



انتشار امواج ترمومکانیکی در دیسک‌های حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شوک حرارتی

مهران روغنی^۱، حسام روحی^۲

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

۲- دانشکده فنی و مهندسی شرق گیلان، دانشگاه گیلان، رودسر-واجارگاه، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۰۲

بازنگری: ۱۴۰۰/۰۴/۲۹

پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۲۹

ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۱۰/۲۲

کلمات کلیدی:

ماده مدرج تابعی

روش تریب دیفرانسیلی تعمیم‌یافته

دیسک حلقوی

ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته

شوگ حرارتی

خلاصه: در این مقاله، به کمک تئوری کوپل ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لرد-شولمن و با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی حرارتی، رفتار ترموالاستیک دیسک‌های حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شوک حرارتی داخلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، ابتدا معادلات حاکم بر مسأله در چارچوب دستگاه مختصات قطبی استخراج می‌شوند. لازم به ذکر است که برای استخراج معادلات حاکم، معادله انرژی در فرم اصلی غیرخطی خود در نظر گرفته خواهد شد. سپس، فرایند حل عددی مسأله به کمک روش تریب دیفرانسیلی تعمیم یافته ارائه خواهد شد. در بخش نتایج، اثرات پارامترهای مهمی نظیر اندیس ماده مدرج تابعی و بزرگی شوگ حرارتی اعمالی بر انتشار موج ترمومکانیکی در دیسک مورد مطالعه قرار می‌گیرند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش اندیس ماده مدرج تابعی، بزرگی جابجایی و تنش‌ها در گذر زمان کاهش می‌یابند. همچنین، با ارائه نتایج برای مقادیر مختلف بزرگی شوگ حرارتی معلوم گردید در مقادیر بالای شوگ حرارتی انجام یک تحلیل غیرخطی حرارتی ضروری است. علاوه بر این آشکار شد که با کاهش زمان آسایش، نوسانات دما کاهش می‌یابد و با افزایش این پارامتر، دامنه تغییرات دما افزایش می‌یابد، در حالی که فرکانس نوسانات کاهش می‌یابد.

۱- مقدمه

انتشار موج نخواهد بود، چرا که سرعت انتشار موج حرارتی بینهایت می‌شود. در نتیجه، برای تحلیل ترموالاستیک اجسام تحت شوک حرارتی، نظریه‌های ترموالاستیسیته غیر کلاسیک و تعمیم‌یافته‌ای پیشنهاد شده‌اند [۴-۵]. از میان این تئوری‌ها می‌توان به تئوری‌های لرد-شولمن [۶]، گرین-لیندسی [۷] و گرین-تقدی [۸ و ۹] اشاره کرد. در تئوری ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لرد-شولمن، زمان آسایشی داخل قانون فوریه به منظور لحاظ کردن حرکت موج‌وار دما وارد می‌شود. در حقیقت، هم شار گرما و هم مشتق زمانی آن در معادله هذلولوی هدایت حرارتی بر اساس این تئوری در نظر گرفته می‌شوند. به علت سادگی و کارا بودن، محققین بسیاری از تئوری لرد-شولمن در کارهای خود استفاده کرده‌اند که در ادامه به برخی از جدیدترین و مهمترین تحقیقات مربوطه اشاره خواهد شد.

کریمی زوردجانی و کیانی [۱۰] پاسخ یک کره توخالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شوک حرارتی را بر اساس تئوری لرد-شولمن مورد بررسی قرار دادند. در فرمولبندی کار آن‌ها اثرات غیرخطی حرارتی در نظر گرفته شد. همچنین، برهمکنش، انتشار و انعکاس امواج مورد تحلیل و بررسی قرار گرفتند. حیدرپور و همکاران [۱۱] رفتار ترموالاستیک گذرای

در بسیاری از موارد، سازه‌های مهندسی مورد استفاده در کاربردهای مختلف تحت شوک حرارتی قرار می‌گیرند، و در این‌گونه موارد تحلیل پدیده‌های ترمومکانیکی سازه از اهمیت بسزایی برخوردار است. به عنوان نمونه در این زمینه می‌توان به تحلیل انتشار امواج ترمومکانیکی در لیزرهای فوق سریع در اثر تغییر سریع درجه حرارت اشاره کرد. با توجه به اهمیت مذکور، تعداد زیادی از محققین به حل مسائل مختلف ترموالاستیسیته در سازه‌های گوناگون از قبیل لایه‌ها، استوانه‌ها، دیسک‌ها و کره‌ها پرداخته‌اند [۱-۳].

برای تحلیل نظری ترموالاستیک اجسام جامد، تئوری‌های ترموالاستیسیته مختلفی وجود دارند [۲]. در مواردی که جسم در معرض شوک حرارتی قرار می‌گیرد، استفاده از قانون هدایت حرارتی فوریه منجر به نتایج نادرستی خواهد شد. توضیح آن‌که در چنین مواردی، دما و گرادیان آن بالا هستند؛ در حالی که مدت زمان عملکرد بسیار پایین و در حد پیکوثانیه می‌باشد. در نتیجه قانون مذکور قادر به در نظر گرفتن دقیق پدیده‌های

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h_rouhi@guilan.ac.ir



پوسته‌های کروی ساخته شده از کامپوزیت‌های تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی تحت بارگذاری ترمومکانیکی را به وسیله تئوری لرد-شولمن مورد مطالعه قرار دادند. فرایند حل پیشنهادی آن‌ها بر اساس روش تریب دیفرانسیلی، تبدیل لاپلاس و تکنیک انتگرالگیری زمانی چند مرحله‌ای بی اسپلاین منطقی غیریکنواخت بود. آی و همکاران [۱۲] به کمک مدل زمان آسایش لرد و شولمن، رفتار ترمومکانیکی مواد چندلایه را مورد بررسی قرار دادند. بدین منظور، روش تحلیلی لایه-المان برای به دست آوردن حل‌های گذرای جابجایی، تنش و دما در ماده چندلایه به خدمت گرفته شد. نتایج این کار نشان می‌دهد که برای مواد چندلایه، لایه‌های دارای هدایت حرارتی بالا نزدیک به منبع حرارتی منجر به ضعیف شدن پاسخ‌های حرارتی خواهند شد. فرجی اسکوتی و همکاران [۱۳] انتشار موج در یک لایه ویسکوالاستیک را بصورت عددی مورد مطالعه قرار دادند. برای نیل به این هدف، از تئوری ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لرد-شولمن استفاده شد. همچنین، برای قسمت ویسکوالاستیک کار از مدل کلون-وایت بهره گرفته شد. در یک تحقیق دیگر [۱۴] این نویسندگان مسأله مشابهی را برای دیسک‌های ساخته شده از مواد ویسکوالاستیک حل کردند. بگری و اسلامی [۱۵] بر اساس تئوری لرد-شولمن یک مدل ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته یکبُعدی برای دیسک‌های تحت شوک حرارتی توسعه دادند. روش حل این کار مبتنی بر رهیافت اجزای محدود گلرکین می‌باشد. همچنین، بگری و اسلامی ترموالاستیسیته کوپل تعمیم‌یافته دیسک‌های حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی را در مرجع [۱۶] بر طبق تئوری لرد-شولمن ارائه دادند. کیانی و اسلامی [۱۷] استفاده از روش تریب دیفرانسیلی تعمیم‌یافته را برای حل مسأله ترموالاستیسیته لرد-شولمن دیسک‌ها پیشنهاد کردند. بهتویی و اسلامی [۱۸] پاسخ کوپل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت ضربه حرارتی را مورد تحقیق و بررسی قرار دادند. در مقاله مذکور، اثرات تغییر شکل برشی با استفاده از یک تئوری مرتبه دوم در نظر گرفته شد. شرعیات [۱۹] برای سیلندرهای ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی و تحت شوک‌های حرارتی گوناگون، تحلیل‌های ترموالاستیسیته غیرخطی تعمیم‌یافته و کلاسیک ارائه داد. بدین منظور از المان‌های هرمیتی استفاده شد و وابستگی خواص مواد به دما نیز لحاظ گردید.

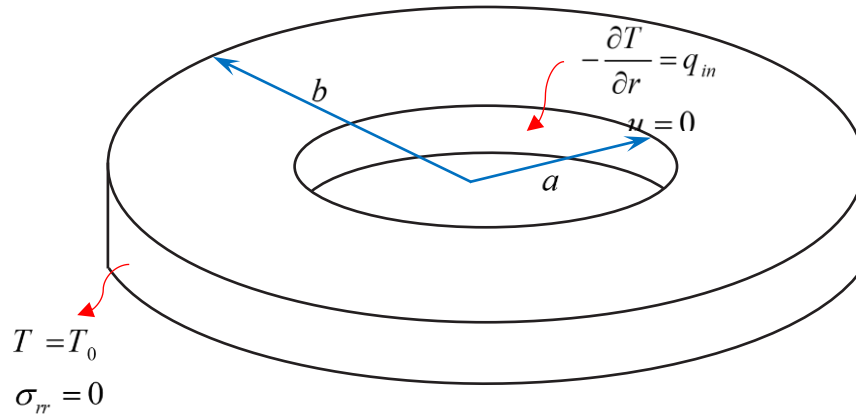
مواد مدرج تابعی^۱ دسته‌ای از مواد کامپوزیتی هستند که نخستین بار در دهه هشتاد میلادی به عنوان موادی پیشرفته برای مقاصد گوناگون معرفی شدند. بر خلاف مواد کامپوزیتی لایه‌ای کلاسیک که در آن‌ها خواص

1 Functionally Graded Materials (FGMs)

نسبت به موقعیت به‌طور چشمگیری تغییر می‌کنند، خواص مواد مدرج تابعی به تدریج در یک راستای مشخص دچار تغییر می‌شوند. این ویژگی سبب کاهش احتمال بروز تمرکزهای تنش و ترک در ماده خواهد شد. بنا به این دلایل، مواد مدرج تابعی دارای کاربردهای متنوعی در صنایع مختلف هستند. این دسته از مواد کامپوزیتی به منظور داشتن خواص ترمومکانیکی مطلوب از ترکیب دو و یا چند ماده ساخته می‌شوند. اکثراً، دو ماده تشکیل‌دهنده مواد مدرج تابعی سرامیک‌ها (با هدایت حرارتی پایین به منظور ایجاد مقاومت حرارتی بالا) و فلزات (برای جلوگیری از شکست سازه) هستند. به علت محاسن مذکور، مواد مدرج تابعی به عنوان یک مقاوم حرارتی عالی در سازه‌های مکانیکی شناخته می‌شوند و قادر به تحمل شرایط بارگذاری حرارتی سخت (به عنوان مثال در کاربردهای هوافضایی) هستند.

