



Buckling Analysis of Embedded Functionally Graded Graphene Platelet-Reinforced Porous Nanocomposite Plates with Various Shapes Using the P-Ritz Method

M. Ziyafat Doust Abed¹, H. Rouhi^{2*}

¹ Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

² Department of Technology and Engineering, East of Guilan, University of Guilan, Rudsar, Iran

ABSTRACT: In this study, the buckling of functionally graded graphene platelet-reinforced porous nanocomposite plates with various shapes such as rectangular, elliptical, and triangular ones embedded in an elastic medium is analyzed. To mathematically model the considered plate and elastic foundation, the first-order shear deformation plate theory, and the Winkler-Pasternak model are used, respectively. Three types of graphene nanoplatelet distribution and porous dispersion patterns through the thickness direction are considered for the nanocomposite plate. The effective material properties are obtained via a micromechanical model. By writing the energy functional of the system and using the analytical P-Ritz method, the influences of porosity coefficient, the weight fraction of graphene nanoplatelets, elastic foundation coefficients, and also the length-to-width and thickness ratios on the critical buckling loads are analyzed. It is illustrated that the plate with the non-uniform porosity distribution pattern of the first type and first type of graphene nanoplatelets due to the greater concentration of graphene nanoplatelets on the upper and lower surfaces of the plate and the increase in the stiffness of the plate, it has higher critical buckling load. Also, the maximum critical buckling load is related to shear loading and the minimum critical buckling load is related to biaxial buckling load. Also, by increasing the porosity coefficient, the critical buckling loads of the plate associated with all patterns of graphene nanoplatelets are reduced.

Review History:

Received: Aug. 08, 2021

Revised: Oct. 28, 2021

Accepted: Dec. 25, 2021

Available Online: Jan. 14, 2022

Keywords:

Buckling of plate

Porous nanocomposite plates

Various shapes of plates

Elastic foundation

P-Ritz method

1- Introduction

In recent years, graphene nanoplatelets are widely used as the reinforcing nanofillers to develop high-strength nanocomposites owing to their exceptional mechanical properties and chemical stability [1].

This paper is concerned with the buckling of functionally graded (FG) porous nanocomposite plates reinforced with graphene platelets. By using the First-Order Deformation Plate Theory (FSDT) to account for the transverse shear strain and P-Ritz method, the governing of equations is derived and then solved to calculate the critical uniaxial, biaxial, and shear buckling loads of the plate on elastic foundation with different porosity distribution and graphene nanoplatelets dispersion patterns also plate with arbitrary shapes such as rectangular, isosceles triangular and elliptical are considered. The elastic foundation is modeled with Winkler and Pasternak parameters. The influence of weight fraction, porosity distribution, and geometric parameters of the plate such as length to thickness ratio also parameters of the elastic foundation are investigated.

2- Problem Formulation

In this paper, three types of FG porous plates along with

the even porosity distribution case, denoted by p_3, p_2, p_1 are considered. To further strengthen the mechanical properties, the metal matrix of the composite plate is reinforced by Graphene Nanoplatelets (GPLs). And the distribution of GPLs in the metal matrix may be uniform or non-uniform by adjusting the volume fraction along the plate thickness. Three different GPLs patterns are also considered for each porosity distribution which are A, B, C [2].

The variation of Young's module, shear module, and mass density through the thickness direction for different porosity distributions can be described by Eq. (1) and N_0 is the coefficients of porosity.

$$\begin{aligned} E(z) &= E_{\max} (1 - N_0 \phi(z)) \\ G(z) &= G_{\max} (1 - N_0 \phi(z)) \\ \rho(z) &= \rho_{\max} (1 - N_m \phi(z)) \end{aligned} \quad (1)$$

The effective Young's module and mass density are obtained based on the Halpin-Tsai micromechanics model.

The adopted admissible P-Ritz functions which satisfy at

*Corresponding author's email: h_rouhi@guilan.ac.ir



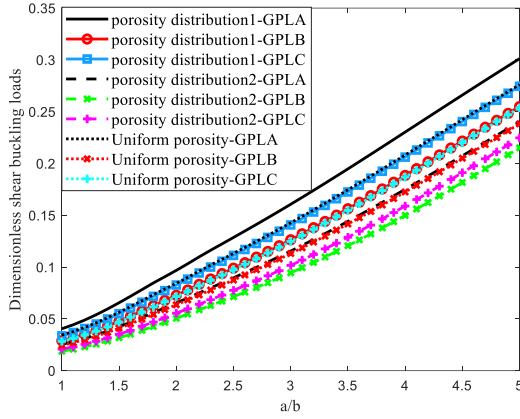


Fig. 1. Comparing of critical buckling load in the shear loads mode in terms of length to width ratio of the rectangular plate under clamped boundary conditions

Table 1. Comparing of critical buckling loads of nanocomposite plate reinforced with graphene nanoplatelets for ($a/b = 1$, $N_0 = 0/5$, $\Omega_{GPL} = 0/01$)

Pattern	a/h	p_x	[2]	$p_x = p_y$	[2]
GPL A	20	0.02922	0.02899	0.01551	0.01550
	30	0.01363	0.01343	0.00713	0.00712
	40	0.00784	0.00767	0.00406	0.00405

least boundary condition for the deflection and rotation of the plate are given by Eq. (2):

$$\begin{aligned}
 w(\tau, \xi, \eta) &= \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q c_m (2\xi)^i (2\eta)^{q-i} \phi_b^w(\xi, \eta) e^{i\omega\tau} \\
 \phi_x(\tau, \xi, \eta) &= \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q d_m (2\xi)^i (2\eta)^{q-i} \phi_b^x(\xi, \eta) e^{i\omega\tau} \\
 \phi_y(\tau, \xi, \eta) &= \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q e_m (2\xi)^i (2\eta)^{q-i} \phi_b^y(\xi, \eta) e^{i\omega\tau}
 \end{aligned} \quad (2)$$

According to the p-Ritz method, the minimizing of total potential energy with respect to unknown displacement parameters yields:

$$\Pi^* = \frac{\Pi}{\Delta} = \bar{U} + \bar{V}_e + \bar{V} \quad (3)$$

The stiffness matrix has a structure of:

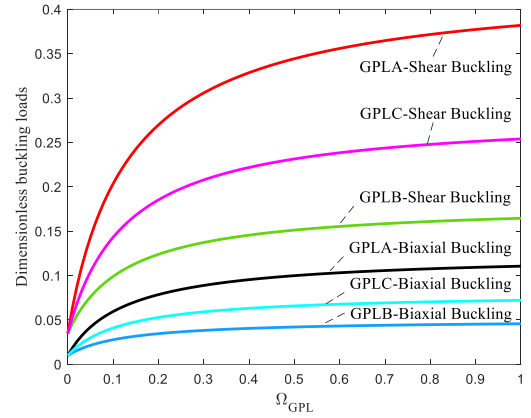


Fig. 2. Comparing of critical buckling load in term of weight fraction of elliptical plate under clamped boundary conditions for porosity distribution of the first type

$$\begin{bmatrix} k^{cc} & k^{cd} & k^{ce} \\ & k^{dd} & k^{de} \\ sym & & k^{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_i \\ d_i \\ e_i \end{Bmatrix} = 0 \quad (4)$$

The critical buckling loads are obtained by setting the determinant of the stiffness matrix to be equal to zero.

3- Results and Discussion

At the first step to validation and accuracy, the obtained result is compared with the Ref. [3] for rectangular nanoplates for uniaxial and biaxial loading under the first type of porosity distribution. It can be seen, that the result obtained are highly accurate.

The variation of the dimensionless critical shear buckling load of a rectangular plate with respect to length to width ratio for different porosity distribution and graphene platelets pattern under clamped boundary condition is illustrated in Fig. 1. The reinforced effect of GPLs with symmetric pattern A is the most obvious, compared to those GPLs with patterns B and C.

Fig. 2 depicts the variation of dimensionless buckling loads of porous nanocomposite elliptical plate with the changing weight fraction for porosity distribution and GPL patterns. It can be seen from this figure that the dimensionless critical buckling loads grow evidently with the addition of GPL weight fraction and the maximum dimensionless critical buckling loads that occurred in the first type GPL for shear buckling loads under clamped boundary condition.

The dimensionless shear critical buckling loads versus porosity distribution coefficients curves for isosceles triangular nanocomposite plate under various boundary conditions are plotted in Fig. 3. It can be seen that the influence of porosity distribution coefficients under the S1C2F3 boundary condition is negligible.

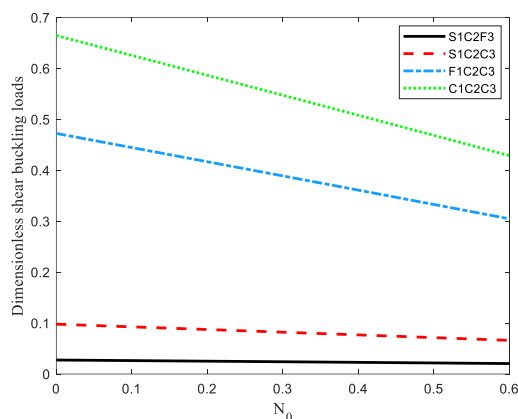


Fig. 3. Comparing of critical buckling load in the shear loads mode in terms of the porosity distribution coefficient of the isosceles triangular plate under different boundary conditions.

4- Conclusions

The best buckling can be achieved with the non-uniformly symmetric porosity distribution 1 and GPL pattern A, indicating that centralizing internal pores on the

mid-plane and dispersing nanofillers around the surface can obtain the highest flexural rigidity of porous nanocomposite plates the identical consumptions of the matrix materials and nanofillers.

The uniaxial, biaxial, and shear buckling loads decrease with the increase of porosity coefficient, while the critical buckling loads grow evidently with the addition of GPL weight fraction.

By increasing the length to width ratio of the rectangular nanocomposite plate, the critical buckling load values increase and the greatest increase is obtained in the porosity pattern of the first type and the distribution of GPL pattern A.

References

- [1] R. Gholami, R. Ansari, Nonlinear stability and vibration of pre/post-buckled multilayer FG-GPLRPC rectangular plates, *Applied Mathematical Modelling*, 65 (2019) 627-660.
- [2] J. Yang, D. Chen, S. Kitipornchai, Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method, *Composite Structures*, 193 (2018) 281-294.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Ziyafat Doust Abed, H. Rouhi, *Buckling Analysis of Embedded Functionally Graded Graphene Platelet-Reinforced Porous Nanocomposite Plates with Various Shapes Using the P-Ritz Method*, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 54(4) (2022) 179-182.

DOI: 10.22060/mej.2022.20387.7223





تحلیل کمانش ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل مدرج تابعی تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی در اشکال هندسی مختلف روی بستر الاستیک با روش پی‌ریتز

محمد ضیافت دوست عابد^۱، حسام روحی^{۲*}

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

۲- دانشکده فنی و مهندسی شرق گیلان، دانشگاه گیلان، رودسر، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۱۷

بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۰۶

پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۰۴

ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۱۰/۲۴

کلمات کلیدی:

کمانش ورق

ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل

ورق‌ها با اشکال مختلف

بستر الاستیک

روش پی‌ریتز

خلاصه: در این مطالعه، کمانش ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل مدرج تابعی تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی در اشکال هندسی مستطیلی، مثلثی و بیضوی بر روی بستر الاستیک در شرایط مرزی مختلف مورد تحلیل قرار گرفته است. از تئوری ورق مرتبه اول برشی برای مدلسازی ورق و مدل وینکلر-پاسترناک برای مدلسازی بستر الاستیک استفاده می‌شود. سه نوع الگوی توزیع نانو تراشه گرافنی و سه نوع توزیع تخلخل در راستای ضخامت برای ورق نانوکامپوزیتی در نظر گرفته می‌شود. خواص مؤثر مادی با استفاده از یک مدل میکرومکانیکی بدست می‌آیند. با نوشتن فانکشنال انرژی سیستم و بکارگیری روش پی‌ریتز، اثرات ضریب تخلخل، درصد وزنی نانو تراشه‌های گرافنی، پارامترهای بستر الاستیک و همچنین نسبت طول به عرض و ضخامت ورق بر بارهای بحرانی کمانش مورد تحلیل قرار می‌گیرد. نشان داده شده است که ورق با الگوی توزیع تخلخل غیر یکنواخت و متقارن نوع اول و چیدمان نانو تراشه‌های گرافنی نوع اول به جهت تمرکز بیشتر نانو تراشه‌های گرافن بر روی سطوح بالا و پایین ورق و افزایش سفتی ورق، دارای بیشترین بار بحرانی کمانش است. همچنین بیشترین بار بحرانی کمانش مربوط به بارگذاری برشی و کمترین مقادیر مربوط به بارگذاری دو محوری می‌باشد. با افزایش ضریب تخلخل، بار بحرانی کمانش ورق برای تمامی الگوهای توزیع نانو تراشه‌های گرافنی کاهش می‌یابد.

۱- مقدمه

* ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانو تراشه گرافن^۱ به دلیل خواص ویژه و منحصر به فرد خود از قبیل نسبت استحکام به وزن بالا، قابلیت شکل‌پذیری، پایداری و عایق حرارتی خوب در صنایع گوناگون از قبیل هوافضا، کشتی سازی، صنایع نفت، گاز و پتروشیمی کاربرد گسترده‌ای داشته‌اند [۱-۲]. به عنوان نمونه، با توجه به پیشرفت‌های اخیر در فناوری مواد متخلخل مدرج تابعی^۲، می‌توان ایمپلنت‌های استخوانی سازگار با لایه‌های خارجی سفت و متراکم و لایه میانی اسفنجی متخلخل ساخت و استفاده نمود [۳-۴].

ورق‌ها قابلیت تحمل بارگذاری‌های مختلف نظیر کششی، فشاری، برشی و ترکیبی از این بارگذاری‌ها را دارند. در این میان بررسی رفتار کمانشی ورق‌های نانو کامپوزیتی تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی در ترکیب مختلفی از شرایط بارگذاری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

تاکنون تحقیقات متنوعی در زمینه کمانش ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی صورت گرفته است. به عنوان مثال، انصاری و همکاران [۵] کمانش و پس‌کمانش ورق ساخته شده از نانو تراشه گرافنی را با یک روش عددی در اشکال مستطیلی و دایروی بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از چندین مثال عددی، اثرات ضریب تخلخل^۳، الگوی تخلخل نانو تراشه‌های گرافنی، درصد وزنی^۴ و شرایط مرزی مختلف را بر کمانش و پس‌کمانش نشان دادند.

