \cos^2 \Lambda \ddot{\theta}_f + I_{w_f} \sin \Lambda \cos \Lambda \dot{w}_f''\} \delta_D(x_f - l_f) = M_f \quad (10)$$

آیرودینامیکی ناپایا زمانی که بر پایه تابع واگنر بدست می‌آید، در قالب انتگرال دوهمامل بیان می‌شود [۲۰].

۴- روش حل عددی

همانگونه که مشاهده شد، معادلات استخراج شده (۹) تا (۱۲) از نوع معادلات دیفرانسیل پاره‌ای-انتگرالی می‌باشند. این معادلات کوپل، شامل جمله‌های انتگرالی بوده که شامل تابع زمان و مکان نیز می‌باشند. از این‌رو در مقاله حاضر جهت ساده‌سازی این جمله‌ها و تبدیل این معادلات به یک سری معادلات دیفرانسیل معمولی، فرآیند زیر طی شده است.

۴-۱- حذف جمله‌های انتگرالی وابسته به مکان

جمله‌های انتگرالی وابسته به مکان شامل حاصل‌ضرب چندین مرتبه تابع دلتای دیراک در خودش بوده که جهت بسط این جمله‌ها می‌توان از روابطی که در ادامه بیان شده استفاده نمود. سازمان ناسا در گزارشی در سال ۱۹۶۷ [۲۱]، به معرفی یک کلاس از توابع تعمیم‌یافته پرداخت که این توابع می‌توانند از دو خانواده گوس^۲ و تانژانت هایپربولیک^۳ مشتق شوند. شایان ذکر است در این مقاله از خانواده توابع تانژانت هایپربولیک استفاده شده است. این توابع تعمیم‌یافته دارای یک ویژگی منحصر به فرد هستند؛ بطوریکه می‌توان تابع پله واحد هویساید را به صورت رابطه‌ای از تابع تانژانت هایپربولیک بیان نمود. با چندین بار مشتق‌گیری و بازنویسی این توابع می‌توان روابط توسعه یافته‌ای از حاصل‌ضرب تابع دلتای دیراک استخراج نمود.

۴-۲- حذف جمله‌های انتگرالی وابسته به زمان

پس از حذف جمله‌های انتگرالی وابسته به مکان فقط جمله‌های انتگرالی وابسته به زمان باقی خواهند ماند، که حاصل استفاده از تابع واگنر در تئوری ناپایا آیرودینامیکی می‌باشند. در مرجع [۲۰] یک روش تحلیلی جهت حذف این جمله‌های انتگرالی ارائه شده است که جهت ساده‌سازی در حذف این جمله‌ها از یک سری ثابت‌های ریاضی استفاده می‌شود و بایستی معادلات ساده شده از مرحله قبل را ابتدا در جمله $\exp(\varepsilon_{f,r_1} t)$ ضرب نمود و نسبت به زمان مشتق گرفت. سپس دوباره معادلات جدید را در جمله $\exp[(\varepsilon_{f,r_2} - \varepsilon_{f,r_1})t]$

عقبگرد مطابق روابط ذیل استخراج خواهند شد.

$$L(x, t) = \pi \rho_{\infty} b^2 \left[\ddot{w} + U_{\infty} \cos \Lambda \dot{\theta} + U_{\infty} \sin \Lambda \dot{w}' - \right. \\ \left. ba\dot{\theta}' - baU_{\infty} \sin \Lambda \ddot{\theta} \right] \\ + C_{L\theta} \rho_{\infty} U_{\infty} \cos \Lambda [\dot{w}(0) + \\ U_{\infty} \cos \Lambda \theta(0) + U_{\infty} \sin \Lambda w'(0) \\ + \frac{b}{2} (C_{L\theta} / \pi - 1 - 2a) \dot{\theta}(0) + \\ \frac{b}{2} (C_{L\theta} / \pi - 1 - 2a) U_{\infty} \sin \Lambda \theta'(0)] \varphi(t) \quad (14)$$

$$+ C_{L\theta} \rho_{\infty} U_{\infty} \cos \Lambda \int_0^t \varphi(t - \sigma) [\ddot{w} + \\ U_{\infty} \cos \Lambda \dot{\theta} + U_{\infty} \sin \Lambda \dot{w}' \\ + \frac{b}{2} (C_{L\theta} / \pi - 1 - 2a) \ddot{\theta} + \\ \frac{b}{2} (C_{L\theta} / \pi - 1 - 2a) U_{\infty} \sin \Lambda \dot{\theta}'] d\sigma$$

$$M(x, t) = \pi \rho_{\infty} b^3 [a\ddot{w} + U_{\infty} \sin \Lambda \dot{w}' + \\ U_{\infty} \cos \Lambda a\dot{\theta} - 0.5(C_{L\theta} / \pi - 1) U_{\infty} \cos \Lambda a\ddot{\theta} \\ - 0.5(C_{L\theta} / \pi - 1) U_{\infty}^2 \sin \Lambda \cos \Lambda \theta' \\ - b(1/8 + a^2) \ddot{\theta} - b(1/8 + a^2) U_{\infty} \sin \Lambda \dot{\theta}'] \\ + C_{L\theta} \rho_{\infty} U_{\infty} \cos \Lambda b^2 (0.5 + a) [\dot{w}(0) + \\ U_{\infty} \cos \Lambda \theta(0) + U_{\infty} \sin \Lambda w'(0) \\ + \frac{b}{2} (C_{L\theta} / \pi - 1 - 2a) \dot{\theta}(0) + \\ \frac{b}{2} (C_{L\theta} / \pi - 1 - 2a) U_{\infty} \sin \Lambda \theta'(0)] \varphi(t) \quad (15)$$

$$+ C_{L\theta} \rho_{\infty} U_{\infty} \cos \Lambda b^2 \int_0^t \varphi(t - \sigma) \\ [\ddot{w} + U_{\infty} \cos \Lambda \dot{\theta} + U_{\infty} \sin \Lambda \dot{w}' \\ + \frac{b}{2} (C_{L\theta} / \pi - 1 - 2a) \ddot{\theta} + \\ \frac{b}{2} (C_{L\theta} / \pi - 1 - 2a) U_{\infty} \sin \Lambda \dot{\theta}'] d\sigma$$

که پارامترهای a ، ρ_{∞} و $\varphi(t)$ به ترتیب پارامتر بدون بعد آیروالاستیک، دانسیته سیال هوا و تابع واگنر بوده و پارامتر σ نیز مرتبط با انتگرال دوهمامل^۱ می‌باشد. لازم به ذکر است نیرو و ممان

2 Gaussian family

3 Hyperbolic tangent family

1 Duhamel integral form

جرم^۱، میرایی^۲ و سفتی^۳ بوده و بردار ستونی $\{q\}$ نیز مرتبط با مختصات تعمیم یافته می‌باشد. همچنین ماتریس‌های $[H]_I$ و $[K^0]_{I,CS}$ نیز به ترتیب ماتریس‌های مرتبط با جمله‌های انتگرالی و شرایط اولیه سیستم می‌باشند که با توجه به این که در این مقاله یافتن فلاتر سیستم هدف اصلی بوده؛ یا به عبارتی مسئله از نوع مقدار ویژه می‌باشد، لذا این ماتریس‌ها اثری در تحلیل فلاتر بال جعبه‌ای ندارند. در نهایت بایستی معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم را به فرم مرتبه اول و در فضای حالت^۴ تبدیل نمود.

۵- تحلیل نتایج

در این تحقیق جهت تحلیل فلاتر از یک نمونه بال جعبه‌ای که قبلاً طراحی مفهومی آن در مرجع [۶] انجام شده استفاده می‌شود. این بال جعبه‌ای جهت نصب بر روی یک هواپیما ۲۵۰ نفره طراحی شده است که بال جلوی آن مطابق هندسه بال هواپیما ایرباس ۳۲۰ طراحی شده است. مشخصات هندسی و خصوصیات فیزیکی این بال در جدول ۱ آورده شده است.

جهت حل عددی معادلات حاکم، از پنج مود خمشی و پنج مود پیچشی استفاده شده و نیز از پارامترهای بدون بعد جهت تحلیل فلاتر بهره برده شده است.

$$V_F = \frac{U_F}{b_f \omega_{\theta_f}} \quad (19)$$

$$K_l = \frac{k_l l_{wnglt}}{(EA)_{wnglt}}$$

$$K_t = \frac{k_t l_{wnglt}}{(GJ)_{wnglt}}$$

$$B = \frac{b_f}{b_r}$$

که پارامترهای U_F و ω_{θ_f} به ترتیب اولین فرکانس غیرکوپل مود پیچشی در بال جلو و سرعت فلاتر بوده و پارامترهای l_{wnglt}

ضرب نمود و مجدداً نسبت به زمان مشتق گرفت. با استفاده از این تکنیک، معادلات نهایی بدست آمده از نوع معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خواهند بود که می‌توان آنها را بوسیله روش مودهای فرضی به یک سری معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل نمود. لازم به ذکر است پارامترهای ϵ_1 و ϵ_2 توابعی از سرعت سیال هوا بوده که در تابع واگنر ظاهر می‌شوند.

