نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۴، شماره ۲، سال ۱۴۰۱، صفحات ۳۵۷ تا ۳۷۶
DOI: 10.22060/mej.2022.20267.7203

بررسی دوپایداری میکروصفحات پیزوالکتریک تحت فشار بر مبنای تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته

مریم محمدجانی، امیر رضا عسکری*

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۲۵
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۰۸
پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۰۴
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۱۰/۲۱

کلمات کلیدی:
سیستم‌های میکروالکترومکانیکی
فشار دیفرانسیلی
ناپایداری واجهش
مواد پیزوالکتریک

خلاصه: اخیراً ثابت شده است علاوه بر ریزسازه‌های دارای خمیدگی اولیه، میکرو ورق‌های مسطح تحت فشار نیز می‌توانند ناپایداری واجهش را تجربه کنند. با توجه به کاربردهای بالقوه‌ی این میکروصفحات در طراحی سنسورهای فوق حساس، هدف این مقاله بررسی رفتار دوپایدار چنین سازه‌هایی هنگام ترکیب آن‌ها با یک لایه‌ی پیزوالکتریک است. بدین منظور از تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته به همراه مدل صفحه‌ی غیرخطی کیرشهف استفاده می‌شود. با استفاده از روش گالرکین، معادلات کاهیده شده تعادل و پایداری حاصل می‌گردند. سپس با حل همزمان این معادلات، نقاط بحرانی مسیر تعادل میکرو ورق تعیین می‌گردند. یافته‌های حاضر با نتایج موجود در منابع مقایسه و تأیید می‌شوند. در ادامه تأثیر تحریک پیزوالکتریک بر پاسخ دوپایدار سیستم بررسی می‌گردد. نتایج نشان می‌دهند شکل مسیر تعادل و همچنین تعداد و موقعیت نقاط بحرانی آن با اعمال ولتاژ پیزوالکتریک شدیداً تحت تأثیر قرار می‌گیرند. مقاله حاضر برخلاف مطالعات پیشین نشان می‌دهد، اعمال ولتاژ پیزوالکتریک مثبت همواره باعث کاهش آستانه‌ی ناپایداری کشیدگی سیستم نمی‌شود و گاهی اوقات تحت تحریک مقادیر بزرگ فشار دیفرانسیلی، می‌تواند باعث افزایش آن گردد. همچنین نتایج حاکی از آنند که با اعمال ولتاژ پیزوالکتریک مثبت، ناحیه‌ی واجهش منبسط و با اعمال مقادیر منفی، این ناحیه منقبض می‌گردد. نتایج حاضر می‌تواند برای مهندسان صنعت سیستم‌های میکروالکترومکانیکی بسیار مفید باشد.

۱- مقدمه

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی بیشتر به عنوان محرک یا حسگر به کار می‌روند. این سیستم‌ها به دلیل مصرف انرژی پایین و نیز ابعاد بسیار کوچک، امروزه کاربرد گسترده‌ای دارند [۱]. ریزسیستم‌های الکترومکانیکی معمولاً از یک الکترود ثابت و یک میکروصفحه بعنوان الکترود متحرک تشکیل می‌شوند [۲]. با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی، میکروصفحه به سمت پایه‌ی زیرین آن خم می‌شود. با افزایش ولتاژ ورودی، خیز الکترود متحرک افزوده شده که به نوبه خود منجر به افزایش جاذبه‌ی الکتریکی بین دو الکترود نیز می‌گردد. با افزایش جاذبه‌ی بین دو الکترود، نیروی برگرداننده‌ی الاستیک توان مقابله با جاذبه‌ی الکتریکی را نداشته و میکروصفحه ناگهان به پایه‌ی ثابت زیرینش برخورد می‌کند. به این رفتار ریزسازه‌های الکترومکانیکی، ناپایداری کشیدگی و به کوچکترین ولتاژی که به ازای آن این اتفاق رخ می‌دهد، اختلاف پتانسیل کشیدگی گویند [۳]. ناپایداری کشیدگی برای نخستین بار به صورت همزمان توسط تیلور[۴] و ناتانسون [۵] مشاهده شده است. شایان ذکر است که گرچه ناپایداری کشیدگی در میکروابزارهای تشدیدی مشکل ساز بوده، اما در میکروسوئیچ‌ها عامل مطلوب طراحی است، به گونه‌ای که با ایجاد این ناپایداری سیستم در وضعیت روشن قرار می‌گیرد.

علاوه بر ناپایداری کشیدگی، ریزسازه‌هایی که دچار خمیدگی اولیه هستند، با ناپایداری دیگری به نام ناپایداری واجهش هنگامی که توسط میدان الکتریکی در خلاف جهت قوس اولیه تحریک می‌شوند، مواجه می‌گردند [۶]. هرچند برخلاف تصور عموم مبنی بر مشاهده‌ی این نوع ناپایداری در سیستم‌هایی با خمیدگی اولیه، اخیراً نشان داده شده است میکروصفحات مسطح تحت فشار دیفرانسیلی نیز ممکن است این پدیده را تجربه نمایند [۷ و ۸].

تحقیقات اخیر نشان می‌دهند که رفتار مکانیکی مواد در ابعاد میکرون تحت تأثیر اندازه‌ی آن‌ها است [۹]. از آن‌جایی که مکانیک محیط پیوسته‌ی کلاسیک نمی‌تواند رفتار وابسته به بعد مواد را توصیف کند، تئوری‌های محیط پیوسته وابسته به بعد ارائه شده‌اند. در میان این نظریه‌ها، تئوری

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ar.askari@hsu.ac.ir

گرادیان کرنش [۱۰] و تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته [۱۱] به دلیل دقت بالا و در عین حال سادگی تعیین پارامتر مقیاس طول مورد توجه بیشتری قرار گرفته‌اند. تئوری‌های گرادیان کرنش و تنش‌کوپل بهبودیافته به ترتیب از ۳ و ۱ ثابت مادی علاوه بر ثوابت لامه برای توصیف رفتار وابسته به بعد مواد همسان‌گرد استفاده می‌کنند. هرچند تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته دقتی تقریباً برابر با دقت تئوری گرادیان کرنش در توصیف رفتار وابسته به بعد سازه‌های تحت خمش دارد [۱۲].

تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته حالت ساده شده‌ای از تئوری گرادیان کرنش می‌باشد که در آن یک ذره‌ی مادی در اثر اعمال یک بارگذاری دلخواه، در مقیاسی مشخص علاوه بر انتقال دچار دوران نیز می‌شود. بنابراین در تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته، انرژی کرنشی علاوه بر تانسور کرنش (مزدوج با تانسور تنش کوشی)، شامل تانسور انحنا (مزدوج با بخش انحرافی تانسور تنش‌کوپل) نیز می‌باشد [۱۱]. شایان ذکر است همان‌طور که تانسورهای تنش و کرنش از طریق رابطه هوک با هم مرتبط می‌شوند، تانسور انحنا و بخش انحرافی تانسور تنش‌کوپل از طریق پارامترهای مقیاس طول مادی به هم مرتبط می‌گردند. شایان ذکر است مهم‌ترین مزیت تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته نسبت به سایر تئوری‌های مرتبه بالای وابسته به بعد، در بر گرفتن تنها یک پارامتر مقیاس طول مادی با هدف لحاظ کردن اثر اندازه سیستم می‌باشد. این ویژگی تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته استفاده از آن را بسیار آسان نموده و مدلسازی‌های دقیق‌تری را در مقایسه با تئوری کلاسیک مکانیک محیط پیوسته ارائه می‌دهد. در اینجا خلاصه‌ای از پژوهش‌هایی که تاکنون به بررسی رفتار وابسته به بعد میکروصفحات با استفاده از تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته پرداخته‌اند، مرور می‌گردند.

اصغری [۱۳]، با استفاده از تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته مدلی وابسته به بعد برای ورق‌های نازک با شکل دلخواه ارائه نمود. طهانی و همکاران [۱۴]، اثرات هم‌زمان میدان الکتریکی و ابعاد کوچک را بر ناپایداری کشیدگی در میکروصفحات مستطیل شکل وابسته به بعد چهار طرف گیردار و چهارطرف ساده با صرف نظر از جملات غیرخطی هندسی از طریق روش اجزای محدود مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها دریافتند تنها فرکانس طبیعی اول میکروصفحه در هنگام وقوع ناپایداری کشیدگی به صفر می‌رسد. آن‌ها همچنین دریافتند که مؤلفه‌های تنش‌کوپل به هیچ وجه شکل مودهای میکروصفحه را تحت تأثیر قرار نمی‌دهند. عسکری و طهانی [۱۵]، یک مدل کاهیده شده الکترومکانیکی وابسته به بعد برای میکروحسگرهای تشدیدی صفحه‌ای مستطیل شکل بر اساس تئوری بهبودیافته‌ی تنش‌کوپل ارائه کردند، آن‌ها دریافتند که استفاده از این تئوری در تحلیل ناپایداری کشیدگی قادر است شکاف موجود بین نتایج تئوری کلاسیک و نتایج آزمایشگاهی را حذف نماید همچنین دریافتند که در میکروصفحات دارای خیز اولیه به حساب آوردن اثرات اندازه بسیار ضروری‌تر از میکروصفحات تخت است. ژائو و همکاران [۱۶] با ارائه‌ی یک مدل کاهیده شده ارتعاشات آزاد و ناپایداری کشیدگی حول وضعیت تعادل استاتیکی را برای میکرو ورق‌های غیرخطی هندسی در حضور میدان الکتریکی بررسی نمودند. آن‌ها با ضرب مخرج نیروی الکترواستاتیک در معادله‌ی حاکم بر تعادل جابجایی برون صفحه‌ای، تقریب جابجایی‌های درون صفحه‌ای برحسب جابجایی عرضی صفحه و گسسته سازی آن به وسیله‌ی شکل مود خطی و نامیرای سیستم، مدل خود را ارائه نمودند. وانگ و همکاران [۱۷] با در نظر گرفتن جابجایی‌های درون صفحه‌ای مدل غیرخطی و وابسته به بعدی را برای میکروصفحات الکترومکانیکی ارائه نمودند. آن‌ها با استفاده از مدل کاهیده شده‌ای کاملاً مشابه کاری که قبلاً توسط باترا و همکاران [۱۸] ارائه شده بود، اثرات همزمان اندازه، نیروی کسیمیر، انرژی سطحی و میدان الکتریکی را بر پاسخ استاتیکی و ارتعاشات آزاد نانو/میکرو ورق‌های مستطیل شکل چهار طرف گیردار بررسی نمودند. آن‌ها دریافتند که با کوچک شدن ابعاد سیستم از مقیاس میکرو به نانو، در نظر گرفتن اثرات نیروی کسیمیر و انرژی سطحی بسیار حائز اهمیت می‌گردد. عسکری و طهانی [۱۹] ناپایداری کشیدگی دینامیکی میکروصفحات غیر خطی هندسی را بر اساس تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته بررسی نمودند. آن‌ها در این پژوهش اثرات جابجایی‌های درون صفحه‌ای، نسبت ابعاد صفحه، مؤلفه‌های تنش‌کوپل و فاصله اولیه بین دو الکترود را بر آستانه ناپایداری دینامیکی سیستم مطالعه کردند. کاظمی و همکاران [۲۰] ناپایداری کشیدگی میکروصفحات غیرخطی همراه با یک لایه پیزوالکتریک را بر اساس تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها دریافتند که نتایج بدست آمده از تئوری غیرخطی بزرگتر از نتایج تئوری خطی است و اختلافات آن‌ها با افزایش نسبت فاصله اولیه بین دو الکترود به ضخامت میکروصفحه افزایش می‌یابد. همچنین نشان دادند که اعمال یک ولتاژ مثبت کوچک به لایه پیزوالکتریک اختلاف پتانسیل کشیدگی سیستم را همواره کاهش می‌دهد. در این راستا شایان ذکر است در پژوهش پیش‌رو نشان داده خواهد شد در میکرو ورق‌های تحت فشار دیفرانسیلی براساس میزان فشار اعمال شده، اعمال ولتاژ مثبت به لایه پیزوالکتریک گاهی اوقات می‌تواند موجب افزایش مرز ناپایداری سیستم گردد. چراکه در سیستم‌های دوپایدار بر خلاف سیستم‌های تک‌پایدار،

مسیر تعادل سیستم به گونه‌ای است که ناپایداری کشیدگی گاهی اوقات بجای نقطه حدی بالایی، از نقطه حدی پایینی به وقوع می‌پیوندد. لذا چون، همان‌طور که در ادامه نشان داده خواهد شد، اعمال ولتاژ پیزوالکتریک مثبت موجب کاهش اختلاف پتانسیل متناظر با نقطه حدی بالایی و افزایش آن در نقطه حدی پایینی می‌شود، تأثیر آن بر مرز ناپایداری کشیدگی سیستم همواره کاهشی نخواهد بود.