بیشه و همکاران [۶] رفتار کمانش و ارتعاشات آزاد ورق‌های متخلخل تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی در اشکال دایروی و قطاعی با روش عددی تربیع دیفرانسیلی^۵، بررسی کردند. برای مدول یانگ مؤثر، ضریب پواسون مؤثر و مدول برشی مؤثر از مدل میکرومکانیکی هالپین تسای^۶ استفاده شد. تأثیرات پارامترهای هندسی نظیر نسبت ضخامت به شعاع ورق،

3 Porosity coefficients

4 Weight Fraction

5 Differential Quadrature Method (DQM)

6 Halpin-Tsai

1 Graphene Nanoplatelets (GPLs)

2 Functionally Graded (FG)

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h_rouhi@guilan.ac.i

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لایسنس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لایسنس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی و شرایط تکیه‌گاهی گوناگون، همچنین الگوی پخش نانو تراشه‌های گرافنی بر رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق بررسی شد. آن‌ها دریافتند با افزودن مقدار اندکی نانو تراشه گرافنی، سفتی ورق نانو کامپوزیتی افزایش می‌یابد.

غلامی و انصاری [۷] ارتعاشات و پس‌کمانش ورق‌های چند لایه کامپوزیتی تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که پس‌کمانش در ورق‌های کامپوزیتی به عوامل گوناگونی نظیر درصد وزنی، الگوی چیدمان نانو تراشه گرافنی و هندسه صفحات وابسته است. همچنین با افزایش درصد وزنی، نسبت طول به عرض ورق و نسبت طول به ضخامت ورق، سفتی ورق کامپوزیتی افزایش می‌یابد.

بلوریان و همکاران [۸] کمانش و پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تحت بار فشاری محوری و فشاری جانبی ساخته شده با نانو تراشه‌های گرافنی را بررسی کردند. معادلات حاکم با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته و روابط غیر خطی فون کارمن^۱ و بر مبنای روش انرژی ریتز استخراج گردید. تأثیر عوامل گوناگون نظیر درصد وزنی نانو تراشه‌های گرافنی، ویژگی‌های هندسی و الگوی توزیع نانو تراشه‌های گرافنی بر خصوصیات پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای مطالعه شد.

سانگ و همکاران [۹] کمانش و خمش ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۲ تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده با استفاده از روش حل ناپیر^۳ بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که الگوی چیدمان نانو تراشه‌های گرافنی، درصد وزنی، هندسه و اندازه نانو تراشه‌های گرافنی، تأثیر زیادی بر بار بحرانی کمانش و بار خمشی دارد. همچنین یانگ و همکاران [۱۰] کمانش و ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی و نانو لوله‌های کربنی^۴ را تحت شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش ضریب تخلخل، مقادیر بار بحرانی کمانش ورق در هر سه حالت بارگذاری تک محوری، دو محوری و برشی و همچنین مقادیر فرکانس طبیعی ورق کاهش می‌یابد.

مروری بر منابع نشان می‌دهد که تاکنون مطالعه‌ای بر رفتار کمانشی ورق‌های نانو کامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی در

- 1 Von-Karman
- 2 First-order Shear Deformation Theory (FSDT)
- 3 Navier solution
- 4 Carbon Nanotubes (CNTS)

اشکال هندسی مختلف نظیر بیضوی، دایروی و مثلثی انجام نشده است. از این رو در این مطالعه، با بکارگیری روش پی‌ریتز^۵ و تئوری مرتبه اول برشی، رفتار کمانشی ورق‌های نانو کامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی تحت سه نوع بارگذاری تک محوری، دو محوری و برشی در اشکال هندسی مختلف بر روی بستر الاستیک بررسی می‌گردد. با ارائه نتایج عددی، تأثیر عوامل طراحی مختلف نظیر الگوی توزیع تخلخل^۶ و نانو تراشه‌های گرافنی، درصد وزنی نانو تراشه‌های گرافنی، ضریب تخلخل، پارامترهای هندسی ورق و شرایط مرزی گوناگون بر بار بحرانی کمانش ورق نانو کامپوزیتی مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

۲- ورق متخلخل نانو کامپوزیتی تقویت شده با تراشه‌های گرافنی

در این مطالعه، برای ورق مدرج تابعی سه نوع توزیع تخلخل مانند شکل ۱ در نظر گرفته شده است. همچنین، برای نانو تراشه گرافنی، سه نوع الگوی پخش در راستای ضخامت ورق به صورت الگوهای A, B, C مطابق شکل ۲ در نظر گرفته می‌شود [۱۱-۱۰].

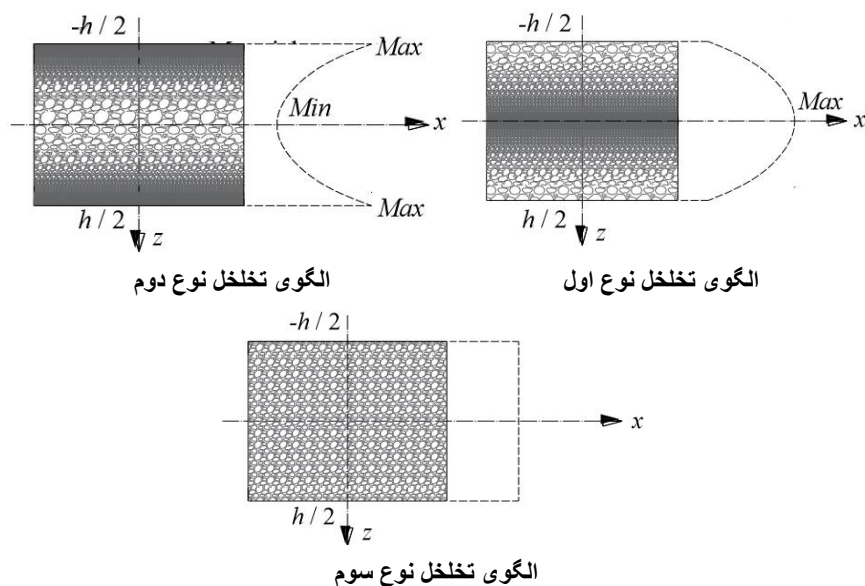
تغییرات مدول یانگ $E(z)$ و مدول برشی $G(z)$ و چگالی جرمی $\rho(z)$ در راستای ضخامت ورق، برای توزیع‌های تخلخل گوناگون را می‌توان به صورت رابطه زیر در نظر گرفت [۱۱].

$$\begin{aligned} E(z) &= E_{\max} (1 - N_0 \phi(z)) \\ G(z) &= G_{\max} (1 - N_0 \phi(z)) \\ \rho(z) &= \rho_{\max} (1 - N_m \phi(z)) \end{aligned} \quad (1)$$

که N_0 ضریب پخش تخلخل برای الگوهای تخلخل p_3, p_2, p_1 و N_m ضریب متناظر با چگالی جرمی در نظر گرفته می‌شود. همچنین $\tilde{n}_{\max}, G_{\max}, E_{\max}$ به ترتیب متناظر با مدول یانگ، مدول برشی و چگالی ورق نانو کامپوزیتی تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی در غیاب تخلخل داخلی هستند. برای N_0 از رابطه زیر می‌توان استفاده نمود [۱۱].

$$N_0 = 1 - \frac{E_{\min}}{E_{\max}} \quad (2)$$

- 5 P-Ritz method
- 6 Porosity Distribution



شکل ۱. شکل شماتیک توزیع تخلخل‌های گوناگون در راستای ضخامت [۱۰]

Fig. 1. Schematic figure of different porosity distributions along the thickness [10]

$$\phi(z) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right); & p_1 \\ 1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right); & p_2 \\ \phi_0; & p_3 \end{cases} \quad (5)$$

جهت تخمین رابطه بین ضریب چگالی جرمی با سه نوع الگوهای تخلخل رابطه مدول یانگ با چگالی جرمی به صورت زیر فرض می‌شود [۱۱-۱۰].

$$\frac{E(z)}{E_{\max}} = \left(\frac{\rho(z)}{\rho_{\max}} \right)^2 \quad (3)$$

مقدار $E_{\max}$ در رابطه (۱) بر اساس مدل میکرومکانیکی به صورت رابطه (۶) در نظر گرفته می‌شود [۱۲-۱۰].

$$E_{\max} = E_m \left(\frac{3}{8} \left(\frac{1 + \lambda_l \mu_l V_{GPL}}{1 - \mu_l V_{GPL}} \right) + \frac{5}{8} \left(\frac{1 + \lambda_T \mu_T V_{GPL}}{1 - \mu_T V_{GPL}} \right) \right) \quad (6)$$

همچنین داریم:

$$\lambda_l = \frac{2l_{GPL}}{h_{GPL}}, \lambda_T = \frac{2w_{GPL}}{h_{GPL}}, \quad (7)$$

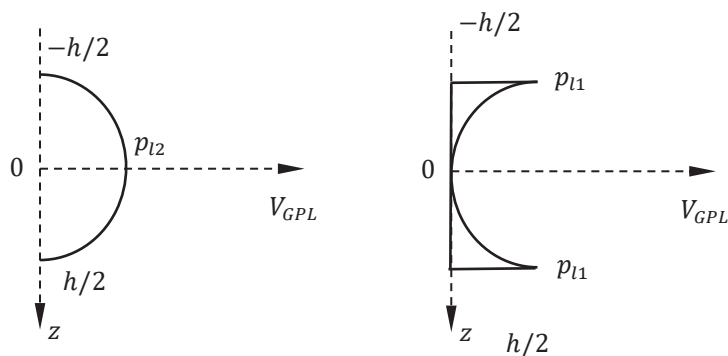
$$\mu_l = \frac{\frac{E_{GPL}}{E_m} - 1}{\frac{E_{GPL}}{E_m} + \lambda_l}, \mu_T = \frac{\frac{E_{GPL}}{E_m} - 1}{\frac{E_{GPL}}{E_m} + \lambda_T}$$

با جایگذاری مدول یانگ از رابطه (۱) در رابطه (۳)، ضریب ثابت چگالی به صورت زیر بدست می‌آید [۱۰-۱۱]

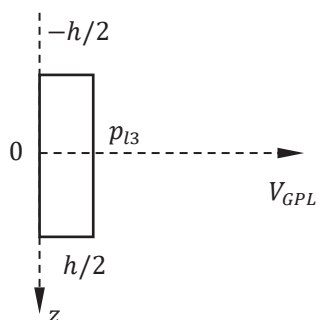
$$1 - N_m \phi(z) = \sqrt{1 - N_0 \phi(z)}$$

$$N_m = \frac{(1 - \sqrt{1 - N_0 \phi(z)})}{\phi(z)} \quad (4)$$

همچنین، تابع $\phi(z)$ با توجه به الگوهای شکل ۱ به صورت زیر فرض می‌شود.



الگوی توزیع نانو تراشه‌های گرافنی نوع A الگوی توزیع نانو تراشه‌های گرافنی نوع B



الگوی توزیع نانو تراشه‌های گرافنی نوع C

شکل ۲. الگوهای مختلف پخش نانوتراشه گرافنی در راستای ضخامت

Fig. 2. Different pattern of graphene nanoplatelets along the thickness

$$V_m + V_{GPL} = 1$$

(۹)

که در رابطه (۷) $l_{GPL}, w_{GPL}, h_{GPL}, E_{GPL}$ به ترتیب مدول یانگ، ضخامت، پهنای متوسط و طول نانوتراشه‌های گرافنی در نانوکامپوزیت می‌باشند.

الگوی پخش نانوتراشه‌های گرافنی با توجه به شکل ۲ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$V_{GPL} = \begin{cases} p_{l1} [1 - \cos(\frac{\pi z}{h})]; & \text{GPLA} \\ p_{l2} \cos(\frac{\pi z}{h}); & \text{GPLB} \\ p_{l3}; & \text{GPLC} \end{cases} \quad (10)$$

مقادیر چگالی جرمی و ضریب پواسون ورق نانوکامپوزیت متخلخل تقویت شده با نانوتراشه گرافنی با استفاده از قاعده اختلاط^۱ در میکرومکانیک به صورت رابطه (۸) در نظر گرفته می‌شود [۱۰-۱۱].

$$\begin{aligned} \rho_{\max} &= \rho_m V_m + \rho_{GPL} V_{GPL} \\ \nu_{\max} &= \nu_m V_m + \nu_{GPL} V_{GPL} \end{aligned} \quad (8)$$

در رابطه (۱۰) مقادیر p_{l1}, p_{l2}, p_{l3} به ترتیب بیشترین مقادیر درصد حجمی^۲ نانوتراشه گرافنی برای الگوهای پخش گوناگون می‌باشند که توسط رابطه زیر ارائه می‌شوند.

که در آن ρ_m و ρ_{GPL} به ترتیب چگالی ماتریس فلزی و نانوتراشه گرافنی می‌باشند. همچنین، رابطه بین درصد حجمی ماتریس V_m و نانوتراشه گرافنی V_{GPL} به صورت زیر فرض می‌شود.

مطابق با تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی ورق، میدان جابجایی به

صورت رابطه (۱۲) فرض می‌شود.

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, z) + z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, z) \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن u و v و w به ترتیب جابجایی هر نقطه دلخواه در راستای x و y و z همچنین u_0 و v_0 و w_0 متناظر با جابجایی سطح میانی ورق می‌باشد. همچنین ϕ_x و ϕ_y به ترتیب برابر است با دوران حول محورهای x و y مختصات می‌باشد. در این مطالعه، مقادیر u_0 و v_0 به دلیل تأثیر ناچیز در کمانش ورق نادیده گرفته می‌شوند.

رابطه خطی کرنش-جابجایی براساس تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شوند [۱۳-۱۴].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = z\phi_{x,x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = z\phi_{y,y} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = z(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ \gamma_{xz} &= \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (13)$$

همچنین، روابط بین تنش‌ها و کرنش‌ها به صورت رابطه (۱۴) در نظر

گرفته می‌شوند.

(الف)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$V_{GPL}^T \sum_{j=1}^n \frac{\rho(z_j)}{\rho_{max}} = \begin{cases} p_{t1} \sum_{j=1}^n \left\{ \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z_j}{h}\right) \right] \frac{\rho(z_j)}{\rho_{max}} \right\}; & \text{GPLA} \\ p_{t2} \sum_{j=1}^n \left\{ \cos\left(\frac{\pi z_j}{h}\right) \frac{\rho(z_j)}{\rho_{max}} \right\}; & \text{GPLB} \\ p_{t3} \frac{\rho(z_j)}{\rho_{max}}; & \text{GPLC} \end{cases} \quad (11)$$

$$V_{GPL}^T = \frac{\Omega_{GPL} \rho_m}{(\Omega_{GPL} \rho_m + \rho_{GPL} - \Omega_{GPL} \rho_{GPL})}$$

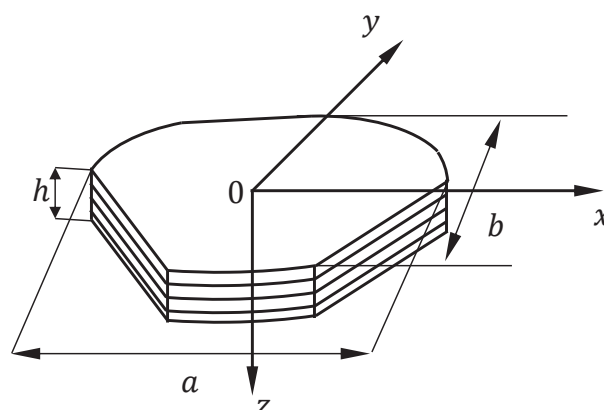
$$z_j = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{j}{n} \right) h$$

در رابطه (۱۱)، n برابر با تعداد لایه‌های ورق نانوکامپوزیتی می‌باشد.