۴-۳- روش مودهای فرضی

در روش مودهای فرضی، حل مسئله مقدار ویژه به شکل یک سری از توابع مجاز فرض می‌شود و کافی است این توابع تنها شرایط مرزی هندسی را ارضا نمایند. بنابراین مختصه‌های حرکتی سیستم را می‌توان به صورت بسطی از حاصل ضرب توابع هندسی معلوم ضربدر ضرایب زمانی نامشخص در نظر گرفت [۱۹].

$$w_{f,r}(x_{f,r}, t) = \sum_{i=1}^n [w_{f,r_i}(x_{f,r}) \cdot \eta_{f,r_i}(t)] \quad (16)$$

$$\theta_{f,r}(x_{f,r}, t) = \sum_{i=1}^n [\varphi_{f,r_i}(x_{f,r}) \cdot \psi_{f,r_i}(t)] \quad (17)$$

که توابع $\eta_i(t)$ و $\psi_i(t)$ به ترتیب توابع وابسته به زمان مودهای خمشی و پیچشی بوده و $w_i(x)$ و $\varphi_i(x)$ نیز توابع ویژه یا توابع شکل برای مودهای خمشی و پیچشی می‌باشند. حال جهت تبدیل معادلات حاکم (دیفرانسیل پاره‌ای) به معادلات دیفرانسیل معمولی، بایستی معادلات (۱۶) و (۱۷) را در معادلات حاکم جایگذاری نمود و سپس آنها را به ترتیب در توابع شکل ضرب نمود و نهایتاً بر روی طول بال مربوطه انتگرال‌گیری کرد. ساختار نهایی معادلات حاکم به فرم ماتریسی به صورت زیر خواهد بود.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + [H]_I + [K^0]_{I,CS} \{q_0\} = [0] \quad (18)$$

که در روابط فوق $[M]$ ، $[C]$ و $[K]$ به ترتیب ماتریس‌های

1 Mass matrix
2 Damping matrix
3 Stiffness matrix
4 State space

جدول ۱. مشخصات هندسی و فیزیکی بال جعبه‌ای مورد مطالعه [۶]

Table 1. Geometric and physical characteristics of the box-wing

پارامترهای بال جلو	مقدار برای بال جلو (واحد)	مقدار برای بال عقب (واحد)
صلبیت خمشی (EI)	$4/156 \times 10^8$ (N.m ²)	$1/359 \times 10^8$ (N.m ²)
صلبیت پیچشی (GJ)	$7/760 \times 10^7$ (N.m ²)	$4/490 \times 10^7$ (N.m ²)
جرم بال بر واحد طول (m)	۹.۳۴۹ (kg/m)	۲۶۸/۶ (kg/m)
ممان اینرسی بال (I_o)	۱۵۰/۴ (kg.m)	۶۳/۷ (kg.m)
طول وتر ایرفویل (c)	۲/۶ (m)	۲/۰ (m)
ثابت آیرودینامیکی (a)	.	.
فاصله مابین مرکز جرم و مرکز الاستیک ایرفویل (x_o)	۰ (m)	۰ (m)
طول بال (l)	۱۹/۳ (m)	۱۹/۲۵ (m)
زاویه عقبگرد (Δ)	۲۸/۵ (°)	-۲۸ (°)
نسبت منظر ($A.R.$)	۱۳/۱	۱۷/۰
طول بالچه ($L_{winglet}$)	۵/۲ (m)	۵/۲ (m)

جدول ۲. سرعت و فرکانس فلاتر بال ساده گلند بدون زاویه عقبگرد

Table 2. Flutter frequency and velocity of Goland's un-swept clean wing

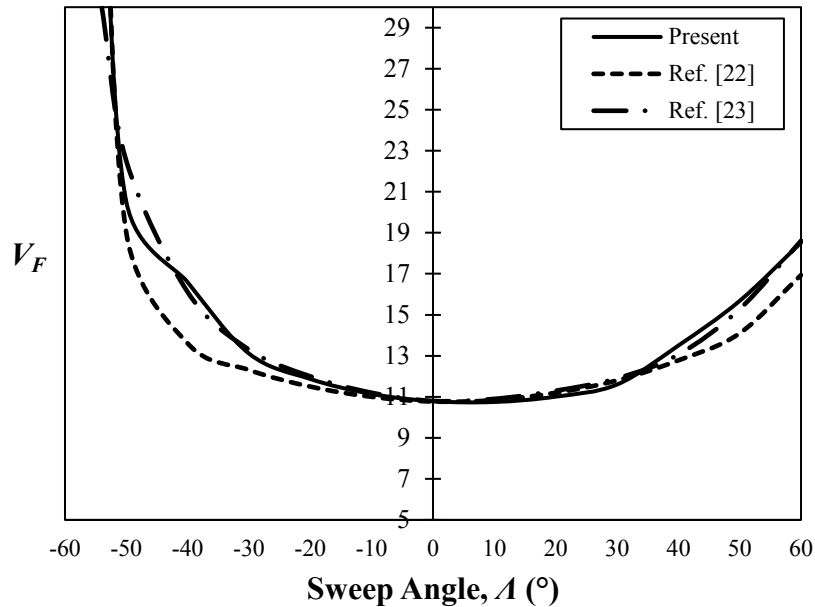
مرجع	تعداد مود	سرعت فلاتر (km/h)	فرکانس فلاتر (Hz)
مرجع [۲۴] (حل دقیق)	-	۴۹۴/۱	۱۱/۲۵
مرجع [۲۵]	-	۴۹۳/۲	۱۱/۱۵
مرجع [۲۶]	-	۴۸۳/۱	۱۱/۲۷
مرجع [۲۷]	۶	۴۹۲/۷	۱۱/۳۴
مطالعه حاضر با استفاده از مدل تئودرسون	۶	۴۹۲/۱۵	۱۱/۱۳
مطالعه حاضر با استفاده از مدل پیترز	۶	۴۹۱/۰۴	۱۱/۳۴
	۱	۴۱۹/۴۰	۱۲/۸۷
	۲	۴۹۳/۵۶	۱۱/۰۲
مطالعه حاضر با استفاده از مدل واگنر	۳	۴۹۳/۵۶	۱۱/۰۲
	۴	۴۹۳/۵۶	۱۱/۰۲
	۵	۴۹۳/۵۶	۱۱/۰۲

شده است [۲۲] همچنین در این جدول اثر تعداد مودهای خمشی و پیچشی بر سرعت و فرکانس فلاتر نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود اعتبارسنجی بال ساده گلند با استفاده از تئوری ناپایایی واگنر از دقت مناسبی برخوردار بوده و تنها با استفاده از دو مود خمشی و پیچشی، همگرایی نتایج ملاحظه می‌گردد. شایان ذکر است در حل عددی معادلات حاکم، از کمترین تعداد مود (یعنی یک مود خمشی و یک مود پیچشی) شروع کرده و نتایج تا پنج

$(EA)_{wnglt}$ و $(GJ)_{wnglt}$ نیز به ترتیب طول، صلبیت کششی و صلبیت پیچشی بالچه می‌باشند.