قایش و فرخی اثرات اندازه را بر پاسخ وابسته به بعد دینامیکی میکرو ورق‌های غیرخطی هندسی نازک با استفاده از تئوری کریشهف [۲۱] و ضخیم براساس تئوری مرتبه سوم برشی [۲۲] به صورت عددی بررسی نمودند. آن‌ها همچنین با استفاده از روشی مشابه اثر نقص اولیه را بر پاسخ وابسته به بعد دینامیکی میکرو ورق‌های نازک [۲۳] و ضخیم [۲۴] تحت تحریک هارمونیک ساده به ترتیب توسط تئوری‌های کریشهف و مرتبه سوم برشی بررسی کردند. فرخی و قایش همچنین مکانیک غیرخطی میکروصفحات با تحریک الکتریکی را مورد بررسی قراردادند [۲۵]. بر خلاف این باور معمول که ناپایداری واجهش تنها در سیستم‌های دارای خمیدگی اولیه رخ می‌دهد، اخیراً ثابت شده است که میکروسازه‌های مسطح نیز تحت فشار دیفرانسیلی می‌توانند ناپایداری واجهش را تجربه کنند. عسکری [۸] رفتار دوپایدار میکروصفحات تخت را تحت فشار الکتریکی مورد بررسی قرار داد. برخلاف آن‌چه پیش‌تر فرض می‌شد که رفتار دوپایدار و ناپایداری واجهش تنها در میکروصفحات دارای خمیدگی اولیه رخ می‌دهد؛ در این پژوهش نشان داده شد میکروصفحات تخت چهارطرف گیردار که تحت فشار دیفرانسیلی قرارگرفته‌اند نیز می‌توانند به ازای مقادیر خاصی از فشار این ناپایداری را تجربه کنند.

همان‌طور که پیش‌تر نیز اشاره شد، اخیراً رفتار دوپایدار وابسته به بعد در سازه‌های مسطح تحت فشار دیفرانسیلی مورد بررسی قرار گرفته است. هرچند مطابق بهترین جستجوهای صورت گرفته توسط نویسندگان، پدیدهی واجهش در میکروصفحات مستطیلی مجهز شده به لایه پیزوالکتریک تاکنون مطالعه نشده است. از انجا که، عمدتاً فرض بر این بوده است که فقط سیستم‌های با قوس اولیه می‌توانند با ناپایداری واجهش روبرو شوند، تاکنون توجه کمتری به بررسی امکان وقوع ناپایداری واجهش در میکروسازه‌های مسطح شده است. هرچند حسگرهای دوپایدار مبتنی بر میکرو ورق‌های مسطح، با توجه به صلبیت خمشی پایین این سازه‌ها نسبت به سیستم‌های با قوس اولیه، از حساسیت بیشتری برخوردار هستند [۸].

با توجه به توضیحات ارائه شده در بالا، مشاهده می‌شود حسگرهای مبتنی بر میکرو ورق‌های دوپایدار مسطح، علی رغم حساسیت بالاترشان نسبت به سازه‌های با قوس اولیه، تاکنون بسیار کمتر مورد بررسی قرارگرفته‌اند. از طرفی با توجه به کاربرد بسیار گسترده مواد پیزوالکتریک در حسگرهای میکروالکترومکانیکی [۲۸-۲۶]، هدف اصلی مقاله پیش‌رو، بررسی ناپایداری واجهش در میکروصفحات الکترومکانیکی دارای لایه‌ی پیزوالکتریک تحت فشار دیفرانسیلی بر اساس تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته می‌باشد. بدین منظور سایر قسمت‌های پژوهش حاضر به صورت زیر سازمان یافته‌اند. بخش دوم به مرور تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته به صورت خلاصه می‌پردازد. در ادامه با معرفی میدان جابجایی میکرو ورق‌های نازک مستطیل شکل، معادلات حاکم بر تعادل در بخش سوم استخراج می‌گردند. در بخش چهارم با به خدمت گرفتن روش باقیمانده وزن‌دار گالرکین، مدل کاهیده شده چند مؤدی متناظر با میکرو ورق حاضر استخراج می‌شود. یافته‌های حاصل از مدل ارائه شده در این مقاله در بخش پنجم با نتایج گزارش شده در پژوهش‌های پیشین مقایسه و صحه‌گذاری می‌شوند. در این قسمت همچنین اثر اختلاف پتانسیل پیزوالکتریک بر وقوع ناپایداری واجهش در صفحات تحت فشار دیفرانسیلی به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد. خلاصه نتایج حاصل از پژوهش پیش‌رو نیز در بخش ششم جمع‌بندی می‌شود.

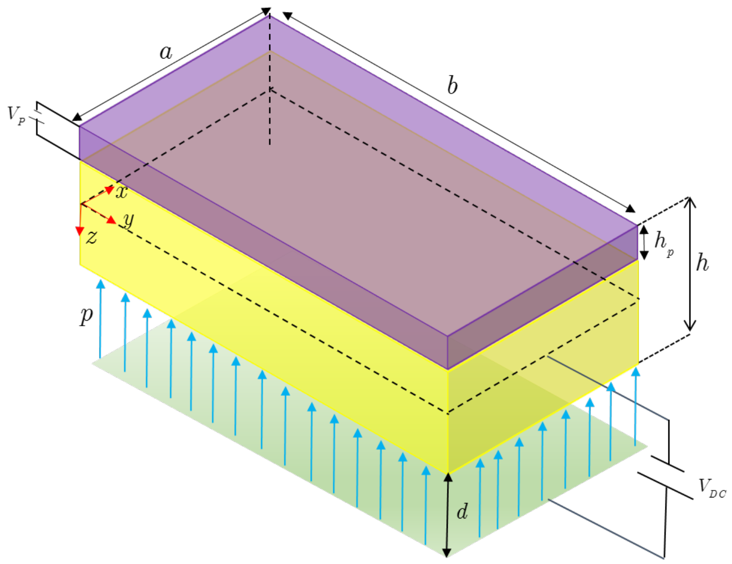
۲- مروری بر تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته

بر مبنای تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته، انرژی کرنشی علاوه بر تانسورکرنش (که مزدوج تانسور تنش است)، شامل تانسور متقارن انحنا (که مزدوج بخش انحرافی تانسور تنش‌کوپل است) نیز می‌باشد. از این رو در تغییر شکل‌های کوچک یک ماده‌ی الاستیک خطی، انرژی کرنشی به صورت رابطه (۱) بیان می‌گردد.

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij}\right)dV \tag{۱}$$

که در آن σ_{ij}، ε_{ij}، m_{ij} و χ_{ij} به‌ترتیب تانسور تنش کوشی، تانسور کرنش، بخش انحرافی تانسور تنش‌کوپل و تانسور انحنای متقارن، می‌باشند.

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{۲}$$



شکل ۱. شماتیک سه بعدی میکروصفحه‌ی مستطیلی با یک لایه‌ی پیزو الکتریک

Fig. 1. Three-dimensional schematic of a rectangular micro-plate with a piezoelectric layer

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \quad (۳)$$

$$m_{ij}=2\mu l^{2}\chi_{ij} \quad (۴)$$

$$\chi_{ij}=\frac{1}{2}\left(\theta_{i,j}+\theta_{j,i}\right) \quad (۵)$$

در روابط فوق u بردار جابجایی، θ بردار چرخش و l پارامتر مقیاس طول مادی نامیده می‌شوند. همچنین λ و μ ثوابت لامه هستند.

لازم به ذکر است، رابطه‌ی مؤلفه‌های بردار چرخش θ و مؤلفه‌های بردار جابجایی u به شکل زیر می‌باشد.

$$\theta_{i}=\frac{1}{2}e_{ijk}u_{k,j} \quad (۶)$$

۳- میدان جابجایی، روابط ساختاری و معادلات حاکم بر تعادل

شکل ۱ شماتیکی از یک میکروصفحه‌ی مستطیلی به طول b، عرض a و ضخامت کل h، را نشان می‌دهد. مطابق این شکل یک لایه‌ی پیزوالکتریک به ضخامت h_p در بالای میکرو ورق قرار دارد. همچنین فاصله‌ی اولیه‌ی بین میکروصفحه و الکترود ثابت نیز d می‌باشد.

جاذبه‌ی الکترواستاتیک با صرف نظر از اثرات لبه، به دلیل پهن بودن الکترود متحرک، به صورت رابطه‌ی (۷) بیان می‌گردد [۲۹].

$$F_{es}=\frac{\in V_{DC}^{2}}{2\left(d-w\right)^{2}} \quad (۷)$$

که در آن ∈، ضریب گذردهی دی‌الکتریک مابین دو الکترود است که مقدار آن برای شرایط خلأ به صورت $\in=۸/۸۵۴\times۱۰^{-۱۲}\left(C^{۲}N^{-۱}m^{-۲}\right)$ می‌باشد [۳۰]. V_{DC} نیز اختلاف پتانسیل اعمالی به سیستم بوده و w معرف خیز می‌باشد.

بر مبنای تئوری کلاسیک صفحات، میدان جابجایی یک نقطه‌ی دلخواه از میکروصفحه در دستگاه مختصات کارتزین به صورت رابطه‌ی (۸) توصیف می‌شود [۳۱].

$$u_{1}(x,y,z)=u(x,y)-zw_{,x}(x,y) \quad \text{(الف)}$$
$$u_{2}(x,y,z)=v(x,y)-zw_{,y}(x,y) \quad \text{(ب)} \quad (۸)$$
$$u_{3}(x,y,z)=w(x,y) \quad \text{(ج)}$$

که در آن (u, v, w) نشان دهنده‌ی مؤلفه‌های میدان جابجایی یک نقطه واقع بر سطح میانی میکروصفحه به ترتیب در امتداد مختصات (x, y, z) است. با توجه به این حقیقت که میکروصفحات الکترومکانیکی معمولاً حین تغییر شکل، با جابجایی‌های بزرگ، شیب‌های متوسط و کرنش‌های کوچک مواجه می‌شوند [۱۹]، رابطه‌ی کرنش-جابجایی بر اساس تئوری فون‌کارمن [۳۱] تقریب زده می‌شود. بنابراین خواهیم داشت.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + 0.5w_{,x}^2 \\ v_{,y} + 0.5w_{,y}^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} - z\begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \tag{۹}$$

که در آن متغیرهای مستقل نوشته شده پس از علامت کاما بیان‌گر مشتقات جزئی نسبت به آن متغیرها می‌باشند.

مؤلفه‌های غیر صفر تانسور انحنا نیز بر اساس رابطه‌ی (۵) به صورت رابطه‌ی (۱۰) بدست خواهند آمد [۱۳].

$$\begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \chi_{xz} \\ \chi_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,xy} \\ -w_{,xy} \\ -\frac{1}{2}\left(w_{,xx} - w_{,yy}\right) \\ -\frac{1}{4}\left(u_{,xy} - v_{,xx}\right) \\ -\frac{1}{4}\left(u_{,yy} - v_{,xy}\right) \end{Bmatrix} \tag{۱۰}$$

جهت استخراج معادلات حرکت حاکم و شرایط مرزی مرتبط با آن از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل بهره گرفته می‌شود [۳۲]. طبق این اصل داریم:

$$\delta\pi = \delta\left(U - W_{\text{ext}}\right) = 0 \tag{۱۱}$$

که در آن δU تغییرات انرژی کرنشی بوده و به صورت رابطه‌ی (۱۲) می‌باشد.

$$\delta U = \int_V \left[\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + m_{ij}\delta\chi_{ij}\right] dzdA \tag{۱۲}$$

همچنین δW_{ext} کار مجازی انجام شده توسط نیروهای خارجی بوده که شامل دو بخش به قرار زیر است

$$\delta W_{\text{ext}}^{\text{es}} = \int_\Omega \frac{\in V_{DC}^{\,2}}{2\left(d - w\right)^2}\delta W \, d\Omega \qquad \text{(الف)}$$

$$\delta W_{\text{ext}}^{p} = \int_\Omega -p\,\delta W \, d\Omega \qquad \text{(ب)} \tag{۱۳}$$

که در آن‌ها Ω به سطح پایینی میکروصفحه اشاره دارد.