در محاسبات، تعداد لایه‌ها برابر با دوازده فرض شده است.

۳- معادلات حاکم

یک ورق نانوکامپوزیتی مدرج تابعی، با شکل دلخواه به تعداد n لایه که ضخامت هر لایه یکسان و توزیع تخلخل و نانو تراشه‌های گرافن در هر لایه یکسان می‌باشد در نظر گرفته می‌شود. طول ورق a عرض آن b و ضخامت کل ورق h می‌باشد. مطابق شکل ۳، دستگاه مختصات کارتزین (x, y, z) در صفحات میانی ورق و جهت مثبت محور z رو به پایین در نظر گرفته می‌شود. هر کدام از گوشه‌های هندسه ورق با توابع چند جمله‌ای تعریف می‌شوند. این گوشه‌ها با ترکیب مختلفی از شرایط مرزی ساده، گیردار و آزاد نیز نام‌گذاری می‌شوند. نام‌گذاری شرایط مرزی به ترتیب از گوشه سمت چپ و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۳. ورق نانوکامپوزیتی با شکل دلخواه

Fig. 3. Nanocomposite plate with arbitrary shape

(ب)

$$(B_{ij}, D_{ij}) = -\frac{h}{n} \sum_{k=1}^n Q_{ij}(z_k) (z_k, z_k^2), (i, j) = 1, 2, 6 \quad (20)$$

$$A_{ii} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n Q_{ii}(z_k), i = 4, 5 \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}^{(k)}$$

که در آن اجزای ماتریس سختی کاهش یافته Q_{ij} به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1-(\nu_{\max})^2}, Q_{22} = \frac{E(z)}{1-(\nu_{\max})^2}, Q_{12} = \frac{\nu_{\max} E(z)}{1-(\nu_{\max})^2} \quad (15)$$

$$Q_{66} = Q_{55} = Q_{44} = G(z)$$

همچنین، متجه‌های نیرو و گشتاور بر واحد طول برابر هستند با

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz \\ (Q_x, Q_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \end{aligned} \quad (16)$$

با جایگذاری روابط (۱۴) در معادلات (۱۶)، روابط زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k_s \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

در رابطه (۱۹) ضریب k_s معرف، ضریب اصلاح تنش برشی^۱ در تئوری ورق مرتبه اول می‌باشد و مقدار آن برابر با 0.833 فرض شده است.

۳-۱- استخراج معادلات ورق با استفاده از فاکشنال انرژی سیستم
با استفاده از کرنش‌ها و تنش‌های تعریف شده، حال می‌توان رابطه‌ی انرژی کرنشی ورق نانوکامپوزیتی را به صورت زیر نوشت [۱۵]

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}] dV \\ U &= \frac{1}{2} \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx} (\varepsilon_{xx}^{(0)} + z \varepsilon_{xx}^{(1)}) + \sigma_{yy} (\varepsilon_{yy}^{(0)} + z \varepsilon_{yy}^{(1)}) + \sigma_{xy} (\gamma_{xy}^{(0)} + z \gamma_{xy}^{(1)}) \\ &\quad + \sigma_{xz} (\gamma_{xz}^{(0)} + z \gamma_{xz}^{(1)}) + \sigma_{yz} (\gamma_{yz}^{(0)} + z \gamma_{yz}^{(1)})] dAdz \end{aligned} \quad (22)$$

و با انتگرال‌گیری از رابطه (۲۲) نسبت به ضخامت ورق و جایگذاری رابطه (۱۸) و (۱۹) در آن، روابط زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ M_{xx} \varepsilon_{xx}^{(1)} + M_{yy} \varepsilon_{yy}^{(1)} + M_{xy} \gamma_{xy}^{(0)} + Q_x \gamma_{xz}^{(0)} + Q_y \gamma_{yz}^{(0)} \right\} dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ (D_{11} \varepsilon_{xx}^{(1)} + D_{12} \varepsilon_{yy}^{(1)}) \varepsilon_{xx}^{(1)} + (D_{12} \varepsilon_{xx}^{(1)} + D_{22} \varepsilon_{yy}^{(1)}) \varepsilon_{yy}^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. D_{66} (\gamma_{xy}^{(1)})^2 + Q_{55} (\gamma_{xz}^{(0)})^2 + Q_{44} (\gamma_{yz}^{(0)})^2 \right\} dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ D_{11} (\varepsilon_{xx}^{(1)})^2 + 2D_{12} (\varepsilon_{xx}^{(1)} \varepsilon_{yy}^{(1)}) + D_{22} (\varepsilon_{yy}^{(1)})^2 + \right. \\ &\quad \left. D_{66} (\gamma_{xy}^{(1)})^2 + Q_{55} (\gamma_{xz}^{(0)})^2 + Q_{44} (\gamma_{yz}^{(0)})^2 \right\} dA \end{aligned} \quad (23)$$

$$\bar{U} = \frac{U}{\Delta} = \frac{1}{2} \int_{\bar{A}} \left\{ \frac{d_{11}}{\eta_1} (\phi_{x,\xi})^2 + 2d_{12} (\phi_{y,\eta} \phi_{x,\xi}) + \eta_1 d_{22} (\phi_{y,\eta})^2 + d_{66} \left[\frac{1}{\eta_1} (\phi_{y,\xi})^2 + \eta_1 (\phi_{x,\eta})^2 + 2(\phi_{y,\xi} \phi_{x,\eta}) \right] \right. \\ \left. + k_s a_{44} [\eta_2 \eta_3 (\phi_y)^2 + \eta_1 (w_{1,\eta})^2 + 2\eta_2 w_{1,\eta} \phi_y] + k_s a_{55} [\eta_2 \eta_3 (\phi_x)^2 + \frac{1}{\eta_1} (w_{1,\xi})^2 + 2\eta_3 (w_{1,\xi} \phi_x)] \right\} d\xi d\eta \quad (28)$$

$$\bar{V} = \frac{V}{\Delta} = \frac{1}{2} \int_{\bar{A}} \left\{ \frac{p_x}{\eta_1} (w_{1,\xi})^2 + p_y \eta (w_{1,\eta})^2 + \frac{2p_{xy}}{2p_{xy}} (w_{1,\xi} w_{1,\eta}) \right\} d\xi d\eta \quad (29)$$

$$\bar{V}_e = \frac{V_e}{\Delta} = \frac{1}{2} \int_{\bar{A}} \left\{ \bar{k}_w \frac{1}{\eta_1 \eta_2^2} (w_1)^2 + \bar{k}_p \left[\frac{1}{\eta_1 \eta_2^2} (w_{1,\xi})^2 + \frac{1}{\eta_1 \eta_3^2} (w_{1,\eta})^2 \right] \right\} d\xi d\eta \quad (30)$$

انرژی پتانسیل کل به صورت رابطه (۳۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$\Pi^* = \frac{\Pi}{\Delta} = \bar{U} + \bar{V}_e + \bar{V} \quad (31)$$

۳-۲- حل معادلات حاکم با روش پی ریتز

براساس روش پی ریتز، پاسخ مختصات تعمیم یافته مجهول به صورت روابط (۳۲) نوشته می‌شود، به طوری که این پاسخ‌ها هندسه ورق و شرایط مرزی ورق را نیز ارضا می‌کند.

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left\{ D_{11} (\phi_{x,x})^2 + 2D_{12} (\phi_{x,x} \phi_{y,y}) + D_{22} (\phi_{y,y})^2 + D_{66} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x})^2 + k_s A_{55} (\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x})^2 + k_s A_{44} (\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y})^2 \right\} dA \quad (24)$$

انرژی پتانسیل ناشی از بارهای کمانشی را نیز می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$V = -\frac{1}{2} \int_A \left\{ (\frac{\partial w_0}{\partial x})^2 N_x + 2 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} N_{xy} + (\frac{\partial w_0}{\partial y})^2 N_y \right\} dx dy \quad (25)$$

به علاوه، انرژی پتانسیل ناشی از بستر الاستیک^۱ برابر است با:

$$V_e = \frac{1}{2} \int_A \left\{ k_w (w_0)^2 + k_p \left[(\frac{\partial w_0}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w_0}{\partial y})^2 \right] \right\} dx dy \quad (26)$$

در رابطه (۲۶)، k_w و k_p به ترتیب ثابت‌های وینکلر و پاسترناک^۲ تکیه‌گاه الاستیک می‌باشند.

با تعریف پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر داریم:

$$\{\xi, \eta\} = \left\{ \frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right\}, \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, w_1\} = \left\{ \frac{a}{b}, \frac{a}{h}, \frac{b}{h}, \frac{w_0}{h} \right\}, \\ A_{110} = \frac{E_m h}{(1-\nu_m^2)}, \{a_{44}, a_{55}\} = \left\{ \frac{A_{44}}{A_{110}}, \frac{A_{55}}{A_{110}} \right\}, \\ \{d_{11}, d_{12}, d_{22}, d_{66}\} = \left\{ \frac{D_{11}}{A_{110} h^2}, \frac{D_{12}}{A_{110} h^2}, \frac{D_{22}}{A_{110} h^2}, \frac{D_{66}}{A_{110} h^2} \right\}, \quad (27) \\ \{p_x, p_y, p_{xy}\} = \left\{ \frac{N_x}{A_{110}}, \frac{N_y}{A_{110}}, \frac{N_{xy}}{A_{110}} \right\} \\ \bar{k}_w = \frac{k_w a^4}{A_{110} h^2}, \bar{k}_p = \frac{k_p a^2}{A_{110} h^2}, \Delta = A_{110} h^2, i = \sqrt{-1}$$

روابط (۲۴)، (۲۵)، (۲۶) به صورت بی بعد زیر بازنویسی می‌شوند.

- 1 Elastic Foundation
- 2 Winkler-Pasternak constants

جدول ۱. توابع پایه‌ای $\varphi_b^w, \varphi_b^x, \varphi_b^y$ برای شرایط مرزی مختلف ورق نانوکامپوزیتی در اشکال مستطیلی، بیضوی و مثلثی متساوی الساقین

Table 1. Base function $\varphi_b^w, \varphi_b^x, \varphi_b^y$ for different boundary condition of nanocomposite plates in rectangular, elliptical and isosceles triangular shapes

ورق مستطیلی		
شرایط مرزی	گیردار ۱ - ساده ۲ - آزاد ۳ - ساده ۴	ساده ۱ - ساده ۲ - ساده ۳ - ساده ۴
φ_b^w	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\xi-1)^0 \cdot (2\eta+1)^1 \cdot (2\eta-1)^1$	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\xi-1)^1 \cdot (2\eta+1)^1 \cdot (2\eta-1)^1$
φ_b^x	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\xi-1)^0 \cdot (2\eta+1)^1 \cdot (2\eta-1)^1$	$(2\xi+1)^0 \cdot (2\xi-1)^0 \cdot (2\eta+1)^1 \cdot (2\eta-1)^1$
φ_b^y	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\xi-1)^0 \cdot (2\eta+1)^0 \cdot (2\eta-1)^0$	$(2\xi+1)^0 \cdot (2\xi-1)^1 \cdot (2\eta+1)^0 \cdot (2\eta-1)^0$
ورق بیضوی		
شرایط مرزی	ساده	گیردار
φ_b^w	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^1$	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^1$
φ_b^x	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^0$	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^1$
φ_b^y	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^0$	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^1$
ورق مثلثی متساوی الساقین		
شرایط مرزی	گیردار ۱ - گیردار ۲ - گیردار ۳	ساده ۱ - گیردار ۲ - آزاد ۳
φ_b^w	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\eta-\xi+0.5)^1 \cdot (2\eta+\xi-0.5)^1$	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\eta-\xi+0.5)^1 \cdot (2\eta+\xi-0.5)^0$
φ_b^x	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\eta-\xi+0.5)^1 \cdot (2\eta+\xi-0.5)^1$	$(2\xi+1)^0 \cdot (2\eta-\xi+0.5)^1 \cdot (2\eta+\xi-0.5)^0$
φ_b^y	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\eta-\xi+0.5)^1 \cdot (2\eta+\xi-0.5)^1$	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\eta-\xi+0.5)^1 \cdot (2\eta+\xi-0.5)^0$

$$\begin{aligned}\phi_b^w &= \prod_{j=1}^{ne} [\Gamma_j(\xi, \eta)]^{\Omega_j^w} \\ \phi_b^x &= \prod_{j=1}^{ne} [\Gamma_j(\xi, \eta)]^{\Omega_j^x} \\ \phi_b^y &= \prod_{j=1}^{ne} [\Gamma_j(\xi, \eta)]^{\Omega_j^y}\end{aligned}\quad (34)$$

$$\begin{aligned}w_1(\xi, \eta) &= \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q c_m \phi_m^w = \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q c_m (2\xi)^i (2\eta)^{q-i} \phi_b^w(\xi, \eta) \\ \phi_x(\xi, \eta) &= \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q d_m \phi_m^x = \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q d_m (2\xi)^i (2\eta)^{q-i} \phi_b^x(\xi, \eta) \\ \phi_y(\xi, \eta) &= \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q e_m \phi_m^y = \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q e_m (2\xi)^i (2\eta)^{q-i} \phi_b^y(\xi, \eta)\end{aligned}\quad (32)$$

در رابطه (۳۲) درجه چند جمله‌ای با p نمایش داده می‌شود. همچنین c_m, d_m, e_m به ترتیب ضرایب مجهول چند جمله‌ای پاسخ مختصات تعمیم یافته مجهول می‌باشند. زیرنویس m در رابطه (۳۲) به صورت زیر بیان می‌گردد [۱۶-۱۷].

$$m = \frac{(q+1)(q+2)}{2} - i \quad (33)$$

همچنین $\varphi_b^w, \varphi_b^x, \varphi_b^y$ توابع پایه‌ای هستند که براساس هندسه اضلاع ورق و شرایط مرزی به صورت زیر فرض می‌شوند.