۵-۱- اعتبارسنجی

در این بخش، مدل آیرودینامیکی ناپایایی واگنر بر روی یک نمونه بال آیرولاستیک ساده (معروف به بال گلند) اعمال گردیده و مطابق جدول ۲، سرعت و فرکانس فلاتر این بال با مطالعات پیشین مقایسه



شکل ۳. اثر زاویه عقبگرد بر سرعت فلاتر
Fig. 3. Effect of sweep angle on the flutter velocity

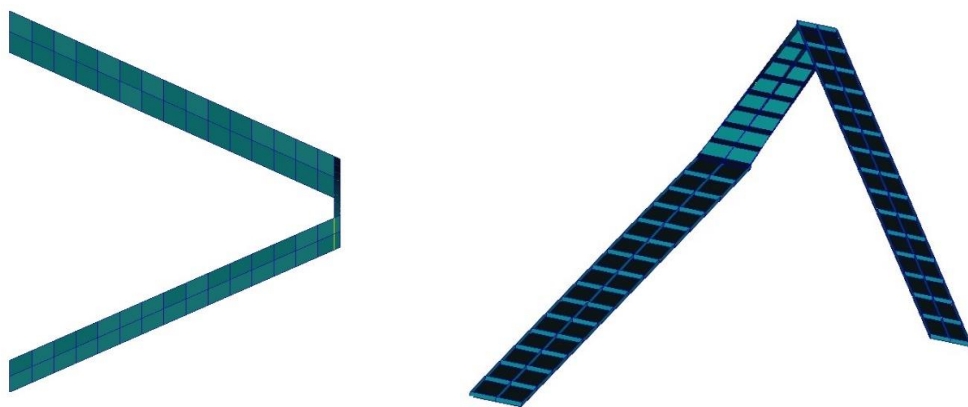
۴ و در نرم‌افزار پترن^۱ انجام شده است. علاوه بر این، ساختار سازه‌ای این بال نیز مطابق جدول ۳ در نظر گرفته شده است و شامل اجزای مختلف یک بعدی (پست، کپ)^۲ و دو بعدی (اسپار، ریب و پوسته)^۳ می‌باشد. مدلسازی مدل المان محدود در نرم‌افزار با فرض ثابت بودن سطح مقطع ایرفویل در طول بال انجام شده است. همچنین مدلسازی تیر جعبه‌ای^۴ به گونه‌ای انجام شده که ضخامت آن ثابت در نظر گرفته شده است [۶].

پس از مدلسازی ساختار بال جعبه‌ای در نرم‌افزار پترن (با توجه به مشخصات ذکر شده در جدول فوق) لازم است تا خواص فیزیکی هر کدام از اجزای آن (بال‌های جلو و عقب) مانند جرم بر واحد طول و ممان اینرسی قطبی جهت جایگذاری در ترم‌های ثابت معادلات حاکم استخراج گردند. لازم به ذکر است جهت استخراج گشتاور دوم سطح و گشتاور قطبی نیز کافی است هر کدام از بال‌های جلو و عقب را به تنهایی در نرم‌افزار مدلسازی نمود و با استفاده از آنالیز مودال در نرم‌افزار نسترن فرکانس‌های اول طبیعی خمشی و پیچشی آنها را استخراج نمود. حال با استخراج فرکانس‌های اول طبیعی اول هر کدام از بال‌ها، گشتاور دوم سطح و گشتاور قطبی آنها قابل محاسبه خواهد بود.

مود خمشی و پنج مود پیچشی ارائه شده‌اند. همانگونه که مشاهده می‌شود، پس از استفاده از دو مود خمشی و دو مود پیچشی، نتایج همگرا می‌شوند. از طرفی استفاده از تعداد مودهای بیشتر از دو مود ارتعاشی، اثری بر دقت سرعت و فرکانس فلاتر نخواهد داشت. یکی از مهمترین پارامترهای هندسی در بال هواپیما که اثر قابل ملاحظه‌ای بر سرعت و فرکانس فلاتر می‌گذارد، زاویه عقبگرد است. همانگونه که در بخش سوم نیز بدان اشاره شد، جهت بررسی اثر زاویه عقبگرد بر فلاتر بال آیرودینامیک، ضروری است برخی ضرایب اصلاحی در مدل آیرودینامیکی اعمال گردد. ضرایب اصلاحی که تاکنون پیشنهاد شده است عموماً بر روی تئوری‌های تئودرسن و پیترز پیاده‌سازی شده‌اند. با توجه به اینکه در تحقیق حاضر از تئوری آیرودینامیکی ناپایا بر پایه تابع واگنر استفاده شده است، لذا اثر اعمال ضرایب اصلاحی بر این تئوری، مطابق شکل ۳ نشان داده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود، با مقایسه نتایج بدست آمده با تحقیقات پیشین [۲۲] و [۲۳]، اعتبارسنجی این ضرایب به ازای زاویای عقبگرد مثبت و منفی به خوبی انجام شده است.

به منظور اعتبارسنجی نتایج فلاتر بال جعبه‌ای و با توجه به عدم وجود مرجعی که بتوان اعتبارسنجی را با آن انجام داد، سعی شده است از نتایج تحلیل فلاتر بال جعبه‌ای مورد مطالعه در نرم‌افزار نسترن استفاده شود. مدلسازی بال جعبه‌ای مورد مطالعه مطابق شکل

1 MSC PATRAN
 2 Post and cap
 3 Spar, rib and skin
 4 Box-beam



شکل ۴. شماتیکی از مدل المان محدود مورد استفاده در نرم‌افزار ناسترن
 Fig. 4. A schematic of the finite elements model in MSC NASTRAN

جدول ۳. ساختار سازه‌ای بال جعبه‌ای مورد مطالعه
 Table 3. Structural model of the box-wing

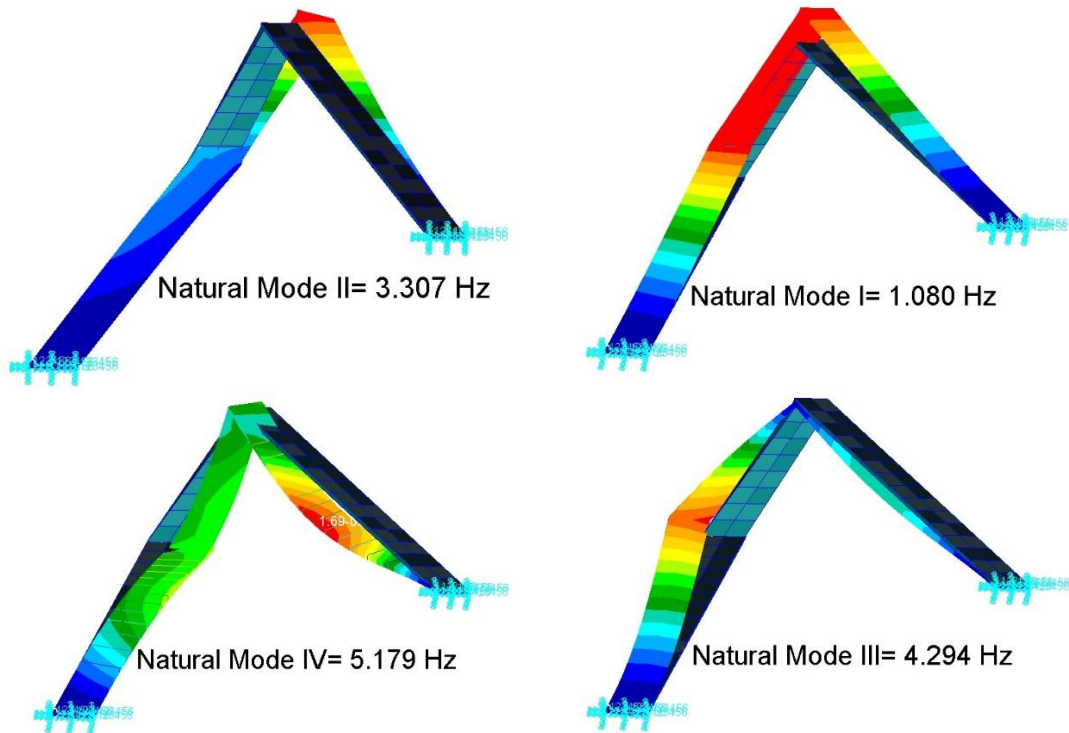
بال جلو					
المان یک بعدی	تعداد	سطح مقطع (m ²)	المان یک بعدی	تعداد	ضخامت (m)
پست (فولاد)	۴۸	۰/۰۰۰۰۵	پوسته (آلومینیوم)	۶۰	۰/۰۲۱
کپ اسپار جلو (فولاد)	۳۰	۰/۰۰۰۰۵	اسپار جلو (آلومینیوم)	۱۵	۰/۰۰۳
کپ اسپار وسط (فولاد)	۳۰	۰/۰۰۰۰۴	اسپار وسط (آلومینیوم)	۱۵	۰/۰۰۵
کپ اسپار عقب (فولاد)	۳۰	۰/۰۰۰۰۵	اسپار عقب (آلومینیوم)	۱۵	۰/۰۰۳
کپ ریب (فولاد)	۶۴	۰/۰۰۰۰۵	ریب (آلومینیوم)	۳۲	۰/۰۰۰۰۵
بال عقب					
پست (آلومینیوم)	۴۸	۰/۰۰۰۰۵	پوسته (آلومینیوم)	۶۰	۰/۰۰۲
کپ اسپار جلو (آلومینیوم)	۳۰	۰/۰۰۰۰۵	اسپار جلو (آلومینیوم)	۱۵	۰/۰۰۳
کپ اسپار وسط (فولاد)	۳۰	۰/۰۰۰۰۴	اسپار وسط (آلومینیوم)	۱۵	۰/۰۰۵
کپ اسپار عقب (آلومینیوم)	۳۰	۰/۰۰۰۰۵	اسپار عقب (آلومینیوم)	۱۵	۰/۰۰۳
کپ ریب (آلومینیوم)	۶۴	۰/۰۰۰۰۵	ریب (آلومینیوم)	۳۲	۰/۰۰۰۰۵
بالچه					
پست	۰	-	پوسته (آلومینیوم)	۳۲	۰/۰۰۳
کپ اسپار جلو	۰	-	اسپار جلو (آلومینیوم)	۸	۰/۰۰۱
کپ اسپار وسط	۰	-	اسپار وسط (آلومینیوم)	۸	۰/۰۰۲
کپ اسپار عقب	۰	-	اسپار عقب (آلومینیوم)	۸	۰/۰۰۱
کپ ریب	۰	-	ریب (آلومینیوم)	۹	۰/۰۰۲