تاکنون تحقیقات متعددی بر روی رفتار سازه‌های مختلف مهندسی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی صورت گرفته است. به عنوان نمونه، رحیمی و همکاران [۲۰] به کمک یک رهیافت انرژی، رفتار ترموالاستیک سیلندرهای دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی پیزوالکتریک، که بعنوان حسگر کاربرد دارند، را مورد بررسی قرار دادند. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، عارفی و رحیمی [۲۱] رفتار ترموالاستیک سیلندرهای تحت فشار ساخته شده از مواد مدرج تابعی را با در نظر گرفتن بارهای مکانیکی و حرارتی مورد تحلیل قرار دادند. نتایج کار آن‌ها نشان داد که در حضور همزمان دما و فشار، جابجایی محوری سیلندر با افزایش ضریب ناهمگنی کاهش می‌یابد. عارفی و همکاران [۲۲] تحلیل دوبعدی ترموالاستیک سیلندرهای جدارضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی را با در نظر گرفتن اثر بستر الاستیک از نوع مدل پاسترناک را ارائه کردند. در این پژوهش آشکار گردید که کاهش ضریب ناهمگنی ماده مدرج تابعی تأثیری افزایشی بر جابجایی شعاعی سیلندر دارد. همچنین لقمان و همکاران [۲۳] تحلیل ترموالاستیک نامتقارنی برای پوسته‌های استوانه‌ای دارای طول نامحدود و ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت میدان مغناطیسی طولی ارائه دادند. بر اساس نتایج ایشان، با افزایش ضریب ناهمگنی، جابجایی شعاعی افزایش می‌یابد در حالیکه جابجایی محیطی کاسته می‌شود.

در مقاله حاضر، یک رهیافت عددی و کارا برای حل مسأله ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته غیرخطی دیسک‌های حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شوک حرارتی ارائه می‌شود. ابتدا معادلات حاکم بر اساس تئوری لرد-شولمن در مختصات قطبی استخراج می‌شوند. در این فرایند استخراج، اثرات



شکل ۱. شماتیک دیسک حلقوی تحت شوک حرارتی داخلی

Fig. 1. Schematic of annular disk under internal thermal shock

که در آن n نشانگر فاکتور ناهمگنی ماده است. با ترکیب معادلات (۱) و (۲) و مشتق گیری در جهت r می توان مشتق خصوصیات مواد را به شرح زیر بدست آورد

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{n \left(\frac{a-r}{a-b} \right)^n}{a-r} (P_c - P_m) \quad (3)$$

۳- معادلات حرکت

در غیاب نیروهای داخلی و با توجه به جابجایی های متقارن محوری، معادله شعاعی حرکت به صورت زیر نوشته می شود [۲]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho u \quad (4)$$

که در آن u ، σ_{rr} و $\sigma_{\theta\theta}$ به ترتیب جابجایی شعاعی، تنش های شعاعی و محیطی را نشان می دهند. در مورد جسم ترمو الاستیک همگن همسانگرد، روابط ساختاری به صورت زیر بیان می شود [۱۵]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu \varepsilon_{rr} + \bar{\lambda} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) - \bar{\beta} (T - T_0) \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu \varepsilon_{rr} + \bar{\lambda} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) - \bar{\beta} (T - T_0) \end{aligned} \quad (5)$$

غیرخطی حرارتی لحاظ می گردند و معادله انرژی در فرم اصلی خود نوشته می شود. سپس، به کمک روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته، رهیافتی عددی برای فرایند حل پیشنهاد خواهد شد. در نهایت، اثرات پارامترهای تأثیرگذار شامل اندیس گرادیان ماده و اندازه شوک حرارتی بر پاسخ ترمومکانیکی کوپل دیسک مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

۲- خواص مواد

مطابق شکل ۱ دیسکی حلقوی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b در نظر بگیرید. بارگذاری مورد نظر شوکی حرارتی است که به سطح داخلی دیسک اعمال می شود. همچنین، فرض می شود ماده سازنده دیسک ترکیبی از فلز و سرامیک به شکل مدرج تابعی باشد و خاصیت ماده در جهت شعاعی به صورت زیر تغییر می کند

$$P(r) = V_m(r)P_m + V_c(r)P_c \quad (1)$$

که در آن زیرنویس های m و c به ترتیب مواد تشکیل دهنده فلزی و سرامیکی را نشان می دهند. علاوه بر این، V_m و V_c کسر حجمی مواد فلزی و سرامیکی هستند که به صورت زیر بدست می آیند

$$V_m = \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^n, V_c = 1 - V_m \quad (2)$$

$$\dot{Q} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rq)}{\partial r} \quad (10)$$

که در آن‌ها T و T نشانگر دمای مطلق و دمای مرجع هستند. همچنین، $\bar{\lambda}$ و $\bar{\beta}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\bar{\lambda} = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} \lambda, \quad \bar{\beta} = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} \beta \quad (6)$$

که در آن Q شار حرارتی خاص است. قانون دوم ترمودینامیک توسط فرمول زیر داده می‌شود

$$\delta Q = T ds \quad (11)$$

در معادله (۶)، μ و λ ثوابت لامه^۱ را نشان می‌دهند. در ادامه، پارامتر ترموالاستیک است که به صورت $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha$ تعریف شده است. اجزای کرنش نیز به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شوند

فرم نرخی معادله (۱۱) به شکل زیر است

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \quad (7)$$

$$\dot{Q} = T\dot{S} = T \left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{rr}} \dot{\varepsilon}_{rr} + \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{\theta\theta}} \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} + \frac{\partial S}{\partial T} \dot{T} \right) \quad (12)$$

با قرار دادن معادلات (۵) و (۷) در معادله (۳)، معادله حرکت به صورت

زیر حاصل می‌شود

یا به شکل دیگر

$$(\bar{\lambda} + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{\partial(\bar{\lambda} + 2\mu)}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \quad (8)$$

$$\frac{u}{r} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial r} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\bar{\beta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial r} \right) (T - T_0) = 0$$

به منظور بدست آوردن قانون اول ترمودینامیک برای تغییر حرارتی غیرخطی در دیسک طبق تئوری لرد-شولمن، معادلات (۹)، (۱۰) و (۱۳) استفاده می‌شوند. با قرار دادن میدان کرنش در معادله بدست آمده می‌توان به معادله زیر رسید

$$\dot{Q} = T \bar{\beta} \dot{\varepsilon}_{rr} + T \bar{\beta} \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} + c \rho \dot{T} \quad (13)$$

۴- معادلات انرژی

بر اساس تئوری لرد-شولمن، تغییر موجی دما از طریق قرار دادن یک پارامتر زمان آسایش، t ، در قانون مرسوم فوریه به شرح زیر مدل می‌شود

[۲]

$$q + t_0 \dot{q} = -K \frac{\partial T}{\partial r} \quad (9)$$

که در آن q و K به ترتیب شار گرما و رسانایی گرمایی را نشان می‌دهند. تعادل گرما برای یک عنصر از جسم مورد بررسی به صورت زیر بیان می‌شود [۲۴]

۵- بی‌بعد سازی معادلات حاکم

در این‌جا، معادلات در فرم بدون بعد ارائه می‌شوند. به همین منظور، متغیرهای بدون بعد زیر معرفی می‌شوند

1 Lamé constants

۶- رویکرد حل عددی

با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته [۲۵]، معادله (۱۶) به

شکل زیر گسسته‌سازی می‌شود

$$\frac{\bar{\lambda}_i + 2\mu_i}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \sum_{j=1}^N \left(C_{ij}^{(2)} + \frac{1}{r_i} C_{ij}^{(1)} - \frac{1}{r^2} C_{ij}^{(0)} \right) u_j + \frac{1}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \frac{\partial(\bar{\lambda}_i + 2\mu_i)}{\partial r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} u_j + \frac{1}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \frac{1}{r_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} u_j - \frac{\rho_i}{\rho_m} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \dot{u}_j - \frac{\bar{\beta}_i}{\bar{\beta}_m} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \theta_j - \frac{1}{\bar{\beta}_m} \frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \theta_j = 0$$

$$\frac{k_i}{k_m} \sum_{j=1}^N \left(C_{ij}^{(2)} + \frac{1}{r_i} C_{ij}^{(1)} \right) \theta_j + \frac{1}{k_m} \frac{\partial k_i}{\partial r} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \theta_j - \frac{\rho_i c_i}{\rho_m c_m} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \dot{\theta}_j - \frac{\rho_i c_i}{\rho_m c_m} t_0 \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \ddot{\theta}_j - \frac{\bar{\beta}_i}{\bar{\beta}_m} \hat{C} t_0 \left(\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \dot{\theta}_j \right) \sum_{j=1}^N \left(C_{ij}^{(1)} + \frac{1}{r_i} C_{ij}^{(0)} \right) \dot{u}_j - \frac{\bar{\beta}_i}{\bar{\beta}_m} \hat{C} \left(1 + \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(0)} \theta_j \right) \left(\sum_{j=1}^N \left(C_{ij}^{(1)} + \frac{1}{r_i} C_{ij}^{(0)} \right) \dot{u}_j + t_0 \sum_{j=1}^N \left(C_{ij}^{(1)} + \frac{1}{r_i} C_{ij}^{(0)} \right) \ddot{u}_j \right) = 0$$