در روابط (۳۴) n_e برابر با تعداد گوشه‌های هندسه شکل و Γ_j معادله z امین مرز از هندسه شکل می‌باشد. در جدول ۱ چند نمونه از توابع پایه‌ای تحت شرایط مرزی مختلف برای ورق در اشکال مستطیلی، بیضوی و مثلثی متساوی الساقین آورده شده است. اطلاعات کامل در مراجع [۱۶-۱۸] قابل دستیابی است.

بر اساس روش پی‌ریتز، با اکسترمم نمودن تابع انرژی پتانسیل کل نسبت به ثابت‌های مجهول c_m, d_m, e_m دستگاه معادله زیر بدست می‌آید.

(ب)

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial c_m} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial d_m} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial e_m} \right\} = \{0 \quad 0 \quad 0\} \quad (35)$$

$$k_{ij}^{cd} = \int_{\bar{A}} \left\{ k_s a_{55} \eta_3 \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \cdot \phi_j^x \right) \right\} d\xi d\eta$$

(پ)

$$k_{ij}^{ce} = \int_{\bar{A}} \left\{ k_s a_{44} \eta_2 \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \eta} \cdot \phi_j^y \right) \right\} d\xi d\eta$$

حل رابطه (۳۵) منجر به دستگاه معادلات همگن زیر می‌شود.

(ت)

$$[KL] \begin{Bmatrix} c_i \\ d_i \\ e_i \end{Bmatrix} = 0 \quad (36)$$

$$k_{ij}^{dd} = \int_{\bar{A}} \left\{ \frac{d_{11}}{\eta_1} \left(\frac{\partial \phi_i^x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^x}{\partial \xi} \right) + k_s a_{55} \eta_2 \eta_3 (\phi_i^x \cdot \phi_j^x) - d_{66} \eta_1 \left(\frac{\partial \phi_i^x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^x}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi d\eta$$

رابطه (۳۶) هر سه حالت بارگذاری تک محوری، دو محوری و برشی را

شامل می‌شود. همچنین ساختار ماتریس‌های $[KL]$ به صورت رابطه (۳۷)

در نظر گرفته شده است.

(ث)

$$k_{ij}^{de} = \int_{\bar{A}} \left\{ d_{12} \left(\frac{\partial \phi_i^x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \eta} \right) + d_{66} \left(\frac{\partial \phi_i^x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \xi} \right) \right\} d\xi d\eta$$

$$[KL] = \begin{bmatrix} k^{cc} & k^{cd} & k^{ce} \\ & k^{dd} & k^{de} \\ sym & & k^{ee} \end{bmatrix} \quad (37)$$

(ج)

$$k_{ij}^{ee} = \int_{\bar{A}} \left\{ \frac{d_{66}}{\eta_1} \left(\frac{\partial \phi_i^y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \xi} \right) + k_s a_{44} \eta_2 \eta_3 (\phi_i^y \cdot \phi_j^y) + \eta_1 d_{22} \left(\frac{\partial \phi_i^y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi d\eta$$

اجزای ماتریس‌های متقارن سفتی به صورت روابط (۳۸) تعریف می‌شوند.

(۳۸)

(الف)

برای دستیابی به پاسخ غیر بدیهی، کافی است دترمینان ماتریس سفتی برابر با صفر گردد. اما از آنجا که حل دترمینان ماتریس فوق به راحتی با روش‌های تحلیلی امکان پذیر نیست، مقادیر بار بحرانی کماتش با استفاده از روش‌های عددی و ترکیب مسئله اشتروم^۱ و روش دوبخشی^۲ بدست آورده می‌شود. برای این منظور، ابتدا مقداری دلخواه به بار کماتش نسبت داده می‌شود و مقادیر ویژه^۳ ماتریس محاسبه می‌گردند. تعداد مقادیر ویژه منفی بیانگر تعداد مقادیر ویژه ماتریس $[KL]$ است، که کمتر از مقدار مقادیر ویژه فرضی نیز می‌باشد. سپس با استفاده از روش دوبخشی، کمترین بار بحرانی کماتش محاسبه می‌شود [۱۹-۲۰].

$$k_{ij}^{cc} = \int_{\bar{A}} \left\{ \frac{k_s a_{55}}{\eta_1} \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \xi} \right) + k_s a_{44} \eta_1 \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \eta} \right) - \left[\frac{p_x}{\eta_1} \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \xi} \right) + p_{xy} \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \eta} \right) + p_y \eta_1 \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \eta} \right) + p_{xy} \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{\bar{k}_w}{\eta_1 \eta_2^2} (\phi_i^w \cdot \phi_j^w) + \frac{\bar{k}_p}{\eta_1 \eta_2^2} \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \xi} \right) + \frac{\bar{k}_p}{\eta_1 \eta_3^2} \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi d\eta$$

- 1 Sturm Theory
- 2 Bisection Method
- 3 Eigenvalues

جدول ۲. ویژگی‌های مکانیکی ماتریس فلزی و نانوتراشه‌های گرافنی

Table 2. Mechanical properties of metal matrix and graphene nanoplatelets

ویژگی نانوتراشه‌های گرافنی	
مدول یانگ	۱/۰۱ تراپاسکال
ضریب پواسون	۰/۱۸۶
چگالی	۱۰۶۲/۵ کیلوگرم بر مترمکعب
طول نانوتراشه گرافن	۲/۵ میکرومتر
ضخامت نانوتراشه گرافن	۱/۵ نانومتر
عرض نانوتراشه گرافن	۱/۵ میکرومتر
ویژگی ماتریس فلزی از جنس مس	
مدول یانگ	۱۳۰ گیگاپاسکال
ضریب پواسون	۰/۳۴
چگالی	۸۹۶۰ کیلوگرم بر مترمکعب

جدول ۳. همگرایی روش پی‌ریتز در بارگذاری تک محوری تحت شرایط مرزی گیردار به ازای توزیع تخلخل نوع اول و نانو تراشه‌های گرافنی نوع اول

Table 3. Convergence of P-Ritz method in uniaxial loading under clamped boundary condition for the first type of porosity distribution and graphene nanoplatelets distribution of first type

درجه چند جمله‌ای	نتایج ارائه شده	[۱۰]	درصد خطا
۰	۰/۵۹۷۱	۰/۰۲۹۲	۹۵٪
۱	۰/۲۰۰۱	۰/۰۲۹۲	۸۵٪
۲	۰/۰۴۴۷	۰/۰۲۹۲	۳۴٪
۳	۰/۰۳۵۳	۰/۰۲۹۲	۱۷٪
۴	۰/۰۲۹۶	۰/۰۲۹۲	۱/۳٪
۵	۰/۰۲۹۲	۰/۰۲۹۲	۰٪

لازم به ذکر است، برای تحلیل ورق در هندسه‌های مستطیلی، بیضوی و مثلثی کافی است توابع پایه‌ای متناظر با شرایط مرزی هندسه ورق را از جدول ۱ استخراج نمود و با تغییر کران انتگرال دوگانه در رابطه (۳۸) براساس هندسه شکل مورد نظر، نتایج جدید محاسبه می‌شوند.

۴- تحلیل نتایج

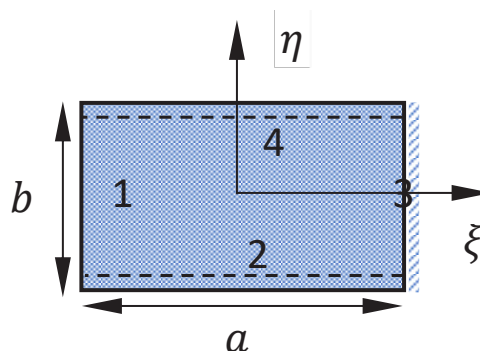
برای ارائه نتایج عددی، فرض می‌شود که ماتریس فلزی از جنس مس می‌باشد. ویژگی‌های مکانیکی ماتریس مس و نانوتراشه‌های گرافنی مطابق جدول ۲ فرض شده است [۱۰].

در جدول ۳، مطالعه همگرایی پاسخ‌های روش پی‌ریتز به همراه مقایسه با نتایج مرجع [۱۰] برای ورق مربعی تحت شرایط مرزی گیردار به ازای درصد وزنی ۰/۰۱ و ضریب پخش تخلخل ۰/۵ و نسبت طول به ضخامت ۲۰، ارائه شده است. این جدول نشان می‌دهد، که با افزایش درجه چند جمله‌ای، دقت محاسبات افزایش می‌یابد. همان طور که مشخص است به ازای درجه چند جمله‌ای پنج، جواب‌ها همگرا می‌شوند. همچنین به منظور بررسی بیشتر صحت نتایج، در جدول ۴ نتایج بدست آمده برای بار بحرانی کماتش در حالت‌های تک محوری، دومحوری و برشی یک ورق مربعی در شرایط تکیه‌گاهی گیردار به ازای درصد وزنی ۰/۰۱ از این پژوهش با نتایج

مربوط به توزیع تخلخل نوع دوم به ازای نانو تراشه‌های گرافنی نوع دوم محاسبه شده است. بنابراین توزیع پراکندگی نانو تراشه‌های گرافنی بر روی سطوح بالا و پایین، همچنین کاهش اندازه و چگالی تخلخل‌های داخلی بر روی سطح ورق منجر به افزایش سفتی ورق و در نتیجه افزایش بار بحرانی کمانش می‌گردد. برای حالت توزیع تخلخل نوع دوم به ازای توزیع نانو تراشه گرافنی نوع دوم به دلیل کاهش اندازه و چگالی تخلخل‌های داخلی در میانه ورق و تمرکز بیشتر نانو تراشه در میانه ورق نسبت به سطوح بالا و پایین، سفتی خمشی ورق در مقایسه با سایر الگوهای تخلخل و توزیع نانو تراشه گرافنی نیز کاهش یافته است. همچنین از آنجایی که ورق تحت بارگذاری برشی سخت‌تر دچار کمانش می‌گردد بنابراین بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری برشی نسبت به دو حالت دیگر بارگذاری شامل تک محوری و دو محوری بیشتر محاسبه شده است. همچنین ورق مستطیلی تحت بارگذاری دو محوری آسان‌تر نسبت به بارگذاری تک محوری دچار کمانش می‌شود. لذا بار بحرانی کمانش ناشی از بارگذاری تک محوری بیشتر از بارگذاری دو محوری محاسبه شده است.

شکل‌های ۸ و ۹ و ۱۰ به ترتیب تغییرات بار بحرانی کمانش برای سه حالت بارگذاری تک محوری، دو محوری و برشی به ازای نسبت طول به عرض ورق مستطیلی و ضریب تخلخل ۰/۵ و درصد وزنی ۰/۰۱ در الگوی تخلخل‌های گوناگون و توزیع نانو تراشه گرافنی مختلف را نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به عرض ورق، مقادیر بار بحرانی کمانش افزایش یافته است. همچنین با در نظر گرفتن توزیع تخلخل نوع اول و توزیع نانو تراشه گرافنی نوع اول بیشترین بار بحرانی کمانش محاسبه شده است.

شکل‌های ۱۱ و ۱۲ تغییرات بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری تک محوری، دو محوری و برشی در شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار بر حسب ثابت فنریت وینکلر و پاسترناک بستر الاستیک به ازای ضریب پخش تخلخل ۰/۵ و درصد وزنی ۰/۰۱ برای تخلخل نوع اول و توزیع نانو تراشه گرافنی نوع اول را نشان می‌دهند. همان‌طور که مشخص است، تأثیر ثابت فنریت پاسترناک در افزایش بار بحرانی کمانش در هر سه حالت بارگذاری نسبت به ثابت فنریت وینکلر بیشتر می‌باشد.



شکل ۴. ورق نانو کامپوزیتی مستطیلی تحت شرایط مرزی FIS2C3S4

Fig. 4. Nanocomposite plate under boundary condition

مرجع [۱۰] مقایسه شده است. بیشترین مقادیر بار بحرانی کمانش برای بارگذاری برشی و توزیع تخلخل نوع اول و الگوی پخش نانو تراشه گرافنی نوع اول بدست آورده شده است. همچنین در این الگوی توزیع نانو تراشه‌های گرافنی به دلیل توزیع پراکندگی بر روی سطوح بالا و پایین ورق، سفتی ورق نیز افزایش یافته است.

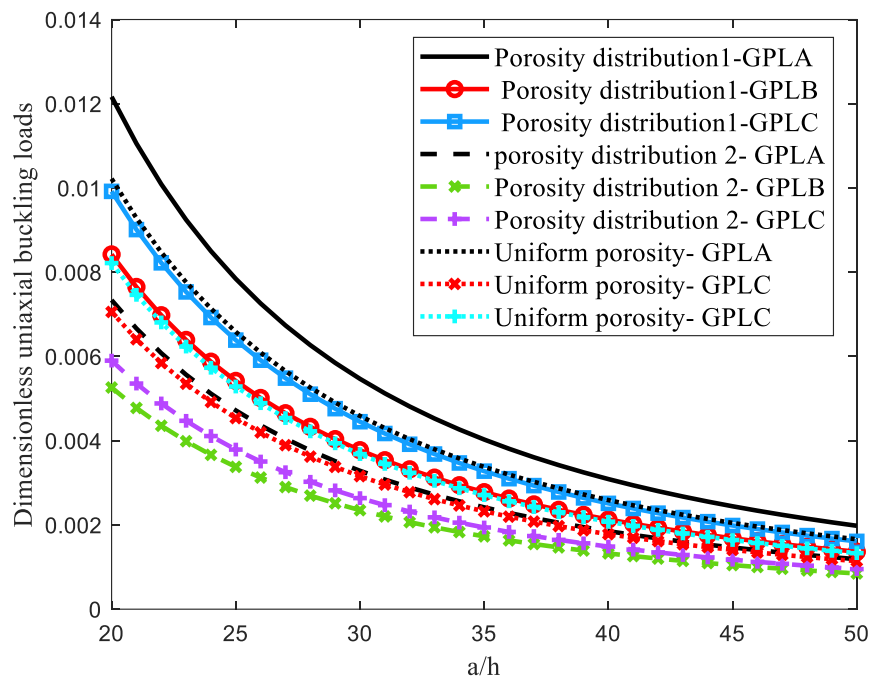
۴-۱- ورق مستطیلی

یک ورق مستطیلی مطابق شکل ۴ در نظر گرفته می‌شود. ترتیب نامگذاری شرایط مرزی با توجه به شماره اختصاص داده شده به هر ضلع از گوشه سمت چپ و در خلاف عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود. شکل‌های ۵ و ۶ و ۷ به ترتیب تغییرات بار بحرانی کمانش برای سه حالت بارگذاری تک محوری، دو محوری و برشی بر حسب تغییرات نسبت طول به ضخامت ورق مستطیلی در شرایط مرزی ساده به ازای ضریب پخش تخلخل ۰/۵ و درصد وزنی ۰/۰۱ را نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود در هر سه شکل با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق، به دلیل کاهش سفتی ورق، مقادیر بار بحرانی کمانش کاهش یافته است. همچنین بیشترین بار بحرانی کمانش مربوط حالت برشی به ازای توزیع تخلخل نوع اول و توزیع نانو تراشه‌های گرافنی نوع اول و کمترین مقادیر بار بحرانی