بدین صورت که حداقل نسبت مش‌ها به طول موج^۲ بایستی مقدار ۱۲ بوده و حداکثر نسبت منظر جعبه‌ای^۳ نیز مقدار ۳ باشد. در این راستا انتخاب مقدار مناسب برای فرکانس‌های حداقل و حداکثر^۴ و نیز

تحلیل فلاتر بال جعبه‌ای در نرم‌افزار ناسترن، با در نظر گرفتن مدل در سطح دریا و با استفاده از تئوری دابلت-لاتیس و روش پی‌کی^۱ انجام شده است. علاوه بر این، جهت انجام یک تحلیل فلاتر مناسب در نرم‌افزار، ضروری است سطوح برای آیرودینامیکی کنترل شوند.

2 Min Boxes/Wavelength
 3 Max. Box Aspect Ratio
 4 Min. and max. frequency

1 P-K method



شکل ۵. چهار مود اول ارتعاشات بال جعبه‌ای در نرم‌افزار نستر

Fig. 5. The first four natural modes of the box-wing in MSC NASTRAN

جدول ۴. اعتبارسنجی فلاتر بال جعبه‌ای مورد مطالعه

Table 4. Validation of the box-wing flutter

مدل	روش حل	سرعت فلاتر (m/s)	فرکانس فلاتر (Hz)	ماخ
بال جلو	حل نیمه تحلیلی	۲۸۷	۴/۵۸	۰/۸۴
	حل توسط نرم‌افزار نستر	۲۸۹	۳/۲۹	۰/۸۵
بال عقب	حل نیمه تحلیلی	۲۷۴	۶/۸۹	۰/۸۱
	حل توسط نرم‌افزار نستر	۲۷۱	۶/۷۵	۰/۸۰
بال جعبه‌ای	حل نیمه تحلیلی	۲۶۹	۶/۶۳	۰/۷۹
	حل توسط نرم‌افزار نستر	۲۷۰	۴/۶۳	۰/۷۹

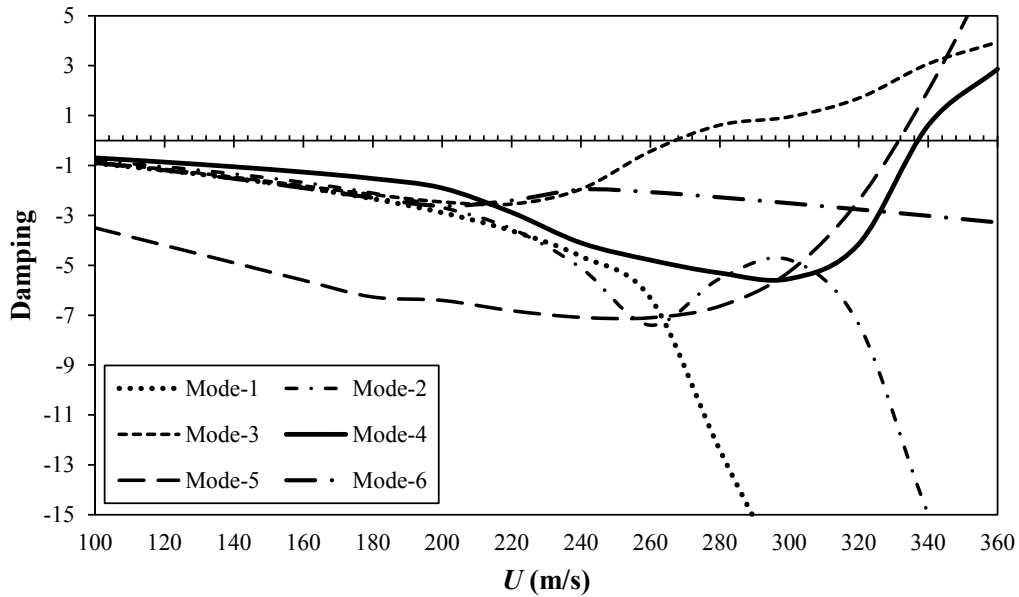
پدیده فلاتر شده است.

اعتبارسنجی سرعت و فرکانس فلاتر برای بال جلو و بال عقب به صورت جداگانه و همچنین برای کل بال جعبه‌ای مطابق جدول ۴ انجام شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، تطابق خوبی مابین نتایج سرعت فلاتر بدست آمده از نرم‌افزار نستر و روش حل عددی معادلات مشاهده می‌شود. اختلاف مشاهده شده در فرکانس‌های فلاتر را می‌توان به استفاده از دو فنر خطی جهت مدلسازی بالچه که در نرم‌افزار به صورت کامپوزیت مدل شده، مرتبط دانست.

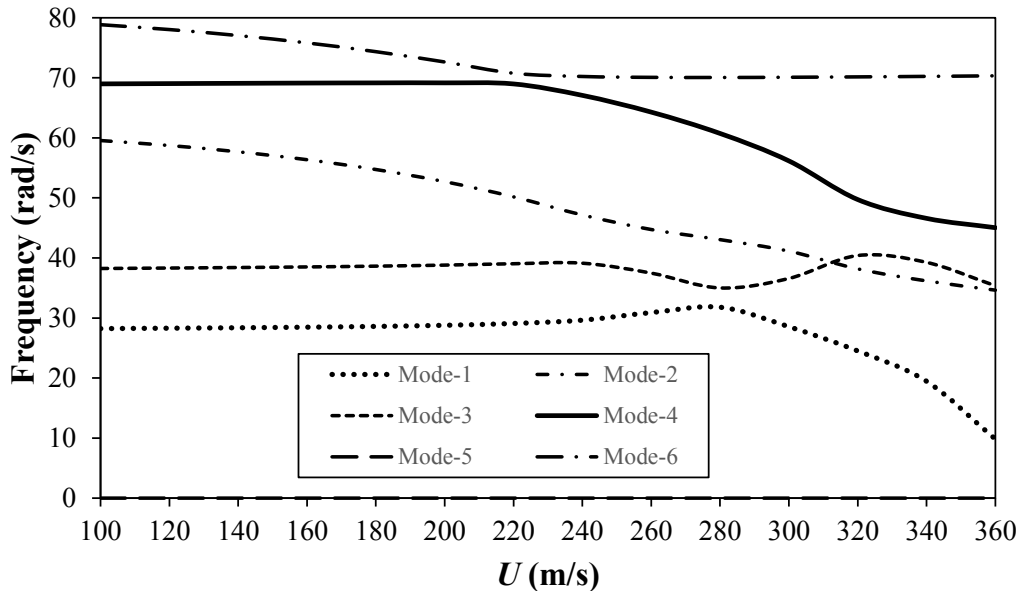
سرعت‌های حداقل و حداکثر سیال هوا^۱ بسیار قابل اهمیت می‌باشد. با انجام آنالیز مودال در نرم‌افزار نستر، چهار مود اول ارتعاشات آزاد بال جعبه‌ای مطابق شکل ۵ نمایش داده شده است.