معادله بالا را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} M^{uu} & M^{u\theta} \\ M^{\theta u} & M^{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C^{uu} & C^{u\theta} \\ C^{\theta u} & C^{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^{uu} & K^{u\theta} \\ K^{\theta u} & K^{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^u \\ F^\theta \end{Bmatrix} \quad (۲۰)$$

که اجزای آن به شکل زیر بدست می‌آیند

$$\hat{q}_i = \frac{l_m}{k_m T_0} q_i \quad \hat{u}_i = \frac{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m}{l_m \bar{\beta}_m T_0} u_i \quad (۱۵)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0} \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\bar{\beta}_m T_0} \quad \hat{r} = \frac{r}{l_m} \quad \hat{t} = \frac{c_{1m}}{l_m} t$$

که در آن $l_m = K_m (\rho_m c_m c_{1m})^{-1}$ طول مشخصه است، c_{1m} سرعت انتشار موج الاستیک را نشان می‌دهد؛ $c_{1m} = \sqrt{(\bar{\lambda}_m + 2\mu_m) \rho_m^{-1}}$ با استفاده از روابط فوق، فرم بدون بعد معادلات (۸) و (۱۴) به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\frac{\bar{\lambda} + 2\mu}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{1}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \frac{\partial(\bar{\lambda} + 2\mu)}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + (۱۶)$$

$$\frac{1}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \frac{u}{r} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial r} - \frac{\rho}{\rho_m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\bar{\beta}_m} \left(\bar{\beta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial r} \right) \theta = 0$$

$$\frac{k}{k_m} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{k_m} \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{\beta}{\bar{\beta}_m} \hat{C} (\theta + 1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} + \frac{\partial u}{r \partial t} + t_0 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial r} + t_0 \frac{\partial^2 u}{r \partial t^2} \right) - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}_m} \hat{C} t_0 \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} + \frac{\partial u}{r \partial t} \right) - \frac{\rho c}{\rho_m c_m} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\rho c}{\rho_m c_m} t_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

توجه شود که نماد $\hat{\cdot}$ در این معادلات برای ساده‌سازی حذف شده است.

همچنین \hat{C} مربوط به اثر کوپل به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{C} = \frac{T_0 \bar{\beta}_m^2}{\rho_m c_m (\bar{\lambda}_m + 2\mu_m)} \quad (۱۷)$$

علاوه بر این، تنش‌های شعاعی و محیطی به شکل بی‌بعد به صورت

زیر بیان می‌شوند

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}_m} \theta \quad (۱۸)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \frac{u}{r} + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}_m} \theta$$

$$\begin{aligned}
 r = r_1 : \sum_{j=1}^N C_{1j}^{(0)} u_j &= 0, \\
 \sum_{j=1}^N C_{1j}^{(1)} \theta_j &= -q_{in} \\
 r = r_N : \frac{\bar{\lambda}_i + 2\mu_i}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \sum_{j=1}^N C_{Nj}^{(1)} \theta_j + \\
 \frac{\bar{\lambda}_i}{r_N (\bar{\lambda}_m + 2\mu_m)} \sum_{j=1}^N C_{Nj}^{(0)} u_j - \frac{\bar{\beta}_i}{\beta_m} \sum_{j=1}^N C_{Nj}^{(0)} \theta_j &= 0 \\
 \sum_{j=1}^N C_{Nj}^{(0)} \theta_j &= 0
 \end{aligned} \tag{۲۳}$$

شرایط مرزی ارائه شده در معادله (۲۲) مستقیماً در معادله (۲۰) اعمال می‌شوند. پس از آن، معادلات حرکت و انرژی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$M(\dot{X})\ddot{X} + C(\dot{X}, X)\dot{X} + KX = F \tag{۲۴}$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم نیومارک^۱ به شکل شتاب ثابت متوسط ($\alpha_N = 0/5$)، $\beta_N = \square/$ [۲۶] بر روی معادله‌ی (۲۴) به معادله زیر می‌رسیم

$$\hat{K}(X)X_{j+1} = \hat{F}_{j,j+1} \tag{۲۵}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 \hat{K}_{j+1} &= K_{j+1} + a_3 M_{j+1} + a_6 C_{j+1} \\
 \hat{F}_{j,j+1} &= F_{j+1} + M_{j+1} \left(a_3 \dot{X}_j + a_4 \ddot{X}_j + a_5 \ddot{X}_j \right) \\
 &+ C_{j+1} \left(a_6 \dot{X}_j + a_7 \ddot{X}_j + a_8 \ddot{X}_j \right)
 \end{aligned} \tag{۲۶}$$

و همچنین

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \alpha_N \Delta t, \quad a_2 = (1 - \alpha_N) \Delta t \\
 a_3 &= \frac{1}{\beta_N \Delta t^2}, \quad a_4 = \frac{1}{\beta_N \Delta t}, \quad a_5 = \frac{1 - 2\beta_N}{2\beta_N} \\
 a_6 &= \frac{\alpha_N}{\beta_N \Delta t}, \quad a_7 = \frac{\alpha_N - \beta_N}{\beta_N}, \quad a_8 = \frac{\alpha_N - 2\beta_N}{2\beta_N} \Delta t
 \end{aligned} \tag{۲۷}$$

1 Newmark's direct integration

$$C_{ij}^{u\theta} = 0 \quad C_{ij}^{uu} = 0 \quad M_{ij}^{u\theta} = 0 \quad M_{ij}^{uu} = \frac{\rho_i}{\rho_m} C_{ij}^{(0)} \tag{۲۱}$$

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{uu} &= \frac{\bar{\lambda}_i + 2\mu_i}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \left(C_{ij}^{(2)} + \frac{1}{r_i} C_{ij}^{(1)} - \frac{1}{r^2} C_{ij}^{(0)} \right) + \\
 &\frac{1}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \frac{\partial(\bar{\lambda}_i + 2\mu_i)}{\partial r} C_{ij}^{(1)} + \frac{1}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m} \frac{1}{r_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial r} C_{ij}^{(0)}
 \end{aligned}$$

$$K_{ij}^{u\theta} = -\frac{\bar{\beta}_i}{\beta_m} C_{ij}^{(1)} - \frac{1}{\beta_m} \frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial r} C_{ij}^{(0)}$$

$$M_{ij}^{\theta u} = -\frac{\bar{\beta}_i}{\beta_m} \hat{C} t_0 (1 + \theta_i) \left(C_{ij}^{(1)} + \frac{1}{r_i} C_{ij}^{(0)} \right)$$

$$M_{ij}^{\theta\theta} = -\frac{\rho_i c_i}{\rho_m c_m} t_0 C_{ij}^{(0)}$$

$$C_{ij}^{\theta u} = -\frac{\bar{\beta}_i}{\beta_m} \hat{C} (1 + \theta_i + t_0 \theta_i) \left(C_{ij}^{(1)} + \frac{1}{r_i} C_{ij}^{(0)} \right)$$

$$C_{ij}^{\theta\theta} = -\frac{\rho_i c_i}{\rho_m c_m} C_{ij}^{(0)}$$

$$K_{ij}^{\theta u} = 0$$

$$K_{ij}^{\theta\theta} = \frac{k_i}{k_m} \left(C_{ij}^{(2)} + \frac{1}{r_i} C_{ij}^{(1)} \right) + \frac{1}{k_m} \frac{\partial k_i}{\partial r} C_{ij}^{(1)}$$

$$F_i^u = 0$$

$$F_i^\theta = 0$$

فرض می‌شود که دیسک در سطح داخلی تحت شوک حرارتی قرار دارد، در حالی که سطح خارجی آن در دمای مرجع نگهداری می‌شود. علاوه بر این، سطح خارجی عاری از تنش شعاعی و سطح داخلی عاری از تغییر شکل شعاعی است (شکل ۱ را ببینید). بنابراین، شرایط مرزی به شکل زیر داده می‌شوند

$$\begin{aligned}
 r = a : u &= 0, \quad -\frac{\partial T}{\partial r} = q_{in} \\
 r = b : \sigma_{rr} &= 0, \quad T = T_0
 \end{aligned} \tag{۲۲}$$

که در آن a و b شعاع داخلی و خارجی دیسک بی‌بعد هستند. شکل گسسته‌سازی شده شرایط مرزی به صورت زیر بیان می‌شود

جدول ۱. خواص مواد مورد استفاده

Table 1. Properties of used materials

ماده	$\alpha [1/K]$	$E [Pa]$	$K [W/mK]$	$\rho [kg/m^3]$	ν	$C_v [J/kgK]$
SUS۳۰۴	$12/33 \times 10^{-6}$	$2.01/0.4 \times 10^9$	۱۵/۳۷۹	۸۱۶۶	۰/۳۲۶۲	۴۹۶/۵۶
SI _r N _f	$5/8723 \times 10^{-6}$	34843×10^9	۱۳/۷۲۳	۲۳۷۰	۰/۲۴	۵۵۵/۱۱

\dot{X}_{j+1} و \ddot{X}_{j+1} به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{j+1} &= a_3(X_{j+1} - X_j) - a_4\dot{X}_j - a_5\ddot{X}_j \\ \dot{X}_{j+1} &= \dot{X}_j + a_2\ddot{X}_j + a_1\dot{X}_{j+1} \end{aligned} \quad (28)$$

از آنجا که دیسک در حالت استراحت است، مقادیر اولیه X و \dot{X} صفر در نظر گرفته می‌شوند. از این‌رو، شرایط اولیه برای شروع راهپیمایی زمانی به شرح زیر است

$$u(r, 0) = \dot{u}(r, 0) = \theta(r, 0) = \dot{\theta}(r, 0) = 0 \quad (29)$$

در نهایت، برای حل معادلات جبری غیر خطی حاصل در معادله (۲۵) تکنیک تکرارشونده پیکارد^۱ اعمال می‌شود.