جدول ۴. مقایسه بار کمانش بحرانی ورق نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانو تراشه گرافنی

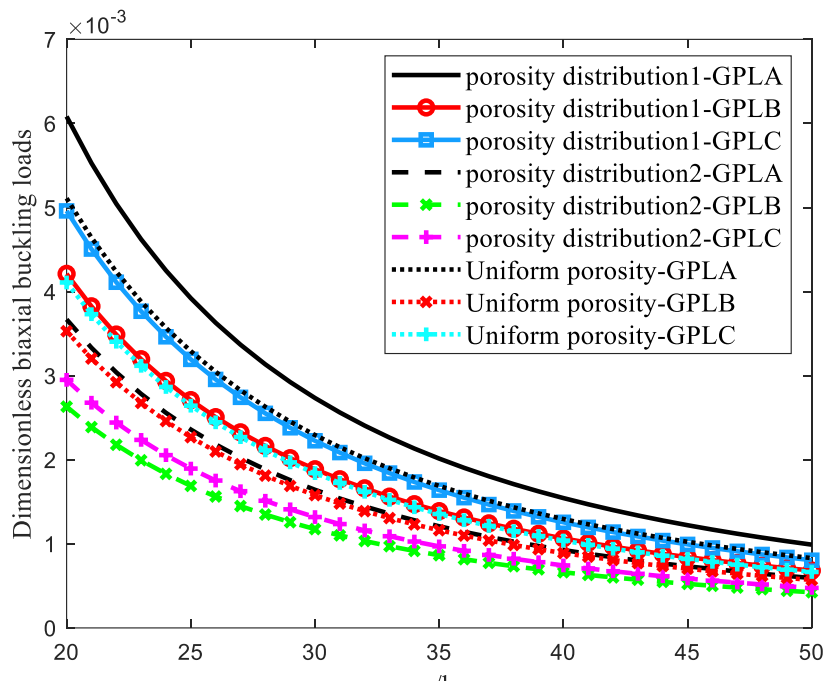
Table 4. Comparing of critical buckling loads of nanocomposite plate reinforced with graphene nanoplatelets

توزیع گرافن	a/h	بار تک محوری	[۱۰]	بار دو محوری	[۱۰]	بار برشی	[۱۰]
الگوی تخلخل نوع اول							
نوع اول	۲۰	۰/۰۲۹۲۲	۰/۰۲۸۹۹	۰/۰۱۵۵۱	۰/۰۱۵۵۰	۰/۰۴۰۴۷	۰/۰۳۹۸۵
	۳۰	۰/۰۱۳۶۳	۰/۰۱۳۶۳	۰/۰۰۷۱۳	۰/۰۰۷۱۲	۰/۰۱۹۴۴	۰/۰۱۹۰۰
	۴۰	۰/۰۰۷۸۴	۰/۰۰۷۶۷	۰/۰۰۴۰۶	۰/۰۰۴۰۵	۰/۰۱۱۳	۰/۰۱۰۹۷
	۲۰	۰/۰۲۰۵۷	۰/۰۲۰۳۷	۰/۰۱۰۸۶	۰/۰۱۰۸۴	۰/۰۳۲۹۴	۰/۰۲۸۳۸
نوع دوم	۳۰	۰/۰۰۹۵۰	۰/۰۰۹۳۳	۰/۰۰۴۹۵	۰/۰۰۴۹۴	۰/۰۱۷۲۳	۰/۰۱۳۳۰
	۴۰	۰/۰۰۵۴۵	۰/۰۰۵۴۵	۰/۰۰۲۸۱	۰/۰۰۲۸۰	۰/۰۰۷۶۴	۰/۰۰۷۶۳
	۲۰	۰/۰۲۳۸۶	۰/۰۲۳۸۶	۰/۰۱۲۷۲	۰/۰۱۲۷۱	۰/۰۳۳۵۹	۰/۰۳۳۰۳
	۳۰	۰/۰۱۰۹۹	۰/۰۱۰۹۹	۰/۰۰۵۸۲	۰/۰۰۵۸۱	۰/۰۱۵۹۸	۰/۰۱۵۵۹
نوع سوم	۴۰	۰/۰۰۶۲۷	۰/۰۰۶۲۷	۰/۰۰۳۳۱	۰/۰۰۳۳۰	۰/۰۰۹۲۵	۰/۰۰۸۹۷
الگوی تخلخل نوع دوم							
نوع اول	۲۰	۰/۰۱۷۸۶	۰/۰۱۷۸۳	۰/۰۰۹۴۸۷	۰/۰۰۹۴۸	۰/۰۲۵۴۶	۰/۰۲۴۹۷
	۳۰	۰/۰۰۸۱۵۹	۰/۰۰۸۱۴	۰/۰۰۴۳۰۹	۰/۰۰۴۳۱	۰/۰۱۱۹۶	۰/۰۱۱۶۳
	۴۰	۰/۰۰۴۶۳۷	۰/۰۰۴۶۳	۰/۰۰۲۴۴۳	۰/۰۰۲۴۴	۰/۰۰۶۶۸۳	۰/۰۰۶۶۶
	۲۰	۰/۰۱۲۹۷	۰/۰۱۲۹۵	۰/۰۰۶۸۶۴	۰/۰۰۶۸۸	۰/۰۱۸۷۸	۰/۰۱۸۳۴
نوع دوم	۳۰	۰/۰۰۵۸۷	۰/۰۰۵۸۶	۰/۰۰۳۰۹۶	۰/۰۰۳۰۹	۰/۰۰۸۶۸۹	۰/۰۰۸۴۲
	۴۰	۰/۰۰۳۳۳	۰/۰۰۳۳۲	۰/۰۰۱۷۵	۰/۰۰۱۷۵	۰/۰۰۴۹۷۱	۰/۰۰۴۹۷
	۲۰	۰/۰۱۴۴۸	۰/۰۱۴۴۶	۰/۰۰۷۶۷۶	۰/۰۰۷۶۷	۰/۰۲۰۸۷	۰/۰۲۰۴۲
	۳۰	۰/۰۰۶۱۷	۰/۰۰۶۵۶	۰/۰۰۳۴۶۹	۰/۰۰۳۴۷	۰/۰۰۹۷۰۲	۰/۰۰۹۴۱
نوع سوم	۴۰	۰/۰۰۳۷۲۸	۰/۰۰۳۷۲	۰/۰۰۱۹۶۳	۰/۰۰۱۹۶	۰/۰۰۵۵۶۱	۰/۰۰۵۳۶
الگوی تخلخل نوع سوم							
نوع اول	۲۰	۰/۰۲۴۵۴	۰/۰۲۴۵۲	۰/۰۱۳۰۹	۰/۰۱۳۰۸	۰/۰۳۴۴۸	۰/۰۳۳۹۱
	۳۰	۰/۰۱۱۳۲	۰/۰۱۱۳۰	۰/۰۰۵۹۹۱	۰/۰۰۵۹۹	۰/۰۱۶۴۴	۰/۰۱۶۰۴
	۴۰	۰/۰۰۶۴۵۷	۰/۰۰۶۴۴	۰/۰۰۳۴۰۶	۰/۰۰۳۴۰	۰/۰۰۹۵۲۱	۰/۰۰۹۲۴
	۲۰	۰/۰۱۷۲	۰/۰۱۷۱۸	۰/۰۰۹۱۳۶	۰/۰۰۹۱۳	۰/۰۲۴۵۸	۰/۰۲۴۱۰
نوع دوم	۳۰	۰/۰۰۷۸۵	۰/۰۰۷۸۳	۰/۰۰۴۱۴۵	۰/۰۰۴۱۴	۰/۰۱۱۵۲	۰/۰۱۱۲۰
	۴۰	۰/۰۰۴۴۵۹	۰/۰۰۴۴۵	۰/۰۰۲۳۴۹	۰/۰۰۲۳۵	۰/۰۰۶۶۲۵	۰/۰۰۶۴۰
	۲۰	۰/۰۱۹۹۲	۰/۰۱۹۹۰	۰/۰۱۰۶	۰/۰۱۰۵۹	۰/۰۲۸۲۷	۰/۰۲۷۷۶
	۳۰	۰/۰۰۹۱۲۷	۰/۰۰۹۱۱	۰/۰۰۴۸۲۳	۰/۰۰۴۸۲	۰/۰۱۳۳۴	۰/۰۱۲۹۹
نوع سوم	۴۰	۰/۰۰۵۱۹۲	۰/۰۰۵۱۸	۰/۰۰۲۷۳۷	۰/۰۰۲۷۳	۰/۰۰۷۶۹۱	۰/۰۰۷۴۴



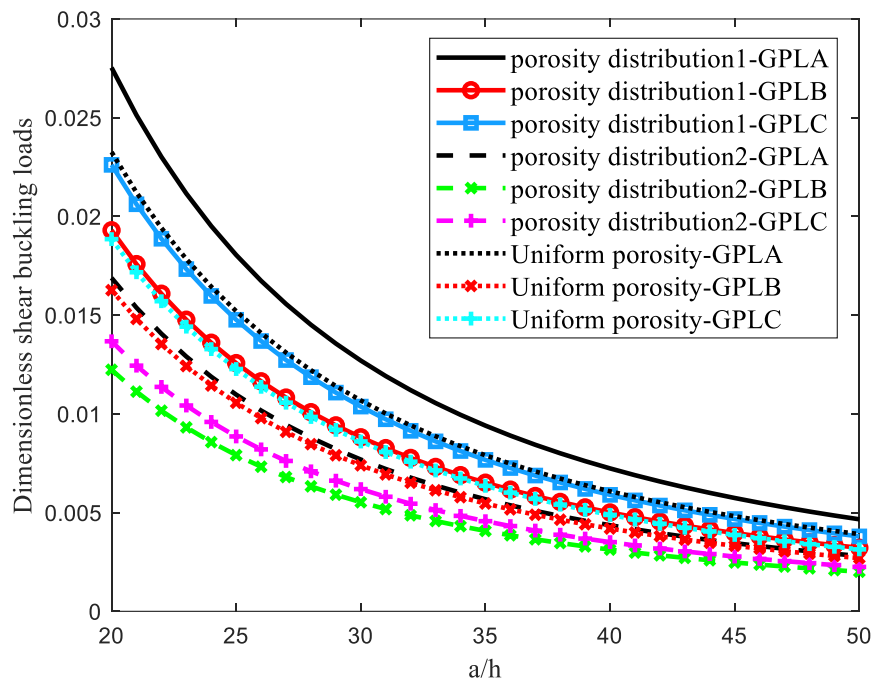
شکل ۵. مقایسه بار کمانش بحرانی در حالت بارگذاری تک محوری بر حسب نسبت طول به ضخامت ورق مستطیلی تحت شرایط مرزی ساده

Fig. 5. Comparing of critical buckling load in uniaxial loads mode in term of length to thickness ratio of rectangular plate under simply support boundary conditions



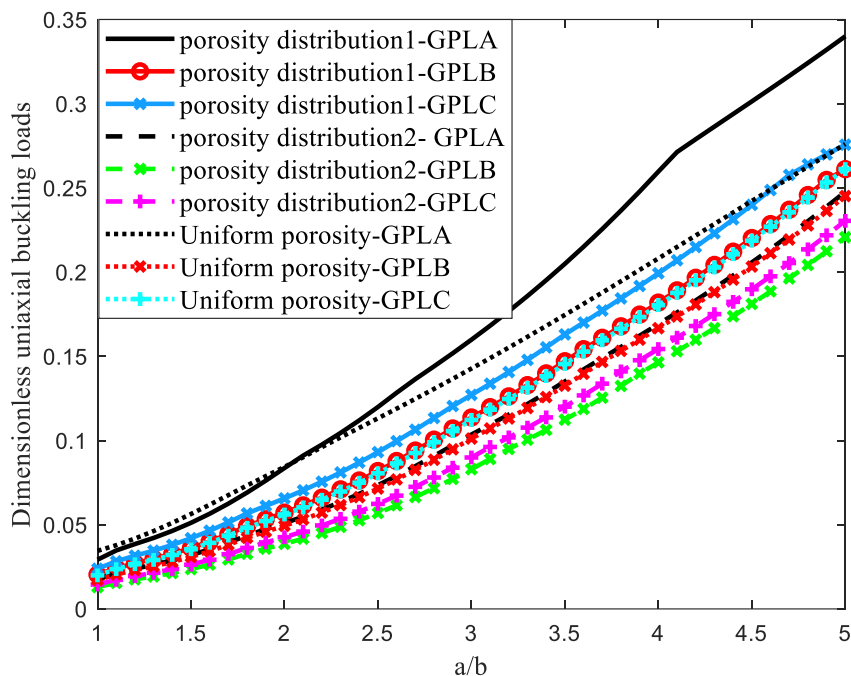
شکل ۶. مقایسه بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری دو محوری بر حسب نسبت طول به ضخامت ورق مستطیلی تحت شرایط مرزی ساده

Fig. 6. Comparing of critical buckling load in biaxial loads mode in term of length to thickness ratio of rectangular plate under simply support boundary conditions



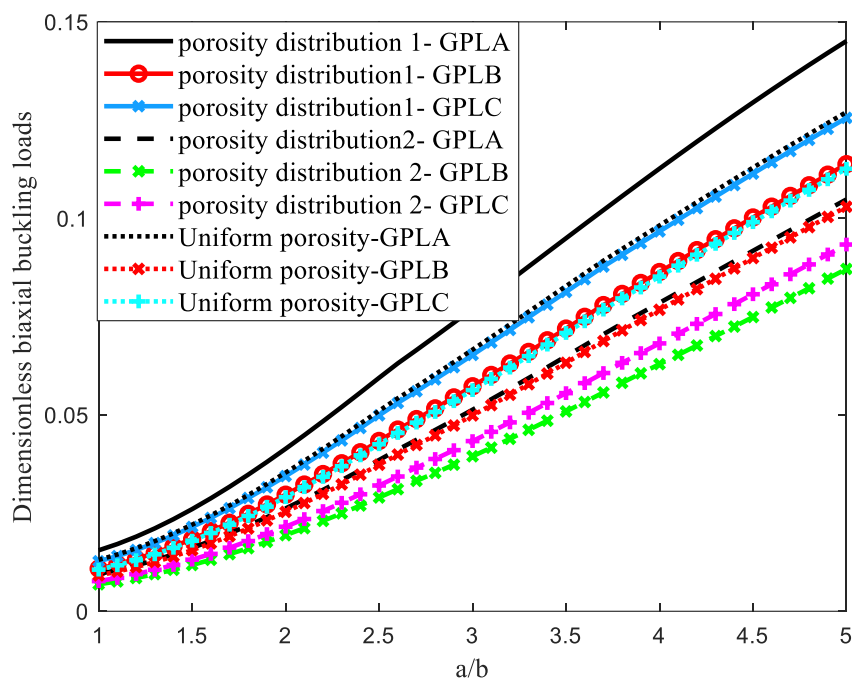
شکل ۷. مقایسه بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری برشی بر حسب نسبت طول به ضخامت ورق مستطیلی تحت شرایط مرزی ساده