همچنین نمونه‌ای از نمودار تغییرات میرایی بال جعبه‌ای مورد مطالعه بر حسب سرعت سیال و برای شش مود حرکت در شکل ۶ نشان داده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود، بال در مود سوم و در سرعت ۲۶۷ متر بر ثانیه و فرکانس ۴۴/۱۲ رادیان بر ثانیه دچار

1 Min. and max. velocity



(الف)



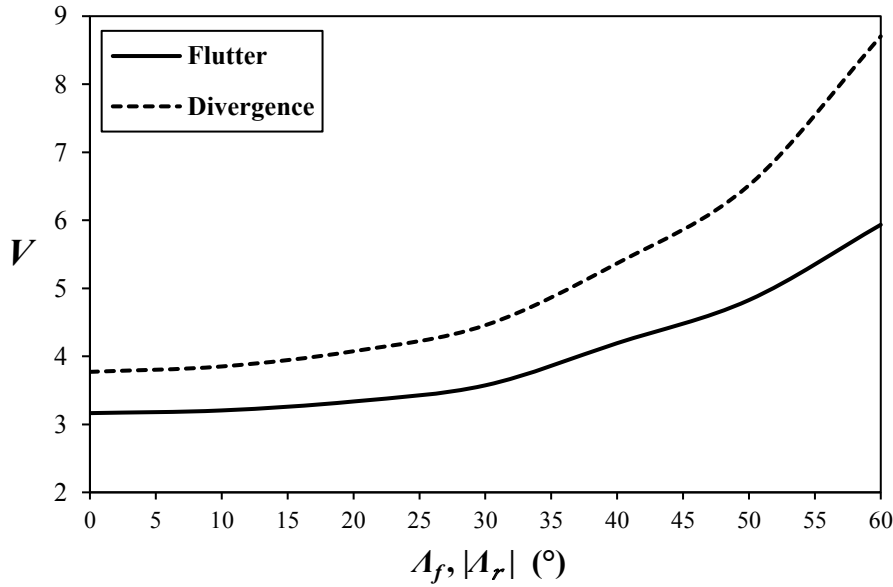
(ب)

شکل ۶. فلاتر بال جعبه‌ای مطابق مدل مرجع [۶] (الف) تغییرات میرایی (ب) فرکانس مودال
Fig. 6. The box-wing flutter as Ref. [6] (a) Damping variation (b) Modal frequency

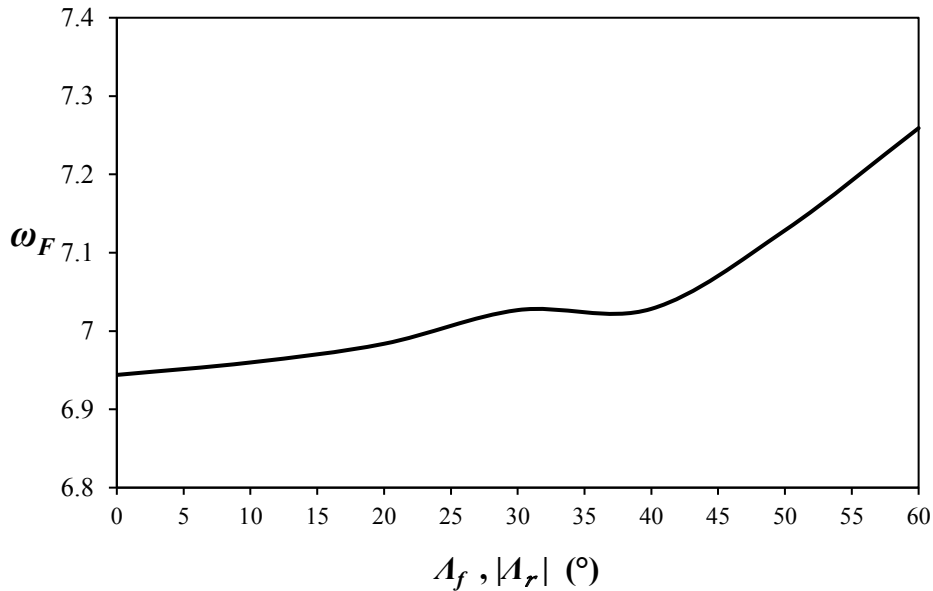
۲-۵- نتایج

افزایش زاویه عقبگرد، میزان رشد سرعت واگرایی نسبت به سرعت فلاتر بیشتر خواهد بود. فرکانس فلاتر نیز تا زاویه عقبگرد ۴۰ درجه ثابت بوده و پس از آن رشد قابل ملاحظه‌ای در آن مشاهده می‌شود. شکل ۸ اثرات ضریب سفتی بالچه بر فلاتر بال جعبه‌ای را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود افزایش سفتی طولی بالچه باعث کاهش سرعت فلاتر و افزایش فرکانس فلاتر می‌شود. همچنین

اثر زاویه عقبگرد بال‌ها بر فلاتر و واگرایی بال جعبه‌ای در شکل ۷ نمایش داده شده است. با افزایش زاویه عقبگرد بال‌های جلو و عقب، سرعت فلاتر افزایش قابل توجهی خواهد داشت. به عبارتی چنانچه زاویه عقبگرد بال‌ها از مقدار ۳۰ درجه بیشتر شود، مرز پایداری کل بال، به میزان بسیار زیادی افزایش نشان خواهد داد. علاوه بر این، با



(الف)



(ب)

شکل ۷. نمودار تغییرات (الف) سرعت فلاتر و واگرایی (ب) فرکانس فلاتر بر حسب تغییرات زاویه عقبگرد بال‌های جلو و عقب

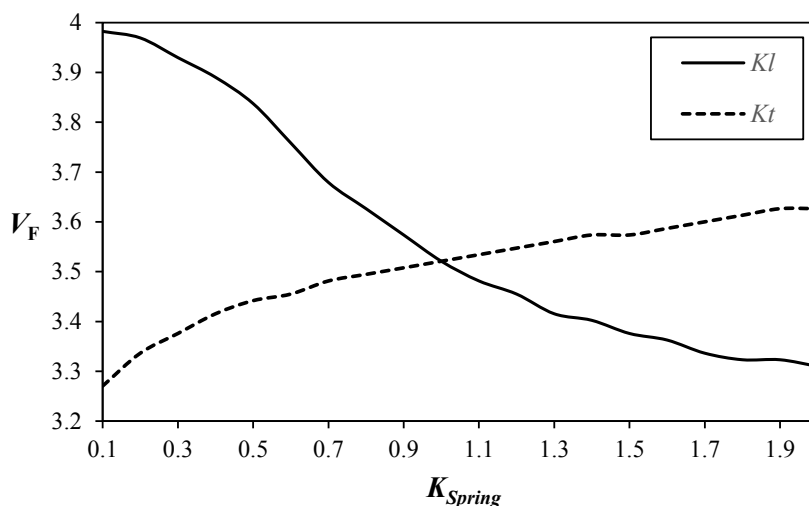
Fig. 7. The variation of (a) Flutter velocity and divergence (b) Flutter frequency vs. sweep angles of the front and rear wings

فرکانس فلاتر نیز به ترتیب متعلق به مقادیر ۰/۱ و ۲ می‌باشد. علاوه بر این، افزایش زاویه عقبگرد بال‌ها باعث افزایش قابل توجه مرز فلاتر بال جعبه‌ای می‌شود که شیب این افزایش، برای زوایای بیشتر از ۳۰ درجه تندتر خواهد بود.

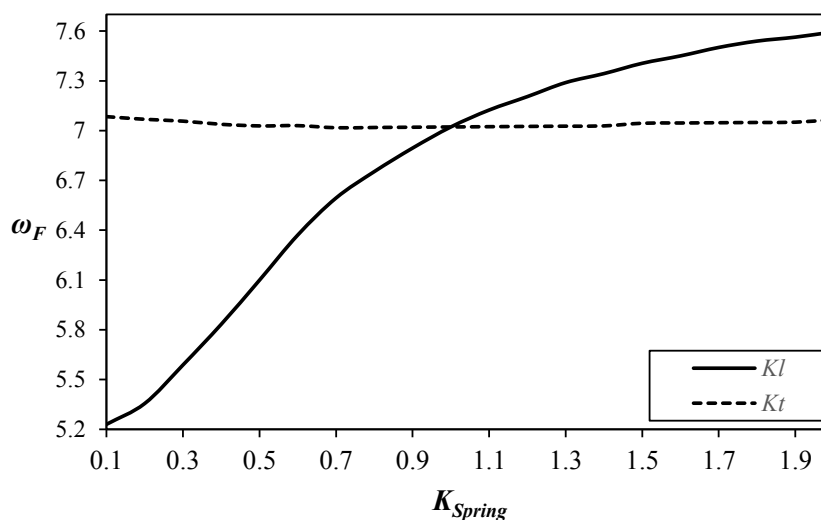
اثر زاویه عقبگرد بال جعبه‌ای بر سرعت و فرکانس فلاتر برای شرایط مختلف سفتی طولی بالچه در شکل ۱۰ مورد مطالعه قرار

افزایش سفتی پیچشی بالچه باعث افزایش سرعت فلاتر خواهد شد ولی اثری بر فرکانس فلاتر ندارد.