۷- نتایج و بحث

در این بخش، نتایج عددی در مورد پاسخ دیسک حلقوی ساخته شده از یک ماده مدرج تابعی به شوک حرارتی داخلی با خواص داده شده در جدول ۱ [۲۷] ارئه شده‌اند.

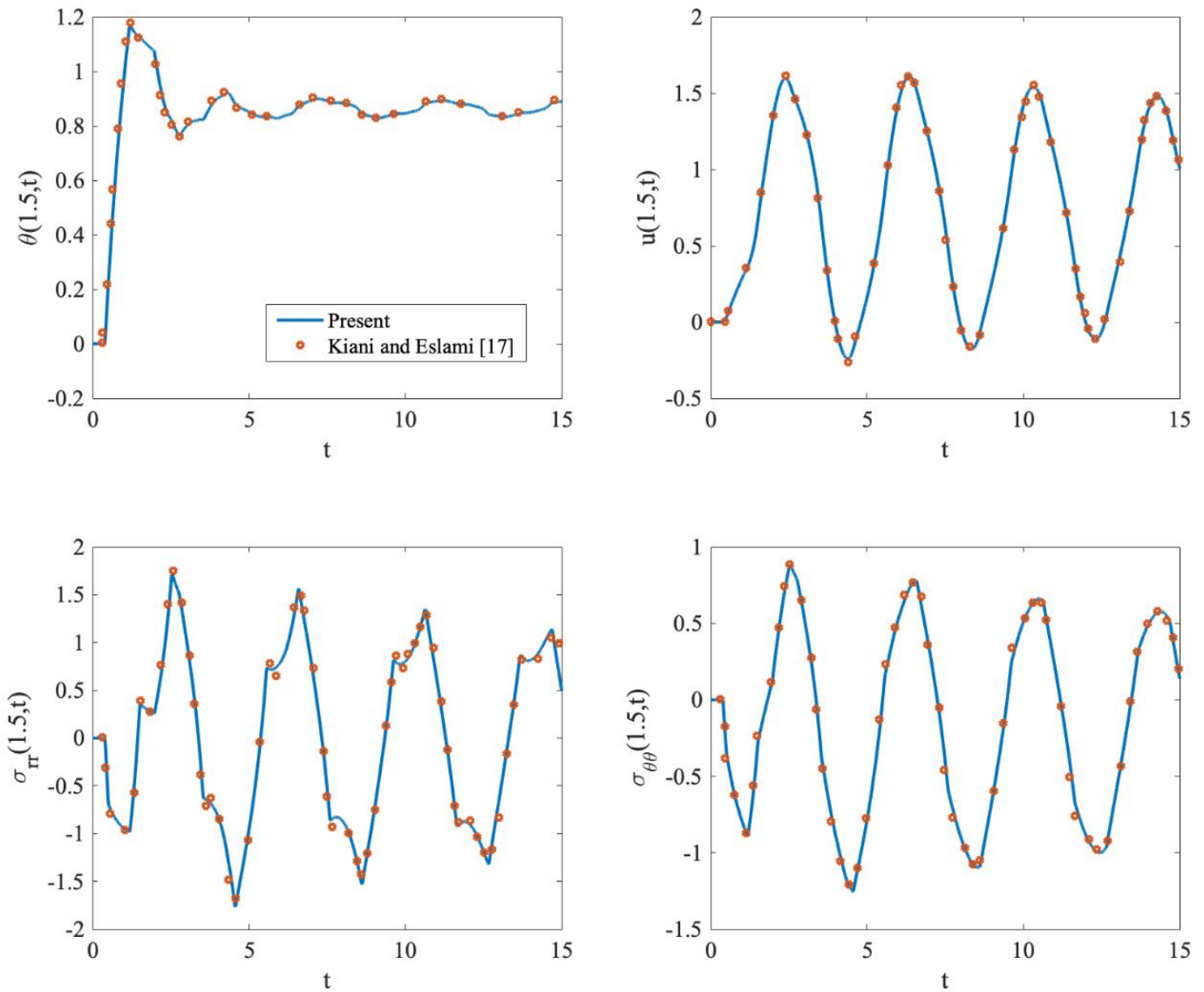
شکل ۲ تکامل زمانی جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی را در وسط دیسک تحت شوک حرارتی نشان می‌دهد. شوک حرارتی بدون بعد (q_{in}) ، زمان آسایش بدون بعد (t) و پارامتر کوپل (C) به ترتیب ۳، ۰/۶۴ و ۰/۰۸۲۵۹۴ در نظر گرفته شده‌اند.

همچنین، به منظور اعتبار سنجی با نتایج گزارش شده در مرجع [۱۷]، اندیس ماده مدرج تابعی (n) صفر در نظر گرفته می‌شود. می‌توان مشاهده کرد که نتایج حاضر با نتایج بدست آمده در [۱۷] کاملاً مطابقت دارد. علاوه بر این، این شکل حرکت موجدار دما را نشان می‌دهد که ناشی از استفاده از تئوری کوپل ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لرد-شولمن است.

تأثیر اندیس ماده مدرج تابعی بر تاریخچه جابجایی، دما و تنش‌های دیسک در شکل ۳ نشان داده شده است. مقادیر اندازه شوک حرارتی، زمان آسایش و پارامتر کوپل با همان مقادیر در نظر گرفته شده در شکل قبلی مساوی است. سه مقدار برای اندیس ماده مدرج تابعی در نظر گرفته شده است که برابر با ۰، ۰/۲ و ۰/۵ هستند. مشاهده می‌شود که با بزرگتر شدن اندیس ماده مدرج تابعی، دامنه جابجایی و تنش‌ها به طور محسوسی کاهش می‌یابند و فرکانس نوسانات افزوده می‌شود. علت این امر را می‌توان به کمک معادله (۲) ردیابی کرد که بر اساس آن کسر حجمی بخش سرامیکی با افزایش اندیس ماده مدرج تابعی دچار افزایش می‌شود و به دلیل بالاتر بودن مدول الاستیک سرامیک نسبت به فلز، دیسک سخت‌تر خواهد شد.

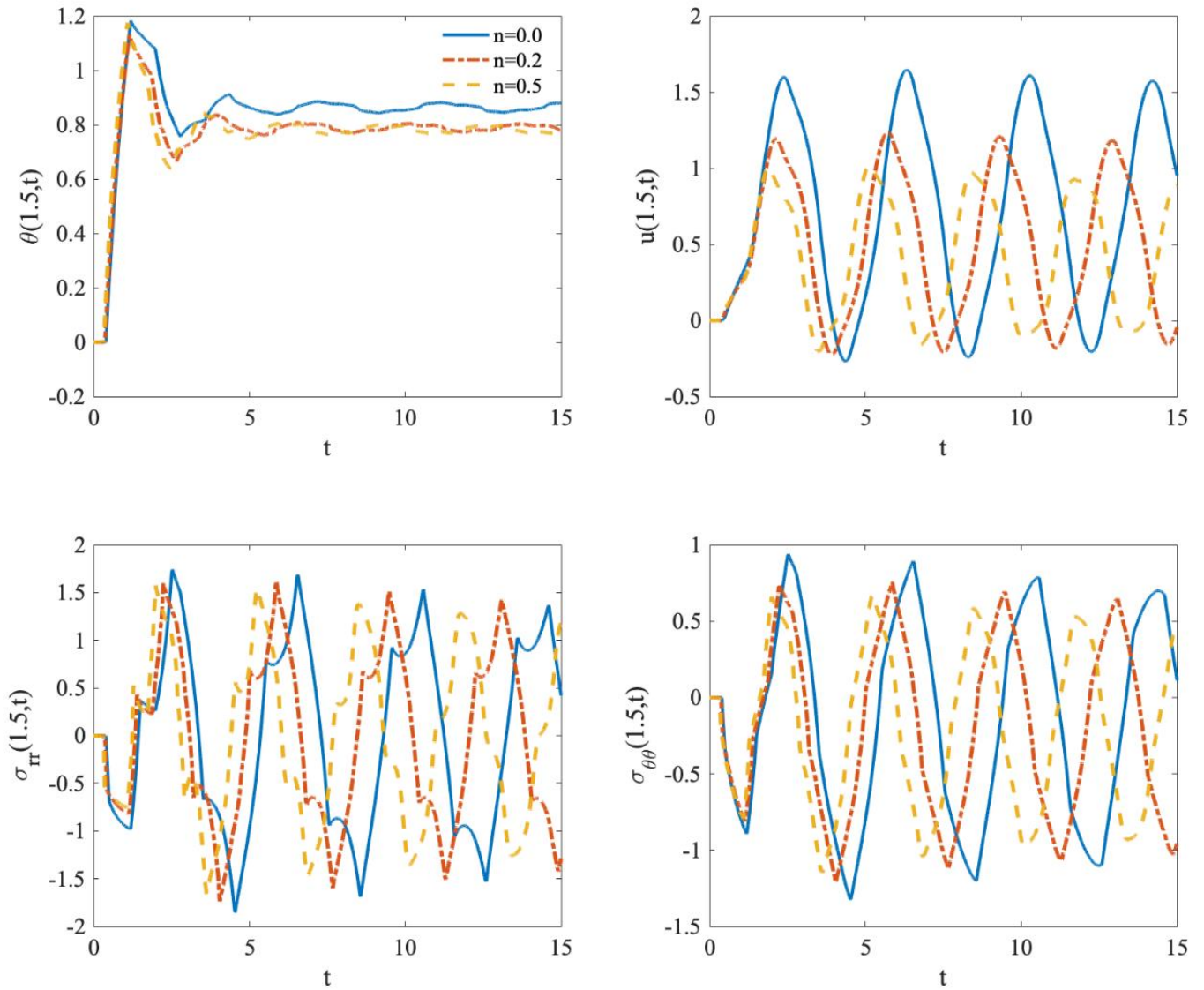
تأثیر شدت شار گرما بر انتشار دما، جابجایی شعاعی، تنش‌های محیطی و شعاعی را می‌توان از روی شکل ۴ تجزیه و تحلیل کرد. در اینجا فرض می‌شود که $n = 0/5$. همانطور که انتظار می‌رفت، دامنه جابجایی، دما و امواج تنش وقتی بزرگتر می‌شوند که شدت شوک حرارتی بیشتر شود. همچنین دیده می‌شود که تغییر شدت شار گرما بر فرکانس نوسانات بی‌تأثیر است. شایان ذکر است که در مقادیر بالای شوک حرارتی، استفاده از تحلیل غیر خطی حرارتی ضروری می‌شود.