Fig. 7. Comparing of critical buckling load in shear loads mode in term of length to thickness ratio of rectangular plate under simply support boundary conditions



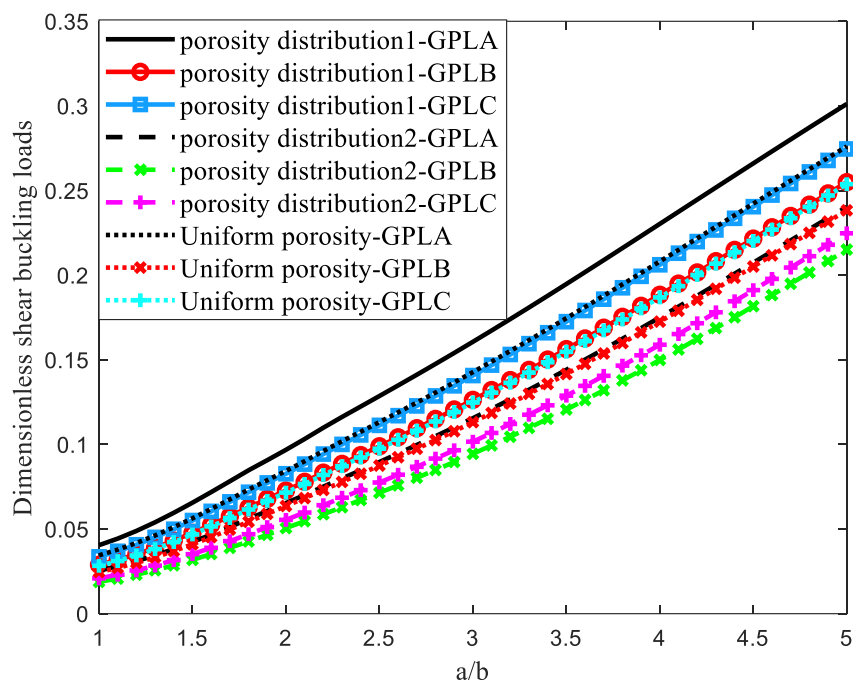
شکل ۸. مقایسه بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری تک محوری بر حسب نسبت طول به عرض ورق مستطیلی تحت شرایط مرزی گیردار

Fig. 8. Comparing of critical buckling load in uniaxial loads mode in term of length to width ratio of rectangular plate under clamped boundary conditions



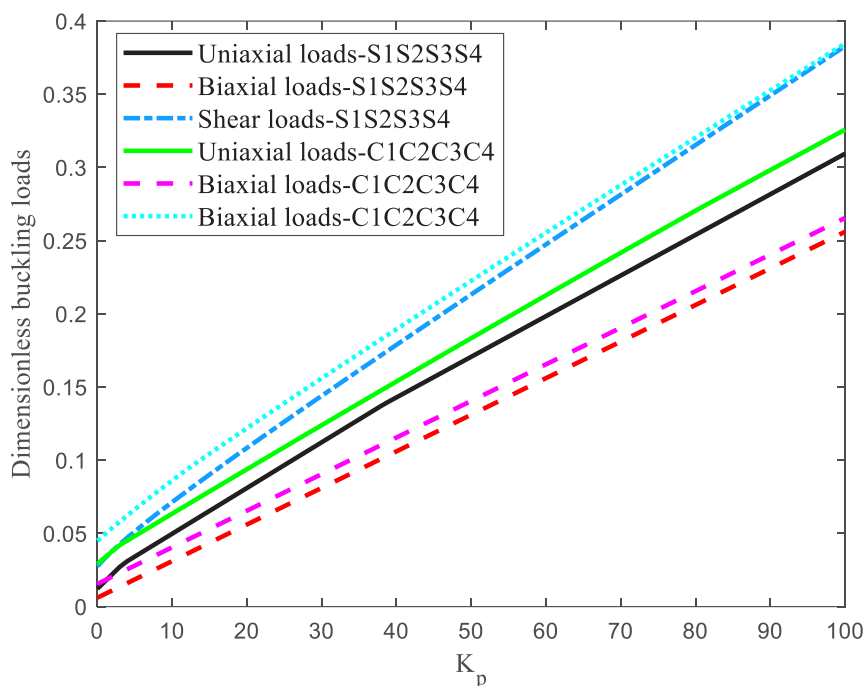
شکل ۹. مقایسه بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری دو محوری بر حسب نسبت طول به عرض ورق مستطیلی تحت شرایط مرزی گیردار

Fig. 9. Comparing of critical buckling load in biaxial loads mode in term of length to width ratio of rectangular plate under clamped boundary conditions



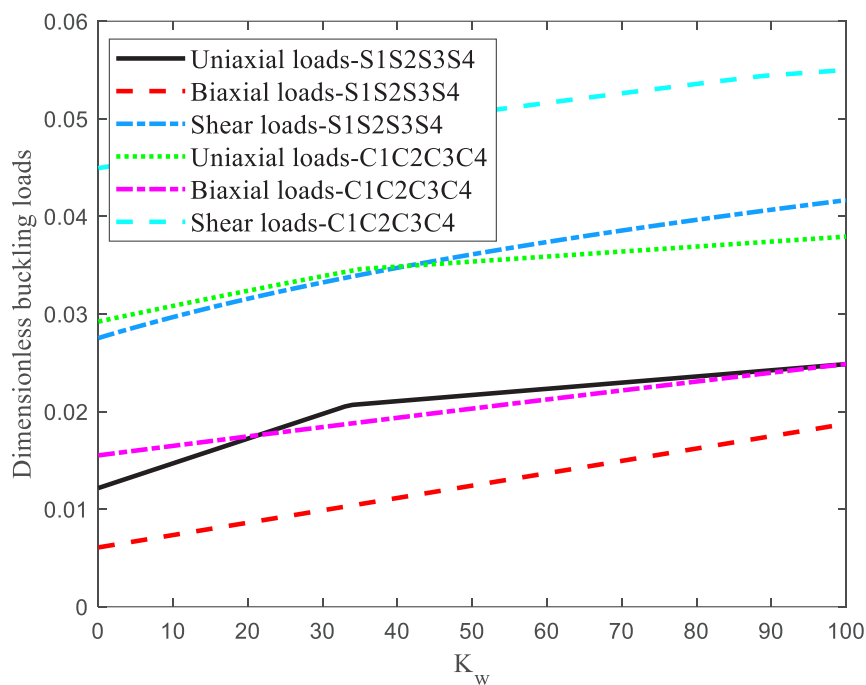
شکل ۱۰. مقایسه بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری برشی بر حسب نسبت طول به عرض ورق مستطیلی در شرایط مرزی گیردار

Fig. 10. Comparing of critical buckling load in shear loads mode in term of length to width ratio of rectangular plate under clamped boundary conditions



شکل ۱۱. مقایسه بار کمانش بحرانی در بارگذاری مختلف برحسب ثابت پاسترناک تکیه گاه الاستیک برای ورق مستطیلی

Fig. 11. Comparing of critical buckling load in different loading in terms of Pasternak constant of elastic foundation for rectangular plate



شکل ۱۲. مقایسه بار بحرانی کمانش در بارگذاری مختلف برحسب ثابت وینکلر تکیه گاه الاستیک برای ورق مستطیلی

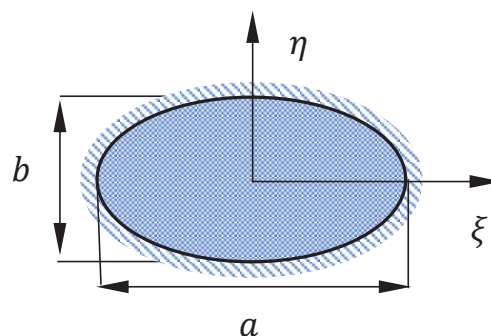
Fig. 12. Comparing of critical buckling load in different loading in terms of Winkler constant of elastic foundation for rectangular plate

و ضریب پخش تخلخل 0.5 را نشان می‌دهند. همان طور که مشخص است با افزایش نسبت اقطار ورق بیضی و یا خروج از مرکز آن، مقادیر بار بحرانی کمانش به دلیل افزایش سفتی در ورق افزایش می‌یابد. همچنین بیشترین بار کمانش برشی به ازای الگوی پخش تخلخل نوع اول و توزیع نانو تراشه گرافنی نوع اول و کمترین بار کمانش برشی به ازای الگوی پخش نانو تراشه گرافنی نوع دوم بدست می‌آید.

۴-۳- ورق مثلثی متساوی الساقین

یک ورق مثلثی متساوی الساقین مطابق شکل ۲۰ تحت شرایط تکیه‌گاهی SIC2C3 در نظر گرفته می‌شود. شکل ۲۱ تغییرات بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری دو محوری و برشی در ترکیب مختلفی از شرایط مرزی به ازای توزیع پخش تخلخل نوع اول و الگوی پخش نانو تراشه گرافنی نوع اول و درصد وزنی 0.1 همچنین نسبت ارتفاع به ضخامت معادل 20 و نسبت ارتفاع به قاعده مثلث برابر با 0.86 را نشان می‌دهد. همان طور که مشخص است، با افزایش نسبت اضلاع ورق مثلثی متساوی الساقین، مقادیر بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. همچنین بیشترین بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری برشی به دلیل کمانش دشوارتر نسبت به حالت دو محوری و در شرایط تکیه‌گاهی تمام گیردار به جهت افزایش سطح تنش در ورق بدست می‌آید. کمترین بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری دو محوری به دلیل کمانش آسان‌تر نسبت به حالت بارگذاری برشی و در شرایط تکیه‌گاهی SIC2F3 بدست می‌آید.

شکل‌های ۲۲ و ۲۳ تغییرات بار بحرانی کمانش به ازای توزیع تخلخل نوع اول و الگوی پخش نانو تراشه گرافنی نوع اول و ابعاد هندسی و درصد وزنی مشابه قبل در ترکیب مختلف شرایط تکیه‌گاهی برحسب ضریب پخش تخلخل گوناگون را نشان می‌دهند. همان طور که ملاحظه می‌شود با افزایش ضریب پخش تخلخل به دلیل کمانش آسان‌تر ورق، مقادیر بار بحرانی کمانش در هر دو حالت بارگذاری برشی و دو محوری کاهش یافته است. در حالت بارگذاری دو محوری، بیشترین بار بحرانی کمانش برای شرایط تکیه‌گاهی SIC2C3 و برای حالت بارگذاری برشی، بیشترین بار بحرانی کمانش در شرایط تکیه‌گاهی CIC2C3 بدست آورده شده است.



شکل ۱۳. ورق بیضوی تحت شرایط مرزی گیردار

Fig. 13. Elliptical plate under clamped boundary conditions

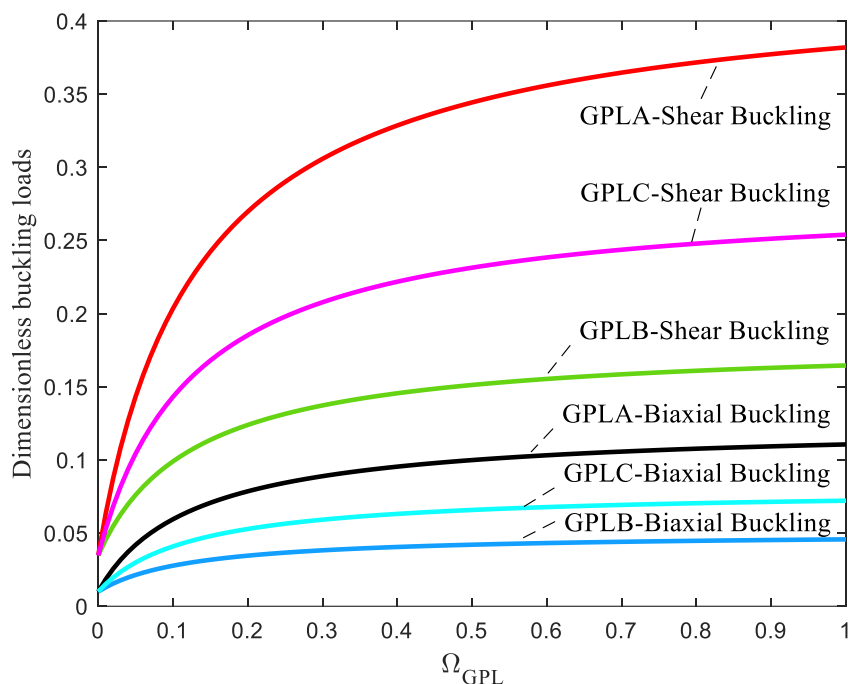
۴-۲- ورق بیضوی

یک ورق بیضوی مطابق شکل ۱۳ را در نظر گرفته می‌شود. شکل‌های ۱۴، ۱۵ و ۱۶ تغییرات بار بحرانی کمانش در دو حالت بارگذاری یکنواخت دوماحوری و برشی بر حسب درصد وزنی توزیع نانو تراشه گرافنی به ترتیب برای توزیع تخلخل نوع اول، دوم و یکنواخت نوع سوم به ازای ضریب پخش تخلخل 0.5 و الگوی توزیع نانو تراشه گرافنی نوع اول در شرایط تکیه‌گاهی گیردار را نشان می‌دهند.

همان طور که از روی شکل‌ها مشخص است، بیشترین بار بحرانی کمانش در حالت بارگذاری برشی به دلیل کمانش دشوارتر، نسبت به حالت بارگذاری دوماحوری محاسبه می‌شود. همچنین در هر سه نوع توزیع تخلخل، بیشترین مقادیر بار بحرانی کمانش به جهت افزایش استحکام و سفتی ورق، در الگوی پخش نانو تراشه گرافنی نوع اول مشاهده می‌شود.