اثر تغییرات زاویه عقبگرد بال‌ها بر سرعت و فرکانس فلاتر بر حسب میزان سفتی پیچشی بالچه در شکل ۹ نشان داده شده است. نتایج این نمودار نشان می‌دهد که بیشترین و کمترین سرعت فلاتر به ترتیب در مقادیر ۱ و ۲ مشاهده می‌شود و بیشترین و کمترین



(الف)



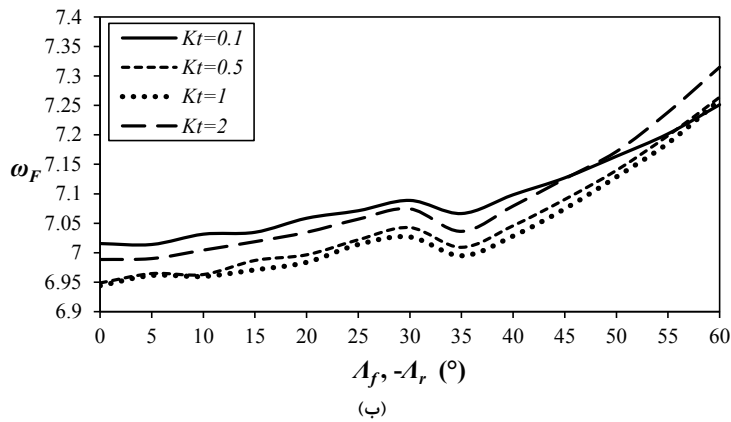
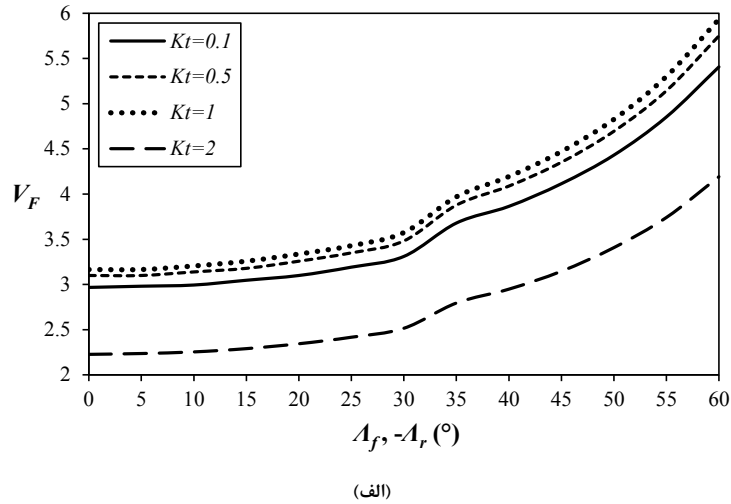
(ب)

شکل ۸. نمودار تغییرات (الف) سرعت فلاتر (ب) فرکانس فلاتر بر حسب ضریب سفتی فنرهای طولی و پیچشی

Fig. 8. The variation of (a) Flutter velocity (b) Flutter frequency vs. stiffness of the longitudinal and torsional springs

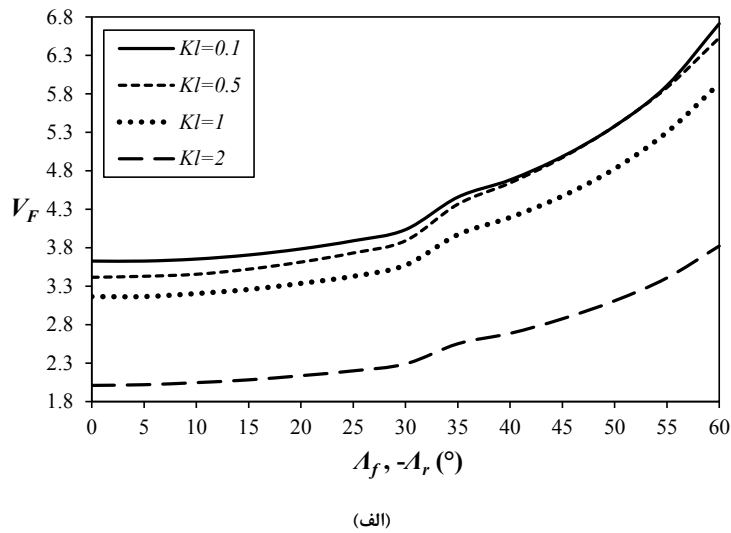
دارد ولی هیچ اثری بر فرکانس فلاتر نمی‌گذارد. یکی از مهمترین پارامترهای هندسی بال جعبه‌ای که ضروری است تغییرات آن در تحلیل فلاتر مورد بررسی قرار گیرد، میزان اثرگذاری طول وتر بال‌های جلو و عقب می‌باشد. شکل‌های ۱۱ و ۱۲ به ترتیب میزان تأثیر طول وتر بال‌های جلو و عقب را به ازای تغییرات سفتی پیچشی و طولی بالچه نشان می‌دهند. در این شکل‌ها سه حالت مختلف برای این نسبت در نظر گرفته شده است که یک حالت آن برای وضعیتی است که وتر بال جلو از بال عقب کوچکتر می‌باشد و دو حالت آن نیز برای وضعیتی است که وتر بال جلو از بال عقب

گرفته است. به منظور پوشش دادن همه شرایط ممکن، چهار حالت مختلف برای سفتی طولی بالچه در نظر گرفته شده است که دو حالت آن برای وضعیتی است که سفتی طولی بالچه کمتر از مدل مورد مطالعه باشد (یعنی ضریب یک) و یک حالت آن نیز برای وضعیتی است که سفتی طولی بیش از حد افزایش یابد. مطابق تغییرات مشاهده شده، هر چه سفتی طولی بالچه کمتر باشد، سرعت فلاتر بال جعبه‌ای بیشتر خواهد بود و این در حالی است که کاهش سفتی طولی بالچه موجب کاهش فرکانس فلاتر می‌شود. همچنین افزایش زاویه عقبگرد بال جعبه‌ای همواره اثر مثبتی بر افزایش سرعت فلاتر



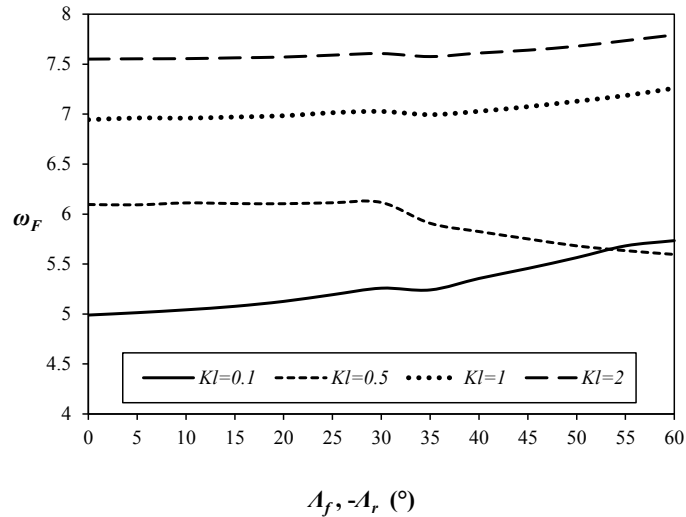
شکل ۹. نمودار اثر زاویه عقبگرد بر (الف) سرعت فلاتر (ب) فرکانس فلاتر بر حسب ضریب سفتی فنر پیچشی

Fig. 9. Effect of sweep angle on (a) Flutter velocity (b) Flutter frequency vs. stiffness of the torsional spring



شکل ۱۰. نمودار اثر زاویه عقبگرد بر (الف) سرعت فلاتر (ب) فرکانس فلاتر بر حسب ضریب سفتی فنر طولی

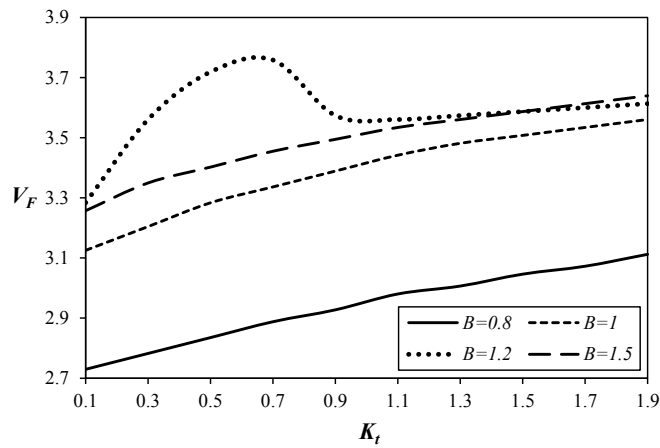
Fig. 10. Effect of sweep angle on (a) Flutter velocity (b) Flutter frequency vs. stiffness of the longitudinal spring