با جایگزین کردن روابط (۱۲) و (۱۳) در رابطه‌ی (۱۱)، به خدمت گرفتن روابط تنش‌کرنش برای مواد همسانگرد در حالت تنش صفحه‌ای و استفاده از لم اساسی حساب تغییرات [۳۲]، معادلات تعادل به صورت زیر استخراج می‌شوند.

$$N_{x,x} + N_{xy,y} + \frac{1}{2}\left(\Upsilon_{xz,xy} + \Upsilon_{yz,yy}\right) = 0 \qquad \text{(الف)}$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} - \frac{1}{2}\left(\Upsilon_{xz,xx} + \Upsilon_{yz,xy}\right) = 0 \qquad \text{(ب)}$$

$$\begin{aligned} &\left(N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y}\right)_{,x} + \left(N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y}\right)_{,y} + \\ &M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + \frac{\varepsilon v^2}{2\left(d - w\right)^2} - p + \\ &\Upsilon_{xy,xx} - \Upsilon_{xy,yy} + M_{y,yy} + \Upsilon_{y,xy} - \Upsilon_{x,xy} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(ج)} \tag{۱۴}$$

همچنین شرایط مرزی بدست آمده از روابط (۱۴) به صورت روابط (۱۵) بیان می‌گردند.

$$\left(N_x+\frac{1}{4}\Upsilon_{xz,y}\right)n_x+\left(N_{xy}+\frac{1}{4}\Upsilon_{xz,x}+\frac{1}{2}\Upsilon_{yz,y}\right)n_y=0\ or\ \delta u=0 \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{1}{4}\Upsilon_{xz}n_y=0\ \ or\ \ \delta u_{,x}=0 \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{1}{4}\Upsilon_{xz}n_x+\frac{1}{2}\Upsilon_{yz}n_y=0\ \ or\ \ \delta u_{,y}=0 \quad \text{(ج)}$$

$$\left(N_{xy}-\frac{1}{2}\Upsilon_{xz,x}-\frac{1}{4}\Upsilon_{yz,y}\right)n_x+\left(N_y-\frac{1}{4}\Upsilon_{yz,x}\right)n_y=0 or\ \delta v=0 \quad \text{(د)}$$

$$\frac{1}{4}\Upsilon_{yz}n_x=0\ \ or\ \ \delta v_{,y}=0 \quad \text{(ه)} \qquad (۱۵)$$

$$\frac{1}{4}\Upsilon_{yz}n_y+\frac{1}{2}\Upsilon_{xz}n_x=0\ \ or\ \ \delta v_{,x}=0 \quad \text{(و)}$$

$$\left(\begin{aligned}&N_xw_{,x}+N_{xy}w_{,y}+M_{x,x}+\\&M_{xy,y}-\frac{1}{2}\Upsilon_{x,y}+\Upsilon_{xy,x}+\frac{1}{2}\Upsilon_{y,y}\end{aligned}\right)n_x+\left(\begin{aligned}&N_{xy}w_{,x}+N_yw_{,y}+M_{y,y}+\\&M_{xy,x}-\frac{1}{2}\Upsilon_{x,x}-\Upsilon_{xy,y}+\frac{1}{2}\Upsilon_{y,x}\end{aligned}\right)n_y=0 or\ \delta w=0 \quad \text{(ز)}$$

$$\left(M_x+\Upsilon_{xy}\right)n_x+\left(M_{xy}-\frac{1}{2}\Upsilon_x+\frac{1}{2}\Upsilon_y\right)n_y=0\ or\ \delta w_{,x}=0 \quad \text{(ح)}$$

$$\left(M_{xy}-\frac{1}{2}\Upsilon_x+\frac{1}{2}\Upsilon_y\right)n_x+\left(M_y-\Upsilon_{xy}\right)n_y=0\ \ or\ \ \delta w_{,y}=0 \quad \text{(ط)}$$

که در آن n_x و n_y مؤلفه‌های بردار یکه‌ی قائم بر سطح هستند. همچنین $N_i, M_i\ (i=x,y,xy)$ و $\Upsilon_j\ (j=x,y,xy,xz,yz)$ به ترتیب منتجه‌های تنش و تنش‌کوپل بوده که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left[N_x,N_y,N_{xy}\right]=\int_{\frac{h}{2}-hp}^{\frac{h}{2}}\left[\sigma_x^p,\sigma_y^p,\sigma_{xy}^p\right]dz+\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-hp}\left[\sigma_x^s,\sigma_y^s,\sigma_{xy}^s\right]dz \quad \text{(الف)}$$

$$\left[M_x,M_y,M_{xy}\right]=\int_{\frac{h}{2}-hp}^{\frac{h}{2}}\left[\sigma_x^p,\sigma_y^p,\sigma_{xy}^p\right]zdz+\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-hp}\left[\sigma_x^s,\sigma_y^s,\sigma_{xy}^s\right]zdz \quad \text{(ب)} \qquad (۱۶)$$

$$\left[\Upsilon_x,\Upsilon_y,\Upsilon_{xy},\Upsilon_{xz},\Upsilon_{yz}\right]=\int_{\frac{h}{2}-hp}^{\frac{h}{2}}\left[m_x,m_y,m_{xy},m_{xz},m_{yz}\right]dz+\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-hp}\left[m_x,m_y,m_{xy},m_{xz},m_{yz}\right]dz \quad \text{(ج)}\ (۱۶)$$

که در آن $\sigma_i^p\ \left(i=x,y,xy\right)$ و به ترتیب مؤلفه‌های تانسور تنش در لایه پیزوالکتریک و لایه زیرین آن در میکروصفحه‌ی مستطیلی می‌باشند. بنابراین روابط (۱۶) به صورت زیر، بر حسب مؤلفه‌های میدان جابجایی به صورت روابط (۱۷) بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix}N_x\\N_y\\N_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&0\\A_{12}&A_{11}&0\\0&0&A_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{,x}+0.5w_{,x}^2\\v_{,y}+0.5w_{,y}^2\\u_{,y}+v_{,x}+w_{,x}w_{,y}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&0\\B_{12}&B_{11}&0\\0&0&B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_{,xx}\\w_{,yy}\\2w_{,xy}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&a_{31}\\0&0&a_{32}\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\E_z\end{Bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{Bmatrix}M_x\\M_y\\M_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&0\\B_{12}&B_{11}&0\\0&0&B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{,x}+0.5w_{,x}^2\\v_{,y}+0.5w_{,y}^2\\u_{,y}+v_{,x}+w_{,x}w_{,y}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}&0\\D_{12}&D_{11}&0\\0&0&D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_{,xx}\\w_{,yy}\\2w_{,xy}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&b_{31}\\0&0&b_{32}\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\E_z\end{Bmatrix} \quad \text{(ب)}\ (۱۷)$$

$$\begin{Bmatrix}\Upsilon_x\\\Upsilon_y\\\Upsilon_{xy}\\\Upsilon_{xz}\\\Upsilon_{yz}\end{Bmatrix}=N\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-0.5&0&0\\0&0&0&-0.25&0\\0&0&0&0&-0.25\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_{,xy}\\w_{,xy}\\w_{,xx}-w_{,yy}\\u_{,xy}-v_{,xx}\\u_{,yy}-v_{,xy}\end{Bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

که در آن $E_z=-v_p/h_p$ و ضرایب A_{ij}، B_{ij}، D_{ij} ($i=۱,۶$) و N، ($j=۱,۲,۶$)، $a_{۳k}$ و $b_{۳k}$ ($k=۱,۲$) در پیوست ۱ داده شده است. با جایگزین کردن روابط (۱۷) در معادلات تعادل (۱۴)، پس از ساده‌سازی، معادلات حاکم بر تعادل به صورت روابط (۱۸) استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&A_{11}\left[u_{,xx}+w_{,x}w_{,xx}\right]+\left(A_{12}+A_{66}\right)\times\\
&\left[v_{,xy}+w_{,y}w_{,xy}\right]+A_{66}\left[u_{,yy}+w_{,x}w_{,yy}\right]-\\
&B_{11}w_{,xxx}-\left[B_{12}+2B_{66}\right]w_{,xyy}+\\
&\frac{N}{8}\nabla^2\left(v_{,xy}-u_{,yy}\right)=0
\end{aligned}\qquad \text{(الف)}$$

$$\begin{aligned}
&A_{11}\left[v_{,yy}+w_{,y}w_{,yy}\right]+\left(A_{12}+A_{66}\right)\times\\
&\left[u_{,xy}+w_{,x}w_{,xy}\right]+A_{66}\left[v_{,xx}+w_{,y}w_{,xx}\right]-\\
&B_{11}w_{,yyy}-\left[B_{12}+2B_{66}\right]w_{,xxy}+\\
&\frac{N}{8}\nabla^2\left(u_{xy}-v_{xx}\right)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&w_{,xx}\{A_{11}\left(u_{,x}+0.5w_{,x}^2\right)+A_{12}\left(v_{,y}+0.5w_{,y}^2\right)-\\
&B_{11}w_{,xx}-B_{12}w_{,yy}-a_{31}E_z\}+\\
&w_{,yy}\{A_{11}\left(v_{,y}+0.5w_{,y}^2\right)+\\
&A_{12}\left(u_{,x}+0.5w_{,x}^2\right)-B_{11}w_{,yy}-\\
&B_{12}w_{,xx}-a_{32}E_z\}+\\
&w_{,xy}\{2A_{66}\left(u_{,y}+v_{,x}+w_{,x}w_{,y}\right)-4B_{66}w_{,xy}\}-\\
&\frac{N}{8}\{\nabla^2\left(v_{,xy}-u_{,yy}\right)w_{,x}+\\
&\nabla^2\left(u_{,xy}-v_{,xx}\right)w_{,y}\}-\frac{N}{2}\nabla^4 w
\end{aligned}\qquad \text{(ب)}\quad (۱۸)$$

$$\begin{aligned}
&+B_{11}\begin{pmatrix}u_{,xxx}+\left(w_{,xx}\right)^2+w_{,x}w_{,xxx}+\\ v_{,yyy}+\left(w_{,yy}\right)^2+w_{,y}w_{,yyy}\end{pmatrix}+\\
&B_{12}\left(v_{,yxx}+2\left(w_{,xy}\right)^2+w_{,xxy}w_{,y}+u_{,xyy}+w_{,x}w_{,xyy}\right)+\\
&2B_{66}\begin{pmatrix}u_{,xyy}+v_{,xxy}+\left(w_{,xy}\right)^2+w_{,yy}w_{,xx}+\\ w_{,xxy}w_{,y}+w_{,xyy}w_{,x}\end{pmatrix}-\\
&D_{11}\left(w_{,xxxx}+w_{,yyyy}\right)-\left(2D_{12}+4D_{66}\right)w_{,xxyy}+\\
&\frac{\varepsilon V^2}{2\left(d-w\right)}-p=0
\end{aligned}\qquad \text{(ج)}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
&\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\\
&\nabla^4=\nabla^2\nabla^2=\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)
\end{aligned}\qquad (۱۹)$$

لازم به ذکر است شرایط مرزی داده شده در روابط (۱۵) برای میکروصفحه‌های چهار طرف گیردار به صورت روابطه‌ی (۲۰) ساده می‌شوند [۱۹].

$$u=v=w=w_{,x}=w_{,y}=0\ at\ x=0,a \qquad \text{(الف)}$$
$$u=v=w=w_{,x}=w_{,y}=0\ at\ y=0,b \qquad \text{(ب)}\quad (۲۰)$$

برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی و به منظور امکان بررسی اثر ترکیبی پارامترهای مؤثر، معادلات حاکم بر حرکت بی‌بعد می‌شوند. بدین منظور پارامترهای بی‌بعد مسأله به صورت رابطه‌ی (۲۱) انتخاب می‌گردند:

$$\begin{aligned}
&\hat{x}=\frac{x}{a}\ ,\ \hat{y}=\frac{y}{b}\ ,\\
&\hat{w}=\frac{w}{a}\ ,\ \hat{u}=\frac{au}{d^2}\ ,\ \hat{v}=\frac{bv}{d^2}
\end{aligned}\qquad (۲۱)$$

با جایگذاری مقادیر بی‌بعد فوق در روابط (۱۸)، معادله‌ی حاکم بر تعادل بی‌بعد به صورت روابط (۲۲) بدست خواهند آمد. همچنین به منظور سادگی بیشتر پارامترهای بی‌بعد در رابطه‌ی (۲۲) بدون هت، ^، نوشته شده‌اند. قابل توجه است که از این پس تمامی روابط بدست آمده بر پایه‌ی پارامترهای بدون بعد خواهند بود.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{E_s h}\Big(\ A_{11}\left(u_{,xx}+w_{,x}w_{,xx}\right)+\\
&\alpha_1^2\left(A_{12}+A_{66}\right)\left(v_{,xy}+w_{,y}w_{,xy}\right)+\\
&\alpha_1^2A_{66}\left(u_{,yy}+w_{,x}w_{,yy}\right)-\frac{B_{11}}{h\alpha_3}w_{,xxx}-\\
&\frac{\alpha_1^2}{h\alpha_3}\left(B_{12}+2B_{66}\right)w_{,xyy}+\\
&\frac{N}{8\alpha_2^2h^2}\left(\alpha_1^2v_{,xyyy}+v_{,xxxy}-u_{,xxyy}-\alpha_1^2u_{,yyyy}\right)\Big)=0
\end{aligned}\qquad \text{(الف)}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{E_s h}\Big(\ \alpha_1^4A_{11}\left(v_{,yy}+w_{,y}w_{,yy}\right)+\\
&\alpha_1^2\left(A_{12}+A_{66}\right)\left(u_{,xy}+w_{,x}w_{,xy}\right)+\\
&\alpha_1^2A_{66}\left(v_{,xx}+w_{,y}w_{,xx}\right)-\frac{\alpha_1^4B_{11}}{h\alpha_3}w_{,yyy}-\\
&\frac{\alpha_1^2}{h\alpha_3}\left(B_{12}+2B_{66}\right)w_{,xxy}+\\
&\frac{N}{8\alpha_2^2h^2}\left(\alpha_1^2u_{,xyyy}+u_{,xxxy}-v_{,xxxx}-\alpha_1^2v_{,xxyy}\right)\Big)=0
\end{aligned}\qquad \text{(ب)}\quad (۲۲)$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{E_s h}\Bigg(w_{,xx}\begin{pmatrix} \alpha_3^2 A_{11}\left(u_{,x}+0.5w_{,x}^2\right)+ \\ \alpha_1^2\alpha_3^2 A_{12}\left(v_{,y}+0.5w_{,y}^2\right)-\dfrac{\alpha_3}{h}B_{11}w_{,xx}- \\ \dfrac{\alpha_3\alpha_1^2}{h}B_{12}w_{,yy}-\alpha_1^2\alpha_2^2 a_{31}E_z \end{pmatrix}+ \\
&w_{,yy}\begin{pmatrix} \alpha_3^2\alpha_1^4 A_{11}\left(v_{,y}+0.5w_{,y}^2\right)+ \\ \alpha_3^2\alpha_1^2 A_{12}\left(u_{,x}+0.5w_{,x}^2\right)-\dfrac{\alpha_3\alpha_1^4}{h}B_{11}w_{,yy}- \\ \dfrac{\alpha_3\alpha_1^2}{h}B_{12}w_{,xx}-\alpha_1^4\alpha_2^2 a_{32}E_z \end{pmatrix}+ \\
&w_{,xy}\begin{pmatrix} 2\alpha_1^2\alpha_3^2 A_{66}\left(u_{,y}+v_{,x}+w_{,x}w_{,y}\right)- \\ \dfrac{4\alpha_1\alpha_3}{h}B_{66}w_{,xy} \end{pmatrix}- \\
&\frac{D_{11}}{h^2}\left(w_{,xxxx}+\alpha_1^4 w_{,yyyy}\right)-\frac{2\alpha_1^2}{h^2}\left(D_{12}+2D_{66}\right)w_{,xxyy}- \\
&\frac{N\alpha_3^2}{8\alpha_2^2 h^2}\begin{pmatrix} w_{,x}\left(\alpha_1^2 v_{,xyyy}+v_{,xxxy}-u_{,xxyy}-\alpha_1^2 u_{,yyyy}\right)+ \\ w_{,y}\left(\alpha_1^2 u_{,xyyy}+u_{,xxxy}-v_{,xxxx}-\alpha_1^2 v_{,xxyy}\right) \end{pmatrix}+ \\
&\frac{\alpha_3}{h}B_{11}\left(u_{,xxx}+\left(w_{,xx}\right)^2+w_{,x}w_{,xxx}\right)+ \\
&\frac{\alpha_3\alpha_1^4}{h}B_{11}\left(v_{,yyy}+\left(w_{,yy}\right)^2+w_{,y}w_{,yyy}\right)+ \\
&\alpha_1^2 B_{12}\begin{pmatrix} v_{,yxx}+2\left(w_{,xy}\right)^2+w_{,xxy}w_{,y}+ \\ u_{,xyy}+w_{,x}w_{,xyy} \end{pmatrix}+ \\
&2\alpha_1^2 B_{66}\begin{pmatrix} u_{,xyy}+v_{,xxy}+\left(w_{,xy}\right)^2+w_{,yy}w_{,xx}+ \\ w_{,xxy}w_{,y}+w_{,xyy}w_{,x} \end{pmatrix}\Bigg)+ \\
&\frac{\beta}{\left(1-w\right)^2}-\Upsilon \\
&=\frac{N}{E_s 2h^3}\left(w_{,xxxx}+2\alpha_1^2 w_{,xxyy}+\alpha_1^4 w_{,yyyy}\right)
\end{aligned}
$$