1 Picard's iteration



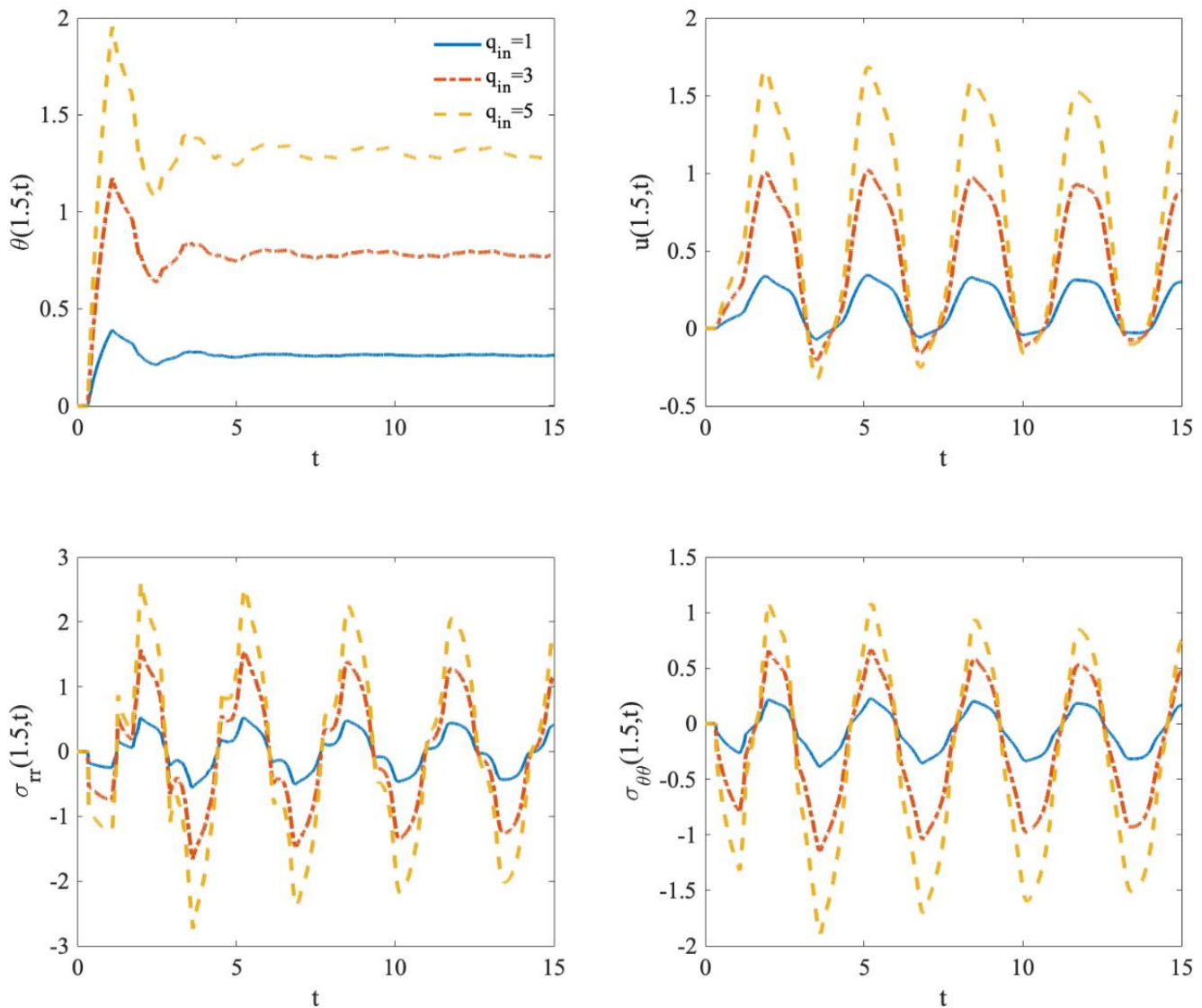
شکل ۲. تکامل زمانی جابجایی شعاعی، دما و تنش‌های شعاعی و محیطی در وسط دیسک تحت شوک حرارتی ($q_{in}=3$, $t_0=0.64$)

Fig. 2. Time evolution of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses at the middle of disk subjected to thermal shock ($q_{in}=3$, $t_0=0.64$)



شکل ۳. تکامل زمانی جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی در وسط دیسک تحت شوک حرارتی برای مقادیر مختلف اندیس ماده مدرج تابعی ($q_{in}=3$ ، $t_0=0.64$)

Fig. 3. Time evolution of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses at the middle of disk subjected to thermal shock for various values of FG index ($q_{in}=3$, $t_0=0.64$)

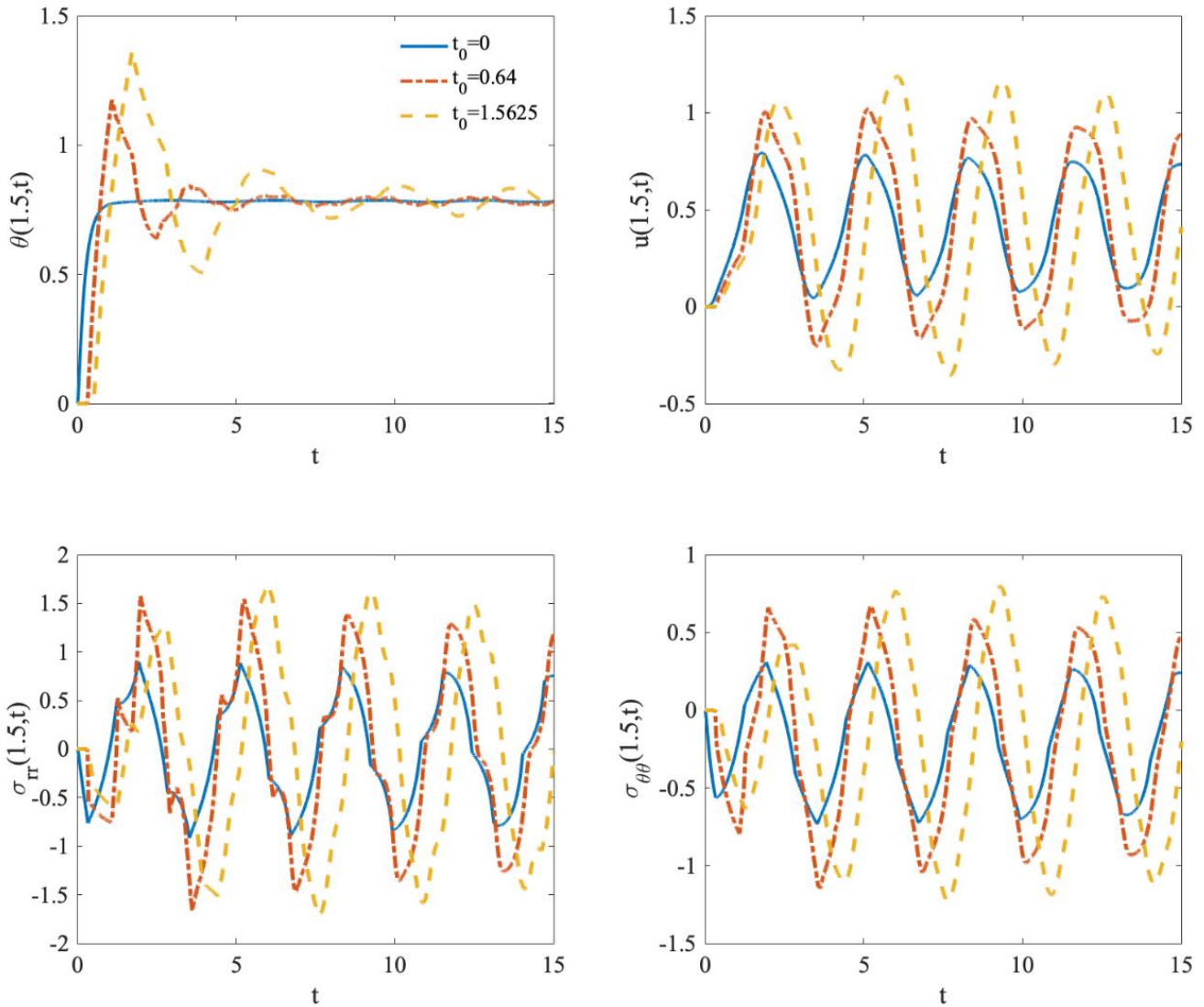


شکل ۴. تکامل زمانی جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی در وسط دیسک تحت مقادیر مختلف شوک حرارتی ($t_0 = 0.64$, $n = 0.5$)

Fig. 4. Time evolution of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses at the middle of disk for various values of thermal shock ($n=0.5$, $t_0=0.64$)

شوک حرارتی فراهم می‌کند. شکل به وضوح نشان می‌دهد که با کاهش زمان آسایش، نوسانات دما کاهش می‌یابد. همچنین، با افزایش این پارامتر، دامنه تغییرات دما افزایش می‌یابد، در حالی که فرکانس نوسانات کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که استفاده از فرمولبندی حرارتی غیرخطی برای مقادیر بزرگ پارامتر زمان آسایش ضروری است [۱۷].