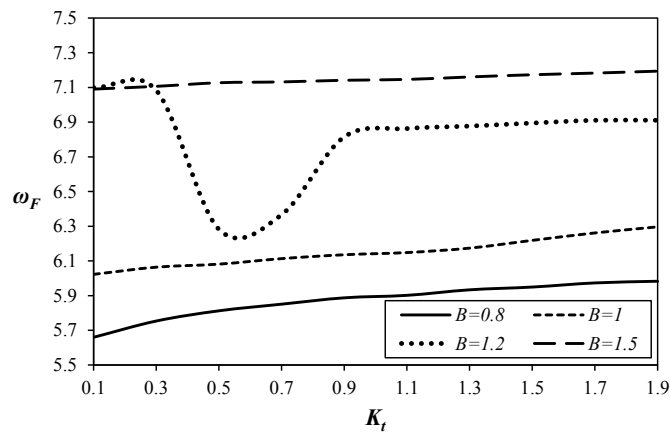
(ب)

ادامه شکل ۱۰. نمودار اثر زاویه عقبگرد بر (الف) سرعت فلاتر (ب) فرکانس فلاتر بر حسب ضریب سفتی فنر طولی

Continued Fig. 10. Effect of sweep angle on (a) Flutter velocity (b) Flutter frequency vs. stiffness of the longitudinal spring



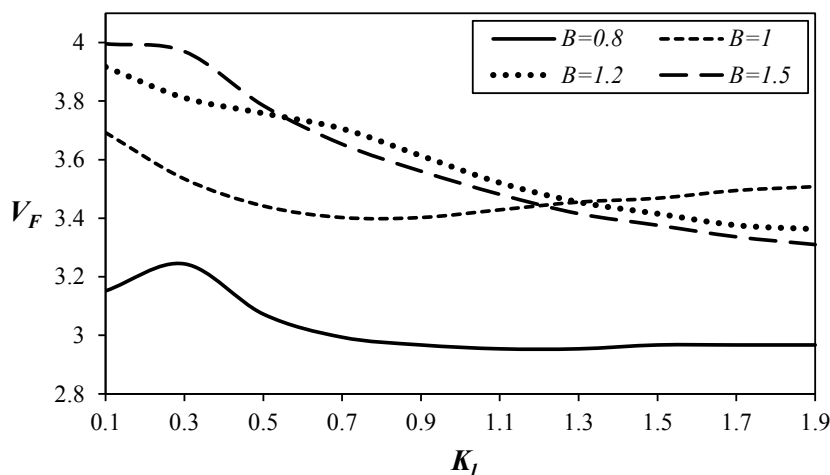
(الف)



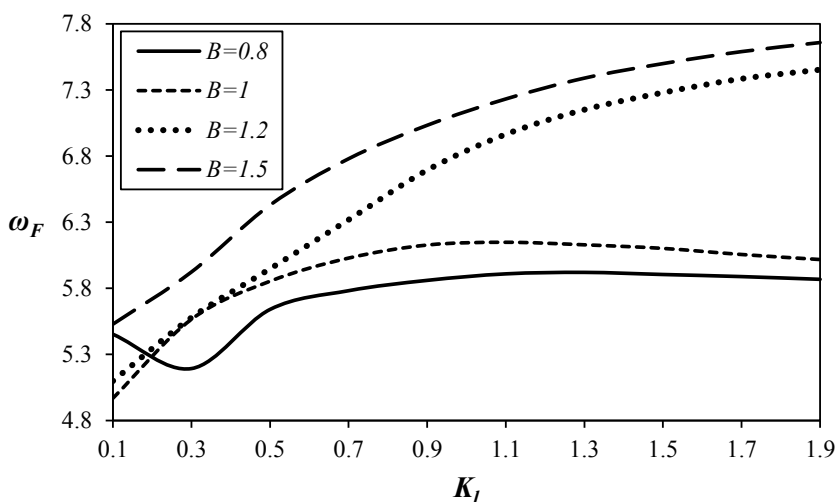
(ب)

شکل ۱۱. نمودار تغییرات نسبت وتر بال جلو به عقب بر (الف) سرعت فلاتر (ب) فرکانس فلاتر بر حسب سفتی پیچشی بالچه

Fig. 11. The variation of chords ratio on (a) Flutter velocity and divergence (b) Flutter frequency vs. winglet torsional stiffness



(الف)



(ب)

شکل ۱۲. نمودار تغییرات نسبت وتر بال جلو به عقب بر (الف) سرعت فلاتر (ب) فرکانس فلاتر بر حسب سفتی طولی بالچه

Fig. 12. The variation of chords ratio on (a) Flutter velocity and divergence (b) Flutter frequency vs. winglet longitudinal stiffness

تابع واگنر، معادلات حاکم بر یک نمونه بال جعبه‌ای آیروداستیک استخراج شدند. در محدود تحقیقاتی که تاکنون با استفاده از روش مدل‌سازی ریاضی انجام گرفته، معادلات آیروداستیک بال جعبه‌ای با استفاده از مقاطع دوبعدی بال‌های جلو و عقب استخراج شده‌اند و این در حالی است که در تحقیق حاضر مدل سه‌بعدی بال جعبه‌ای مورد توجه قرار گرفته است. علاوه بر این، در دیگر مطالعات آیروداستیسیته پیرامون فلاتر بال جعبه‌ای نیز از نرم‌افزارهای تخصصی بهره برده شده است. لازم به ذکر است در زمان استفاده از این نرم‌افزارها علاوه بر اینکه نیاز به صرف هزینه بسیار زیاد می‌باشد؛ گاهی اوقات لازم است جهت تعیین اثر پارامترهای مختلف طراحی بر مرز فلاتر،

بزرگتر است. با توجه به روند تغییرات نمودار، افزایش نسبت طول وتر بال‌ها موجب افزایش در سرعت و فرکانس فلاتر بال جعبه‌ای می‌شود. بزرگتر بودن وتر بال جلو نسبت به بال عقب، افزایش کمی در سرعت فلاتر را در پی دارد؛ بنابراین می‌توان افزایش ۲۰ درصدی طول وتر بال جلو نسبت به بال عقب را بهترین مقدار برای بال‌ها در نظر گرفت. همچنین فرکانس فلاتر نیز با افزایش این نسبت کاملاً رفتار افزایشی از خود نشان می‌دهد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از اصل هامیلتون و بارگذاری ناپایا بر پایه

نصف وتر بال، m	b
مرکز ثقل	$C.G.$
ضریب لیفت بال	C_{l_0}
مدول یانگ، N/m^2	E
مدول برشی، N/m^2	G
بردارهای یکه سیستم مختصات قرار گرفته روی مرکز ثقل بدنه هواپیما	$\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$
بردارهای یکه سیستم مختصات بال بدون زاویه عقبگرد	$\hat{I}\hat{J}\hat{K}$
بردارهای یکه سیستم مختصات بال با زاویه عقبگرد و قبل از تغییر شکل	$\hat{i} \hat{j} \hat{k}$
بردارهای یکه سیستم مختصات بال با زاویه عقبگرد و بعد از تغییر شکل	$\hat{i}' \hat{j}' \hat{k}'$
ممان اینرسی سطح مقطع بال، m^4	I
ممان اینرسی قطبی سطح مقطع بال، m^4	J
ضریب سختی فنر، N/m	k
طول بال، m	l
نیروی آیرودینامیکی، N	L
جرم، kg	m
ممان آیرودینامیکی، $N.m$	M
مختصات تعمیم یافته	q
بردار جابجایی	R
زمان، s	t
انرژی جنبشی کل، J	T_t
سرعت سیال هوا، m/s	U
سرعت فلاتر، m/s	U_F
سرعت واگرایی، m/s	U_D
انرژی پتانسیل فنر، J	U_k
انرژی کرنشی کل، J	U_t
تغییر شکل خمشی بال در راستای m, z	w
توابع شکل برای تغییر شکل خمشی بال	w_i
کار انجام شده توسط نیروهای ناپایستار، J	$W_{n.c}$
سیستم مختصات قرار گرفته روی مرکز جرم بدنه هواپیما	X, Y, Z
سیستم مختصات بال بدون زاویه عقبگرد	X, Y, Z
سیستم مختصات بال با زاویه عقبگرد و قبل از تغییر شکل	x, y, z

مدلسازی‌های مکرر انجام گیرد که این موضوع باعث صرف زمان قابل توجه‌ای خواهد شد. لذا استفاده از مدلسازی ریاضی در تحقیقات آیرودالاستیسیته این امکان را به محققان می‌دهد تا با صرف هزینه و زمان مناسب، اثر پارامترهای طراحی بر فلاتر سیستم را تعیین نمایند. از طرفی همانگونه که ملاحظه شد، معادلاتی که با استفاده از دستگاه‌های مختصات واسط استخراج می‌شوند پیچیده می‌باشند. روش حل نیمه‌تحلیلی ارائه شده در این مقاله و همچنین دقت مناسب نتایج حاصل از آن را می‌توان به عنوان یک نوآوری در تحقیق حاضر به حساب آورد که می‌توان با استفاده از آن به حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای-انتگرالی که شامل جمله‌های انتگرالی وابسته به زمان و مکان می‌باشند، دست یافت.