(ج) (۲۲)

که در آن

$$
\alpha_1=\frac{a}{b}\quad \alpha_2=\frac{b}{h}\quad \alpha_3=\frac{d}{h}
$$
$$
\beta=\frac{\varepsilon a^4 V^2}{2E_s h^3 d^3}\qquad \Upsilon=\frac{p\,a^4}{E_s h^3 d} \tag{۲۳}
$$

۴- مدل کاهش مرتبه داده شده

به دلیل رفتار خیلی غیرخطی مجموعه معادلات حاکم بر تعادل داده شده در روابط (۲۲)، تاکنون راه حلی تحلیلی برای آن‌ها ارائه نشده است [۳۳]. از این رو، این معادلات با روش تقریبی باقیمانده‌ی وزن‌دار گالرکین حل خواهند شد. بر طبق این روش، جابجایی‌های میکروصفحه که متغیرهای وابسته هستند، به صورت مجموعه‌ای از توابع خطی مستقل بیان می‌شود. در اینجا با توجه به شباهت موقعیت نهایی میکرو ورق تحت تحریک الکترواستاتیک به شکل مود خطی و نامیرای اول صفحه‌ی مستطیلی شکل، جابجایی برون صفحه‌ای تنها با یک مود به صورت حاصل ضرب شکل مودهای نامیرا و خطی اول دو تیر دو طرف گیردار تقریب زده می‌شود [۳۲]. جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای ریزسازه نیز به صورت زیر با به خدمت گرفتن بیش از یک تابع تقریب زننده، گسسته‌سازی می‌شوند.

$$
u=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_{ij}\,\varphi_u^{ij}\left(x,y\right) \qquad \text{(الف)}
$$
$$
v=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}v_{ij}\,\varphi_v^{ij}\left(x,y\right) \qquad \text{(ب)} \tag{۲۴}
$$
$$
w=w_0\varphi_w\left(x,y\right) \qquad \text{(ج)}
$$

که در آن w. ، v_{ij} و u_{ij} پارامترهای مجهولی هستند که باید بدست آورده شوند. همچنین n تعداد شکل مودهای درون صفحه‌ای را در هریک از جهات xو y نشان می‌دهد. φ_u^{ij} ، φ_v^{ij} و φ_w نیز به ترتیب توابع پایه‌ی تقریب‌زننده‌ی متناظر با جابه‌جایی‌های u، v وw می‌باشند که به صورت روابط (۲۵) نوشته می‌شوند.

$$
\varphi_u^{ij}\left(x,y\right)=\psi_{2i+1}\left(y\right)\sin\left(2j\pi x\right) \qquad \text{(الف)}
$$
$$
\varphi_v^{ij}\left(x,y\right)=\psi_{2i+1}\left(x\right)\sin\left(2j\pi y\right) \qquad \text{(ب)} \tag{۲۵}
$$
$$
\varphi_w\left(x,y\right)=\psi_1\left(x\right)\psi_1\left(y\right) \qquad \text{(ج)}
$$

که در آن ψ_{2i+1} نشان‌دهنده‌ی شکل مودهای فرد خطی و نامیرای تیر دو طرف گیردار بوده [۳۴] که به صورت رابطه‌ی (۲۶) می‌باشند

$$
\psi_{2i+1}\left(\zeta\right)=\cosh\left(\gamma_{2i+1}\zeta\right)-\cos\left(\gamma_{2i+1}\zeta\right)-\vartheta_{2i+1}\left[\sinh\left(\gamma_{2i+1}\zeta\right)-\sin\left(\gamma_{2i+1}\zeta\right)\right] \tag{۲۶}
$$

به‌طوری‌که

$$\vartheta_{2i+1}=\frac{\sinh(\gamma_{2i+1})+\sin(\gamma_{2i+1})}{\cosh(\gamma_{2i+1})-\cos(\gamma_{2i+1})} \tag{۲۷}$$

برای پیدا کردن مجهولات با تغییر نامگذاری دو اندیسی به یک اندیسی، داریم:

$$u=\sum_{p=1}^{n^2}u_p\varphi_u^p(x,y) \quad \text{(الف)}$$

$$v=\sum_{p=1}^{n^2}v_p\varphi_v^p(x,y) \quad \text{(ب)} \tag{۲۸}$$

که در آن

$$p=n(i-1)+j \tag{۲۹}$$

با جایگزین کردن روابط (۲۸) در روابط (۲۲-الف) و (۲۲-ب)، سپس ساده سازی w^2 از طرفین معادلات، مطابق روش گالرکین مقادیر مجهول u_p و v_p به صورت رابطه‌ی (۳۰) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}u_p\\ v_p\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}{}^1u_p\\ {}^1v_p\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}{}^2u_p\\ {}^2v_p\end{Bmatrix}=\\ &-\begin{bmatrix}k_{pq}^1 & k_{pq}^2\\ k_{pq}^3 & k_{pq}^4\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}f_q^{11}\\ f_q^{12}\end{Bmatrix}w_0^2+\begin{Bmatrix}f_q^{21}\\ f_q^{22}\end{Bmatrix}w_0\right)\end{aligned} \tag{۳۰}$$

که در آن ضرایب k_{pq}^m $(m=۱,۲,۳,۴)$ و f_q^{ij} $(i,j=۱,۲)$ در پیوست ۲ ارائه شده‌اند. در ادامه، فرآیند حل با جایگزینی معادله (۳۰) در رابطه‌ی بی‌بعد (۲۲-ج)، ضرب طرفین آن در φ_w و اعمال روش گالرکین، به صورت رابطه‌ی (۳۱) تکمیل می‌گردد:

$$\begin{aligned}&k_1w_0-k_2w_0^2-k_3w_0^3-\\ &\beta\int_0^1\int_0^1\frac{\varphi_w}{(1-\varphi_w w_0)^2}dx\,dy+\\ &\gamma\int_0^1\int_0^1\varphi_w\,dx\,dy=0\end{aligned} \tag{۳۱}$$

که در آن

$$\begin{aligned}&k_1=\int_0^1\int_0^1\Big(\frac{N}{2E_sh^3}\left(\varphi_{w,xxxx}+2\alpha_1^2\varphi_{w,xxyy}+\alpha_1^4\varphi_{w,yyyy}\right)+\\ &\frac{D_{11}}{E_sh^3}\left(\varphi_{w,xxxx}+\alpha_1^4\varphi_{w,yyyy}\right)+\\ &\frac{2\alpha_1^2}{E_sh^3}\left(D_{12}+2D_{66}\right)\varphi_{w,xxyy}+\\ &\alpha_1^2\alpha_2^2E_z\left(a_{31}\varphi_{w,xx}+\alpha_1^2a_{32}\varphi_{w,yy}\right)-\\ &\frac{\alpha_3B_{11}}{E_sh^2}\sum_{p=1}^{n^2}\left(u_p^2\varphi_{u,xxx}^p+\alpha_1^4v_p^2\varphi_{v,yyy}^p\right)\\ &-\frac{\alpha_3\alpha_1^2B_{12}}{E_sh^2}\left(\sum_{p=1}^{n^2}v_p^2\varphi_{v,yxx}^p+\sum_{p=1}^{n^2}u_p^2\varphi_{u,xyy}^p\right)-\\ &\frac{4\alpha_1^2\alpha_3B_{66}}{E_sh^2}\left(\sum_{p=1}^{n^2}u_p^2\varphi_{u,xyy}^p+\sum_{p=1}^{n^2}v_p^2\varphi_{v,xxy}^p\right)\Big)\varphi_w\,dx\,dy\end{aligned} \tag{۳۲ الف}$$

$$\begin{aligned}&k_2=\alpha_3\int_0^1\int_0^1\Big(-\varphi_{w,xx}\left(\frac{B_{11}}{E_sh^2}\varphi_{w,xx}+\frac{\alpha_1^2B_{12}}{E_sh^2}\varphi_{w,yy}\right)-\\ &\varphi_{w,yy}\left(\frac{\alpha_1^4B_{11}}{E_sh^2}\varphi_{w,yy}+\frac{\alpha_1^2B_{12}}{E_sh^2}\varphi_{w,xx}\right)-\frac{4\alpha_1^2B_{66}}{E_sh^2}\varphi^2_{w,xy}+\\ &\frac{B_{11}}{E_sh^2}\left(\sum_{p=1}^{n^2}\begin{matrix}u_p^1\varphi_{u,xxx}^p+\varphi_{w,xx}^2+\varphi_{w,x}\varphi_{w,xxx}+\\ \alpha_1^4\left(\sum_{p=1}^{n^2}v_p^1\varphi_{v,yyy}^p+\varphi_{w,yy}^2+\varphi_{w,y}\varphi_{w,yyy}\right)\end{matrix}\right)+\\ &\frac{\alpha_1^2B_{12}}{E_sh^2}\left(\sum_{p=1}^{n^2}\begin{matrix}v_p^1\varphi_{v,yxx}^p+2\varphi_{w,xy}^2+\varphi_{w,xxy}\varphi_{w,y}+\\ \sum_{p=1}^{n^2}u_p^1\varphi_{u,xyy}^p+\varphi_{w,x}\varphi_{w,xyy}\end{matrix}\right)\\ &\frac{2\alpha_1^2B_{66}}{E_sh^2}\left(\begin{matrix}\sum_{p=1}^{n^2}u_p^1\varphi_{u,xyy}^p+\sum_{p=1}^{n^2}v_p^1\varphi_{v,xxy}^p+\varphi_{w,xy}^2+\\ \varphi_{w,xx}\varphi_{w,yy}+\varphi_{w,xxy}\varphi_{w,y}+\varphi_{w,x}\varphi_{w,xyy}\end{matrix}\right)+\\ &\frac{\alpha_3}{E_sh}\Big(\varphi_{w,xx}\left(A_{11}\sum_{p=1}^{n^2}u_p^2\varphi_{u,x}^p+\alpha_1^2A_{12}\sum_{p=1}^{n^2}v_p^2\varphi_{v,y}^p\right)+\\ &\varphi_{w,yy}\left(\alpha_1^4A_{11}\sum_{p=1}^{n^2}v_p^2\varphi_{v,y}^p+\alpha_1^2A_{12}\sum_{p=1}^{n^2}u_p^2\varphi_{u,x}^p\right)+\\ &2\alpha_1^2A_{66}\left(\sum_{p=1}^{n^2}u_p^2\varphi_{u,y}^p+\sum_{p=1}^{n^2}v_p^2\varphi_{v,x}^p\right)\varphi_{w,xy}-\\ &\frac{N}{8\alpha_2^2h^2}\Big(\varphi_{w,x}\left(\begin{matrix}\alpha_1^2\sum_{p=1}^{n^2}v_p^2\varphi_{v,xyyy}^p+\sum_{p=1}^{n^2}v_p^2\varphi_{v,xxxy}^p-\\ \sum_{p=1}^{n^2}u_p^2\varphi_{u,xxyy}^p-\alpha_1^2\sum_{p=1}^{n^2}u_p^2\varphi_{u,yyyy}^p\end{matrix}\right)+\\ &\varphi_{w,y}\left(\begin{matrix}\alpha_1^2\sum_{p=1}^{n^2}u_p^2\varphi_{u,xyyy}^p+\sum_{p=1}^{n^2}u_p^2\varphi_{u,xxxy}^p-\\ \sum_{p=1}^{n^2}v_p^2\varphi_{v,xxxx}^p-\alpha_1^2\sum_{p=1}^{n^2}v_p^2\varphi_{v,xxyy}^p\end{matrix}\right)\Big)\Big)\varphi_w\,dx\,dy\end{aligned} \tag{۳۲ ب}$$