انتشار دما، جابجایی شعاعی و تنش‌های محیطی و شعاعی در وسط یک دیسک مدرج تابعی تحت شوک حرارتی داخلی برای مقادیر مختلف زمان آسایش، در شکل ۵ نشان داده شده‌اند. در واقع، این شکل برای نشان دادن توانایی تئوری لورد-شولمن در پیش‌بینی حرکت موج دما آورده شده است. زمان آسایش، تأخیر زمانی مورد نیاز برای ایجاد هدایت گرمایی حالت پایدار را در هنگام قرار گرفتن دیسک در معرض

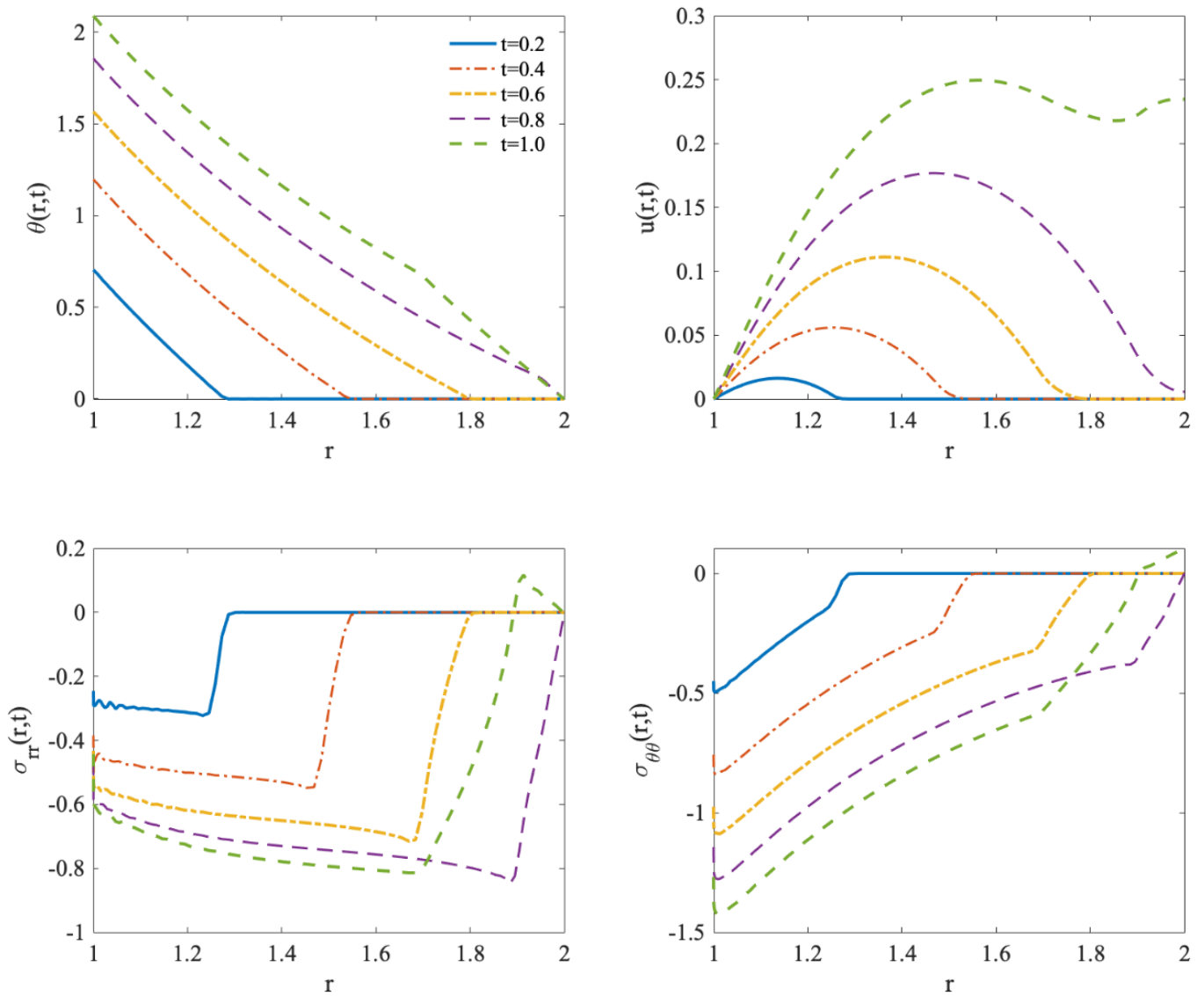


شکل ۵. تکامل زمانی جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی در وسط دیسک تحت شوک حرارتی برای مقادیر مختلف زمان آسایش ($q_{in}=3$ ، $n=0/5$)

Fig. 5. Time evolution of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses at the middle of disk subjected to thermal shock for various values of relaxation time ($q_{in}=3$, $n=0/5$)

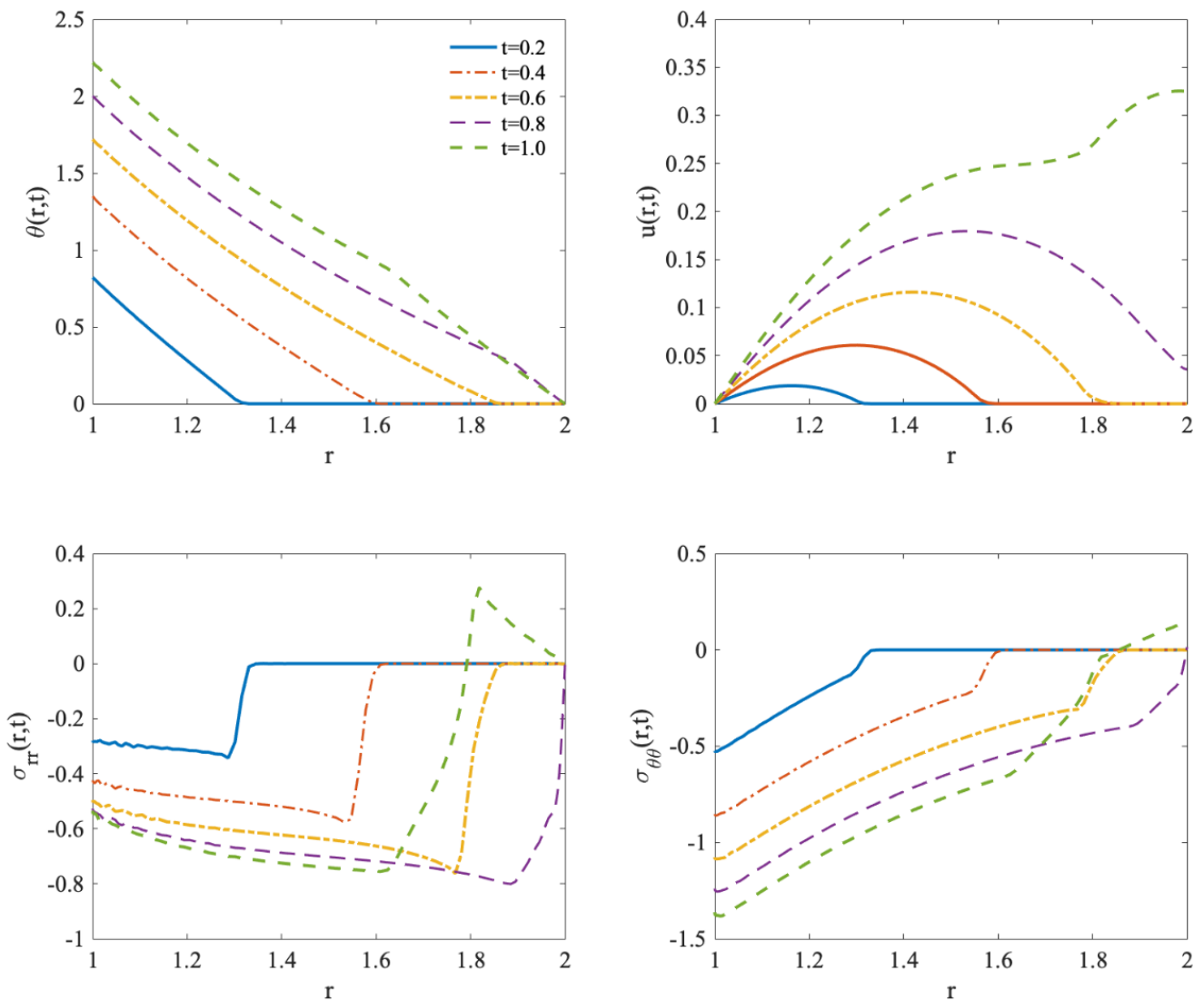
توزیع دما، جابجایی شعاعی و تنش‌های محیطی و شعاعی به عنوان تابعی از شعاع دیسک در برخی از سطوح زمانی مشخص در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده‌اند. این نتایج برای اندیس ماده مدرج تابعی برابر با $0/2$ و $0/5$ بدست آمده‌اند. همچنین، زمان آسایش بدون بُعد (t) و پارامتر کوپل (C) به ترتیب $1/5625$ و $0/082594$ فرض شده‌اند. مطابق شکل ۶، به ازای $n=0/2$ و برای $t=0/2$ ، منحنی توزیع دما از $r=1$ در حدود $0/7$ آغاز می‌شود و با توجه به اینکه از موقعیت $r=0$ به بعد دما صفر است می‌توان نتیجه گرفت که مکان جبهه موج دما در $r=0$ در زمان $t=0/2$ است. همچنین، از آنجائی که موج دما $\Delta r=0$ را در

طی می‌کند، سرعت بی‌بعد موج گرمایی برابر با $1/4$ به دست می‌آید. مطابق شکل ۷ و به ازای $n=0/5$ ، سرعت بی‌بعد انتشار موج گرما تقریباً برابر با $1/5$ خواهد بود که این امر تأثیر افزایشی بالا رفتن اندیس ماده مدرج تابعی را بر سرعت انتشار موج نشان می‌دهد. برای سطوح زمانی $t=0/2, 0/4, 0/6, 0/8$ تنش به سمت لبه دیسک انتشار می‌یابند، در حالیکه برای زمان $t=1$ این امواج به عقب بازتاب می‌شوند. در حقیقت موج تقریباً در زمان $t=0/8$ به لبه خارجی دیسک رسیده است و همانطور که برای زمان $t=1$ دیده می‌شود موج مقدار زیادی از لبه خارجی بازگشته است.