در این مطالعه جهت مدلسازی اثر بالچه از دو فنر خطی طولی و پیچشی استفاده شده که دو انتهای آنها بر محور الاستیک بال‌ها قرار گرفته است. با فرض وجود دو نوع تغییر شکل خمشی و پیچشی برای بال‌ها، معادلات حاکم به شکل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای-انتگرالی استخراج شده و جهت حل عددی این معادلات از تکنیک‌های ریاضی استفاده گردید. جهت اعتبارسنجی حل عددی معادلات حاکم، نتایج بدست آمده با نتایج خروجی از نرم‌افزار نسترن مقایسه شد که نتایج نشان‌دهنده دقت مناسب مدلسازی می‌باشد. در این مقاله تعیین اثرات زاویه عقبگرد بال‌ها و نیز سفتی طولی و پیچشی بالچه بر سرعت و فرکانس فلاتر بال جعبه‌ای به عنوان پارامترهای مهم طراحی مورد توجه قرار گرفته است. نتایج این مطالعه نشان داد که کاهش میزان سفتی طولی در بالچه می‌تواند موجب افزایش قابل توجه‌ای در مرز پایداری شود، در حالی که افزایش در سفتی پیچشی بالچه می‌تواند مرز فلاتر بال جعبه‌ای را کمی ارتقا دهد. علاوه بر این، افزایش زاویه عقبگرد بال‌ها موجب افزایش بسیار زیاد در سرعت فلاتر می‌گردد و این در حالی است که بزرگ‌تر بودن وتر بال جلو نسبت به بال عقب اثر کمتری بر افزایش مرز فلاتر بال جعبه‌ای نشان می‌دهد.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

پارامتر بدون بعد آیرودالاستیک	a
محور الاستیک	$A.E.$
نسبت دپد	$A.R.$

- [3] R. Ajaj, M. Friswell, D. Smith, A.J.T.A.J. Isikveren, A conceptual wing-box weight estimation model for transport aircraft, 117(1191) (2013) 533-551.
- [4] L. Demasi, R. Cavallaro, A.J.A.j. Márquez Razón, Postcritical analysis of PrandtlPlane joined-wing configurations, 51(1) (2013) 161-177.
- [5] P. Jansen, R. Perez, Effect of Size and Mission Requirements on the Design Optimization of Non-Planar Aircraft Configurations, in: 13th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis Optimization Conference, 2010, pp. 9188.
- [6] D.J.D.F.t.u.F. Schiktanz, Master Thesis, Hamburg, HAW Hamburg, Conceptual design of a medium range box wing aircraft, (2011).
- [7] M.P. Scardaoni, M. Montemurro, E.J.A.S. Panettieri, Technology, PrandtlPlane wing-box least-weight design: a multi-scale optimisation approach, 106 (2020) 106156.
- [8] L. Di Palma, N. Paletta, M. Pecora, Aeroelastic design of a joined-wing UAV, 0148-7191, SAE Technical Paper, 2009.
- [9] C.A. Eger, A. Ricciardi, R.A. Canfield, M. Patil, Design of a scaled flight test vehicle including linear aeroelastic effects, in: 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2013, pp. 1563.
- [10] R. Bombardieri, R. Cavallaro, L. Demasi, A historical Perspective on the Aeroelasticity of Box Wings and Prandtl-Plane with New Findings, in, 57th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials ..., 2016.
- [11] M.H. Durham, R. Ricketts, Flutter of a joined-wing high altitude vehicle, in: Aerospace Flutter And Dynamic Council Meeting, 1989.
- [12] D.-H. Lee, Aeroelastic tailoring and structural optimization of joined-wing configurations, Purdue University, 2002.
- [13] J.M. Van Aken, Alleviation of whirl-flutter on a joined-wing tilt-rotor aircraft configuration using active controls, in, American Helicopter Society, 1991.
- [14] R. Cavallaro, R. Bombardieri, L. Demasi, A.J.J.o.F. Iannelli, Structures, Prandtlplane joined wing: Body freedom flutter, limit cycle oscillation and freeplay studies, 59 (2015) 57-84.

سیستم مختصات بال با زاویه عقبگرد و بعد از تغییر شکل	x', y', z'
فاصله مابین مرکز جرم و مرکز الاستیک سطح مقطع بال، m	x_θ
علائم یونانی	
توابع وابسته به زمان برای مود خمشی	$\eta_i(t)$
توابع شکل برای مود پیچشی بال	φ_i
تابع واگنر	$\phi(t)$
اپراتور تغییرات	δ
تابع دلتای دیراک	δ_D
بردارهای یکه بال بعد از تغییر شکل در راستای z' و y'	η, ξ
زاویه عقبگرد بال، °	Λ
زاویه بالاگرد بال، °	Γ
دانسیته هوا، kg/m ^۳	ρ_∞
توابع وابسته به زمان برای مود پیچشی	$\Psi_i(t)$
تغییر شکل پیچشی بال در راستای محور x rad	θ
زیر نویس	
مرکز ثقل بدنه هواپیما	l
واگرایی	D
بال جلو	f
فلاتر	F
فنر	k
بال عقب	r

مراجع

- [1] D. Dal Canto, A. Frediani, G.L. Ghiringhelli, M. Terraneo, The lifting system of a PrandtlPlane, Part 1: design and analysis of a light alloy structural solution, in: Variational analysis and aerospace engineering: mathematical challenges for aerospace design, Springer, 2012, pp. 211-234.
- [2] A. Frediani, V. Cipolla, E.J.V.A. Rizzo, A.E.M.C.f.A. Design, The PrandtlPlane configuration: overview on possible applications to civil aviation, (2012) 179-210.

- [21] R.C. Costen, Products of some generalized functions, National Aeronautics and Space Administration, 1967.
- [22] S. Fazelzadeh, A. Mazidi, Nonlinear aeroelastic analysis of bending-torsion wings subjected to a transverse follower force, (2011).
- [23] G. Karpouzian, L.J.A.j. Librescu, Nonclassical effects on divergence and flutter of anisotropic swept aircraft wings, 34(4) (1996) 786-794.
- [24] M. Goland, The flutter of a uniform cantilever wing, (1945).
- [25] Z. Qin, L.J.J.o.f. Librescu, structures, Aeroelastic instability of aircraft wings modelled as anisotropic composite thin-walled beams in incompressible flow, 18(1) (2003) 43-61.
- [26] J.M. Housner, M. Stein, Flutter analysis of swept-wing subsonic aircraft with parameter studies of composite wings, (1974).
- [27] A. Mazidi, S. Fazelzadeh, P.J.J.o.A. Marzocca, Flutter of aircraft wings carrying a powered engine under roll maneuver, 48(3) (2011) 874-883.
- [15] S.A. Fazelzadeh, D. Scholz, A. Mazidi, M.I. Friswell, Flutter characteristics of typical wing sections of a box wing aircraft configuration, (2018).
- [16] D. Sacchetti, R. Bombardieri, J. Serafini, R. Cavallaro, G. Bernardini, ACTIVE FLUTTER SUPPRESSION FOR PRANDTL PLANE CONFIGURATION.
- [17] PARSIFAL, Aeroelastic analysis of the baseline PrandtlPlane, CORDIS and INEA, 2020.
- [18] R. Bombardieri, R. Cavallaro, R. Castellanos, F.J.a.p.a. Auricchio, Studies on Coupled Flight Dynamics and Aeroelasticity of a Prandtlplane Configuration, (2021).
- [19] S.A. Fazelzadeh, A.H. Ghasemi, A.J.I.J.o.A. Mazidi, Vibration, Aeroelastic analysis of unrestrained aircraft wing with external stores under roll maneuver, 21(3) (2016) 327-333.
- [20] S. Shams, H. Haddadpour, M.S. Lahidjani, M. Kheiri, An analytical method in computational aeroelasticity based on Wagner function, in: 25th International Congress of the Aeronautical Science, Hamburg, Germany, 2006.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. H. Ghasemikaram, A. Mazidi, S. A. Fazelzadeh, *Modeling and Flutter Analysis of a Three Dimensional Box-Wing using Wagner Unsteady Aerodynamic Model*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 53(12) (2022) 5809-5830.

DOI: [10.22060/mej.2021.19690.7092](https://doi.org/10.22060/mej.2021.19690.7092)