$$k_3=\frac{\alpha_3^2}{E_s h}\int_0^1\int_0^1\Bigg(\varphi_{w,xx}\begin{pmatrix}A_{11}\left(\sum_{p=1}^{n^2}u_p^1\varphi_{u,x}^p+\frac{1}{2}\varphi_{w,x}^2\right)+\\ \alpha_1^2A_{12}\left(\sum_{p=1}^{n^2}v_p^1\varphi_{v,y}^p+\frac{1}{2}\varphi_{w,y}^2\right)\end{pmatrix}-$$
$$\varphi_{w,yy}\begin{pmatrix}\varphi_{w,yy}\left(\sum_{p=1}^{n^2}v_p^1\varphi_{v,y}^p+\frac{1}{2}\varphi_{w,y}^2\right)+\\ \alpha_1^2A_{12}\left(\sum_{p=1}^{n^2}u_p^1\varphi_{u,x}^p+\frac{1}{2}\varphi_{w,x}^2\right)\end{pmatrix}-$$
$$\varphi_{w,xy}\left(2\alpha_1^2A_{66}\left(\sum_{p=1}^{n^2}u_p^1\varphi_{u,y}^p+\sum_{p=1}^{n^2}v_p^1\varphi_{v,x}^p+\varphi_{w,x}\varphi_{w,y}\right)\right)- \qquad (۳۲\text{ ج})$$
$$\frac{N}{8\alpha_2^2h^2}\Bigg(\varphi_{w,x}\begin{pmatrix}\alpha_1^2\sum_{p=1}^{n^2}v_p^1\varphi_{v,xyyy}^p+\sum_{p=1}^{n^2}v_p^1\varphi_{v,xxxy}^p-\\ \sum_{p=1}^{n^2}u_p^1\varphi_{u,xxyy}^p-\alpha_1^2\sum_{p=1}^{n^2}u_p^1\varphi_{u,yyyy}^p\end{pmatrix}+$$
$$\varphi_{w,y}\begin{pmatrix}\alpha_1^2\sum_{p=1}^{n^2}u_p^1\varphi_{u,xyyy}^p+\sum_{p=1}^{n^2}u_p^1\varphi_{u,xxxy}^p-\\ \sum_{p=1}^{n^2}v_p^1\varphi_{v,xxxx}^p-\alpha_1^2\sum_{p=1}^{n^2}v_p^1\varphi_{v,xxyy}^p\end{pmatrix}\Bigg)\Bigg)\varphi_w\,dx\,dy$$

رابطه‌ی (۳۱) معادله‌ی کاهیده شده‌ی حاکم بر تعادل میکروصفحه می‌باشد. برای تعیین آستانه‌ی ناپایداری باید تغییرات دوم انرژی پتانسیل کل نیز علاوه بر تغییرات اول آن صفر گردد. بدین منظور کافی است معادله‌ی (۳۱) و مشتق آن نسبت به مختصات تعمیم‌یافته w. به طور همزمان صفر گردند. بدین منظور با مشتق‌گیری از معادله‌ی (۳۱) داریم:

$$k_1-2k_2w_0-3k_3w_0^{\,2}-2\beta\int_0^1\int_0^1\frac{\varphi_w^{\,2}}{\left(1-\varphi_w w_0\right)^3}dx\,dy=0 \qquad (۳۳)$$

برای تعیین مقادیر بحرانی ولتاژ ورودی و خیز، با حذف از معادلات (۳۱) و (۳۳) می‌توان نوشت:

$$\mathrm{k_1w_0^{cr}-k_2\left(w_0^{cr}\right)^2-k_3\left(w_0^{cr}\right)^3}-\frac{1}{2}\left[\mathrm{k_1-2k_2w_0^{cr}-3k_3\left(w_0^{cr}\right)^2}\right]\times\left(\int_0^1\int_0^1\frac{\varphi_w^{\,2}}{\left(1-\varphi_w w_0^{cr}\right)^3}\mathrm{dx\,dy}\right)^{-1}\times\int_0^1\int_0^1\frac{\varphi_w}{\left(1-\varphi_w w_0^{cr}\right)^2}\mathrm{dx\,dy}+\gamma\int_0^1\int_0^1\varphi_w\,\mathrm{dx\,dy}=0 \qquad (۳۴)$$

معادله‌ی (۳۴)، یک معادله‌ی جبری غیرخطی است که از طریق روش نیوتن-رافسون [۳۵] به صورت عددی حل می‌شود. با داشتن مقادیر خیز نقطه‌ی بحرانی ()، ولتاژهای بی‌بعد متناظر () را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۳۵) استخراج کرد:

$$\beta^{cr}=\frac{k_1-2k_2w_0^{\,cr}-3k_3\left(w_0^{\,cr}\right)^2}{2\left(\int_0^1\int_0^1\frac{\varphi_w^{\,2}}{\left(1-\varphi_w w_0^{\,cr}\right)^3}dx\,dy\right)} \qquad (۳۵)$$

۵- نتایج و بحث

به‌منظور تأیید صحت یافته‌های پژوهش حاضر، میکروصفحه‌ای با مشخصات مکانیکی و هندسی داده شده در جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود. با برابر صفر قرار دادن ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک، جدول ۲ همگرایی نتایج حاضر را برای مقادیر بحرانی خیز نقطه میانی و اختلاف پتانسیل‌های متناظر با آن‌ها ارائه می‌دهد. مقادیر ، و $w_{\rm mid}^{\rm PI}$ به ترتیب جابه‌جایی‌های نقاط بازگشت، واجهش و کشیدگی و مقادیر ، $\mathrm{w_{mid}^{ST}}$ و $V_{\rm mid}^{\rm PI}$ به ترتیب ولتاژهای متناظر با این نقاط را نشان می‌دهند. همان‌طور که از این جدول مشاهده می‌گردد، با در نظر گرفتن چهار تابع تقریب‌زننده در هر جهت، مجموعاً شانزده تابع برای هر جابجایی درون صفحه‌ای، نتایج همگرا شده و تطابق خوبی بین آن‌ها و یافته‌های منتشر شده در مرجع [۸] مشاهده می‌گردد.

شکل ۲ تأثیر مقادیر مختلف فشار دیفرانسیلی را بر میکروصفحه‌ی حاضر با خواص داده شده در جدول ۱، مورد بررسی قرار می‌دهد. نتایج ارائه شده در این شکل همچنین با یافته‌های گزارش شده در مرجع [۸] به ازای مقادیر مختلفی از فشارهای دیفرانسیلی مقایسه و صحه‌گذاری شده‌اند. بر اساس آنچه از این شکل مشاهده می‌گردد، نتایج پژوهش حاضر به ازای مقادیر مختلف فشار دیفرانسیلی با نتایج مرجع [۸] به خوبی تطابق دارد. همچنین مشاهده می‌گردد که تنها اعمال مقادیر مشخصی از فشار دیفرانسیلی می‌تواند موجب ایجاد امکان وقوع رفتار دوپایدار در میکروصفحه شود.

شکل ۳ مقایسه دیگری را بین یافته‌های حاضر و نتایج گزارش شده در مرجع [۲۰] برای میکروصفحه‌ای با مشخصات داده شده در جدول ۳، ارائه می‌دهد. بر اساس آنچه از این شکل مشاهده می‌گردد، نتایج پژوهش حاضر با آن‌چه در مرجع [۲۰] ارائه شده است، کاملاً بر هم منطبق می‌باشند.

جدول ۵ همگرایی نتایج و همچنین زمان لازم برای انجام محاسبات مربوط به مرز وقوع ناپایداری‌های یک میکروصفحه‌ی مجهز شده به لایه

جدول ۱. مشخصات هندسی و مکانیکی میکروصفحه مورد بررسی در مرجع [۸]

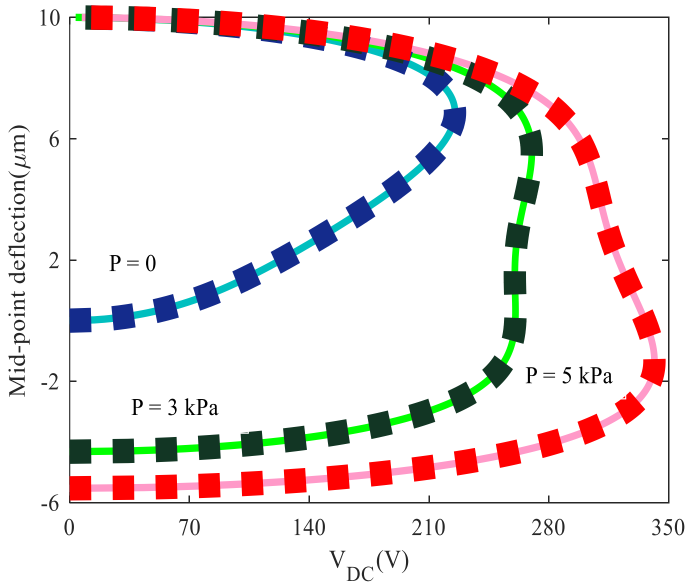
Table 1. Geometric and material properties of the micro-plate studied in reference [8]

P(kPa)	a(μm)	b(μm)	h(μm)	d(μm)	υ_s	E_s(GPa)	l_s(μm)
۳	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۳	۱۰	۰/۳	۱۶۹	۰/۵۹۲

جدول ۲. همگرایی و صحه‌گذاری جابجایی‌های بحرانی و ولتاژ مربوط به آن‌ها

Table 2. Convergence and validation of critical deflections and their associated voltages

مرجع [۸]	$n=۴$	$n=۳$	$n=۲$	$n=۱$	
۱/۵۰۶	۱/۵۰۵	۱/۵۰۴	۱/۵۲۵	-	$w_{\text{mid}}^{\text{SB}}$ (μm)
۲۶۰/۱۱	۲۶۰/۱	۲۶۰/۱	۲۶۰/۱	-	$V_{\text{mid}}^{\text{SB}}$ (V)
۰/۳۱۲	۰/۳۱۹۲	۰/۳۱۹۲	۰/۳۱۴	-	$w_{\text{mid}}^{\text{ST}}$ (μm)
۲۶۰/۵	۲۶۰/۵	۲۶۰/۵	۲۶۰/۵	-	$V_{\text{mid}}^{\text{ST}}$ (V)
۵/۵۳۸	۵/۵۴۱	۵/۵۴۱	۵/۵۳	۰/۲۷۷	$w_{\text{mid}}^{\text{PI}}$ (μm)
۲۷۰/۰۱	۲۷۰/۱	۲۷۰/۱	۲۶۹/۸	۲۶۰/۵	$V_{\text{mid}}^{\text{PI}}$ (V)



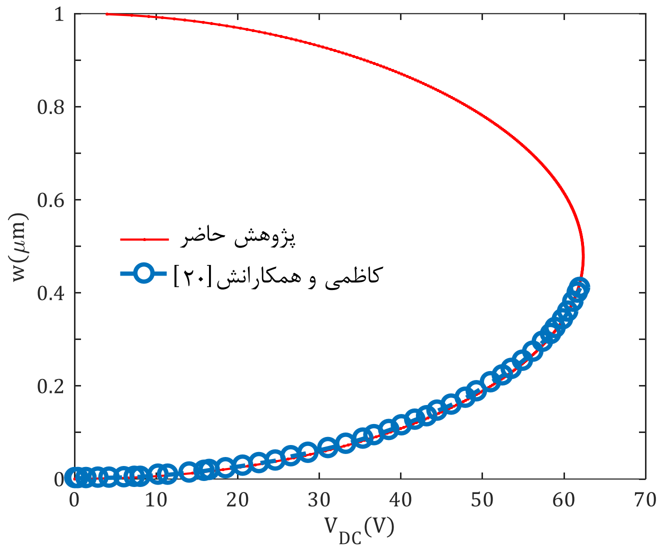
شکل ۲. تأثیر اعمال فشار دیفرانسیلی بر رفتار میکروصفحه‌ی سیلیکونی حاضر با خواص مکانیکی و هندسی داده شده در جدول ۱. خطوط توپُر مربوط به یافته‌های پژوهش پیش‌رو بوده و خط‌چین‌ها نتایج گزارش شده در مرجع [۸] را به تصویر می‌کشند.