شکل ۶. توزیع جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی به عنوان تابعی از شعاع دیسک تحت شار گرما در سطح داخلی در برخی از سطوح زمانی مشخص ($t = 1/5625$, $q_{in} = 3$, $n = 0.2$)

Fig. 6. Variations of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses as functions of disk's radius subjected to thermal shock at the inner surface at some certain time levels ($n=0.2$, $q_{in}=3$, $t_0=1.5625$)



شکل ۷. توزیع جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی به عنوان تابعی از شعاع دیسک تحت شار گرما در سطح داخلی در برخی از سطوح زمانی مشخص ($t_0 = 1.5625$, $q_{in} = 3$, $n = 0.5$)

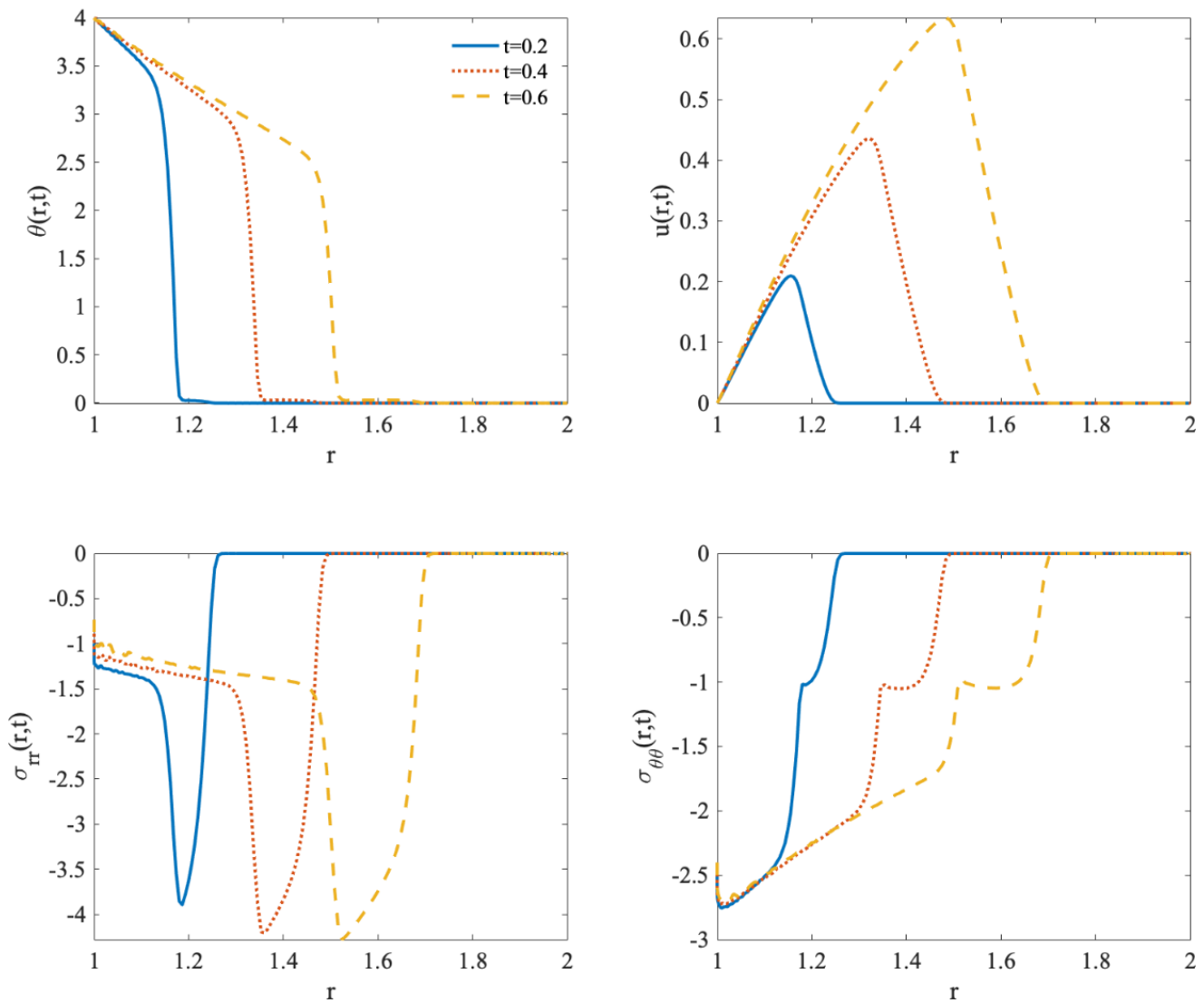
Fig. 7. Variations of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses as functions of disk's radius subjected to thermal shock at the inner surface at some certain time levels ($n=0.2$, $q_{in}=3$, $t_0=1.5625$)

خاص با در نظر گرفتن $\theta_{in} = 4$ برای اندیس ماده مدرج تابعی برابر با 0.2 و 0.5 نشان می‌دهند. در اینجا در نظر گرفته می‌شود که تغییر دمای ناگهانی به سطح داخلی دیسک اعمال می‌شود. برای این منظور، دمای اعمال شده به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho S(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (30)$$

همچنین، این شکل‌ها نشان می‌دهند که جبهه موج تنش شعاعی گرادیان بیشتری نسبت به r در مراحل آغازین اعمال شوک حرارتی دارد. باید توجه نمود که امواج شعاعی فشاری در برگشت به عقب بصورت کششی منتشر می‌شوند چرا که شرایط مرزی تنش آزاد در لبه خارجی دیسک برقرار است.

شکل‌های ۸ و ۹ تغییر دما، جابجایی شعاعی و تنش‌های محیطی و شعاعی را در جهت شعاع یک دیسک مدرج تابعی در برخی از سطوح زمانی

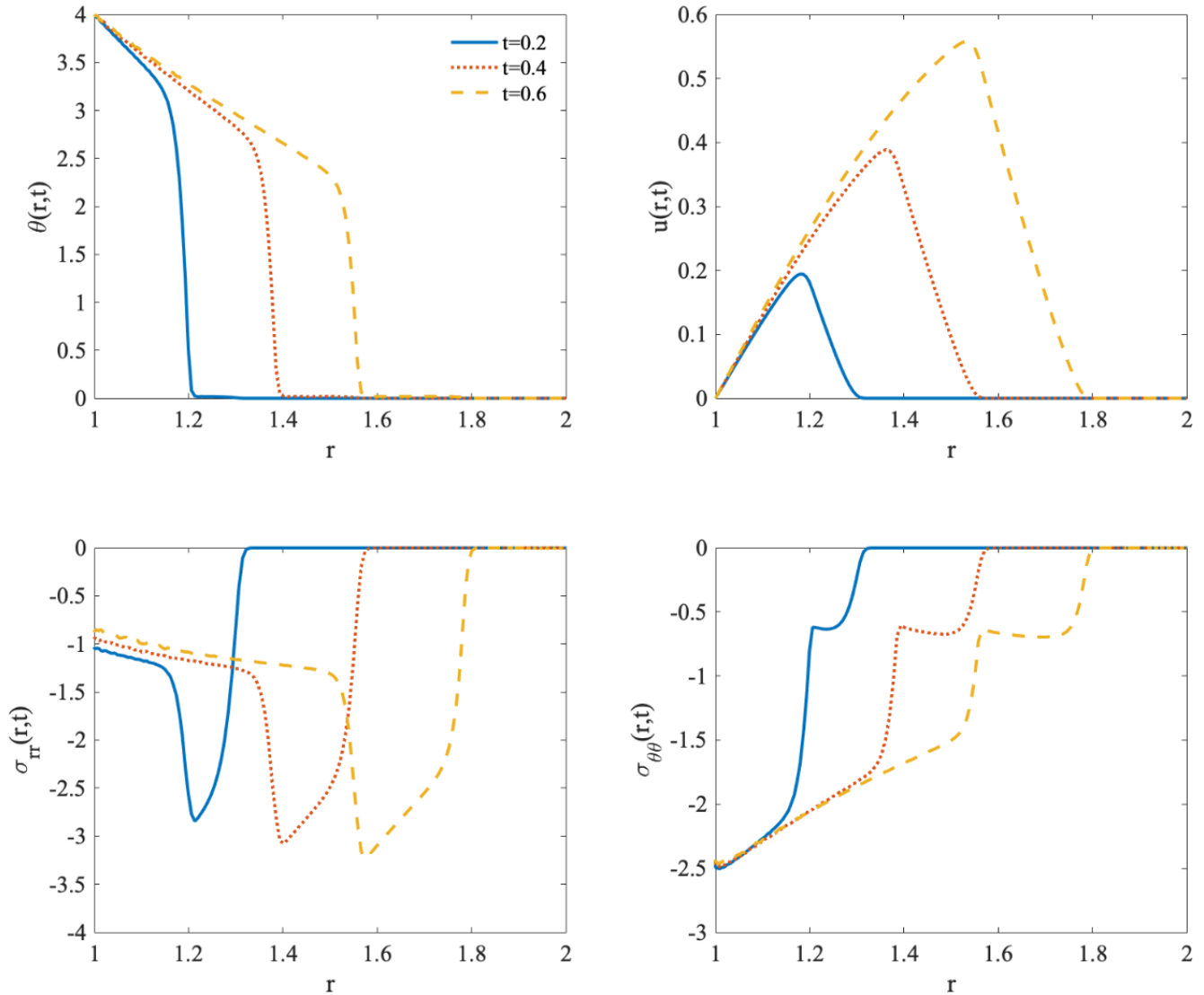


شکل ۸. توزیع جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی به عنوان تابعی از شعاع دیسک تحت دمای ناگهانی در سطح داخلی در برخی از سطوح زمانی مشخص ($n=0.2$, $\theta_{in}=4$, $t=0/5$)