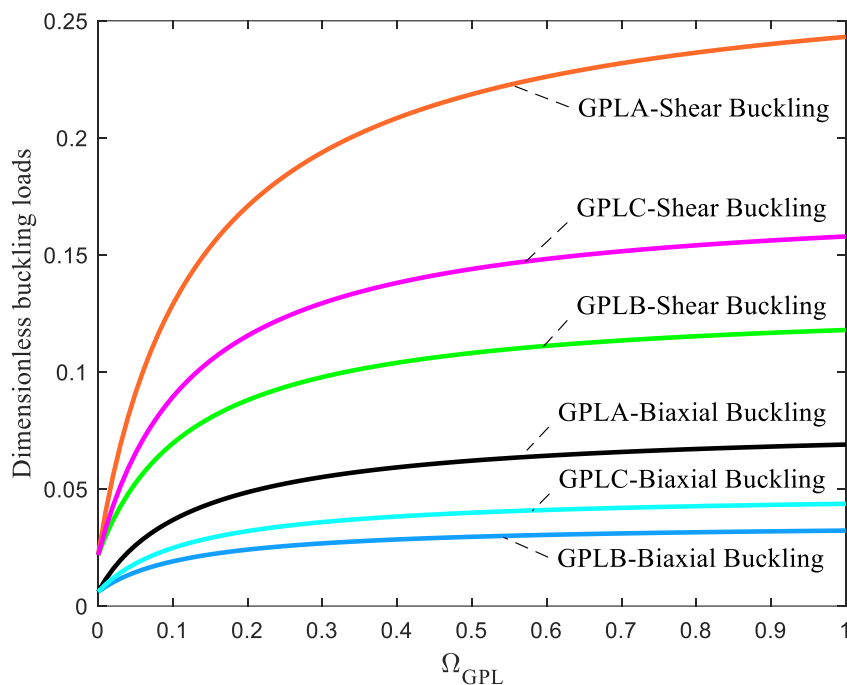
همانطور که ملاحظه می‌شود با افزودن درصد اندکی نانو تراشه گرافنی، در تمام الگوی پخش تخلخل، مقادیر بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد که این ناشی از افزایش قابل توجه سفتی ورق نیز می‌باشد.

شکل‌های ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ تغییرات بار بحرانی کمانش در دو حالت بارگذاری برشی و یکنواخت به ازای پخش تخلخل گوناگون، به ترتیب برای الگوی پخش نانو تراشه گرافنی نوع اول نوع دوم توزیع یکنواخت بر حسب نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک ورق بیضوی در شرایط تکیه‌گاهی گیردار



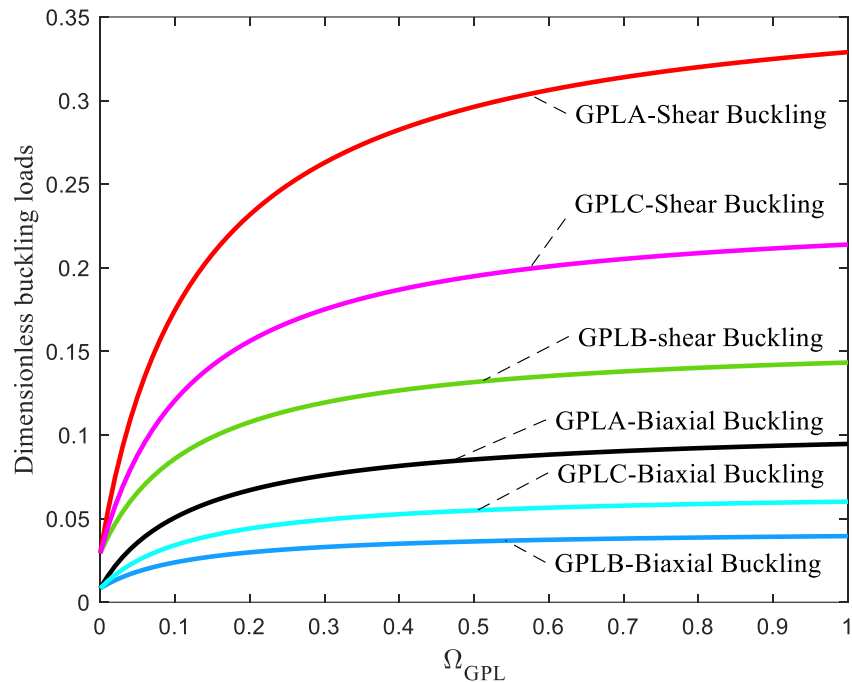
شکل ۱۴. مقایسه بار کمانش بحرانی بر حسب درصد وزنی برای ورق بیضوی تحت شرایط مرزی گیردار به ازای توزیع تخلخل نوع اول

Fig. 14. Comparing of critical buckling load in term of weight fraction of elliptical plate under clamped boundary conditions for porosity distribution of first type



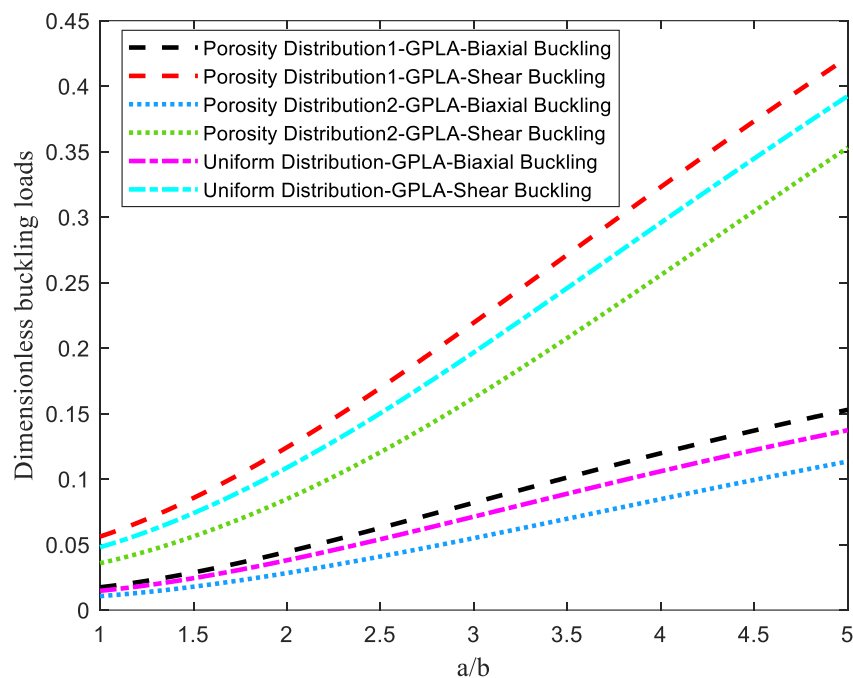
شکل ۱۵. مقایسه بار کمانش بحرانی بر حسب درصد وزنی برای ورق بیضوی تحت شرایط مرزی گیردار به ازای توزیع تخلخل نوع دوم

Fig. 15. Comparing of critical buckling load in term of weight fraction of elliptical plate under clamped boundary conditions for porosity distribution of second type



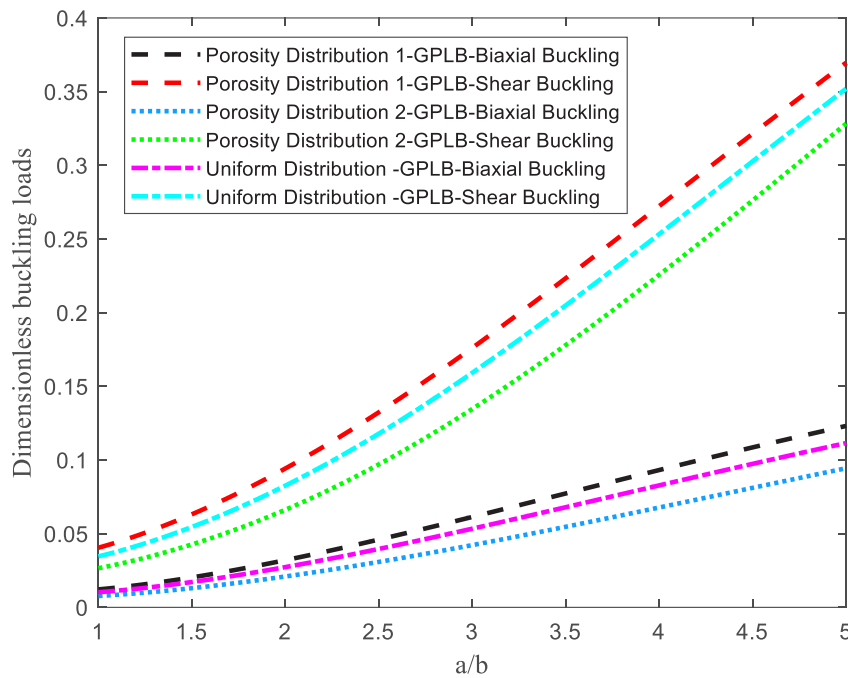
شکل ۱۶. مقایسه بار کمانش بحرانی بر حسب درصد وزنی برای ورق بیضوی تحت شرایط مرزی گیردار به ازای توزیع تخلخل نوع سوم

Fig. 16. Comparing of critical buckling load in term of weight fraction of elliptical plate under clamped boundary conditions for porosity distribution of third type



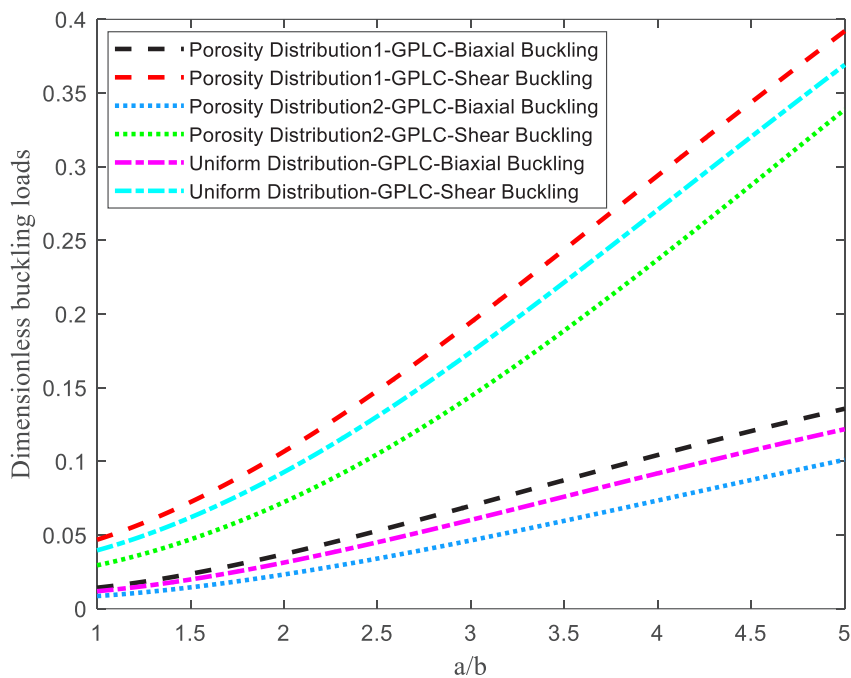
شکل ۱۷. مقایسه بار کمانش بحرانی بر حسب نسبت اقطار ورق بیضوی تحت شرایط مرزی گیردار به ازای توزیع نانو تراشه‌های گرافنی نوع اول

Fig. 17. Comparing of critical buckling load in term of diameters ratio of elliptical plate under clamped boundary condition for first type of graphene nanoplatelets distribution



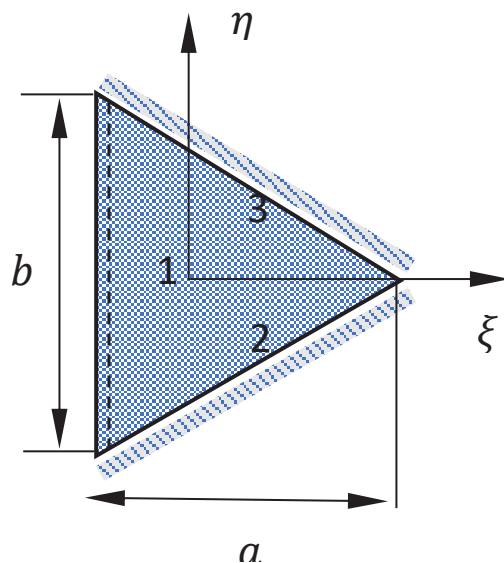
شکل ۱۸. مقایسه بار کمانش بحرانی بر حسب نسبت اقطار ورق بیضوی تحت شرایط مرزی گیردار به ازای توزیع نانو تراشه‌های گرافنی نوع دوم

Fig. 18. Comparing of critical buckling load in term of diameters ratio of elliptical plate under clamped boundary condition for second type of graphene nanoplatelets distribution



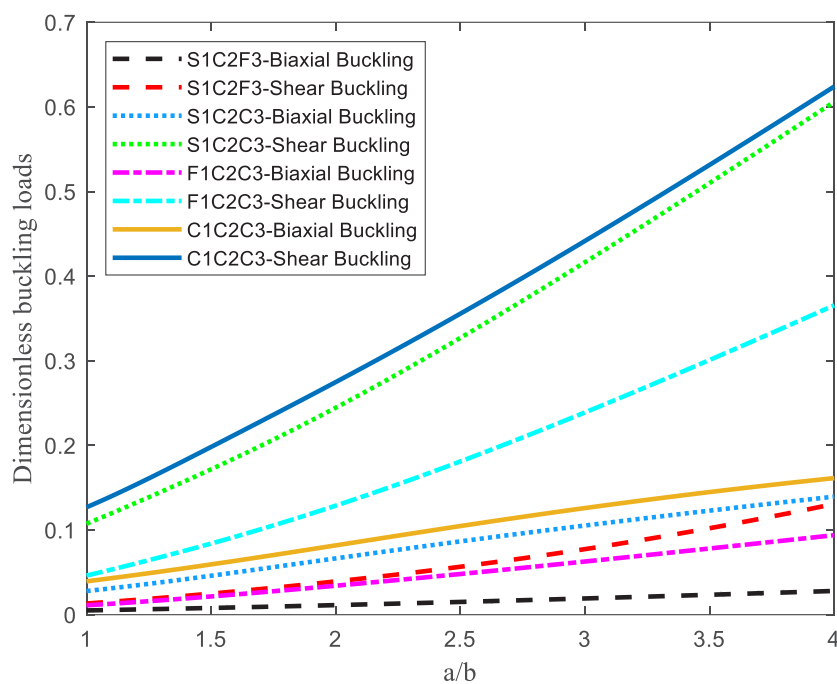
شکل ۱۹. مقایسه بار کمانش بحرانی بر حسب نسبت اقطار ورق بیضوی تحت شرایط مرزی گیردار به ازای توزیع نانو تراشه‌های گرافنی نوع سوم

Fig.19. Comparing of critical buckling load in term of diameters ratio of elliptical plate under clamped boundary condition for third type of graphene nanoplatelets distribution