Fig. 2. Influence of the differential pressure on the behavior of the present silicon micro-plate with geometric and material properties given in Table 1. Solid lines are corresponding to the present findings and dashed lines depict the results reported in reference [8]

جدول ۳. مشخصات هندسی و مکانیکی میکروصفحه بررسی شده در مرجع [۲۰]

Table 3. Geometric and material properties of the miro-plate studied in reference [20]

P(kPa)	a(μm)	b(μm)	h(μm)	d(μm)	υ_s	E_s(GPa)	l_s(μm)
۰	۲۵۰	۲۵۰	۳	۱	۰/۰۶	۱۶۹	۰



شکل ۳. مقایسه بین یافته‌های پژوهش حاضر و نتایج ارائه شده در مرجع [۲۰]

Fig. 3. Comparison between the present finding and the results reported in reference [20]

جدول ۴. خواص هندسی و مکانیکی لایه پیزوالکتریک [۲۰]

Table 4. Geometric and material properties of the piezoelectric layer [20]

a(μm)	b(μm)	h(μm)	C_{11}(GPa)	C_{12}(GPa)	C_{13}(GPa)	C_{33}(GPa)	e_{13}(cm^{-2})	e_{33}(cm^{-2})
۱۰۰۰	۱۰۰۰	۰/۰۱	۱۳۲	۷۱	۷۳	۱۱۵	-۴/۱	۱۴/۱

پیزوالکتریک را تحت ولتاژ پیزوالکتریک $v_p = 1\text{V}$ برای میکرو ورق‌های تک‌ایدار و دوپایدار مورد مقایسه قرار می‌دهد. مشخصات هندسی و مکانیکی لایه‌ی زیرین در جدول ۱ و مشخصات لایه‌ی پیزوالکتریک در جدول ۴ آورده شده است. شایان ذکر است نتایج تک پایدار برای سیستمی بدون فشار دیفرانسیلی و نتایج دوپایدار برای سازه‌های تحت فشار دیفرانسیلی $P = 2\text{kPa}$ شبیه‌سازی شده است. همچنین لازم به ذکر است برای انجام محاسبات از نرم‌افزار متلب [۳۶] و یک کامپیوتر قابل حمل مجهز به پردازنده اینتل نسل ششم[1] و حافظه رم ۸ گیگابایت استفاده شده است. بر اساس نتایج گزارش شده در جدول ۵، مشاهده می‌شود نتایج حاضر برای هر دوحالت تک‌پایدار و دوپایدار با در نظر گرفتن سه تابع تقریب زننده در هر راستا به خوبی همگرا می‌شود. هرچند برای انجام محاسبات سیستم‌های تک پایدار زمان بیشتری از سازه‌های دوپایدار مورد نیاز است.

شکل ۴ تأثیر تغییر همزمان اعمال ولتاژ پیزوالکتریک و فشار دیفرانسیلی را

1 Intel Core i7-6500U @ 2.50GHz

جدول ۵. مقایسه بین نتایج دوپایدار و تک‌پایدار برای میکروصفحه‌ی مجهز شده به لایه‌ی پیزوالکتریک

Table 5. Comparison between the monostable and bistable results of a micro-plate equipped with a piezo-electric layer

MCST	تک پایدار ($P=۰$)				دوپایدار ($P=۲\text{kPa}$)			
	$n=۱$	$n=۲$	$n=۳$	$n=۴$	$n=۱$	$n=۲$	$n=۳$	$n=۴$
$w_{\text{mid}}^{\text{SB}}$ (μm)	-	-	-	-	-	۱/۶۸۳	۱/۶۶۶	۱/۶۶۷
$V_{\text{mid}}^{\text{SB}}$ (V)	-	-	-	-	-	۲۰۸/۸	۲۰۸/۸	۲۰۸/۸
$w_{\text{mid}}^{\text{ST}}$ (μm)	-	-	-	-	-	-۰/۶۸۸	-۰/۶۷۹	-۰/۶۷۸
$V_{\text{mid}}^{\text{ST}}$ (V)	-	-	-	-	-	۲۱۳/۷	۲۱۳/۷	۲۱۳/۷
$w_{\text{mid}}^{\text{PI}}$ (μm)	۶/۹۳۷	۷/۰۸۸	۷/۱۱۳	۷/۱۱۳	-۰/۸۰۹	۶/۳۴۹	۶/۳۵۸	۶/۳۵۹
$V_{\text{mid}}^{\text{PI}}$ (V)	۱۶۹,۶	۲۰۵/۹	۲۰۶/۶	۲۰۶/۷	۲۱۳/۹	۲۳۵	۲۳۵/۶	۲۳۵/۶
$t(\text{s})$	۲/۷۸۷	۳/۷۹۱	۴/۳۰۰	۵/۰۵۰	۳/۷۳۴	۴/۵۷۴	۴/۹۶۹	۵/۸۲۴

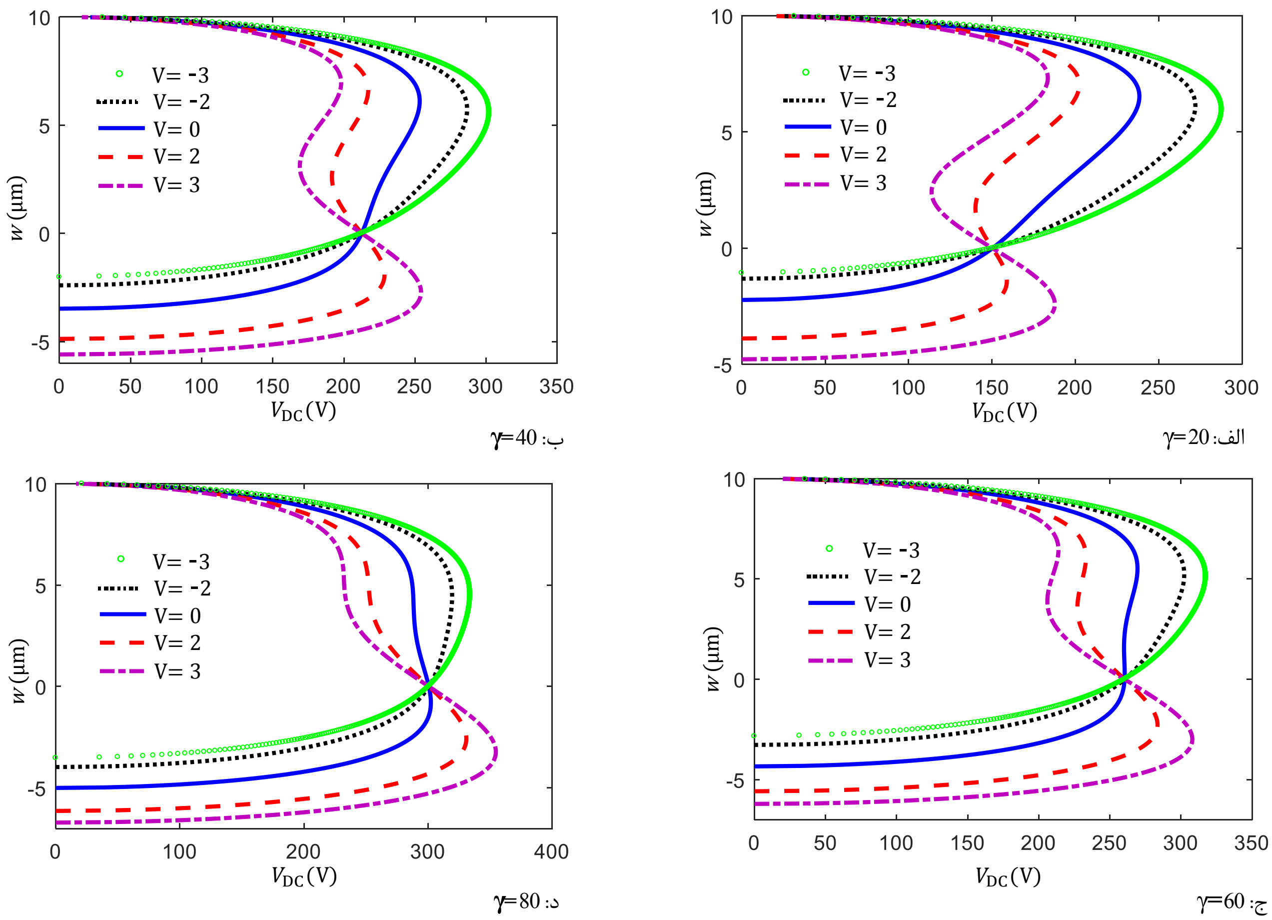
بر رفتار میکروصفحه‌ای مجهز شده به یک لایه پیزوالکتریک مورد بررسی قرار می‌دهد. مشخصات هندسی و مکانیکی لایه‌ی زیرین میکروصفحه در جدول ۱ داده شده است. همچنین خواص لایه‌ی پیزوالکتریک فوقانی نیز در جدول ۴ آورده شده است. بر اساس آن‌چه از شکل ۴ مشاهده می‌گردد، با اعمال ولتاژ مثبت به لایه‌ی پیزوالکتریک، ولتاژ نقطه‌ی بحرانی بالایی کاهش می‌یابد در حالی که ولتاژ نقطه‌ی بحرانی پایینی افزایش پیدا می‌کند. بنابراین با توجه به این مهم که میکرو ورق‌های تحت فشار دیفرانسیلی براساس سطح فشار اعمال شده، می‌توانند ناپایداری کشیدگی را از نقاط بحرانی پایینی یا بالایی خود تجربه کنند، برخلاف میکرو ورق‌های تک‌پایدار نمی‌توان ادعا کرد که افزایش ولتاژ پیزو الکتریک همواره باعث کاهش ناپایداری کشیدگی می‌شود و این امر به ازای مقادیر مختلف فشار دیفرانسیلی متغییر است.

در این راستا شایان ذکر است، میکرو ورق‌های تک‌پایدار بدون فشار دیفرانسیلی تنها یک نقطه حدی در مسیر تعادل خود دارند [۲۰] که متناظر با نقطه‌ی حدی بالایی در مسیر تعادل میکرو ورق‌های دوپایدار تحت فشار دیفرانسیلی حاضر است. بنابراین در این سیستم‌ها، افزایش ولتاژ پیزوالکتریک همواره باعث کاهش اختلاف پتانسیل کشیدگی سیستم می‌شود [۲۰].

نتیجه‌ی مهم دیگری که از شکل ۴ قابل دریافت می‌باشد، این است که منطقه‌ی وقوع ناپایداری واجهش توسط ولتاژ اعمال شده به لایه‌ی پیزوالکتریک قابل کنترل است. به عبارتی می‌توان با اعمال مقادیر مشخصی از ولتاژ پیزوالکتریک مثبت، آستانه‌ی وقوع رفتار دوپایدار را کاهش داد؛ بگونه‌ای که میکرو ورق به ازای مقادیر کوچکتری از فشار دیفرانسیلی اعمالی ناپایداری واجهش را تجربه نماید. لازم بذکر است این مهم می‌تواند در ارائه‌ی ریزحسگرهای میکروالکترومکانیکی قابل تنظیم کاربرد داشته باشد.

همان‌طور که پیش‌تر نیز ذکر شد، افزایش فشار دیفرانسیلی می‌تواند نقاط بحرانی میانی و بالایی را در سیستم ایجاد کند و امکان وقوع ناپایداری واجهش را فراهم سازد، اما اگر افزایش فشار دیفرانسیلی همچنان ادامه پیدا کند، ولتاژ بحرانی نقطه‌ی پایینی، از مقدار متناظر برای نقطه‌ی بحرانی بالایی بیشتر شده و در نتیجه سیستم، علی‌رغم وجود منطقه‌ی دوپایدار، دیگر ناپایداری واجهش را حین افزایش و یا کاهش ولتاژ اعمالی تجربه نمی‌کند. شایان ذکر است برای مشاهده‌ی ناپایداری واجهش در این حالت، میکرو ورق بایستی به نحوی در مسیر تعادل بالایی خود قرار بگیرد که این امر حین تحریک متداول میکرو ورق‌های الکترومکانیکی رخ نخواهد داد [۸]. در ادامه قابل ذکر است، با افزایش فشار دیفرانسیلی، نقاط بحرانی بالایی و میانی از بین رفته و سیستم ناپایداری را از نقطه‌ی بحرانی پایینی‌اش تجربه می‌کند.