Fig. 8. Variations of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses as functions of disk's radius subjected to sudden temperature at the inner surface at some certain time levels ($n=0.2$, $\theta_{in}=4$, $t_0=0/5$)

شکل‌های ۲ تا ۵ می‌توان مشاهده کرد این تنش‌ها به صورت نوسانی حول مقدار صفر نوسان می‌کنند. ولی چون در شکل‌های ۶ تا ۹ این مقادیر برای بازه زمانی کوچکی در ابتدای ارتعاشات نشان داده شده‌اند، فقط مقادیر منفی آن‌ها مشخص است. حتی در شکل ۷ می‌توان دید با برگشت موج از لبه بیرونی دیسک، مقدار تنش شعاعی مثبت شده است.

سه شرط مرزی دیگر با شرایط تعریف شده در معادله (۲۲) یکسان در نظر گرفته شده است. تحت این شرایط نیز، سرعت موج گرمایی به ازای $n=0/2$ برابر با $1/4$ و به ازای $n=0/5$ برابر با $1/5$ می‌باشد. در انتها لازم به ذکر است که وجود تنش‌های شعاعی و محیطی منفی در نمودارها بر اساس معادله تنش قابل توضیح می‌باشند (معادله (۵)). همانطور که در



شکل ۹. توزیع جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی به عنوان تابعی از شعاع دیسک تحت دمای ناگهانی در سطح داخلی در برخی از سطوح زمانی مشخص ($n = 0.5$ ، $\theta_{in} = 4$ ، $t = 1/5625$)

Fig. 9. Variations of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses as functions of disk's radius subjected to sudden temperature at the inner surface at some certain time levels ($n=0.5$, $\theta_{in} = 4$, $t_0=1/5625$)

۸- نتیجه گیری

تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته و انتگرالگیری مستقیم نیومارک برای حل مسأله پیشنهاد گردید. در قالب چند مثال عددی، تأثیرات اندیس گرادیان ماده، زمان آسایش و اندازه شوک حرارتی بر پاسخ ترمومکانیکی کوپل دیسک مورد مطالعه قرار گرفتند. همچنین، تأثیر دو نوع شرایط مرزی شوک حرارتی و تغییر دمای ناگهانی به سطح داخلی دیسک بر روی رفتار نوسانی دیسک بررسی و پیشروی موج ترمومکانیکی در شعاع دیسک نشان داده شد. از میان مهمترین یافته‌های مقاله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

در این پژوهش، پاسخ ترموالاستیک یک دیسک حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی که در معرض یک شوک حرارتی داخلی قرار دارد بصورت عددی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. بدین منظور، از نظریه ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لرد-شولمن استفاده شد که قادر به در نظر گرفتن اثرات شوک حرارتی است. همچنین، در استخراج معادلات حاکم بر مسأله، اثرات غیرخطی حرارت لحاظ شدند. رهیافتی عددی نیز به کمک روش‌های

- [10] P.K. Zeverdejani, Y. Kiani, Radially symmetric response of an FGM spherical pressure vessel under thermal shock using the thermally nonlinear Lord-Shulman model, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 182 (2020) 104065.
- [11] Y. Heydarpour, P. Malekzadeh, F. Gholipour, Thermoelastic analysis of FG-GPLRC spherical shells under thermo-mechanical loadings based on Lord-Shulman theory, *Composites Part B: Engineering*, 164 (2019) 400-424.
- [12] Z.Y. Ai, Z.K. Ye, J.J. Yang, Thermo-mechanical behaviour of multi-layered media based on the Lord-Shulman model, *Computers and Geotechnics*, 129 (2021) 103897.
- [13] M.F. Oskouie, R. Ansari, H. Rouhi, Studying nonlinear thermomechanical wave propagation in a viscoelastic layer based upon the Lord-Shulman theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27(10) (2020) 800-806.
- [14] M. Faraji Oskouie, R. Ansari, H. Rouhi, Thermally nonlinear generalized coupled thermo-viscoelasticity of disks: a numerical variational approach, *Waves in Random and Complex Media*, (2020) 1-16.
- [15] A. Bagri, M. Eslami, Generalized coupled thermoelasticity of disks based on the Lord-Shulman model, *Journal of thermal stresses*, 27(8) (2004) 691-704.
- [16] A. Bagri, M. Eslami, Generalized coupled thermoelasticity of functionally graded annular disk considering the Lord-Shulman theory, *Composite Structures*, 83(2) (2008) 168-179.
- [17] Y. Kiani, M.R. Eslami, A GDQ approach to thermally nonlinear generalized thermoelasticity of disks, *Journal of Thermal Stresses*, 40(1) (2017) 121-133.
- [18] A. Bahtui, M. Eslami, Coupled thermoelasticity of functionally graded cylindrical shells, *Mechanics research communications*, 34(1) (2007) 1-18.
- [19] M. Shariyat, Nonlinear transient stress and wave propagation analyses of the FGM thick cylinders, employing a unified generalized thermoelasticity theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 65(1) (2012) 1-12.
- با بزرگتر شدن اندیس ماده مدرج تابعی، دامنه جابجایی و تنش‌ها به طور محسوسی کاهش یافته و فرکانس نوسانات افزایش می‌یابد.
 - با کاهش زمان آسایش، نوسانات دما کاهش می‌یابند در حالی که فرکانس نوسانات افزایش پیدا می‌کند.
 - افزایش شدت شار گرما باعث افزایش دامنه جابجایی و تنش‌ها شده ولی در فرکانس نوسانات تاثیری ندارد.

منابع

- [1] Z.Y. Ai, Z.K. Ye, J.J. Yang, Thermo-mechanical behaviour of multi-layered media based on the Lord-Shulman model, *Computers and Geotechnics*, 129 (2021) 103897.
- [2] M. Arefi, A. Abbasi, M. Vaziri Sereshk, Two-dimensional thermoelastic analysis of FG cylindrical shell resting on the Pasternak foundation subjected to mechanical and thermal loads based on FSDT formulation, *Journal of Thermal Stresses*, 39(5) (2016) 554-570.
- [3] M. Shariyat, D. Asgari, M. Azadi, Transient thermoelastic behavior of thick cylinder made of functionally graded materials with temperature-dependent properties using the finite element method, *AUT Journal of Mechanical Engineering*, 42(1) (2019) 9-18. (in Persian).
- [4] R.B. Hetnarski, J. Ignaczak, Generalized thermoelasticity, *Journal of Thermal Stresses*, 22(4-5) (1999) 451-476.
- [5] R. Hetnarski, J. Ignaczak, Nonclassical dynamical thermoelasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 37(1-2) (2000) 215-224.
- [6] H.W. Lord, Y. Shulman, A generalized dynamical theory of thermoelasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(5) (1967) 299-309.
- [7] A.E. Green, K.A. Lindsay, Thermoelasticity, *Journal of Elasticity*, 2(1) (1972) 1-7.
- [8] A.E. Green, P.M. Naghdi, A re-examination of the basic postulates of thermomechanics, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 432(1885) (1991) 171-194.
- [9] A. Green, P. Naghdi, On undamped heat waves in an elastic solid, *Journal of Thermal Stresses*, 15(2) (1992) 253-264.

- thermomechanical analysis of a functionally graded cylinder subjected to mechanical, thermal, and magnetic loads, *Journal of Thermal Stresses*, 40(6) (2017) 765-782.
- [24] N. Noda, R.B. Hetnarski, Y. Tanigawa, *Thermal stresses*, Routledge, 2018.
- [25] C. Shu, Application of differential quadrature method to structural and vibration analysis, in: *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, Springer, 2000, pp. 186-223.
- [26] J.C. Heinrich, D.W. Pepper, *Intermediate finite element method: fluid flow and heat transfer applications*, Routledge, 2017.
- [27] J. Reddy, C. Chin, Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates, *Journal of thermal Stresses*, 21(6) (1998) 593-626.
- (2012) 24-37.
- [20] G. Rahimi, M. Arefi, M. Khoshgoftar, Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads, *Applied Mathematics and Mechanics*, 32(8) (2011) 997.
- [21] M. Arefi, G. Rahimi, The effect of nonhomogeneity and end supports on the thermo elastic behavior of a clamped-clamped FG cylinder under mechanical and thermal loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 96 (2012) 30-37.
- [22] M. Arefi, A. Abbasi, M. Vaziri Sereshk, Two-dimensional thermoelastic analysis of FG cylindrical shell resting on the Pasternak foundation subjected to mechanical and thermal loads based on FSDT formulation, *Journal of Thermal Stresses*, 39(5) (2016) 554-570.
- [23] A. Loghman, M. Nasr, M. Arefi, Nonsymmetric

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Roghani, H. Rouhi, *Propagation of Thermomechanical Waves in Annular Disks Made of Functionally Graded Materials under Thermal Shock*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 54(2) (2022) 433-450.

DOI: [10.22060/mej.2022.20085.7162](https://doi.org/10.22060/mej.2022.20085.7162)