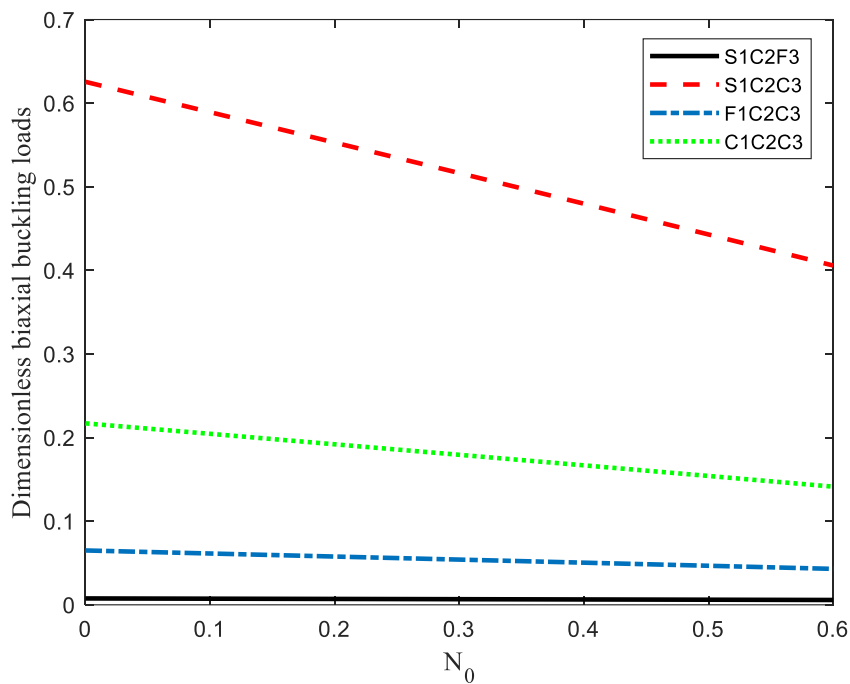
شکل ۲۰: ورق مثلثی در شرایط مرزی SIC2C3

Fig. 20. Isosceles triangular plate under SIC2C3 boundary conditions



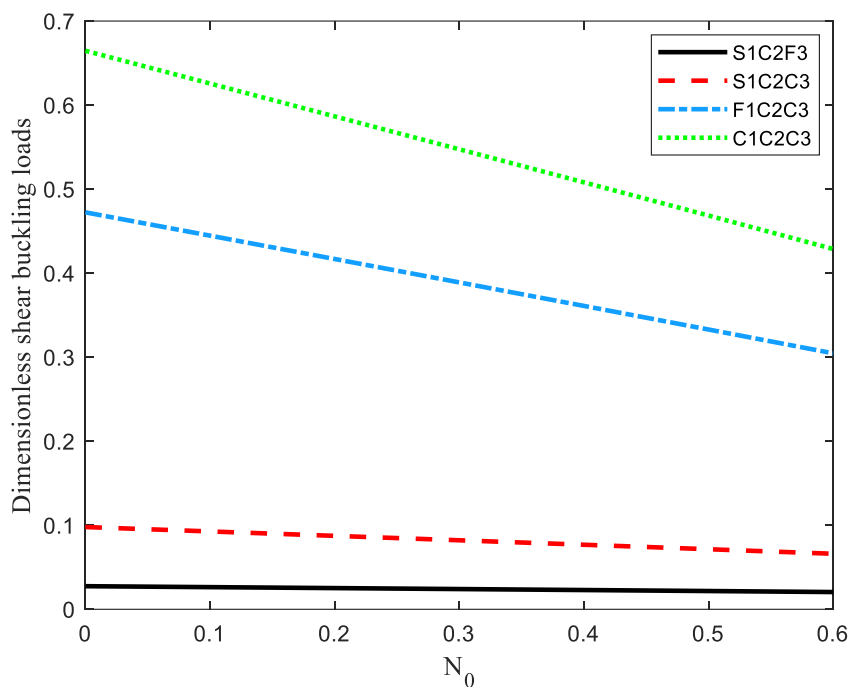
شکل ۲۱. مقایسه بار بحرانی کماتش بر حسب نسبت اضلاع ورق مثلثی متساوی الساقین تحت شرایط مرزی مختلف

Fig. 21. Comparing of critical buckling load in term of the ratio of the side of isosceles triangular plate under different boundary condition



شکل ۲۲. مقایسه بار کماتش بحرانی در حالت بارگذاری دو محوری یکنواخت بر حسب ضریب پخش تخلخل برای ورق مثلی متساوی الساقین تحت شرایط مرزی مختلف

Fig. 22. Comparing of critical buckling load in biaxial loads mode in term of porosity distribution coefficient of isosceles triangular plate under different boundary conditions



شکل ۲۳. مقایسه بار کماتش بحرانی در حالت بارگذاری برشی بر حسب ضریب پخش تخلخل برای ورق مثلی متساوی الساقین تحت شرایط مرزی مختلف

Fig. 23. Comparing of critical buckling load in shear loads mode in term of porosity distribution coefficient of isosceles triangular plate under different boundary conditions

۵- نتیجه گیری

در ترکیب مختلفی از شرایط تکیه‌گاهی و حالت‌های بارگذاری نیز کاهش می‌یابد. به گونه‌ای که برای بارگذاری دو محوری، بیشترین کاهش بار بحرانی کمانش در شرایط مرزی SIC2C3 به میزان ۳۵/۱٪ و کمترین کاهش در شرایط مرزی SIC2F3 به میزان ۲۴/۲٪ همچنین در بارگذاری برشی بیشترین کاهش بار بحرانی کمانش، در شرایط مرزی SIC2C3 به میزان ۳۵/۵٪ و کمترین کاهش در شرایط مرزی SIC2F3 به میزان ۲۵/۳٪ محاسبه شده است.

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی

A_{11}	پارامتر بی‌بعد کننده اجزای ماتریس سختی کششی، N/m
A_{ij}	اجزای ماتریس سختی کششی، Pa-m
a	پارامتر طولی ورق، m
b	پارامتر عرضی ورق، m
D_{ij}	اجزای ماتریس سختی خمشی، Pa-m ^۳
E_m	مدول یانگ ماتریس فلزی، Pa
E_{GPL}	مدول یانگ نانو تراشه گرافنی، Pa
G	مدول برشی، Pa
h	ضخامت ورق، mm
$\bar{k}_w$	ثابت بی‌بعد فنریت وینکلر بستر الاستیک
$\bar{k}_p$	ثابت بی‌بعد برشی پاسترناک بستر الاستیک
l_{GPL}	پارامتر طول نانو تراشه گرافنی، mm
N	ضریب بی‌بعد پخش تخلخل در ورق به ازای الگوی‌های مختلف
N_m	ضریب بی‌بعد چگالی جرمی
n	تعداد لایه‌های ورق نانوکامپوزیتی
p	درجه چند جمله پاسخ‌های در روش پی‌ریتز
p_x	بار کمانشی بی‌بعد شده در جهت محور x
p_y	بار کمانشی بی‌بعد شده در جهت محور y
p_{xy}	بار کمانشی بی‌بعد شده در صفحه xy
V_{GPL}	پارامتر بی‌بعد کسر حجمی نانو تراشه گرافنی
w_{GPL}	پارامتر پهنای نانو تراشه گرافنی، mm

در این پژوهش، کمانش ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل مدرج تابعی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی با اشکال هندسی مستطیلی، بیضوی و مثلثی واقع بر یک بستر الاستیک مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا، پس از بدست آوردن خواص مؤثر مادی با استفاده از یک روش میکرومکانیکی، فانکشنال انرژی سیستم در نظر گرفته شده براساس تئوری مرتبه اول برشی ورق نوشته شد. سپس، مسئله کمانش ورق با استفاده از روش پی‌ریتز حل گردید. با ارائه نتایج عددی، اثرات عوامل مختلف نظیر درصد وزنی، ضریب پخش و نحوه توزیع تخلخل و همچنین پارامترهای هندسی ورق و شرایط مرزی بر بار بحرانی کمانش ورق نانوکامپوزیتی با اشکال هندسی مختلف بررسی شد. نتایج حاصل از این پژوهش را می‌توان به صورت زیر جمع بندی کرد:

۱- با افزایش نسبت طول به ضخامت در ورق مستطیلی، مقادیر بار بحرانی کمانش در تمامی شرایط مرزی کاهش می‌یابد. همچنین، بیشترین بار بحرانی کمانش در الگوی پخش تخلخل نوع اول و الگوی پخش نانو تراشه گرافنی نوع اول به دلیل توزیع نانو تراشه‌های گرافنی بر روی سطوح بالا و پایین ورق و پخش تخلخل با اندازه‌های بزرگتر در میانه ورق بدست می‌آید.

۲- با در نظر گرفتن بستر الاستیک، تأثیر ثابت فنریت پاسترناک در مقایسه با ثابت فنریت وینکلر در افزایش مقاومت در برابر بارهای کمانشی، کارآرایی بهتر دارد.

۳- با افزایش خروج از مرکز ورق بیضوی، مقادیر بار بحرانی کمانش در تمام حالات بارگذاری و الگوهای توزیع نیز افزایش می‌یابد. به گونه‌ای که بیشترین بار بحرانی کمانش مربوط به بارگذاری برشی برای توزیع تخلخل نوع اول و کمترین بار بحرانی کمانش برای بارگذاری دو محوری به ازای توزیع تخلخل نوع دوم نیز نمایش داده شده است.

۴- با افزایش نسبت ارتفاع به قاعده ورق مثلثی متساوی الساقین، بار بحرانی کمانش افزایش یافته است. به گونه‌ای که بیشترین مقادیر بار بحرانی کمانش در شرایط مرزی گیردار و در بارگذاری برشی به میزان ۳/۹ واحد افزایش و کمترین مقادیر آن در شرایط مرزی SIC2F3 نیز به میزان ۱/۵ واحد افزایش بدست آمده است.

۵- در یک ورق مثلثی متساوی الساقین، مقادیر بار بحرانی کمانش با افزایش ضریب پخش تخلخل به جهت کاهش استحکام و سختی ورق

علائم یونانی

کرنش

ε_{ij}

پارامتر بی بعد نسبت طول به عرض

η_1

پارامتر بی بعد نسبت طول به ضخامت ورق

η_r

پارامتر بی بعد نسبت عرض به ضخامت ورق

η_r

ضریب اصلاح نش برشی در تئوری مرتبه اول

k_s

ضریب پواسون ماتریس فلزی

ν_m

ضریب پواسون نانو تراشه گرافنی

ν_{GPL}

چگالی ماتریس فلزی، kg/m^3

ρ_m

چگالی نانو تراشه گرافنی، kg/m^3

ρ_{GPL}

تنش، Pa

σ_{ij}

پارامتر بی بعد درصد وزنی نانو تراشه گرافنی

Ω_{GPL}

زیرنویس

ثابت فنریت پاسترناک بستر الاستیک

P

منابع

- Three-dimensional static and free vibrational analysis of graphene reinforced composite circular/annular plate using differential quadrature method, International Journal of Applied Mechanics, 11(08) (2019) 1950073.
- [7] R. Gholami, R. Ansari, Nonlinear stability and vibration of pre/post-buckled multilayer FG-GPLRPC rectangular plates, Applied Mathematical Modelling, 65 (2019) 627-660.
- [8] S. Blooriyan, R. Ansari, A. Darvizeh, R. Gholami, H. Rouhi, Postbuckling analysis of functionally graded graphene platelet-reinforced polymer composite cylindrical shells using an analytical solution approach, Applied Mathematics and Mechanics, 40(7) (2019) 1001-1016.
- [9] M. Song, J. Yang, S. Kitipornchai, Bending and buckling analyses of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets, Composites Part B: Engineering, 134 (2018) 106-113.
- [10] J. Yang, D. Chen, S. Kitipornchai, Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method, Composite Structures, 193 (2018) 281-294.
- [11] K. Gao, W. Gao, D. Chen, J. Yang, Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation, Composite Structures, 204 (2018) 831-846.
- [12] C.T. Herakovich, Mechanics of composites: a historical review, Mechanics Research Communications, 41 (2012) 1-20.
- [13] R. Szilard, Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods, Appl. Mech. Rev., 57(6) (2004) B32-B33.
- [14] A. Ugural, Stresses in plates and shells, McGraw-Hill, 1999.
- [15] J.N. Reddy, Energy principles and variational methods in applied mechanics, John Wiley & Sons, 2017.
- [16] C. Wang, T.M. Aung, Plastic buckling analysis of thick plates using p-Ritz method, International Journal of Solids and Structures, 44(18-19) (2007) 6239-6255.
- [1] P. Avouris, C. Dimitrakopoulos, Graphene: synthesis and applications, Materials today, 15(3) (2012) 86-97.
- [2] S. Park, R.S. Ruoff, Chemical methods for the production of graphenes, Nature nanotechnology, 4(4) (2009) 217-224.
- [3] A. Tampieri, G. Celotti, S. Sprio, A. Delcogliano, S. Franzese, Porosity-graded hydroxyapatite ceramics to replace natural bone, Biomaterials, 22(11) (2001) 1365-1370.
- [4] W. Pompe, H. Worch, M. Epple, W. Friess, M. Gelinsky, P. Greil, U. Hempel, D. Scharnweber, K. Schulte, Functionally graded materials for biomedical applications, Materials Science and Engineering: A, 362(1-2) (2003) 40-60.
- [5] R. Ansari, R. Hassani, R. Gholami, H. Rouhi, Buckling and Postbuckling of Plates Made of FG-GPL-Reinforced Porous Nanocomposite with Various Shapes and Boundary Conditions, International Journal of Structural Stability and Dynamics, 21(05) (2021) 2150063.
- [6] H. Bisheh, A. Alibeigloo, M. Safarpour, A. Rahimi,

- Methods in Engineering, 44(11) (1999) 1685-1707.
- [19] B.N. Parlett, The symmetric eigenvalue problem, SIAM, 1998.
- [20] D. Evans, J. Shanehchi, Implementation of an improved bisection algorithm in buckling problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19(7) (1983) 1047-1052.
- [17] Y. Hou, G. Wei, Y. Xiang, DSC-Ritz method for the free vibration analysis of Mindlin plates, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 62(2) (2005) 262-288.
- [18] S.T. Smith, M.A. Bradford, D.J. Oehlers, Numerical convergence of simple and orthogonal polynomials for the unilateral plate buckling problem using the Rayleigh–Ritz method, International Journal for Numerical

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Ziyafat Doust Abed, H. Rouhi , Buckling Analysis of Embedded Functionally Graded Graphene Platelet-Reinforced Porous Nanocomposite Plates with Various Shapes Using the P-Ritz Method, Amirkabir J. Mech Eng., 54(4) (2022) 859-884.

DOI: 10.22060/mej.2022.20387.7223