شکل ۵ نقشه‌ی تغییرات نقاط حدی موجود در مسیر تعادل میکروصفحه‌ای مربعی شکل را با خواص لایه‌ی زیرین مطابق جدول ۱ و مشخصات لایه‌ی

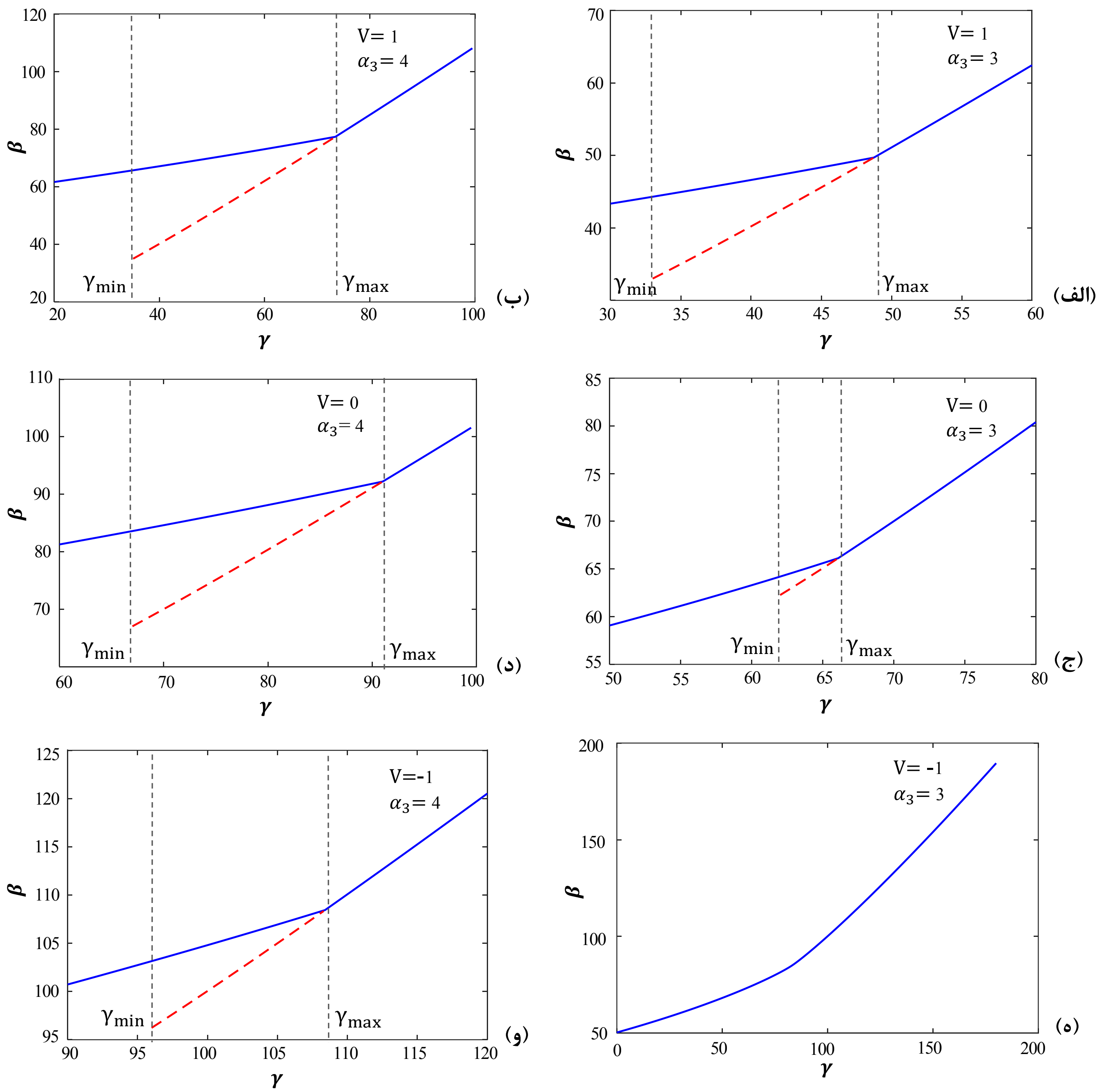


شکل ۴. تأثیر اعمال ولتاژ پیزوالکتریک بر مسیر تعادل میکروصفحه‌ی حاضر تحت چند فشار دیفرانسیلی مختلف

Fig. 4. Influence of the piezoelectric voltage on the equilibrium path of the present micro-plate under some different values of the differential pressure

پیزوالکتریک طبق جدول ۴ به ازای دو مقدار فاصله‌ی اولیه‌ی بین دو الکترود و مقادیر مختلفی از ولتاژ پیزوالکتریک ارائه می‌کند. به عبارتی این شکل محدوده‌ی وقوع ناپایداری واجهش را بر حسب تغییرات پارامتر بی‌بعد ولتاژ (β) به ازای مقادیر بی‌بعد فشار دیفرانسیلی (γ) به تصویر می‌کشد. مطابق این شکل، مشاهده می‌گردد برخلاف ناپایداری کشیدگی، ناپایداری واجهش تنها به ازای مقادیر خاصی از فشار دیفرانسیلی اعمالی رخ می‌دهد که حداقل و حداکثر آن بر حسب فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود و میزان ولتاژ اعمالی پیزوالکتریک متغیر است؛ به گونه‌ای که حتی ممکن است هرگز قسمت دوپایدار مشاهده نگردد مانند قسمت (ه) در شکل مذکور.

همان‌طور که از شکل ۵ مشاهده می‌شود، خط واجهش به ازای مقدار مشخصی از فشار دیفرانسیلی (γ_{min}) شروع شده و تا مقدار حداکثر آن (γ_{max}) امتداد یافته و در آن با خط کشیدگی تلاقی می‌کند. به ناحیه‌ی بین خط واجهش و خط کشیدگی ناحیه‌ی واجهش اطلاق می‌گردد. بر اساس شکل ۵ مشاهده می‌گردد که افزایش فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود موجب گسترش ناحیه‌ی دو پایدار می‌گردد. همچنین دیده می‌شود به ازای اعمال ولتاژ پیزوالکتریک مثبت، مقدار حداقل و حداکثر فشار مجاز برای وقوع ناپایداری واجهش کاهش یافته و ناحیه‌ی واجهش گسترش می‌یابد. همان‌گونه که پیش‌تر نیز ذکر شد، این خاصیت ولتاژ پیزوالکتریک مثبت که در واقع باعث رخداد ناپایداری واجهش در فشارهای دیفرانسیلی کوچکتر می‌شود، می‌تواند در طراحی حسگرهای میکروالکترونیکی با حساسیت بالاتر مورد استفاده قرار



شکل ۵. تأثیر اعمال ولتاژ پیزوالکتریک بر وقوع ناپایداری واجهش به ازای دو مقدار مختلف از پارامتر فاصله‌ی اولیه بین دوالکترود.

Fig. 5. Influence of the piezoelectric voltage on the occurrence of snap-through instability for two different values of the gap parameter

بگیرد. همچنین شکل ۵ نشان می‌دهد به ازای ولتاژهای منفی اعمال شده به لایه‌ی پیزوالکتریک، مقادیر حداقل و حداکثر فشار دیفرانسیلی افزایش یافته و ناحیه‌ی واجهش منقبض می‌گردد؛ به گونه‌ای که به ازای مقادیر بزرگ ولتاژ پیزوالکتریک منفی ممکن است سازه اصلاً ناپایداری واجهش را تجربه نکند. چرا که در واقع اعمال اختلاف پتانسیل منفی به لایه‌ی پیزوالکتریک حداقل فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود را که در آن ناپایداری واجهش رخ می‌دهد، می‌افزاید.

همان‌گونه که از رابطه (۱۷-الف) دیده می‌شود، با اعمال ولتاژ مثبت به لایه‌ی پیزوالکتریک، میکرو ورق دچار پیش فشار و با اعمال ولتاژ منفی به لایه‌ی پیزوالکتریک، میکرو ورق دچار پیش کشش می‌شود. لذا همان‌طور که انتظارش نیز می‌رفت [۳۷]، اعمال ولتاژ مثبت موجب گسترش محدوده‌ی واجهش و اعمال ولتاژ منفی موجب کاهش این ناحیه می‌شود. شایان ذکر است، در صورت عدم اعمال ولتاژ پیزوالکتریک تنها پارامتر مؤثر بر کنترل ناحیه‌ی واجهش، برای یک فشار دیفرانسیلی مشخص، پارامتر فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود است. شایان ذکر است که افزایش پارامتر فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود، افزایش ولتاژ مورد نیاز جهت وقوع ناپایداری در سیستم را به میزان قابل توجهی به همراه دارد. با توجه به این مهم که براساس نوع کاربرد این سیستم‌ها، محدودیت‌هایی برای ولتاژ اعمالی وجود دارد، یکی از مهم‌ترین مزیت‌های اعمال ولتاژ پیزوالکتریک، عدم نیاز به تغییر فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود برای گسترش ناحیه‌ی واجهش می‌باشد. بعبارتی درجه آزادی طراح برای تنظیم خواص سیستم در این حالت بیشتر است. به عنوان مثال در طراحی سنسورهای فوق حساس و دوپایدار جرم، می‌توان بر اساس رنج فشار قابل اعمال، محدوده‌ی ناحیه‌ی واجهش را برای رنج مشخصی از ولتاژهای اعمالی به کمک ترکیب ولتاژ پیزوالکتریک و پارامتر فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود تنظیم نمود.

در بررسی عددی نتایج شکل ۵ همچنین مشاهده می‌گردد که محدوده‌ی ناحیه‌ی واجهش با افزایش پارامتر فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود برای $v_p = ۰$ به میزان ۴۲۳/۹۱ درصد افزایش یافته است (شکل‌های ۵ (ج) و ۵ (د)). اما برای حالت $v_p = ۱V$ با افزایش این پارامتر، محدوده‌ی ناحیه‌ی واجهش به میزان ۱۴۳/۷۸ درصد افزایش داشته (شکل‌های ۵ (الف) و ۵ (ب))، که این اعداد نشان دهنده کاهش تأثیر پارامتر فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود در صورت افزایش ولتاژ پیزوالکتریک می‌باشد. همچنین با بررسی شکل‌های ۵ (ج) و ۵ (الف) در می‌یابیم که با افزایش ولتاژ پیزوالکتریک از صفر به یک ولت برای حالت $\alpha_۲ = ۳$، محدوده‌ی ناحیه‌ی واجهش ۲۴۰/۶۵ درصد گسترش می‌باشد. شایان ذکر است این میزان افزایش برای حالت $\alpha_۲ = ۴$، ۵۸/۵۱ درصد می‌باشد (شکل‌های ۵ (ب) و ۵ (د)). در نتیجه می‌توان گفت با افزایش پارامتر فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود، تأثیر افزایش ولتاژ پیزوالکتریک شدیداً کاهش می‌یابد.

۶- نتیجه گیری

هدف اصلی این پژوهش بررسی ناپایداری واجهش در میکروصفحه‌های همراه با لایه پیزوالکتریک تحت فشار دیفرانسیلی بود. بدین منظور برای دستیابی به مدل ریاضی مسأله، مدل وابسته به بعد و غیرخطی ورق کریشهف بر اساس تئوری تنش‌کوپل بهبودیافته در نظر گرفته شد. با استفاده از روش باقیمانده‌ی وزن‌دار گالرکین، معادلات کاهیده شده حاکم بر تعادل و پایداری سیستم به دست آمدند. سپس نقاط حدی مسیر تعادل میکروصفحه از طریق حل هم‌زمان معادلات تعادل و پایداری تعیین گردیدند. یافته‌های پژوهش حاضر با نتایج موجود در منابع مقایسه و صحه‌گذاری شدند. مشاهده شد وجود فشار دیفرانسیلی در جهت مخالف میدان الکتریکی امکان ایجاد رفتار دوپایدار را فراهم می‌کند. همچنین مشخص شد برخلاف نتایج گزارش شده در مطالعات پیشین، اعمال ولتاژ مثبت به لایه‌ی پیزوالکتریک همواره موجب کاهش آستانه‌ی ناپایداری کشیدگی سیستم نشده و گاهی اوقات، هنگامی‌که سیستم تحت مقادیر بزرگی از فشار دیفرانسیلی مخالف قرار دارد، آن را می‌افزاید. نتایج حاکی از آن بودند که اعمال ولتاژ منفی به لایه‌ی پیزوالکتریک آستانه‌ی ناپایداری کشیدگی را افزایش می‌دهد. همچنین دیده شد مقادیر مثبت ولتاژ پیزوالکتریک ناحیه‌ی واجهش را منبسط و مقادیر منفی آن، این ناحیه را منقبض می‌کنند. بعلاوه در بررسی عددی نتایج مشاهده گردید که محدوده‌ی ناحیه‌ی واجهش برای سیستم مورد مطالعه با افزایش پارامتر فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود هنگامی‌که ولتاژی به لایه‌ی پیزوالکتریک اعمال نشود ($v_p = ۰$) به میزان ۴۲۳/۹۱ درصد گسترش می‌یابد؛ در حالیکه این میزان برای سیستمی تحت ولتاژ پیزوالکتریک ($v_p = ۱V$)، ۱۴۳/۷۸ درصد می‌باشد. لذا دیده شد تأثیر پارامتر فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود در صورت افزایش ولتاژ پیزوالکتریک کاهش می‌یابد. متقابلاً مشاهده گردید با افزایش ولتاژ پیزوالکتریک از صفر به یک ولت برای سیستمی با پارامتر فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود $\alpha_۲ = ۳$، محدوده‌ی ناحیه‌ی واجهش ۲۴۰/۶۵ درصد و برای حالت $\alpha_۲ = ۴$، ۵۸/۵۱ درصد افزایش می‌یابد. شایان ذکر است این حقیقت بیان‌گر کاهش تأثیر ولتاژ پیزوالکتریک با افزایش پارامتر فاصله‌ی اولیه بین دو الکترود می‌باشد.

منابع

[1] J.F. Rhoads, S.W. Shaw, K.L. Turner, The nonlinear response of resonant microbeam systems with purely-parametric electrostatic actuation, J. Micromech. Microeng., 16 (2006) 890-899.

[2] J.A. Pelesko, Mathematical modeling of electrostatic MEMS with tailored dielectric properties, SIAM J. Appl. Math., 62(3) (2002) 888-908.

[3] P.M. Osterberg, Electrostatically Actuated Microelectromechanical Test Structures for Material Property Measurement, Massachusetts Institute of Technology, 1995.

[4] G.I. Taylor, The coalescence of closely spaced drops when they are at different electric potentials, Proc. of Roy. Soc. A. 306, (1968) 423-434.

[5] H.C. Nathanson, W.E. Newell, R.A. Wickstrom, J.R. Davis, The resonant gate transistor, IEEE T. Electron. Dev., 14(3) (1967) 117-133.

[6] S. Krylov, N. Dick, Dynamic stability of electrostatically actuated initially curved shallow micro beams, Continuum Mech. Therm., 22(6) (2010) 445-468.

[7] B. Sajadi, H. Goosen, F.v. Keulen, Bi-stability of micro-plates: A sensitive mechanism for differential pressure measurements, Appl. Phys. Lett., 111(12) (2017) 124101.

[8] A.R. Askari, Bi-stability of pressurized electrically actuated flat micro-plates, International Journal of Solids and Structures, 178-179 (2019) 167 - 179.

[9] N.A. Fleck, G.M. Muller, M.F. Ashby, J.W. Hutchinson, Strain gradient plasticity: theory and experiment, Acta Metall. Mater., 42 (1994) 475–487.

[10] D.C.C. Lam, F. Yang, A.C.M. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, J. Mech. Phys. Solids, 51 (2003) 1477-1508.

[11] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, Int. J. Solids Struct., 39 (2002) 2731-2743.

[12] M.H. Kahrobaiyan, M. Asghari, M.T. Ahmadian, Strain gradient beam element, Finite Elem. Anal. Des. , 68 (2013) 63–75.

[13] M. Asghari, Geometrically nonlinear micro-plate formulation based on the modified couple stress theory, int. J. Eng. Sci., 51 (2012) 292–309.

[14] M. Tahani, A.R. Askari, Y. Mohandes, B. Hassani, Size-dependent free vibration analysis of electrostatically pre-deformed rectangular micro-plates based on the modified couple stress theory, Int. J. Mech. Sci., 94-95 (2015) 185-198.

[15] A.R. Askari, M. Tahani, Presenting a size-dependent electro-mechanical model for rectangular plates-based resonant micro-sensors based on modified couple stress theory, J. Modares Mechanical Engineering, 14(8) (2014) 121-130.

[16] X. Zhao, E.M. Abdel-Rahman, A.H. Nayfeh, A reduced-order model for electrically actuated microplates, J. Micromech. Microeng. , 14 (2004) 900–906.

[17] K.F. Wang, T. Kitamura, B. Wang, Nonlinear pull-in instability and free vibration of micro/nanoscale plates with surface energy – A modified couple stress theory model, Int. J. Mech. Sci., 99 (2015) 288-296.

[18] R.C. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Reduced-order models for microelectromechanical rectangular and circular plates incorporating the Casimir force, Int. J. Solids Struct., 45 (2008) 3558-3583.

[19] A.R. Askari, M. Tahani, Size-dependent dynamic pull-in analysis of geometric non-linear micro-plates based on the modified couple stress theory, Physica E, 86 (2017) 262-274.

[20] A. Kazemi, R. Vatankhah, M. Farid, Nonlinear pull-in instability of microplates with piezoelectric layers using modified couple stress theory, International Journal of Mechanical Sciences, 130 (2017) 90-98.

[21] M.H. Ghayesh, H. Farokhi, Nonlinear dynamics of microplates, Int. J. Eng. Sci., 86 (2015) 60-73.

[22] M.H. Ghayesh, H. Farokhi, Coupled size-dependent behavior of shear deformable microplates, Acta Mech., 227(3) (2016) 757-775.

[23] H. Farokhi, M.H. Ghayesh, Modal interactions in primary and subharmonic resonant dynamics of imperfect

microplates with geometric nonlinearities, Acta Mech. Sin., (2015) 1-12.

[24] H. Farokhi, M.H. Ghayesh, Nonlinear size-dependent dynamics of an imperfect shear deformable microplate, J. Sound Vib., 361 (2016) 226-242.

[25] H. Farokhi, M.H. Ghayesh, Nonlinear mechanics of electrically actuated microplates, Int. J. Eng. Sci., 123 (2018) 197-213.

[26] H. Raeisifard, M.N. Bahrami, A. Yousefi-Koma, H.R. Fard, Static characterization and pull-in voltage of a micro-switch under both electrostatic and piezoelectric excitations, European Journal of Mechanics-A/Solids, 44 (2014) 116-124.

[27] M.N. Bahrami, A. Yousefi-Koma, H. Raeisifard, Modeling and nonlinear analysis of a micro-switch under electrostatic and piezoelectric excitations with curvature and piezoelectric nonlinearities, Journal of Mechanical Science and Technology, 28(1) (2014) 263-272.

[28] G. Rezazadeh, A. Tahmasebi, M. Zubstov, Application of piezoelectric layers in electrostatic MEM actuators: controlling of pull-in voltage, Microsystem technologies, 12(12) (2006) 1163-1170.

[29] R.C. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems, Smart Mater. Struct., 16 (2007) 23-31.

[30] M.I. Younis, MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics, Springer, New York, 2011.

[31] J.N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, 2nd ed., Taylor & Francis, Philadelphia, 2007.

[32] J.N. Reddy, Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics, John Wiley & Sons, New York, 2002.

[33] A.R. Askari, Non-linear Analysis of Electrically Actuated Thin Micro-Plates Based on The Modified Couple Stress Theory, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, 2017. (in Persian)

[34] B. Balachandran, E. Magrab, Vibrations, 2nd ed., Cengage Learning, Toronto, 2009.

[35] J.D. Faires, R.L. Burden, Numerical methods 3rd ed., Brooks/Cole, 2002.

[36] MATLAB, Version 9.1.0.441655 (R2016b), (https://www.mathworks.com/).

[37] S.A. Alkharabsheh, M.I. Younis, Statics and dynamics of MEMS arches under axial forces, J. Vib. Acoust., 135(2) (2013) 021007.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Mohammadjani, A. R. Askari, Investigating Bi-Stability of Pressurized Piezoelectric Micro-Plates Based on the Modified Couple Stress Theory, Amirkabir J. Mech Eng., 54(2) (2022) 357-376.

DOI: 10.22060/mej.2022.20267.7203

پیوست ۱

ضرایب A_{ij}، B_{ij} و D_{ij} ($i=1,6$ و $j=1,2,6$) و همچنین N، a_{3k} و b_{3k} ($k=1,2$) به کاررفته در روابط (۱۷) به قرار زیر هستند:

$$A_{11}=\left(h-h_P\right)\frac{E_s}{1-\upsilon_s^{\,2}}+\left(h_P\right)\frac{E_p}{1-\upsilon_p^{\,2}} \quad \text{(پ-۱-الف)}$$

$$A_{12}=\left(h-h_P\right)\frac{\upsilon_s E_s}{1-\upsilon_s^{\,2}}+\left(h_P\right)\frac{\upsilon_p E_p}{1-\upsilon_p^{\,2}} \quad \text{(پ-۱-ب)}$$

$$A_{66}=\left(h-h_P\right)\frac{E_s}{2\left(1+\upsilon_s\right)}+\left(h_P\right)\frac{E_p}{2\left(1+\upsilon_p\right)} \quad \text{(پ-۱-ج)}$$

$$B_{11}=\left(\frac{h_P^2-hh_P}{2}\right)\frac{E_s}{1-\upsilon_s^{\,2}}+\left(\frac{hh_P-h_P^2}{2}\right)\frac{E_p}{1-\upsilon_p^{\,2}} \quad \text{(پ-۱-د)}$$

$$B_{12}=\left(\frac{h_P^2-hh_P}{2}\right)\frac{\upsilon_s E_s}{1-\upsilon_s^{\,2}}+\left(\frac{hh_P-h_P^2}{2}\right)\frac{\upsilon_p E_p}{1-\upsilon_p^{\,2}} \quad \text{(پ-۱-ه)}$$

$$B_{66}=\left(\frac{h_P^2-hh_P}{4}\right)\frac{E_s}{\left(1+\upsilon_s\right)}+\left(\frac{hh_P-h_P^2}{4}\right)\frac{E_p}{\left(1+\upsilon_p\right)} \quad \text{(پ-۱-و)}$$

$$D_{11}=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{h}{2}-h_p\right)^3-\frac{h^3}{8}\right)\frac{E_s}{1-\upsilon_s^{\,2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{h^3}{8}-\left(\frac{h}{2}-h_p\right)^3\right)\frac{E_p}{1-\upsilon_p^{\,2}} \quad \text{(پ-۱-ز)}$$

$$D_{12}=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{h}{2}-h_p\right)^3-\frac{h^3}{8}\right)\frac{\upsilon_s E_s}{1-\upsilon_s^{\,2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{h^3}{8}-\left(\frac{h}{2}-h_p\right)^3\right)\frac{\upsilon_p E_p}{1-\upsilon_p^{\,2}} \quad \text{(پ-۱-ح)}$$

$$D_{66}=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{h}{2}-h_p\right)^3-\frac{h^3}{8}\right)\frac{E_s}{2\left(1+\upsilon_s\right)}+\frac{1}{3}\left(\frac{h^3}{8}-\left(\frac{h}{2}-h_p\right)^3\right)\frac{E_p}{2\left(1+\upsilon_p\right)} \quad \text{(پ-۱-ط)}$$

$$N=\left(h-h_P\right)\frac{E_s l_s^2}{1+\upsilon_s}+h_P\frac{E_p l_p^2}{1+\upsilon_p} \quad \text{(پ-۱-ی)}$$

$$\left(a_{31},a_{32}\right)=h_P\left(e_{31}-\frac{c_{13}}{c_{33}}e_{33},e_{32}-\frac{c_{23}}{c_{33}}e_{33}\right) \quad \text{(پ-۱-ک)}$$

$$\left(b_{31},b_{32}\right)=\left(\frac{hh_P-h_P^2}{2}\right)\left(e_{31}-\frac{c_{13}}{c_{33}}e_{33},e_{32}-\frac{c_{23}}{c_{33}}e_{33}\right) \quad \text{(پ-۱-ل)}$$

که در آن E_s، υ_s و l_s به ترتیب مدول یانگ، ضریب پواسون و پارامتر مقیاس طول مادی بخش پایینی میکروصفحه می‌باشند. همچنین E_p، υ_p و l_p به ترتیب مدول یانگ، ضریب پواسون و پارامتر مقیاس طول مادی لایه‌ی پیزوالکتریک هستند.

پیوست ۲

ضرایب k_{pq}^{m} $(m=1,2,3,4)$ و f_q^{ij} $(i,j=1,2)$ در رابطه‌ی (۳۰) به قرار زیر هستند:

$$k_{pq}^{1}=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{A_{11}}{E_s h}\varphi_{u,xx}^{P}+\alpha_1^2\frac{A_{66}}{E_s h}\varphi_{u,yy}^{P}-\frac{N}{8E_s h^3\alpha_2^2}\left(\varphi_{u,xxyy}^{P}-\varphi_{u,yyyy}^{P}\alpha_1^2\right)\right]\varphi_u^q dxdy$$ (پ-۲-الف)

$$k_{pq}^{2}=\int_0^1\int_0^1\left[\alpha_1^2\frac{(A_{12}+A_{66})}{E_s h}\varphi_{v,xy}^{P}+\frac{N}{8E_s h^3\alpha_2^2}\left(\alpha_1^2\varphi_{v,xyyy}^{P}+\varphi_{v,xxxy}^{P}\right)\right]\varphi_u^q dxdy$$ (پ-۲-ب)

$$k_{pq}^{3}=\int_0^1\int_0^1\left[\alpha_1^2\frac{(A_{12}+A_{66})}{E_s h}\varphi_{u,xy}^{P}+\frac{N}{8E_s h^3\alpha_2^2}\left(\alpha_1^2\varphi_{u,xyyy}^{P}+\varphi_{u,xxxy}^{P}\right)\right]\varphi_v^q dxdy$$ (پ-۲-ج)

$$k_{pq}^{4}=\int_0^1\int_0^1\left[\alpha_1^4\frac{A_{11}}{E_s h}\varphi_{v,yy}^{P}+\alpha_1^2\frac{A_{66}}{E_s h}\varphi_{v,xx}^{P}-\frac{N}{8E_s h^3\alpha_2^2}\left(\varphi_{v,xxxx}^{P}+\varphi_{v,xxyy}^{P}\alpha_1^2\right)\right]\varphi_v^q dxdy$$ (پ-۲-د)

$$f_q^{11}=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{A_{11}}{E_s h}\varphi_{w,x}\varphi_{w,xx}+\alpha_1^2\frac{A_{66}}{E_s h}\varphi_{w,x}\varphi_{w,yy}+\alpha_1^2\frac{(A_{12}+A_{66})}{E_s h}\varphi_{w,y}\varphi_{w,xy}\right]\varphi_u^q dxdy$$ (پ-۲-ه)

$$f_q^{21}=\int_0^1\int_0^1\left(-\frac{B_{11}}{E_s h}\left(\frac{1}{h\alpha_3}\right)\varphi_{w,xxx}-\frac{(B_{12}+2B_{66})}{E_s h}\frac{\alpha_1^2}{h\alpha_3}\varphi_{w,xyy}\right)\varphi_u^q dxdy$$ (پ-۲-و)

$$f_q^{12}=\int_0^1\int_0^1\left[\alpha_1^4\frac{A_{11}}{E_s h}\varphi_{w,y}\varphi_{w,yy}+\alpha_1^2\frac{A_{66}}{E_s h}\varphi_{w,y}\varphi_{w,xx}+\alpha_1^2\frac{(A_{12}+A_{66})}{E_s h}\varphi_{w,x}\varphi_{w,xy}\right]\varphi_v^q dxdy$$ (پ-۲-ز)

$$f_q^{22}=\int_0^1\int_0^1\left(-\frac{B_{11}}{E_s h}\left(\frac{\alpha_1^4}{h\alpha_3}\right)\varphi_{w,yyy}-\frac{(B_{12}+2B_{66})}{E_s h}\frac{\alpha_1^2}{h\alpha_3}\varphi_{w,xxy}\right)\varphi_v^q dxdy$$ (پ-۲-ح)